CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 31 - "Sistemas de Controle no Espaço de Estado VIII"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

2 de agosto de 2017

Introdução

- Na Teoria de Lyapunov aplicada a para SLIT-Cs, vimos que todo sistema assintoticamente estável possui uma função de Lyapunov quadrática;
- Como usar este fato para proporcionar estabilidade a sistemas ainda instáveis?
- Em outras palavras, como projetar uma matriz de ganho de estado, $\mathbf{K}$, para estabilizar o sistema?
- Como, ainda, projetar este $\mathbf{K}$ para tornar algum índice de desempenho o melhor possível?
- Os resultados a serem apresentados aqui dependem de estudos de um tópico da Matemática conhecido como Cálculo de Variações;
- Assim sendo, as demonstrações serão omitidas e as afirmações serão tomadas como verdadeiras.

Índices de Desempenho

- O índice de desempenho de um sistema é dado por uma forma integral a ser minimizada:

$$J = \int_0^\infty L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}\, t \tag{31.1}$$

- (31.1) é conhecido como um índice de otimização em horizonte (de tempo) infinito;

Importante!

Fato: Se L for uma forma quadrática em $\begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{u}' \end{bmatrix}'$, então é possível minimizar (31.1) *com uma lei linear da forma (25.6) (com $r = 0$).*

O Regulador Linear Quadrático

Importante!

Considerando o índice geral (31.1)*, um problema de otimização de grande importância é o do Regulador Linear Quadrático (LQR), dado por:*

$$\min_{u} J(u) = \int_{0}^{\infty} [\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u}] \, \mathrm{d}\, t \tag{31.2}$$

onde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{Q}, \mathbf{R} \succeq 0$ *são dados e* $u = \mathbf{K}\mathbf{x}$*.*

- Se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ não for controlável, não se aplica o critério quadrático (nem o LQR);
- Muitos métodos foram (e são) desenvolvidos para este problema;
- Veremos a abordagem via Teoria de Lyapunov.

LQR: Um Caso Simples

Em um SLIT-C autônomo, o índice de desempenho reduz-se a

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\,t$$

Suponha que haja $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{P} \succ 0$ com

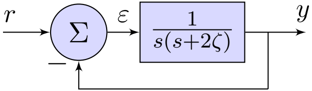
$$\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}) = -\dot{V}(\mathbf{x})$$

Usando (27.5), o sistema é global e assintoticamente estável. Ainda:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\,t = [-V(\mathbf{x})]_0^\infty = V(\mathbf{x}_o) \tag{31.3}$$

Exemplo: Minimização de Erro

Considere o sistema sob excitação degrau unitário:



Encontremos a solução para o problema de minimização de

$$J = \int_0^\infty [(\varepsilon(t))^2 + k(\dot\varepsilon(t))^2] \, \mathrm{d}\, t, \quad k > 0$$

Observe que sua EDO é:

$$\ddot y + 2\zeta \dot y + y = r \overset{\varepsilon = r - y}{\Longrightarrow} \ddot\varepsilon + 2\zeta\dot\varepsilon + \varepsilon = \ddot r + 2\zeta \dot r = 0, \forall t > 0$$

Como $y(0) = \dot y(0) = 0$, então $\varepsilon(0) = 1$ e $\dot\varepsilon(0) = 0$.

Exemplo: Minimização de Erro

Fazendo $x_1 = \varepsilon$ e $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\varepsilon}$, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voltando ao critério de desempenho:

$$J = \int_0^\infty [(\varepsilon(t))^2 + k(\dot{\varepsilon}(t))^2] \,\mathrm{d}\, t = \int_0^\infty \mathbf{x}' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \mathbf{x} \,\mathrm{d}\, t$$

Observando (30.5) e (31.3):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

Exemplo: Minimização de Erro

Donde se obtém:

$$J = \mathbf{x}_o' \mathbf{P} \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta + \dfrac{1+k}{4\zeta} & \star \\ 0{,}5 & \dfrac{1+k}{4\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \zeta + \frac{1+k}{4\zeta}$$

Aplicando o teste da derivada primeira a esta expressão (em relação a ζ):

$$\zeta_{otimo} = \frac{\sqrt{1+k}}{2}$$

Assim, para minimizar a integral do quadrado do erro ($k \to 0$), deve-se fazer $\zeta = 0{,}5$.

LQR em SLIT-C-SISOs

Ao adaptar (31.2) para SLIT-C-SISOs, tem-se:

$$\min_{u} J(u) = \int_0^\infty [\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \rho u^2] \, \mathrm{d}\, t \tag{31.4}$$

- Note que, se ρ for grande, o critério irá reduzir o sinal de controle, $\mathbf{u}$;
- Por outro lado, se $\mathbf{Q}$ for "muito positiva-definida", o critério irá fazer as trajetórias próximas à origem;
- Estas características são conflitantes!

Observação

O que é $\mathbf{Q}$ "muito positiva-definida"? Tome $\alpha \gg 0$ e faça $\mathbf{Q} - \alpha\mathbf{I} \succ 0$.

A Equação Algébrica de Riccati

Teorema

Seja (4.1) um SLIT-C-SISO, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{Q} \succeq 0$ *e* $\rho > 0$. *Se existir* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{P} \succeq 0$, *tal que* (31.5) *valha, então:*

i) *A realimentação de estado* (31.6) *minimiza* (31.4) *em* $V(\mathbf{x}_o)$;

ii) *A origem é global e assintoticamente estável;*

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \rho^{-1}\mathbf{PBB}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{31.5}$$

$$u = -\rho^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{31.6}$$

Observação

(31.5) *é chamada Equação Algébrica de Riccati (ARE). Sua solução não é tão simples quanto a da equação de Lyapunov.*