# Fundamentos da Programação

#### lista de exercícios 08

### 1. Multiplicação de matrizes

Na aula nós apresentamos o programa que multiplica duas matrizes  $N \times N$ , e imprime o resultado na tela.

Refaça esse programa e aproveite para modificá-lo, de modo que ele multiplique uma matriz A com dimensão  $M \times N$  por uma matriz B com dimensão  $N \times M$ .

### 2. Calculando o determinante (usando a regra da escola)

É bem fácil calcular o determinante de uma matriz de tamanho 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

(i.e., nós calculamos o produto dos elementos na diagonal, e depois subtraímos desse resultado o produto dos elementos na diagonal inversa)

E também é bem fácil fazer um programa que faz esse cálculo.

$$\det \leftarrow A[0][0] * A[1][1] - A[0][1] * A[1][0]$$

Também é fácil calcular o determinante de uma matriz  $3 \times 3$  no papel.

Quer dizer, primeiro a gente calcula os produtos das seguintes diagonais

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 = 225$$

Depois a gente faz a mesma coisa com as diagonais inversas

$$\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6 \\
7 & 8 & 9
\end{bmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 8 \cdot 6 = 225$$

E daí, a gente subtrai uma coisa da outra: 225 - 225 = 0.

Mas, será que você consegue fazer um programa que faz isso?

— (usando comandos for, e não escrevendo tudo na mão)

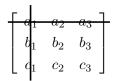
# 3. Calculando o determinante (usando outra regra)

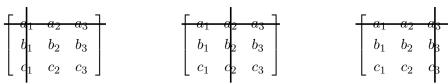
A regra da escola não é a única maneira de fazer as coisas.

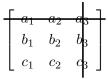
Quer dizer, existe uma outra regra baseada na definição matemática do determinante.

A ideia é a seguinte:

• Para calcular o determinante de uma matriz  $3 \times 3$ , nós calculamos o determinante de 3 matrizes  $2 \times 2$ 







(i.e., são as matrizes que a gente obtém eliminando a linha e a coluna de cada elemento  $a_i$ na primeira linha)

Suponha que os determinantes dessas 3 matrizes são

$$\Delta_1$$
,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ 

Daí, a gente obtém o determinante de A da seguinte maneira

$$det(A) = a_1 \cdot \Delta_1 - a_2 \cdot \Delta_2 + a_3 \cdot \Delta_3$$

- a) Faça um programa que implementa essa ideia.
- b) A boa notícia é que essa regra pode ser usada para matrizes de qualquer tamanho.

Por exemplo, se A é uma matriz  $4 \times 4$ , então o seu determinante pode ser calculado da seguinte maneira

$$det(A) = a_1 \cdot \Delta_1 - a_2 \cdot \Delta_2 + a_3 \cdot \Delta_3 - a_4 \cdot \Delta_4$$

onde

- $a_1, a_2, a_3, a_4$  são os elementos da primeira linha de A
- e cada  $\Delta_i$  é o determinante da submatriz  $3 \times 3$  que é obtida eliminando a linha e coluna do elemento  $a_i$

Faça um programa que calcula o determinante de uma matriz  $4 \times 4$  dessa maneira.

# 4. Matriz inversa

Como todo mundo sabe, a matriz inversa de  $\mathsf{A}$  é a matriz  $\mathsf{A}^{-1}$  que multiplicada por  $\mathsf{A}$  dá a matriz identidade

$$\mathsf{A} \; \times \; \mathsf{A}^{-1} \quad = \quad \mathsf{I}$$

2

Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \times \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um método bem simples para calcular a matriz inversa consiste em observar que a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser decomposta como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que correspondem aos sistemas lineares

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2w = 0 \\ 3y + 4w = 1 \end{cases}$$

A ideia consiste em resolver esses sistemas para obter os valores de x, y, z, w, que são os elementos da matriz inversa  $\mathsf{A}^{-1}$ 

Faça um programa que implementa essa ideia.