UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Facom - Faculdade de Computação

Curso: Engenharia de Computação | Data: 04/08/2017
Professor: Dr. Victor Leonardo Yoshimura | Disciplina: Controle e Servomecanismos

Acadêmico:________________________________ Matrícula:______________

Prova P3

Questão 1 (2 pontos) *Uma planta foi submetida a ensaios onde foram-lhe aplicadas entradas senoidais de amplitude unitária e foram obtidos os seguintes dados:*

Frequência (rad/s)	0,01	0,05	0,1	0,5	1	5	10	100	1000
Amplitude da saída	0,166	0,166	0,166	0,158	0,141	0,03	0,01	10^{-4}	10^{-6}
Fase da saída (°)	0,5	−2,4	−4,8	−23,8	−45	−127,2	−152	−176	−179

a) *Esboce os diagramas de Bode para esta planta;*

b) *Projete um compensador que proporcione: erro estático de posição inferior a* 1%, *overshoot inferior a* 10% *(aproxime como um sistema de* 2^a *ordem) e margem de ganho superior a* 10dB.

Dica: No item "b", faça aproximações lineares na fase, dentro de cada década, para determinar um valor de fase para uma frequência específica.

Solução:

a) Basta desenhar os gráficos em escala logarítmica, notando que se deve usar:

$$||G(j\omega)|| = 20\log|Y(s)|$$

na linha "amplitude de saída".

b) Primeiro, é necessário determinar o ganho para reduzir o erro. O sistema apresenta comportamento plano na baixa frequência, o que sugere ausência de integrador e, portanto, presença de erro estático de posição. Assim, o ganho necessário é de:

$$K_p = \frac{1}{1+G(0)} \Rightarrow G(0) = K_p^{-1} - 1 = 99 \Rightarrow ||G(0)|| = 20\log 99 = 39{,}9\text{dB}$$

Dado que o ganho na frequência mais baixa é de −15,6dB, isto implica em dar um ganho de 55,5dB. Assim, o ponto do diagrama que tem −55,5dB (0,0016) será levado a zero. Note que esta frequência está entre 10rad/s e 100rad/s. Pelos dados da tabela, é razoável supor que há uma queda de −40dB por década. Assim, usando uma simples regra de três:

$$\frac{\log\omega_g - \log 10}{-55{,}5-(-40)} = \frac{\log 100 - \log 10}{-80-(-40)} \Rightarrow \omega_g = 24{,}4\text{rad/s}$$

Entre essas décadas, há uma variação de 24° na fase. Considerando que ω_g está próximo do centro da década e fazendo uma aproximação linear na variação da fase, supõe-se que $\arg(G(\omega_g)) \approx 164°$. Para o overshoot requerido, deve-se ter $\zeta = 0{,}6$, ou seja, $MF \approx 60°$. Assim, deve-se elevar a fase em 44°. Usando um compensador avanço, elevemos 50°, o que conduz a $\alpha \approx 0{,}12$. Usando (22.5):

$$||G(j\tilde{\omega}_g)|| = 10\log\alpha = -9{,}2\text{dB}$$

Note que este valor está com os 55,5dB de ganho do compensador. Assim, subtraindo este valor, tem-se −64,7dB na tabela original. Usando novamente a regra de três:

$$\frac{\log\tilde{\omega}_g - \log 10}{-64{,}7-(-40)} = \frac{\log 100 - \log 10}{-80-(-40)} \Rightarrow \tilde{\omega}_g = 41{,}4\text{rad/s}$$

Resta calcular os demais parâmetros do compensador. A constante de tempo do zero é obtida com (22.4):

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \Rightarrow T = 0{,}069\text{s}$$

Por fim, note que o ganho do compensador fica:

$$\alpha k_p = 10^{\frac{55,5}{20}} = 595,7$$

Portanto, o compensador projetado é:

$$C(s) = 595{,}7\frac{0{,}069s + 1}{0{,}008s + 1}$$

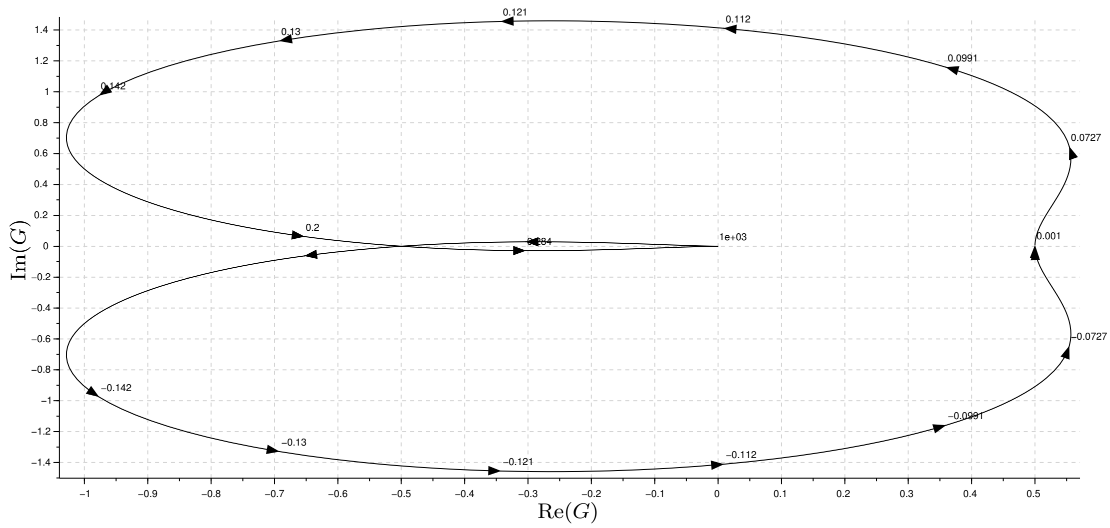
Um último comentário, a respeito da margem de ganho: na planta, esta é infinita e, com a inserção do compensador escolhido, continua infinita. Logo, o projeto está completo.

$\square$

Questão 2 (2 pontos) *Um sistema com realimentação unitária tem FTMA*

$$G(s) = \frac{s + 0{,}5}{s^3 + s^2 + 1}$$

e diagrama de Nyquist conforme figura abaixo.



Explique, usando o critério de estabilidade de Nyquist, sob quais condições um compensador tipo P estabilizará esse sistema.

Solução:
Aplicando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz no denominador de $G(s)$, tem-se:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & -1 & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

Como há duas mudanças de sinal na primeira coluna, então a FTMA do sistema tem dois pólos no semi-plano direito ($P = 2$). Assim, para que o sistema seja estável, é necessário que seu diagrama de Nyquist circunde o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido anti-horário (fazendo $N = -2$).

Observando o diagrama dado, nota-se que o compensador P não irá alterar seu traçado além de um fator de escala. Assim, note que os laços fecham no ponto $-0{,}5 + j0$ (além da origem), sendo necessário, pois, deslocar este ponto para além de $-1 + j0$, o que é obtido com o uso de $K > 2$ no compensador. Assim, o diagrama fará as circundações necessárias.

$\square$

Questão 3 (4 pontos) *Considere a seguinte planta, descrita no espaço de estado:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

Determine:

a) Matrizes de realimentação de estado e de ganho de referência ao degrau de tal forma a garantir comportamento dominante de segunda ordem com overshoot máximo de 5%, tempo de acomodação inferior a 10s e erro nulo ao degrau em regime;

b) Os zeros do sistema com a realimentação de estado projetada no item anterior, com saída de interesse igual a x_3;

c) Uma matriz de ganho de saída para observação de estado a partir da leitura apenas de x_2, se possível. Respeite os critérios sugeridos para o projeto de observadores de estado;

d) Se e como o observador projetado influencia na resposta transitória do sistema, com saída de interesse igual a x_3.

Solução:

a) Adotando aproximação de segunda ordem, para overshoot de 5%, deve-se fazer $\zeta = 0{,}7$, enquanto para o tempo de acomodação (usemos critério 2%), deve-se ter $\zeta\omega_n = 0{,}4$. Assim, o polinômio de segunda ordem deverá ser:

$$P_2(s) = s^2 + 0{,}8s + 0{,}33 = (s + 0{,}4 + j0{,}41)(s + 0{,}4 - j0{,}41)$$

O terceiro autovalor do sistema realimentado será alocado em -4. Assim:

$$P(s) = (s + 4)P_2(s) = s^3 + 4{,}8s^2 + 3{,}5s + 1{,}3$$

A matriz de controlabilidade do sistema é:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 7\\ 0 & 3 & 14\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Como $\det\mathcal{C} \neq 0$, o sistema é controlável. Com a fórmula de Ackermann:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\end{bmatrix}\mathcal{C}^{-1}P(\mathbf{A})\\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 7\\ 0 & 3 & 14\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^3 + 4{,}8\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^2 + 3{,}5\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} + 1{,}3\mathbf{I}\right)\\ &= \begin{bmatrix}-7{,}1 & -14{,}8 & 9{,}8\end{bmatrix}\end{aligned}$$

A matriz de ganho da referência é calculada com (27.5):

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}||\mathbf{K}'||^2}\mathbf{K}' = \begin{bmatrix}-0{,}026\\ -0{,}053\\ 0{,}035\end{bmatrix}$$

b) Denominemos $\mathbf{z}$ a saída de interesse. Assim:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Ex} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Usando (4.2) e (25.7) para esta saída de interesse:

$$G(s) = \mathbf{E}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BKM}$$

Note que, como $\mathbf{D}$ é nulo e dadas as formas de $\mathbf{B}$ e de $\mathbf{E}$, só é necessário calcular o cofator correspondente ao elemento 3×3 de $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$, o qual é:

$$(-1)^{3+3}\det\begin{vmatrix}s-1 & -2\\ -2 & s-4\end{vmatrix} = s(s-5)$$

Logo, os zeros são 0 e -5.

c) Denominemos $\mathbf{y}$ a variável lida. Assim:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

A matriz de observabilidade do sistema é:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -3\\ 7 & 20 & -14\end{bmatrix}$$

Como $\det\mathcal{O} \neq 0$, o sistema é observável. Façamos o polinômio alocador ter polo triplo em -8. Assim:

$$P_o(s) = (s+8)^3 = s^3 + 24s^2 + 192s + 512$$

Apliquemos a fórmula de Ackermann ao sistema dual. Assim:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}' &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (\mathcal{O}')^{-1} P_o(\mathbf{A}') \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 7 & 20 & -14 \end{bmatrix}' \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 + 24 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 192 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 512\mathbf{I} \right)' \\
&= \begin{bmatrix} 237{,}6 & -29 & 231{,}7 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

d) O observador afeta a resposta transitória, pois os autovalores do sistema aumentado são os autovalores de $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ e de $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ (teorema da separação). Assim, o observador aumenta a ordem do sistema e insere novos termos exponenciais, oscilantes ou não, na saída do sistema.

□