Notas 07 - Cálculo 1

Funções Trigonométricas: seno e co-seno

Ficará muito trabalhoso prosseguir, daqui em diante, sem definir parcialmente esses tipos de funções. O teorema que se enuncia a seguir, cuja demonstração só poderá ser feita adequadamente após o estudo de séries de potências, será apresentado de forma limitada e, portanto, voltado para uma perspectiva mais rígida.

Existe um único par de funções definidas nos reais, indicadas por sen e cos, satisfazendo as propriedades:

(1) $\sin 0 = 0$

(2) $\cos 0 = 1$

(3) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \mid \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

(4) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \mid \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

(5) $\exists\, r > 0 \to 0 < \sin x < x < \tan x$, para $0 < x < r$

* $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Com isso, de acordo com a propriedade (4):

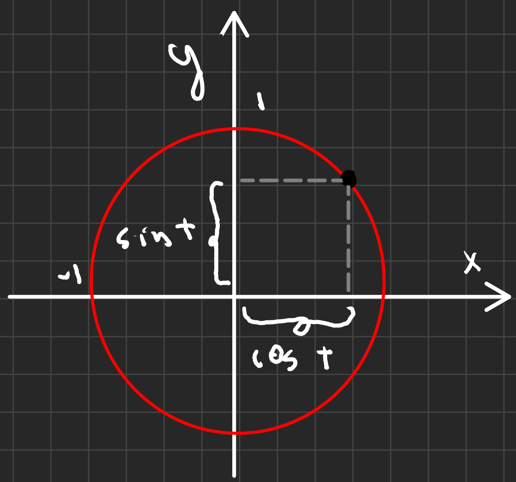
Se $a = b = t$, temos: $(4) - \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos(0) = \cos t \cos t + \sin t \sin t \Rightarrow$ $(2) - \cos 0 = 1$

$1 = \cos^2 t + \sin^2 t \Rightarrow \boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$

$(6)\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Deste modo, para todo t, o ponto (cos(t),sin(t)) pertence à $x^2 + y^2 = 1$



Demonstrado que uma circunferência de raio 1 tem a a fórmula "$x^2 + y^2 = 1$" na aula anterior.

(7) $\exists\ a > 0 \mid \cos a = 0 \mid \sin a = 1$.

$\pi = 2a \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0,\ \sin \frac{\pi}{2} = 1.$

Esta é a definição de pi.

Sin é uma função ímpar ou par? E Cos?

De acordo com a propriedade (3):

$a = 0,\ b = t \Rightarrow \sin(-t) = \sin 0 \cos t - \sin t \cos 0 \Rightarrow$

$\boxed{\sin(-t) = -\sin t}$ $\Rightarrow$ Ímpar.

De acordo com a propriedade (4):

$a = 0,\ b = t \Rightarrow \cos(-t) = \cos 0 \cdot \cos t + \sin 0 \sin t \Rightarrow$

$\boxed{\cos(-t) = \cos t}$ $\Rightarrow$ Par.

a) $\cos(a+b) = ?$

b) $\sin(a+b) = ?$

a) $\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$ ← Reescrevendo em termos de (4)

$\cos(a-(-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \Rightarrow$

$$\begin{cases} * \ \sin(-b) = -\sin b \ [\text{Ímpar}] \\ * \ \cos(-b) = \cos b \ [\text{Par}] \end{cases}$$

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

b) $\sin(a+b) = \sin(a-(-b))$ ← Reescrevendo em termos de (3)

$\sin(a-(-b)) = \sin a \cos(-b) - \sin(-b) \cos a$

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.}$$

Também admitindo Cos par "cos (-b) = cos b",
Sin ímpar "sin(-b) = -sin(b)"

a) $\cos 2x = ?$

b) $\sin 2x = ?$

a) $\cos 2x = \cos(\overset{a}{x} + \overset{b}{x})$

Cos(a+b) = Cos(x+x), a = b = x.

$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$$

b) $\sin(2x) = \sin(\overset{a}{x} + \overset{b}{x})$

Sin(a+b) = Sin(x+x), a = b = x.

$\sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x$

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x.}$$

a) $\cos^2 x = ?$

b) $\sin^2 x = ?$

a) $= \left[\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\right], \left[\sin^2 x = 1 - \cos^2 x\right]$

$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \Rightarrow$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$

$\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.}$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x - \cos 2x \Rightarrow$

$\sin^2 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \cos 2x \Rightarrow$ $\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$

a) $\cos \frac{\pi}{4}$.

b) $\sin \frac{\pi}{4}$.

c) $\cos \pi$.

d) $\sin \pi$.

a) $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}$ * $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

b) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

se $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \pi = \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\sin^2 \frac{\pi}{2}}_{1}$.

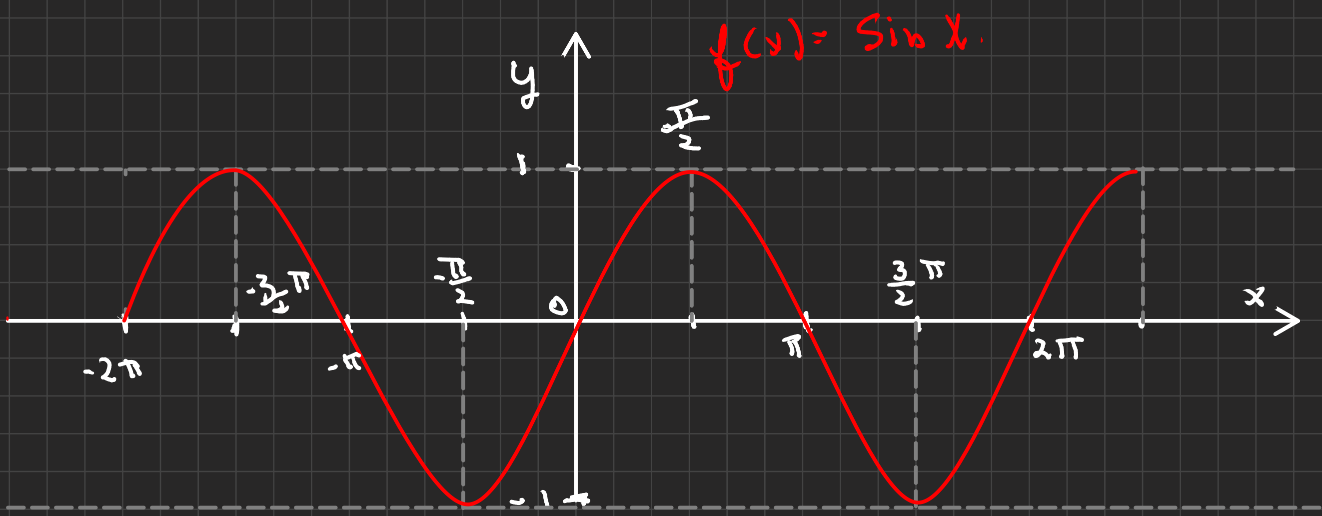
$$\boxed{\cos \pi = -1.}$$

d) $[\sin 2x = 2 \sin x \cos x]$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} \Rightarrow$

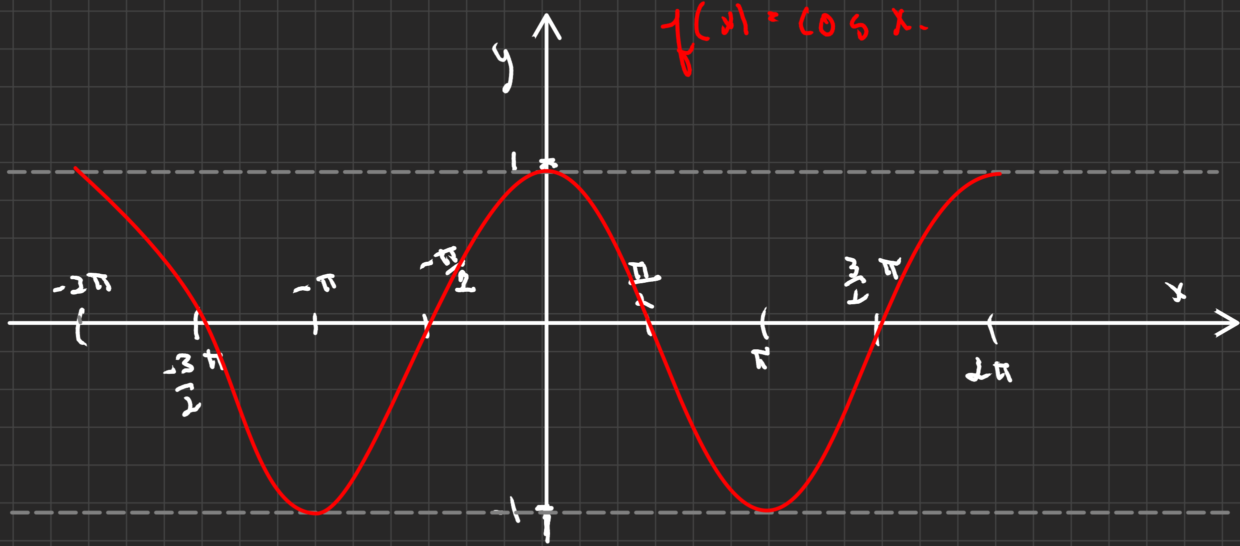
$$\boxed{\sin \pi = 0}$$

Com as informações adquiridas até aqui, é muito mais confortável construir os gráficos de sen e cos, respeitando os teoremas.



Observe que em Sin x = 0 e Sin x = 1, esses valores aparecem periodicamente. Inclusive, por ser uma função impar, ela não "espelha".

$[\sin(x + 2\pi) = \sin x.]$ → Detém o mesmo valor a cada dois pi de distância



Comportamento parecido com F(x) = sin x, entretanto, por ser uma função par, é espelhada no eixo y

$[\cos(x + 2\pi) = \cos x]$ Mesma coisa.

Observe também que o domínio vale para todos os reais positivos e negativos; entretanto, a imagem de ambas é limitada ao intervalo [-1,1]. Naturalmente, isso só vale para $f(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \sin(x)$.

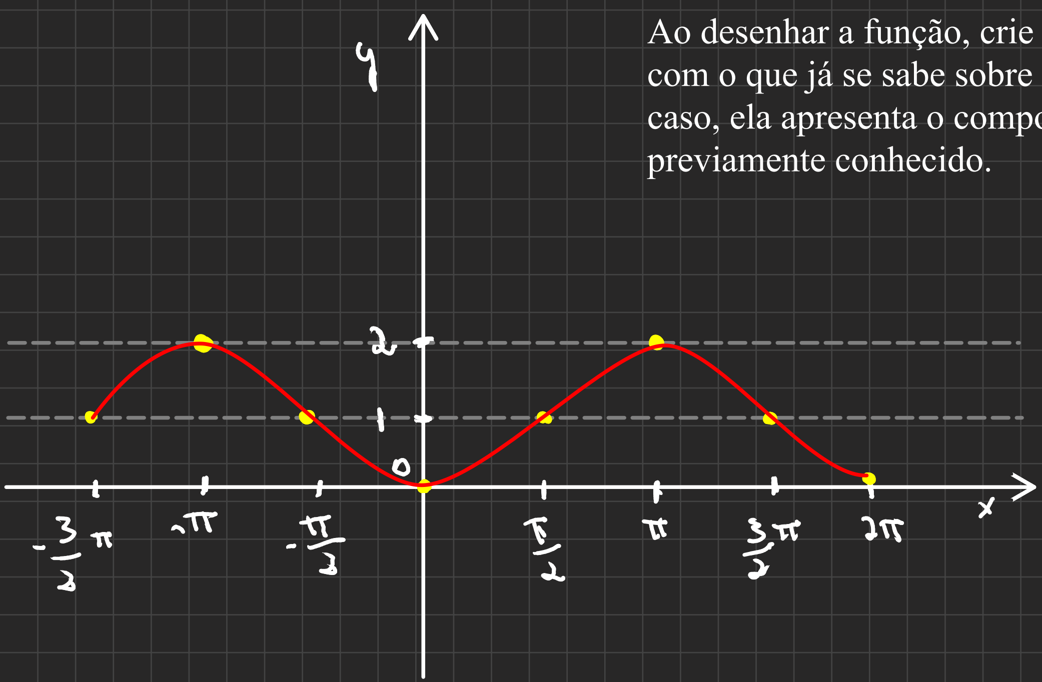
Conhecendo os limites da imagem e o comportamento em 0 ou quando diverge, torna-se mais simples desenhar não apenas as funções trigonométricas, mas também grande parte das demais funções.

Ex=

a) $f(x) = 1 - \cos x$

* Cosx é par
* Máximo valor de $\cos x = 1$
* mínimo valor de $\cos x = -1$

Sabendo disso, concorda que f(x) nesse caso só poderá assumir valores máximos em 2? No caso de cos(x) = -1. E mínimo em 0, em cos(x) = 1. Além disso, quando em cos(x) zerado, a função trava em 1. Observe.



Ao desenhar a função, crie pontos e ligue-os de acordo com o que já se sabe sobre seu comportamento. Nesse caso, ela apresenta o comportamento previsível de cos (x), previamente conhecido.

$\cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi, -\pi.$

$\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$

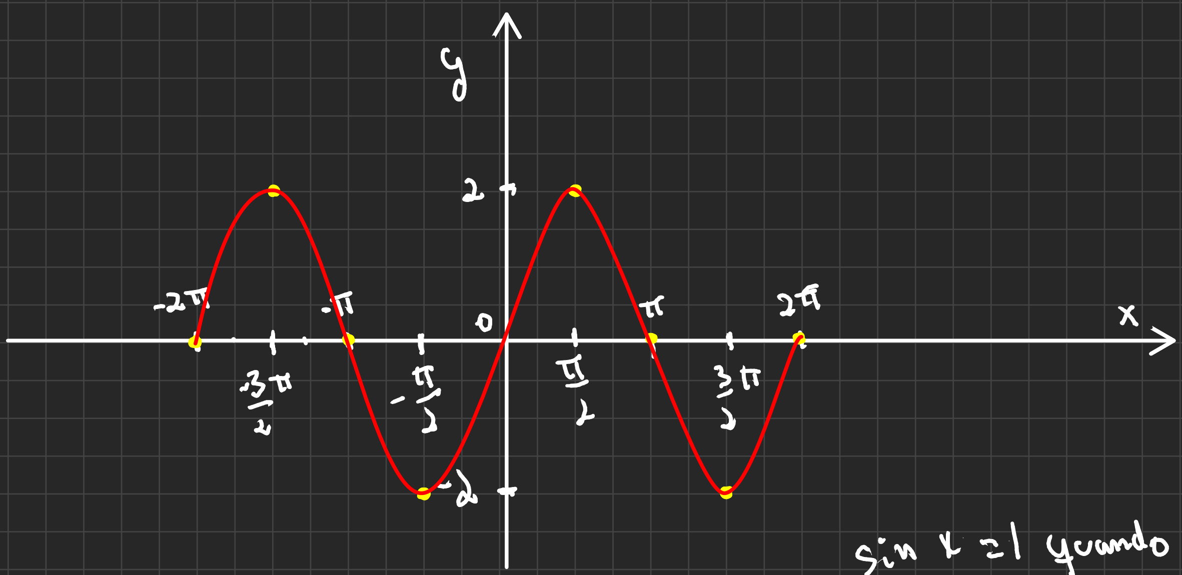
Observe que essa $f(x)$ será sempre maior ou igual a 0, nesse caso. Além disso, ao comparar com $f(x) = \cos(x)$, percebe-se que esta se encontra deslocada verticalmente, de forma semelhante ao que ocorre quando se tem um termo constante significativo em $f(x) = ax + b$: a função é transladada.

$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = 1 - \cos(x) \Leftrightarrow f(x) = \underbrace{-}_{a}\underbrace{\cos(x)}_{x} + \underbrace{1}_{b}$

$a = -1$; $x = \cos(x)$; $b = 1$;

$f(x) = 2 \sin x$

* Função ímpar
* Máx = 2 (quando $\sin(x) = 1$)
* Mín = −2 (quando $\sin(x) = -1$)
* $f(x) = 0$ ($\sin(x) = 0$)



$\sin x = 1$ quando $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1$ quando $x = \frac{3}{2}\pi$

$\sin x = 0$ quando $x = \pi$

Quando se tem um *a* relevante, a função trigonométrica sofre uma "esticada", aumentando ou diminuindo o valor máximo da função, isto é, alterando a amplitude.

$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = \underset{a}{2} \underset{x}{\sin(x)}$.

$a = 2$; $x = \sin(x)$; $b = 0$;

$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

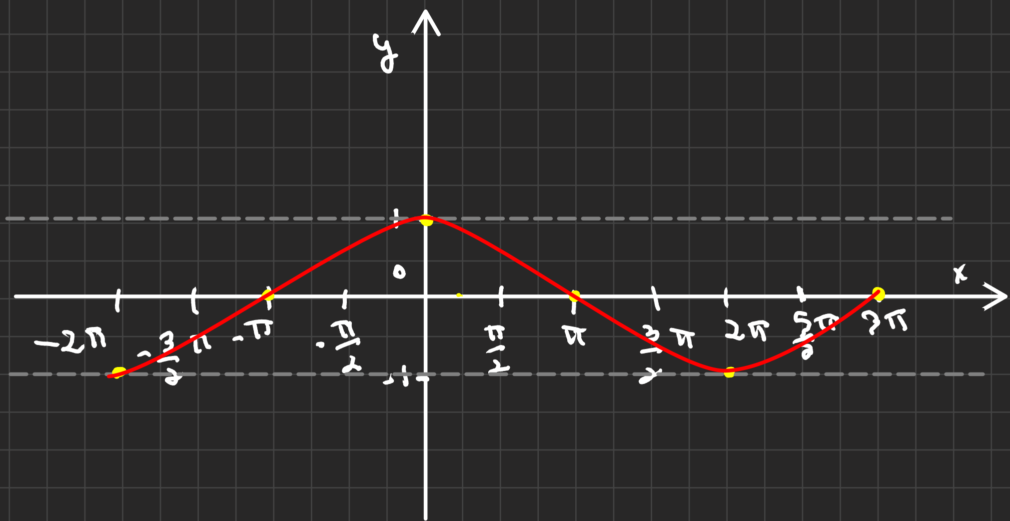
* Função Par.

* Atinge Máximo e Mínimo? Sim.

· Máx = 1 ⇒ $x = 0$.

· Min = −1 ⇒ $x = 2\pi$

* $f(x) = 0$ ⇒ $x = \pi$



Ao alterar diretamente o argumento do seno ou do cosseno, influencia-se diretamente a largura do gráfico, isto é, a periodicidade. Perceba que, nesse caso, ele demora duas vezes mais para completar um ciclo.

$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x) + 1$

* Função impar.
* Periodo mais curto "3x".
* Amplitude menor "$\frac{1}{2}$".
* translatada para cima "1".

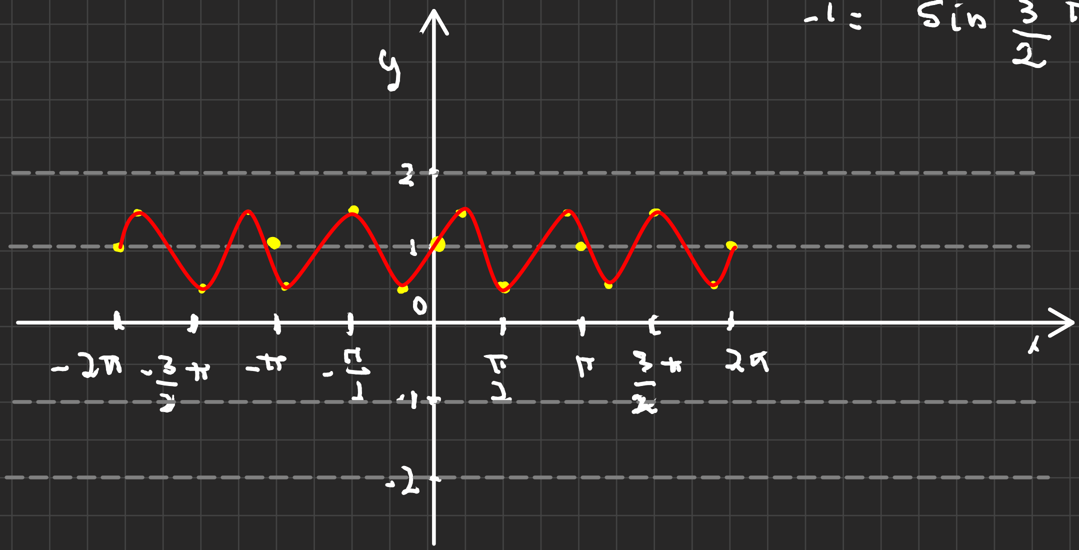
* $Max = \frac{3}{2} \to \sin(3x) = 1$

* $Min = \frac{1}{2} \to \sin(3x) = -1$

$1 = \sin\frac{\pi}{2} \to x = \frac{\pi}{6}$

$-1 = \sin\frac{3}{2}\pi \to x = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = 1 \to x = \sin(3x) = 0$



O período normalmente do Sin é de 2 pi, entretanto, como a periodicidade dele está em 3x, ele completará o ciclo em 2pi/3.

Ou seja, a função ganhará valor máximo 3/2 em:

$x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5\pi}{6}$; $x = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$; etc...

Valor mínimo de 1/2 em:

$x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{6}$; $x = -\frac{\pi}{6}$; etc.