CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 27 - "Sistemas de Controle no Espaço de Estado IV"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

24 de julho de 2017

1. Realimentação de Estado (continuação...)

2. Regime Permanente à Entrada Degrau

Fórmula de Ackermann I

Considere o SLIT-C-SISO controlável (4.1), com realimentação de estado (25.6) e $r = 0$. Defina:

$$\mathscr{A} = \mathbf{A} + \mathbf{BK} \tag{27.1}$$

Observe as identidades:

$$\mathscr{A}^0 = \mathbf{I} \qquad \mathscr{A}^1 = \mathbf{A} + \mathbf{BK} \qquad \mathscr{A}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{ABK} + \mathbf{BKA}_r \qquad \ldots$$

Ou seja:

$$\mathscr{A}^k = \mathbf{A}^k + \sum_{\substack{i=1 \\ i\leq k}}^{k} \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{BK}\mathscr{A}^{k-i} \tag{27.2}$$

Fórmula de Ackermann II

Tome os autovalores desejados, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, gerando (26.4). Então:

$$P(s) = \prod_{j=1}^{n} (s - \lambda_j) = s^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} s^j = \det(s\mathbf{I} - \mathscr{A})$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= P(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} \mathscr{A}^j \\
&= \mathbf{A}^n + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathscr{A}^{n-i} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} \left(\mathbf{A}^j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \le j}}^{j} \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathscr{A}^{j-i} \right) \\
&= P(\mathbf{A}) + \mathbf{B}(\mathbf{K}\mathscr{A}^{n-1} + \alpha_n \mathbf{K}\mathscr{A}^{n-2} + \ldots + \alpha_2 \mathbf{K}) + \mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{K}\mathscr{A}^{n-2} + \alpha_n \mathbf{K}\mathscr{A}^{n-3} + \\
&+ \ldots + \alpha_3 \mathbf{K}) + \ldots + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{K}
\end{aligned}$$

Fórmula de Ackermann III

Em notação matricial:

$$P(\mathbf{A}) = -\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}\mathscr{A}^{n-1} + \alpha_n\mathbf{K}\mathscr{A}^{n-2} + \ldots + \alpha_2\mathbf{K} \\ \mathbf{K}\mathscr{A}^{n-2} + \alpha_n\mathbf{K}\mathscr{A}^{n-3} + \ldots + \alpha_3\mathbf{K} \\ \vdots \\ \mathbf{K}\end{bmatrix}$$

Lema (Fórmula de Ackermann)

Nas condições do Teorema da Alocação de Polos (Aula 26), a expressão

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -1\end{bmatrix}\mathcal{C}^{-1}P(\mathbf{A}) \tag{27.3}$$

determina a matriz de ganho de estado.

1. Realimentação de Estado (continuação...)

2. Regime Permanente à Entrada Degrau

Regime Permanente à Entrada Degrau

Para que a saída do sistema siga uma referência degrau, a FT (25.8) deve apresentar valor unitário para $s = 0$. Assim:

$$[\mathbf{D} - (\mathbf{C} + \mathbf{DK})(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{KM} = 1 \tag{27.4}$$

É possível provar o seguinte lema:

Lema

O SLIT-C-SISO com realimentação de estado (25.8) seguirá uma referência degrau com erro nulo em regime permanente se a matriz de ganho de referência, $\mathbf{M}$, *satisfizer* (27.4). *Além disto, a solução com menor norma euclidiana é dada por:*

$$\mathbf{M} = \frac{1}{[\mathbf{D} - (\mathbf{C} + \mathbf{DK})(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] \cdot ||\mathbf{K}'||}\mathbf{K}' \tag{27.5}$$