图像处理中的傅里叶描述子(Fourier Descriptors)

瓜瓜瓜
Computer Vision

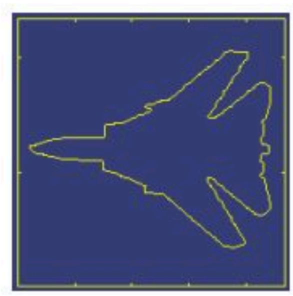
傅里叶描述子(Fourier Descriptors)是用来对一个特定物体创造一个图像特征，即：用一个高维向量，比如[1,2,3,4,5,.....]来描述你想要描述的物体(比如下图里的这个飞机)。思想和moment（图像的矩有点像，使用了不同的数学手段），效果比最好的Hu-moment要好，大体过程如下：

1.先从大图里crop出要描述物体所在的区域：

比如你想用傅里叶算子/傅立叶描述子(Fourier Descriptors)来描述一架特定的飞机。你需要先从一张有蓝天白云的大照片里裁剪出这个飞机的小照片

图1

2. 得到要描述物体的边缘或者叫做Curve



3. 用一个一维的方程来表示这个2维的图形（obtain a 1D function from the 2D curve）

这里用Elliptic Fourier Descriptors的形式来举例子，ps: 还有一些别的形式的Fourier Descriptors

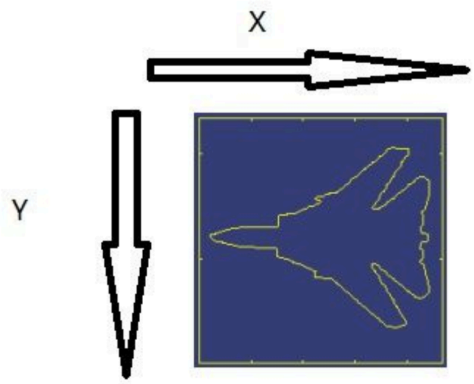
一维的方程就是：

$$c(t)=x(t)+j\,y(t)$$

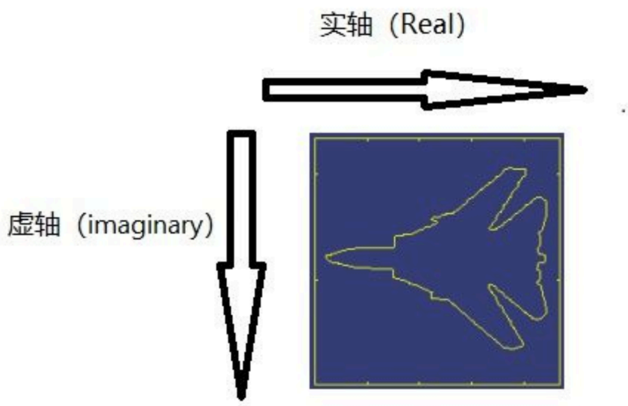
公式1

c(t)就是上面那个只有边缘的图像，把它变成复变函数的表达

1. 先找个坐标原点，比如图像的左上角，画坐标轴，然后就可以得到这个飞机的边缘的点的坐标，比如(1,1),(2,2)……



然后强行把这些点转换到用复数(complex number)表示，比如（1，1）这个点就变成了1+1j，（2，2）就变成了2+2j。然后图3就变成了图4



4. 做傅立叶级数展开（perform a Fourier expansion）

对公式1做三角形式傅里叶展开，公式如图公式2

$$c(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)$$

公式2

注意是对公式1里的，实部和虚部（不含J）分别进行展开，如图5

$$c(t)=x(t)+j\,y(t)$$

$$x(t)=\frac{a_{x0}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{xk}\cos(k\omega t)+b_{xk}\sin(k\omega t) \qquad y(t)=\frac{a_{y0}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{yk}\cos(k\omega t)+b_{yk}\sin(k\omega t)$$

$$a_{xk}=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)dt \qquad a_{yk}=\frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(k\omega t)dt$$

$$b_{xk}=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)dt \qquad b_{yk}=\frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(k\omega t)dt$$

取出实数部分（x(t)）组成一个新的波形，取出虚数(y(t))部分组成一个新的波形，如图7所示。所有cos波的系数统称为axk, 所有sin波的系数统称为bxk,都可以通过上图的公式得到。注意，这里的axk，bxk都是一个向量。因为一个函数的傅立叶级数展开是无穷个sin波和cos波的叠加，这时候我们取前N个，比如图7里面就是取了前10个系数，这四个向量就是三角形式傅里叶展开的系数的向量，不懂也可以，只要知道现在我们可以用四个向量来代表你想描述的这个图像中的一个点。

$$c(t) = x(t) + j\, y(t)$$

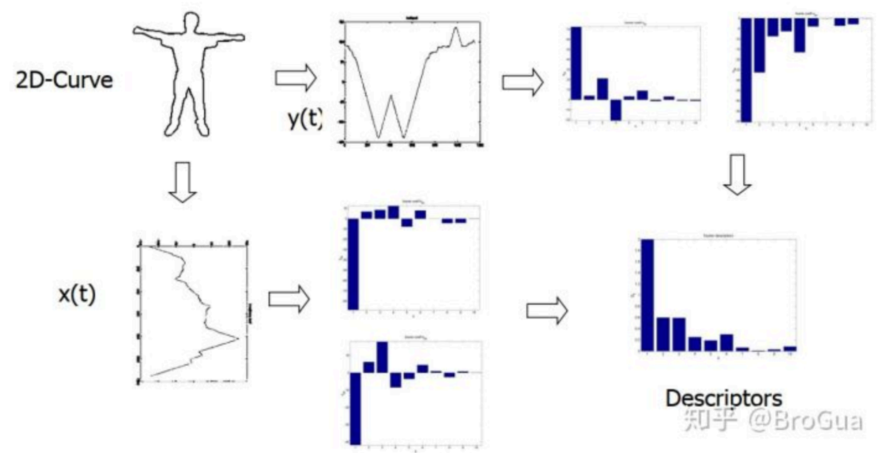
$$x(t) = \frac{a_{x0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{xk} \cos(k\omega t) + b_{xk} \sin(k\omega t) \qquad y(t) = \frac{a_{y0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{yk} \cos(k\omega t) + b_{yk} \sin(k\omega t)$$

$$c(t) = \frac{a_{x0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{xk} \cos(k\omega t) + b_{xk} \sin(k\omega t) + j \left(\frac{a_{y0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{yk} \cos(k\omega t) + b_{yk} \sin(k\omega t) \right) \right)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{x0} \\ a_{y0} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{xk} & b_{xk} \\ a_{yk} & b_{yk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k\omega t) \\ \sin(k\omega t) \end{bmatrix}$$

5. 把四个系数向量合成作为Fourier Descriptors

由图可示，其实Fourier Descriptors也就是一个一维向量，它的长度由你在上一步骤保存了多少个系数决定



6. Fourier Descriptors的特性

scale, transform, rotation invariant. 缩放，平移，旋转不变性