Nota 04 - Cálculo I

Módolo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ex:

a) $|5| = 5$ b) $|-3| = 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $[x^2 = |x|^2]$ Ou seja, x^2 sempre positivo.

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ |-x|^2 = x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$x^2 = |x|^2$ se isso é verdade logo $\sqrt{x^2} = |x|$

Provando que $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$

$|x|^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 + ax - ax - a^2 = 0 \Rightarrow$
$(x^2 + ax) + (-ax - a^2) = 0 \Rightarrow x(x+a) - a(x+a) = 0 \Rightarrow (x+a)(x-a) = 0$

Nesse caso, $(x+a)(x-a) = 0$ só é verdade se $x = a$ ou $x = -a$.

$|2x+1| = 3$

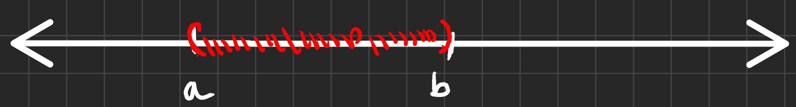
$$\begin{cases} |2x+1| = 3 \\ |2x+1| = -3 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} x = 1 \\ x = -2 \end{matrix}$$

$|x| < r \qquad \therefore r > 0$

$(-r < x < r)$

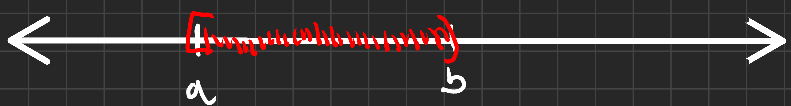
Intervalo

Considerando a Reta Real, $\forall x \in \mathbb{R}$.

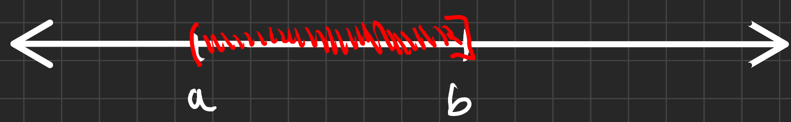


$(a,b) \qquad a < x < b$

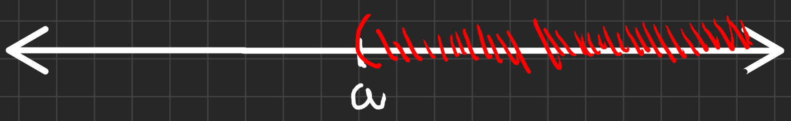
$[a,b] \qquad a \leq x \leq b$



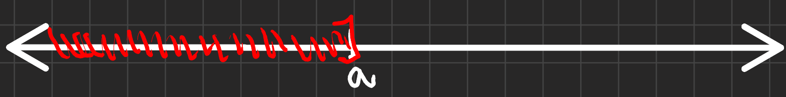
$[a,b) \qquad a \leq x < b$



$(a,b] \qquad a < x \leq b$



$(a,\infty) \qquad x > a$



$(-\infty,a] \qquad x \leq a$

$]a, a[$ $\quad x = a$

(a, a) $\quad x = \emptyset$

$(-\infty, \infty)$ $\quad x = \mathbb{R}$

Exprese o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 < x + 1\}$ em intervalo e na Reta Real.

$2x - 3 < x + 1$ $\qquad (-\infty, 4)$

$x < 4$

Binômio = $(a+b)^n$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$

$(a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) =$

$(a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + ba^3 + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4)$

$(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$

$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) =$

$(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) =$

$(a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5) =$

$(a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5)$

Binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n \, a^{n-k} b^k$$

Como achar C_n?

triângulo de Páscoal (Descobrindo C_n)

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
...	...

sendo $a^{n-k} \cdot b^{k}$ α j então com triângulo de Páscoal temos:

$$(a+b)^5 = 1j + 5j + 10j + 10j + 5j + 1j$$

Juntando com a notação $\sum_{k=0}^{5} C_n \underbrace{a^{5-k}\, b^{k}}_{j} =$

$$1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 b^1 + 10 \cdot a^3 b^2 + 10 \cdot a^2 b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5 :$$

$$\left(a^5 + 5a^4 b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\right)$$

Notação mais utilizada para Binômios (sem Páscoal)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} \xrightarrow{dt} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Método Indução.

Para provar se um teorema é verdadeiro, teste com $x = 1$, $x = n$, $x = n+1$. Se nesses casos o teorema não falha ou demonstra contradições, então ele passa pelo teste da Indução.

Prove por indução que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ OK.

$n = K \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + K = \frac{K(K+1)}{2}$ O.K.

$n = K+1 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + K + (K+1) = \frac{(K+1)((K+1)+1)}{2}$

$\frac{(K+1)(K+2)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots K + (K+1).$

$$\left.\begin{aligned} &\text{se } K = 30 \Rightarrow \frac{31 \cdot 32}{2} = 496 \\ &\sum_{K=1}^{30} K + 31 = 465 + 31 = 496 \end{aligned}\right\} \text{O.K.}$$

Binômio de Newton pode ser demonstrado por Indução!!!

Dever

- Calcular $(a+b)^6$, $(a+b)^7$, $(a+b)^8$ sem o binômio de Newton e depois com e conferir
- Fazer 1.3, 1.4, 1.7 do Guidorizzi.
- Fazer exercício 1.2 do Guidorizzi. (Os exercícios de polinômios são opcionais)