CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 28 - “Sistemas de Controle no Espaço de Estado V”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

26 de julho de 2017

1. Observabilidade

2. Observação de Estado

Introdução

- Estratégia da realimentação de estado: medir todas as variáveis de estado e usar (22.6);
- E se não se dispuser de todos os sensores requeridos?
- Nova estratégia: fazer a leitura da saída e, de alguma forma, estimar o estado;
- Realimentação dinâmica da saída: Usar o estado estimado no lugar do real em (22.6);
- Pergunta imediata: "Sob quais condições isto é possível?"

Definição de Observabilidade

Definição (Observabilidade)

O SLIT-C homogêneo (4.1) é dito observável se, dada a saída do sistema em um intervalo $[t_o, t_f]$*, então é possível determinar* $\mathbf{x}(t_o)$*.*

- A observabilidade responde à questão: "É possível determinar o estado a partir da leitura da saída?"
- Se a observabilidade for verificada para um dado sistema, diz-se que o par $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ é observável;
- Como verificar a observabilidade de um dado par $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$?

Matriz de Observabilidade I

Considere a solução homogênea de (4.1), (21.3):

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o$$

Aplicando novamente a fórmula de interpolação de Sylvester:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k\mathbf{x}_o = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_o = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^k\alpha_k(t)\mathbf{x}_o$$

Sem perda de generalidade, com $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$, deve-se resolver o sistema:

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x_o} = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Matriz de Observabilidade II

Assim, a transformação linear

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{28.1}$$

deve ser injetora.

Teorema

O SLIT-C autônomo (4.1) é observável se, e somente se

$$\operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n \tag{28.2}$$

além disto, a observabilidade de um sistema não é afetada por nenhuma transformação de similaridade, $\mathbf{T}$.

Exemplo

Considere o sistema massa-mola-amortecedor (aula 04):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Determinemos a matriz de observabilidade:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

Logo, este sistema é observável.

Forma Canônica Observável

Definição (Forma Canônica Observável)

Um SLIT-C da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\alpha_0\mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\alpha_1\mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\alpha_2\mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\alpha_3\mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & -\alpha_{n-2}\mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & -\alpha_{n-1}\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{28.3a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{28.3b}$$

é dito estar na Forma Canônica Observável (FCO).

Qual a importância da FCO?

Teorema (Dualidade)

O par $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ *é observável se, e somente se, o par* $(\mathbf{A}', \mathbf{C}')$ *for controlável.*

Tendo em vista o que já foi exposto para a FCC:

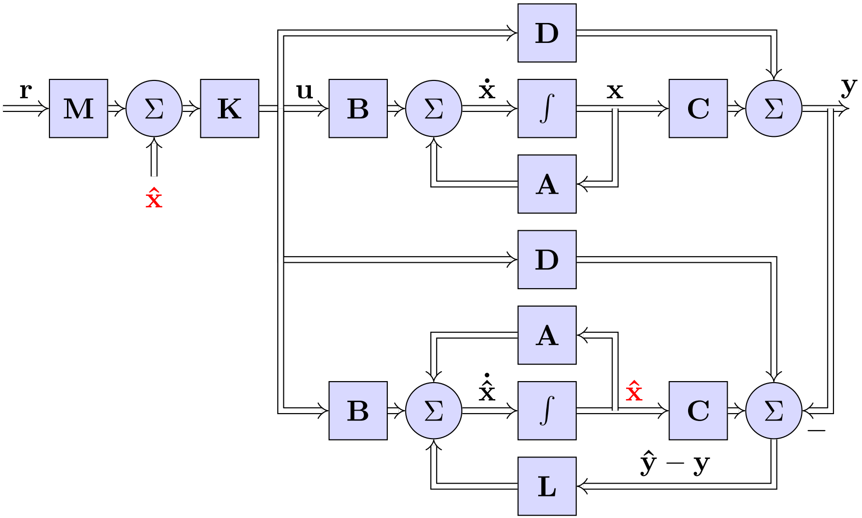
Lema

i) *A FCO é observável.*

ii) *Todo SLIT-C similar à FCO é observável.*

- No item ii do lema anterior, vale a recíproca!
- A observabilidade no plano s ocorre se não ocorrer cancelamentos na FT;

Diagrama de Blocos



Observador de Estado

- Nem todas as variáveis de estado possuem sensor;
- Assim, $\mathbf{x}$ não está completo e deve-se estimá-lo a partir de $\mathbf{y}$;
- Estratégia: construir um "clone" do sistema original, da forma

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \tag{28.4a}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{28.4b}$$

- $\hat{\mathbf{x}}$ é a estimação de $\mathbf{x}$.
- Note que, em geral:
  - $\mathbf{x}(0) \neq \hat{\mathbf{x}}(0)$;
  - $\mathbf{C}$ não é invertível (do contrário, o problema seria trivial).
- Troca-se a realimentação de estado (22.6) por

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{M}\mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}) \tag{28.5}$$

Questões para Projeto

- Sob quais condições tem-se $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$?
- Sob quais condições o sistema mostrado é estável?
- A inserção do observador altera a dinâmica do sistema? De que forma?
- O projeto do observador é afetado pela escolha de $\mathbf{K}$ e de $\mathbf{M}$?
- Existe alguma relação entre a dinâmica do observador de da planta?
- O problema a ser resolvido é chamado estimação de estado.
- Sua solução envolve o Teorema da Dualidade, mas precisamos de mais tempo...