CONTROLE E SERVOMECANISMOS

Engenharia da Computação

Aula 15 - “A Equação Diofantina”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

09 de junho de 2017

UFMS

FACOM-UFMS

1. A Equação Diofantina

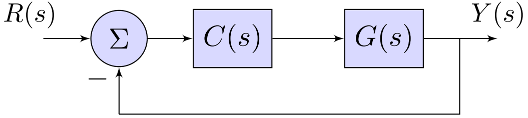
Alocação de Polos

- A partir das condições (9.16)-(9.19), é possível escolher posições de polos adequadas para a FTMF;
- O processo descrito é chamado alocação de polos;

Importante!

Problema: Dados os polos desejados e tendo a planta fixa, como determinar o comepensador de forma a alocar os polos de malha fechada nas posições escolhidas?

O Sistema em Realimentação Unitária



Escrevamos as FTs da planta e do compensador como:

$$G(s) = \frac{N_g(s)}{D_g(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m_g} \beta_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_g} \alpha_j s^i} \tag{15.1}$$

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m_c} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_c} a_j s^i} \tag{15.2}$$

Usando a regra de feedback (3.9):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{N_c(s)N_g(s)}{N_c(s)N_g(s) + D_c(s)D_g(s)} \tag{15.3}$$

O Polinômio Característico de Alocação

Observação

Note que, se a planta e o controlador têm ordens n_g *e* n_c*, respectivamente, então o polinômio característico de alocação,* $Q(s)$ *poderá ter* $n_g + n_c$ *polos à escolha.*

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_{n_c+n_g}$ os polos desejados, então:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^{n_c+n_g} (s - p_i) = \sum_{i=0}^{n_c+n_g} q_i s^i \tag{15.4}$$

A Equação Diofantina

Combinando as observações feitas em (15.3) e em (15.4):

$$N_c(s)N_g(s) + D_c(s)D_g(s) = Q(s) \tag{15.5}$$

que é chamada equação diofantina.

Observação

- *Note que* $N_c(s)$ *e* $D_c(s)$ *são as incógnitas de* (15.5)*;*
- *Sob quais circunstâncias existe solução para* (15.5)*?*
- *A solução, se existe, é única?*
- *Como encontrar a solução?*
- *Note que, como não há produto de incógnitas, a dependência entre estas e os coeficientes de* D_g *e* N_g *é linear.*

A Matriz de Sylvester

- Da Eq. Diofantina, (15.5), surge um sistema de equações lineares;
- Sua solução é mais fácil com o uso da matriz de Sylvester.
- Defina o bloco de Sylvester do denominador de G:

$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n_g} & \alpha_{n_g-1} & \alpha_{n_g-2} & \dots & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{n_g} & \alpha_{n_g-1} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n_g} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+n_g+1)\times(n_c+1)} \tag{15.6}$$

Solução da Equação Diofantina

- Para o bloco do numerador, note que $\mathbf{S}_N \in \mathbb{R}^{(n_c+n_g+1)\times(m_c+1)}$;
- Escrevamos:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_c} \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m_c} \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_{n_c+n_g} \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_D & \mathbf{S}_N \end{bmatrix}$$

- A solução de (15.5) é obtida do sistema:

$$\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{q} \tag{15.7}$$

Comentários sobre a Matriz de Sylvester

- Para haver solução única, $\mathbf{S}$ deve ser invertível, o que implica em:

$$m_c = n_g - 1 \tag{15.8}$$

- De toda forma, note que se deve fazer $n_c \geq m_c$;
- Não há interesse em fazer $m_c \geq n_g - 1$, pois aumenta a complexidade de C desnecessariamente;
- Há um problema não resolvido, o do controlador de ordem reduzida, onde $m_c < n_g - 1$;
- Neste caso, porém, a Equação Diofantina pode não ter solução.

Controladores Reduzidos e Mínimos Quadrados

- É possível que um polinômio, Q, não seja atendido por (15.7);
- Troquemos, possivelmente, Q por $\tilde{Q}$;
- Definamos "distância" entre esses polinômios como a distância euclidiana entre os vetores $\mathbf{q}$ e $\tilde{\mathbf{q}}$;
- Assim, propõe-se solucionar o problema:

$$\min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \left\| \underbrace{\mathbf{S}\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{q} \right\| \tag{15.9}$$

- (15.9) é um problema de mínimos quadrados, cuja solução é:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix} = (\mathbf{S}'\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}'\mathbf{q} \tag{15.10}$$

Comentários Finais

- Não se garante que (15.10) atenderá às especificações de projeto;
- A solução encontrada deve ser testada;
- É comum ter que se projetar um controlador que imponha um tipo mínimo;
- Procedimento simples:
  i) Troque G por $\tilde{G} = \dfrac{G}{s^k}$, onde k leva ao tipo desejado;
  ii) Solucione a Equação Diofantina, obtendo $\tilde{C}$;
  iii) A solução verdadeira será $\dfrac{\tilde{C}}{s^k}$.

Observação

Principal desvantagem da Equação Diofantina: os polos desejados devem ser exatamente especificados, o que leva a pouca flexibilidade do método.

Exemplo: Tanques Comunicantes

Considere o sistema de tanques comunicantes (Aula 07), com:

$$R_1 = 1\text{s/m}^2, R_2 = 0{,}4\text{s/m}^2, C_1 = 2\text{m}^2 \text{ e } C_2 = 5\text{m}^2$$

Assim, se a variável controlada for o nível do tanque 2:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{0{,}1}{4s^2 + 4{,}8s + 1}$$

Verifiquemos se existe um controlador que:

- Elimine o erro estático;
- Tenha tempo de acomodação inferior a 10s;
- Leve o overshoot a menos de 10%.

Exemplo: Tanques Comunicantes

Devemos inserir um polo na origem. Logo, usaremos:

$$\tilde{G}(s) = \frac{0{,}1}{4s^3 + 4{,}8s^2 + s}$$

Para garantir solução da Equação Diofantina, façamos $m_c = 2$. Assim:

$$\tilde{C}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \qquad \text{(o polo extra está em } \tilde{G}\text{)}$$

Os blocos de Sylvester de $\tilde{G}$ são:

$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4{,}8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}8 & 4 \end{bmatrix}' \text{ e } \mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

Exemplo: Tanques Comunicantes

- Para $M_p \leq 0{,}1$, deve-se ter $\zeta \geq 0{,}6$;
- Para $t_s < 10$s, deve-se ter $\zeta\omega_n > 0{,}4$ (critério 2%);
- Façamos $\zeta = 0{,}65$ e $\omega_n = 0{,}7$.
- Polos dominantes: $0{,}455 \pm j0{,}532$
- Os demais polos serão reais, com σ dez vezes maior. Assim:

$$\begin{aligned} Q_{\text{alocador}}(s) &= (s + 0{,}455 + j0{,}532)(s + 0{,}455 - j0{,}532)(s+5)^2 \\ &= s^4 + 10{,}9s^3 + 34{,}6s^2 + 27{,}7s + 12{,}3 \end{aligned}$$

- Aplicando (15.7):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}425 & 0{,}25 & 123 & 252{,}75 & 227{,}1 \end{bmatrix}'$$