Notas 6 - Cálculo I

Funções Crescente e Decrescente

Uma função será Crescente quando no gráfico, da esquerda para a direita, fica maior quando x aumenta.

Def:

Função Crescente $\rightarrow \{x_1, x_2 \in D \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).\}$

Função Estritamente Crescente $\rightarrow \{x_1, x_2 \in D \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\}$

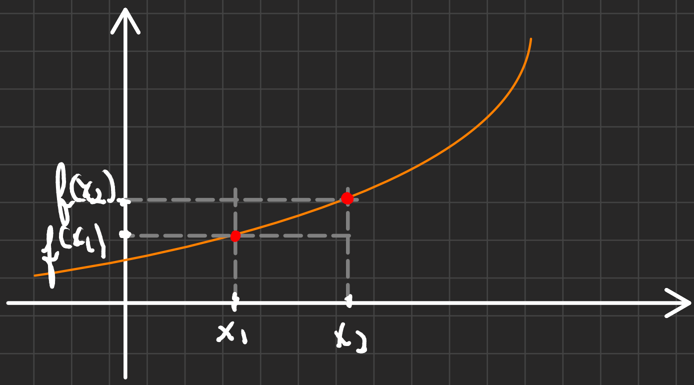
Uma função é Decrescente quando $f(x)$ decai ao decorrer de $x \in \mathbb{R}$.

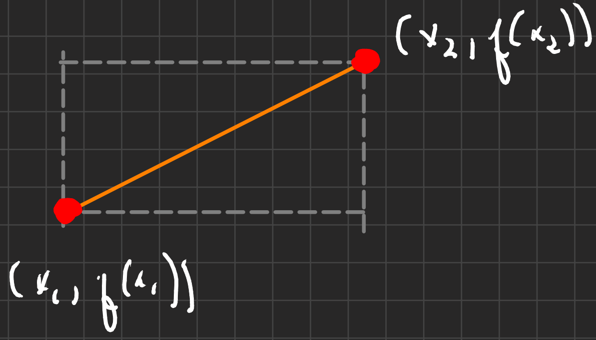
Def:

Função Decrescente $\rightarrow \{x_1, x_2 \in D \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).\}$

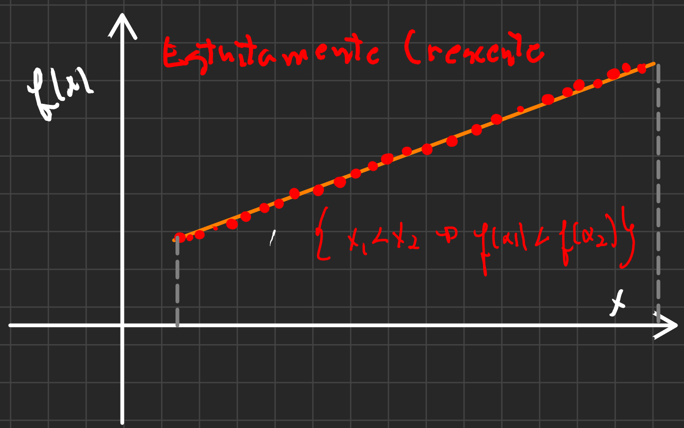
Função Estritamente Decrescente $\rightarrow \{x_1, x_2 \in D \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\}$.

Crescente:

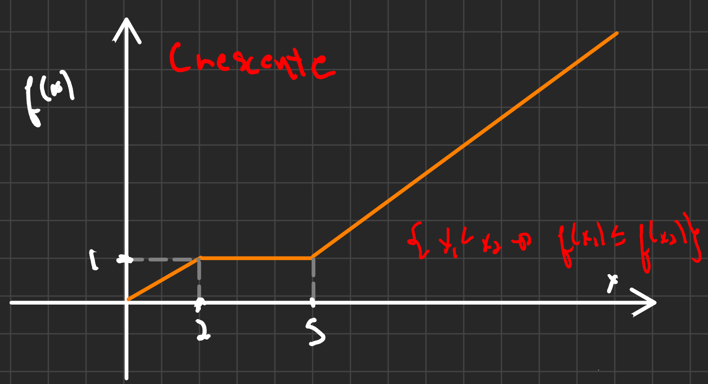




Tendo em vista que x_2 só precisa ser maior que x_1, a dupla (x_1, x_2) podem ser próximos, não iguais.



Para ser uma função Crescente, é necessário que o próximo ponto vermelho tenha um $f(x)$ maior, $\forall x \in \mathbb{R}$.

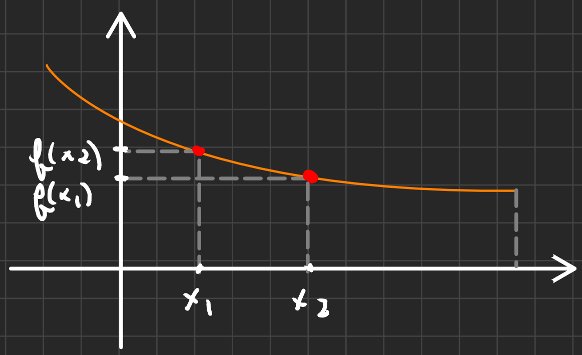


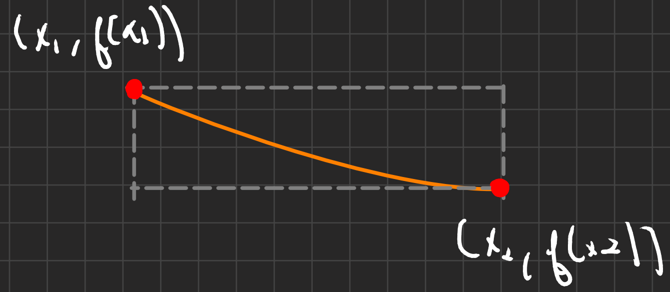
Obs:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 2 \\ 1, & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ x-4, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

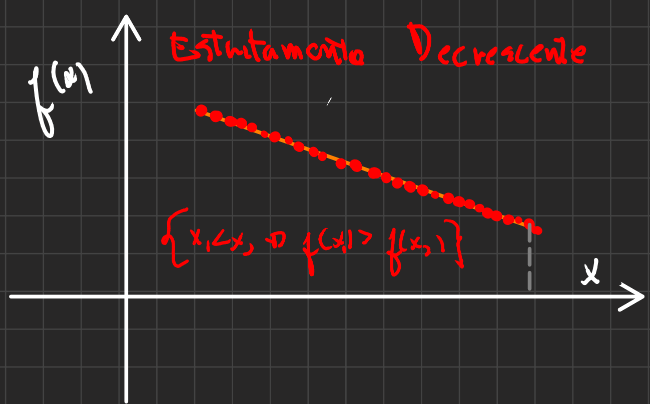
Quando ela é só crescente, admite $f(x_1) = f(x_2)$, diferente da Estritamente Crescente.

Decrescente.

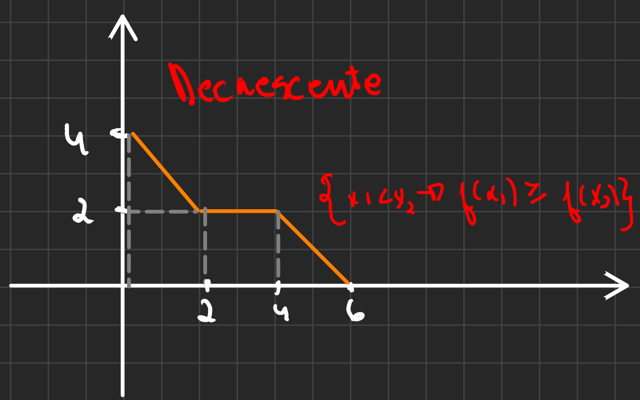




O mesmo serve para funções decrescentes, os quais podem deixar os pontos vermelhos bem próximos para ter a noção de que durante toda a função vale: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.



Em toda a função ela permanece em queda, respeitando os pontos cada vez menores ao decorrer de x.



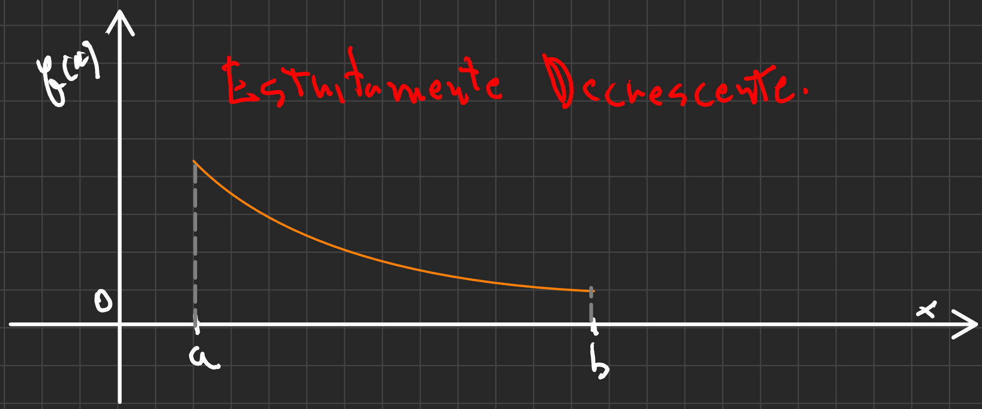
Obs:

$$f(x) = \begin{cases} -x+4, & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 2, & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ -x+6, & \text{se } 4 < x < 6 \end{cases}$$

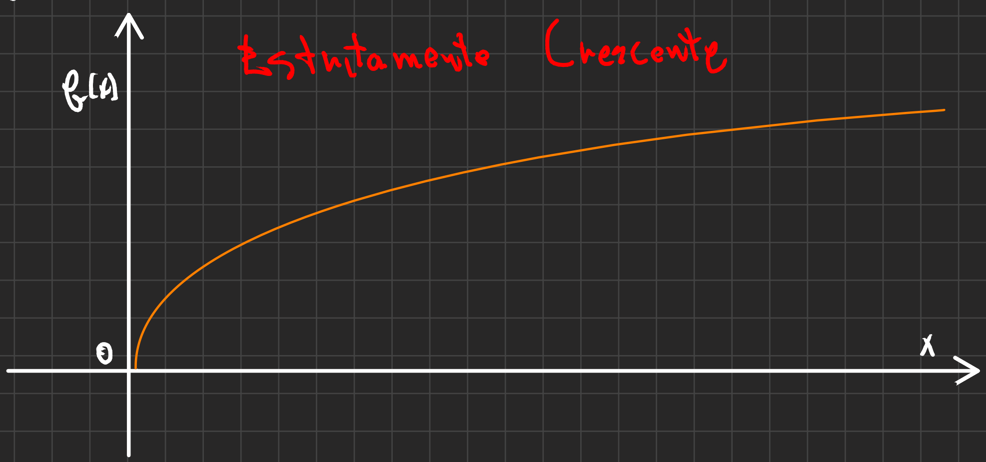
No crescente, por mais que a função como um todo esteja "decaindo", há partes constantes, isso resulta por definição uma função Decrescente

Exemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \{x, a, b \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \mid a, b > 0\}$$



$$f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

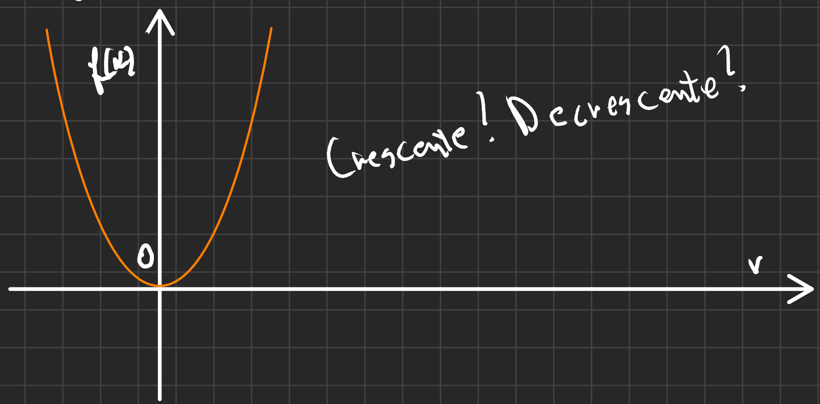


Obs: Será que em algum momento a função fica constante?

$f: [2, \infty)$, $f(x) = x^2$

Estritamente Crescente

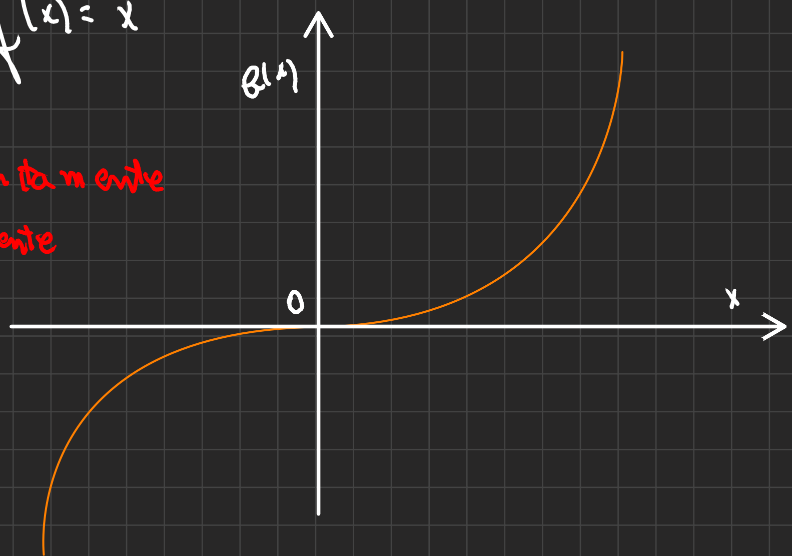
$f(x) = x^2$



Crescente! Decrescente?

$\begin{cases} \text{Crescente em } [0, \infty) \\ \text{Decrescente em } (-\infty, 0] \end{cases}$

$f(x) = x^3$



Estritamente Crescente

Obs: $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$
Crescem Estritamente, por mais que os comportamentos sejam diferentes.

Obs$_2$: Por mais que próximo de 0 pareça constante, não é. $f(x) = 0$ [constante] em um único ponto, portanto, não satisfaz $\{x_1, x_2 \in D \mid x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)\}$ e é uma função Estritamente Crescente.

Funções Injetoras, Bijetoras e Sobrejetoras.

Função Injetora:

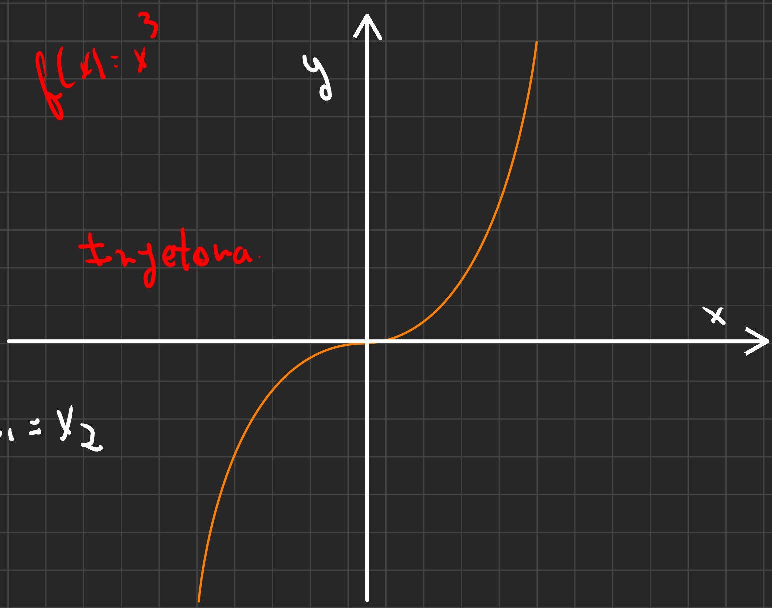
<u>def</u>

$\forall\ x_1, x_2 \in D\ ,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

(Contra-Domínio) $f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

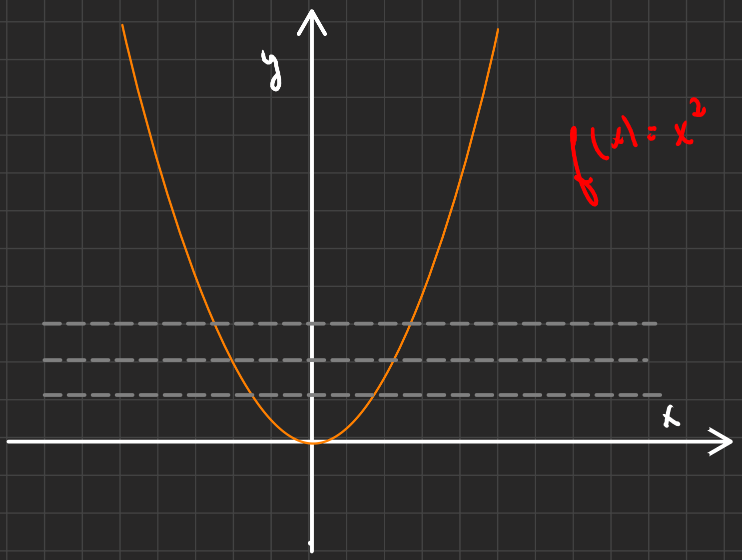
(Domínio) x



se $f(x) = x^3$ e $x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

Meio abstrato? Visualize que o contradomínio ($f(x)$) representa a "altura", e o domínio (x) representa a impulsão. Só pode existir uma impulsão para alcançar aquela determinada altura. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Não Injetora.



$f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

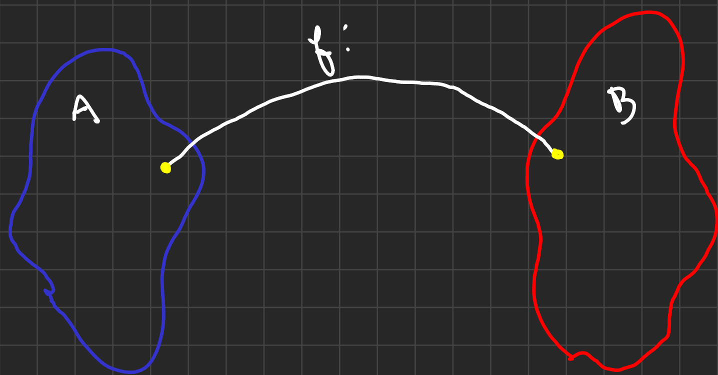
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(-2) = f(2) \Rightarrow -2 \neq 2$

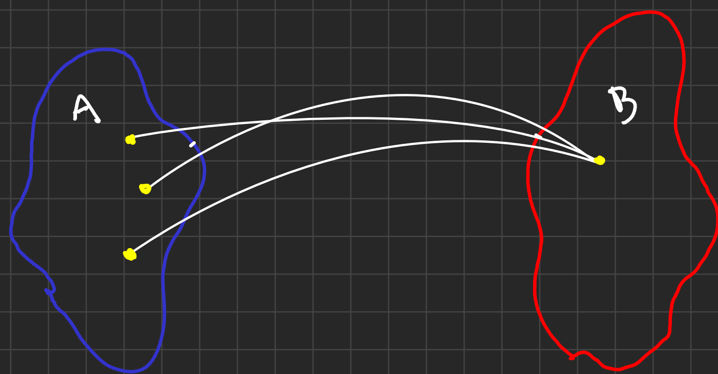
$(4 = 4)$

Logo, x^2 não é injetora, pois admite dois valores de x para o mesmo $f(x)$.

Uma função Injetora só pode assumir um valor do Domínio para o contradomínio.



Uma função Não Injetora pode ter múltiplos valores do Domínio que representam no Contradomínio



Funções Sobrejetoras

Def

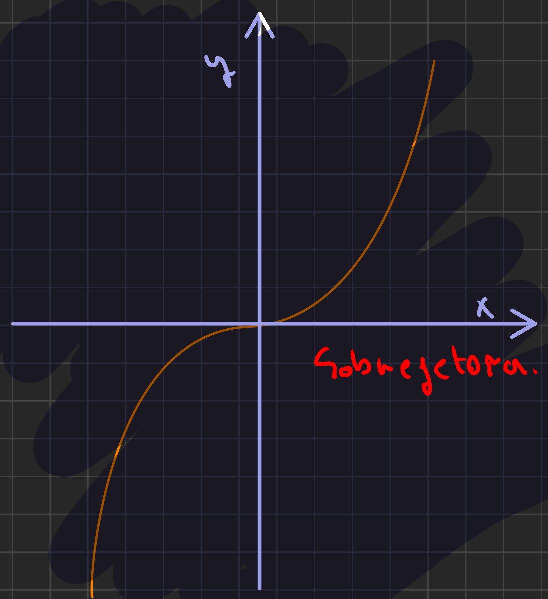
$\forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$

Para todo valor do Contradomínio, existe um valor do Domínio. Todo o Contradomínio é alcançado.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 \mid y = f(x)$

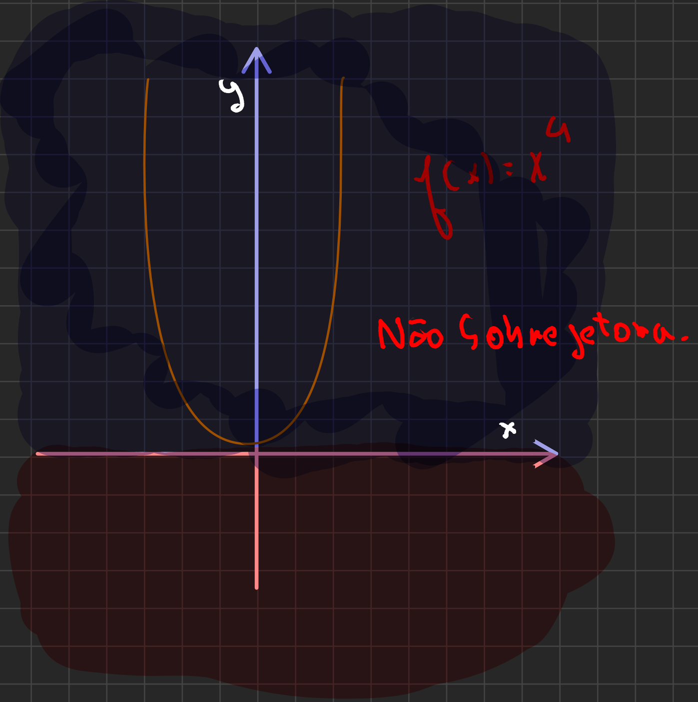
Contradomínio

Domínio



Observe que todo o conjunto do Contradomínio $\mathbb{R}, (-\infty, \infty)$, é alcançado por x^3.

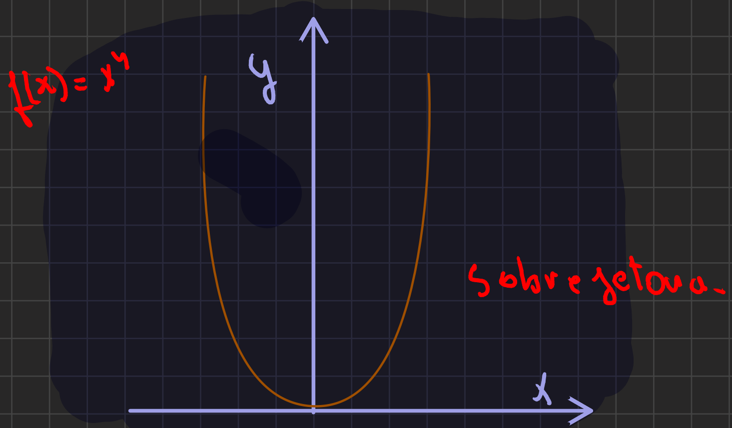
É como se todo o "desenho" precisasse alcançar todas as "alturas", sem limitações ou buracos na reta y.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, $y = f(x)$.

Reta Real

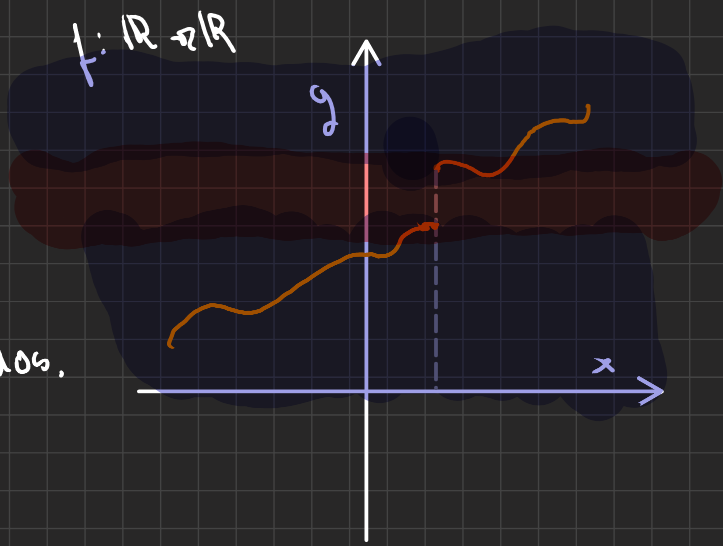
Contradomínio $(-\infty, \infty)$ não é alcançado pois x^4 não admite valores menores que 0, $f(x) > 0$.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^4$, $y = f(x)$.

Contradomínio $\mathbb{R}_+$ $[0, \infty)$ é alcançado completamente nesse caso.

Funções como esta não é Sobrejetora, devido o "salto" da função e resultar em pontos do contradomínio não alcançados.

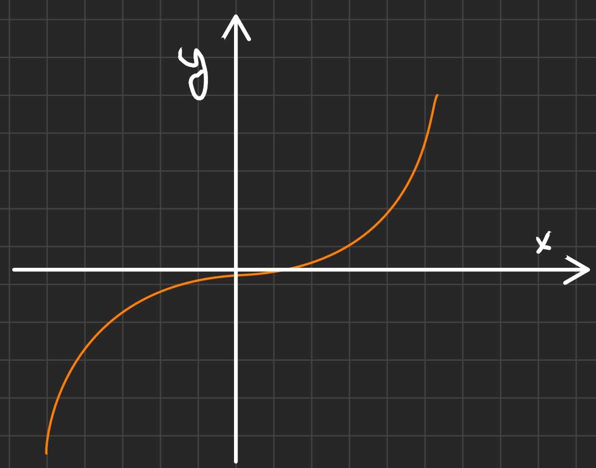


Funções Bijetoras.

Bijetoras = Injetoras + Sobrejetoras.

Em resumo, é quando satisfaz a definição de Injetora e Sobrejetora ao mesmo tempo.

$f(x) = x^3$ é Injetora e Sobrejetora, portanto, Bijetora.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

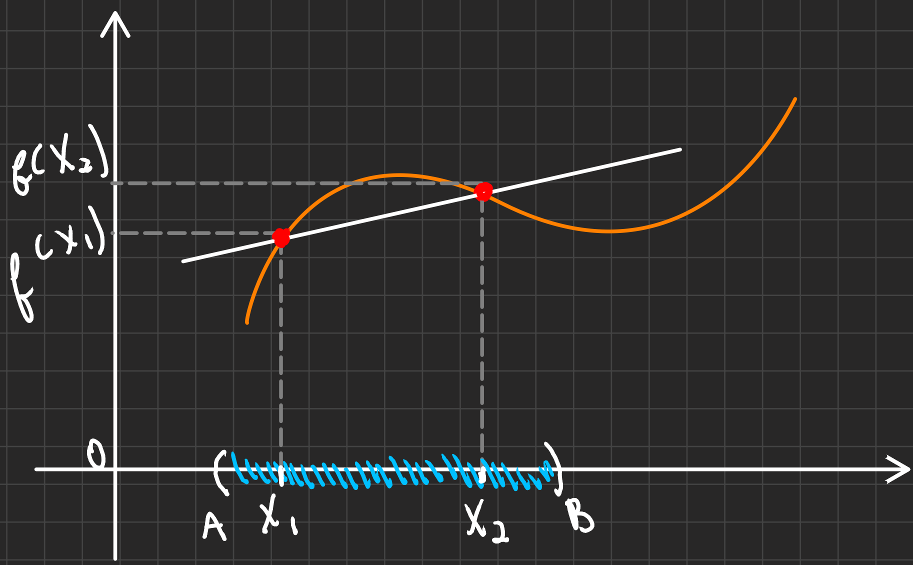
* Pega todos os pontos (Sobrejetora.)

* Só existe um x para cada $f(x)$. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
(Injetora.)

* Satisfaz ambos os requesitos, Injetora e Sobrejetora.
(Bijetora.)

Concavidades.

Tópico importante para acharmos máximos e mínimos de uma função futuramente com auxílio de derivadas. Nesse momento vamos apenas trabalhar a abstração sobre a taxa de variação de uma função no que diz respeito a comportamentos de uma função.



$D = (A, B)$

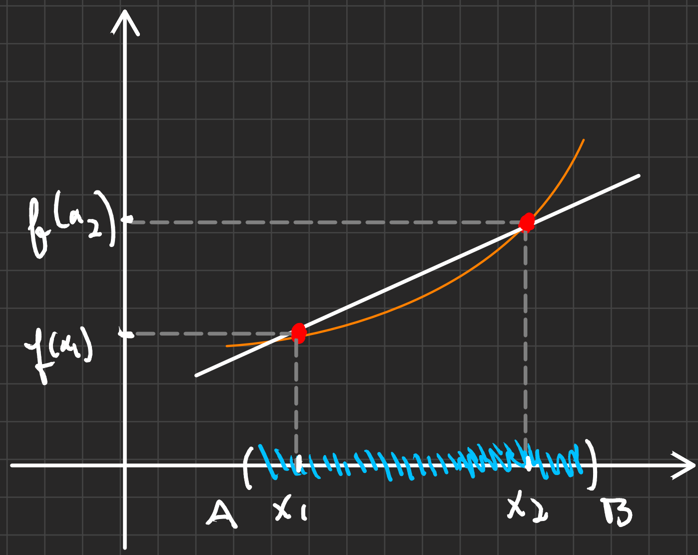
$L(x_1, x_2)$ - reta secante determinado por x_1 e x_2.

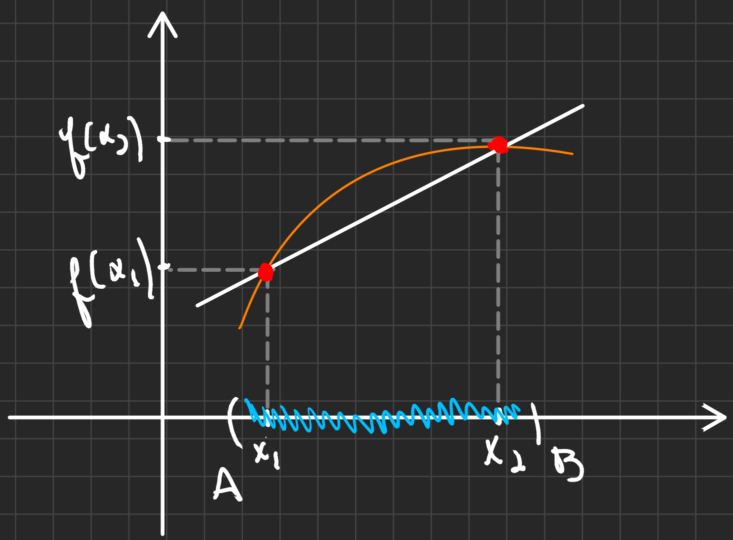
No caso da reta secante acima da linha da função denominamos como "Concavidade para cima".

Se essa mesma reta estiver abaixo da função, chamamos "Concavidade para Baixo".

Convidade para Cima.

* Observe como a reta secante depende dos pontos x_1 e x_2.





Concavidade para baixo.

* Nada a comentar, próximo!

* Deixo a cargo do leitor resolver esta.