Fundamentos da Programação

lista de exercícios 08

1. **Multiplicação de matrizes**

   Na aula nós apresentamos o programa que multiplica duas matrizes $N \times N$, e imprime o resultado na tela.

   Refaça esse programa e aproveite para modificá-lo, de modo que ele multiplique uma matriz A com dimensão $M \times N$ por uma matriz B com dimensão $N \times M$.

2. **Calculando o determinante** (usando a regra da escola)

   É bem fácil calcular o determinante de uma matriz de tamanho 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad = \quad 1 \cdot 4 \;-\; 2 \cdot 3 \quad = \quad -2$$

   (i.e., nós calculamos o produto dos elementos na diagonal, e depois subtraímos desse resultado o produto dos elementos na diagonal inversa)

   E também é bem fácil fazer um programa que faz esse cálculo.

```
det  <--  A[0][0] * A[1][1]  -  A[0][1] * A[1][0]
```

   Também é fácil calcular o determinante de uma matriz 3×3 no papel.

   Quer dizer, primeiro a gente calcula os produtos das seguintes diagonais

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad = \quad 1 \cdot 5 \cdot 9 \;+\; 2 \cdot 6 \cdot 7 \;+\; 3 \cdot 4 \cdot 8 \quad = \quad 225$$

   Depois a gente faz a mesma coisa com as diagonais inversas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad = \quad 3 \cdot 5 \cdot 7 \;+\; 2 \cdot 4 \cdot 9 \;+\; 1 \cdot 8 \cdot 6 \quad = \quad 225$$

   E daí, a gente subtrai uma coisa da outra: $225 - 225 = 0$.

   Mas, será que você consegue fazer um programa que faz isso?
   — (*usando comandos* `for`*, e não escrevendo tudo na mão*)

3. **Calculando o determinante** (usando outra regra)

A regra da escola não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, existe uma outra regra baseada na definição matemática do determinante.

A ideia é a seguinte:

- Para calcular o determinante de uma matriz 3×3,

  nós calculamos o determinante de 3 matrizes 2×2

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

  (i.e., são as matrizes que a gente obtém eliminando a linha e a coluna de cada elemento a_i na primeira linha)

Suponha que os determinantes dessas 3 matrizes são

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$$

Daí, a gente obtém o determinante de A da seguinte maneira

$$\mathsf{det(A)} \quad = \quad a_1 \cdot \Delta_1 \quad - \quad a_2 \cdot \Delta_2 \quad + \quad a_3 \cdot \Delta_3$$

a) Faça um programa que implementa essa ideia.

b) A boa notícia é que essa regra pode ser usada para matrizes de qualquer tamanho.

   Por exemplo, se A é uma matriz 4×4, então o seu determinante pode ser calculado da seguinte maneira

$$\mathsf{det(A)} \quad = \quad a_1 \cdot \Delta_1 \quad - \quad a_2 \cdot \Delta_2 \quad + \quad a_3 \cdot \Delta_3 \quad - \quad a_4 \cdot \Delta_4$$

   onde

   - a_1, a_2, a_3, a_4 são os elementos da primeira linha de A
   - e cada Δ_i é o determinante da submatriz 3×3 que é obtida eliminando a linha e coluna do elemento a_i

   Faça um programa que calcula o determinante de uma matriz 4×4 dessa maneira.

4. **Matriz inversa**

Como todo mundo sabe, a matriz inversa de A é a matriz A^{-1} que multiplicada por A dá a matriz identidade

$$\mathsf{A} \ \times \ \mathsf{A}^{-1} \quad = \quad \mathsf{I}$$

Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um método bem simples para calcular a matriz inversa consiste em observar que a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser decomposta como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que correspondem aos sistemas lineares

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2w = 0 \\ 3y + 4w = 1 \end{cases}$$

A ideia consiste em resolver esses sistemas para obter os valores de x, y, z, w, que são os elementos da matriz inversa A^{-1}

Faça um programa que implementa essa ideia.