# Notas 03 · Cálculo I

De acordo com os racionais, agora podemos fazer uso de frações.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \forall \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} : q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \{ 0, \dots, 1, -1, \dots, 2, -2, \dots \}$$

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) \frac{p}{q} \quad \therefore \begin{Bmatrix} \alpha \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq 0 \end{Bmatrix}$$

→ podemos manipular as frações mantendo sua proporção, ex:

$$\left\{ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{2}\right) \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{3}\right) \frac{1}{2} \right\}$$

Para facilitar as contas então usamos

$\gcd(p, q) = 1$, ex:

$$\left( \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{3}, \frac{11}{2}, \text{etc} \right)$$

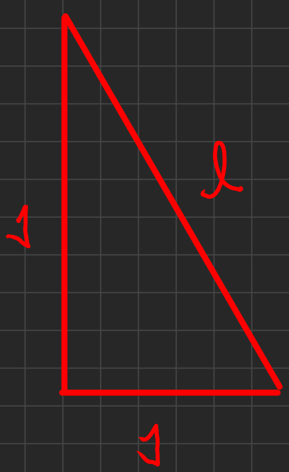
→ $\gcd(p, q)$ = máximo que dá pra simplificar uma fração.

Logo, admitir $\gcd(p, q) = 1$ é o mesmo que dizer que deve atingir sua simplificação máxima.

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$?

$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$?

$l \in \mathbb{Q}$?




$l = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \forall \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \gcd(p,q) = 1 \right\}$

$\hookrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \left[ 2q^2 = p^2 \right]$

$(p^2 = 2q^2)$ admite que "$p^2$" é par, "p" também.

Logo: $p = 2k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (além de par, é positivo por "$q^2$")

$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$

$(q^2 = 2k^2)$ admite "$q^2$" par, "q" também

Se p, q são pares, isso é, múltiplos de 2, contradiz o próprio enunciado.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \forall \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \underline{\gcd(p,q) = 1} \right\}$$

logo: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- $\sqrt{n} = \ell^2$
- Espiral Aritmético

Para dizer se uma expressão pertence aos $\mathbb{Q}$, é necessário truques algébricos, ex:

"$\sqrt{5}+\sqrt{7}$" $\in \mathbb{Q}$?

$$\sqrt{5}+\sqrt{7} = x$$ (se x for racional, "$\sqrt{5}+\sqrt{7}$" racional).

$$\sqrt{7} = x - \sqrt{5}$$

$$7 = (x-\sqrt{5})^2$$

$$7 = x^2 - 2x\sqrt{5} + 25$$

$$[7 + 2x\sqrt{5} = x^2 + 25] \to \underbrace{x^2}_{\mathbb{Q}} + \underbrace{25}_{\mathbb{Q}} = \underbrace{7}_{\mathbb{Q}} + \underbrace{2x\sqrt{5}}_{\cancel{\mathbb{Q}}}$$

Tendo em vista que provamos $\sqrt{5}$ irracional, portanto "x" só pode ser descrito por irracionais (se assim for, $x^2 \notin \mathbb{Q}$ e $x \notin \mathbb{Q}$, portanto:

"$\sqrt{5}+\sqrt{7}$" resulta em um número irracional.

• Em cálculo I, veremos o conjunto real "$\mathbb{R}$" para realizar equações, tal que reais seja a soma do conjunto racional com irracional.

$$\mathbb{R} = \{0, \ldots, 1, \ldots, \sqrt{2}, \ldots, \frac{2}{1}, \ldots, -6, \ldots\}$$