CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 24 - "Sistemas de Controle no Espaço de Estado I"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

19 de julho de 2017

Introdução

- A análise no espaço de estado pode ser usada para sistemas SISO;
- Para sistemas MIMO, simplifica enormemente a abordagem matemática;
- Projetos avançados de controladores são feitos no espaço de estado:
  - Realimentação de estado;
  - Realimentação estática e dinâmica de saída.
- Alguns detalhes a respeito da notação:
  - Será usada a notação $(\hat{\cdot})$ para TL, no lugar de maiúsculas;
  - Letras em negrito são vetores-coluna (minúsculas) ou matrizes (maiúsculas);
  - Transposições são notadas por $(')$ e transposição do conjugado por $(*)$.

Autovalores, Polos e Representação I

- Foi mostrado em (4.3) que os autovalores de $\mathbf{A}$ são os polos da FT;
- A representação no espaço de estado não é única;
- Tome, então uma transformação linear bijetora (isomorfismo), $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e um vetor $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$. Aplicando a (4.1):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATz} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Bu} \tag{24.1a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{CTz} + \mathbf{Du} \tag{24.1b}$$

Observação

(24.1) *mostra que, com um isomorfismo adequadamente escolhido, pode-se trocar as matrizes de estado* $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$, $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{CT}$ *e* $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{D}$ *e o vetor de estado* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z}$.
O que acontece com os autovalores com a aplicação de $\mathbf{T}$*?*

Autovalores, Polos e Representação II

Lema (Invariância de Autovalores)

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{T}$ *invertível. Então, os autovalores de* $\mathbf{A}$ *e os de* $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ *são iguais.*

Demonstração.

Basta notar que:

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) &= \det(\lambda \mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) \\
&= \det(\mathbf{T}^{-1}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}) \\
&= \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{T}) \\
&= \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}) \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})
\end{aligned}
$$

□

Caso Homogêneo ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$)

Considere a EDO (4.1a), com $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$$

É razoável (pense na série de Taylor) supor a solução da forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_o + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{f}_i t^i \qquad (24.2)$$

com vetores $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^n$ fixos e adequadamente escolhidos. Note que, com esta escolha:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o = \mathbf{f}_o$$

Caso Homogêneo $(\mathbf{u} = \mathbf{0})$

Substituindo (24.2) na EDO:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{f}_i t^{i-1} = \mathbf{A} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{f}_i t^i$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{f}_o = \mathbf{A}\mathbf{x}_o \\
\mathbf{f}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{f}_o = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{x}_o \\
\mathbf{f}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\mathbf{A}^3\mathbf{f}_o = \frac{1}{2\cdot 3}\mathbf{A}^3\mathbf{x}_o \\
&\vdots \\
\mathbf{f}_i &= \frac{1}{i!}\mathbf{A}^i\mathbf{f}_o = \frac{1}{i!}\mathbf{A}^i\mathbf{x}_o
\end{aligned}$$

Caso Homogêneo $(\mathbf{u} = \mathbf{0})$

Substituindo em (24.2):

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!}}_{e^{\mathbf{A}t}} \mathbf{x}_o \tag{24.3}$$

Importante!

- *A série $e^{\mathbf{A}t}$ é chamada matriz exponencial de $\mathbf{A}t$;*
- *A matriz exponencial de $\mathbf{A}t$ converge absolutamente para todo t finito!*
- *$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)$ é a matriz de transição de estado para SLIT-Cs, pois:*

$$\mathbf{\Phi}(t - t_o)\mathbf{x}(t_o) = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}(t) \tag{24.4}$$

transita o estado do tempo t_o para o tempo t.

A Matriz Exponencial $e^{\mathbf{A}}$

Lema (Propriedades da Matriz Exponencial)

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, e* $a, b \in \mathbb{R}$*. Valem, então, as propriedades:*

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I} \tag{24.5a}$$

$$e^{(a+b)\mathbf{A}} = e^{a\mathbf{A}} e^{b\mathbf{A}} \tag{24.5b}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \tag{24.5c}$$

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}} = \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{B}} \mathbf{A} \tag{24.5d}$$

$$e^{\mathbf{A}'} = (e^{\mathbf{A}})' \tag{24.5e}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \tag{24.5f}$$

Caso Homogêneo via TL

Aplicando a TL a (4.1a), com $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}\} = \mathcal{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x}\} \Rightarrow s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_o = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_o$$

Aplicando a TIL ao resultado anterior, escreve-se:

$$\mathbf{x} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_o \tag{24.6}$$

Observação

Comparando (24.3) *e* (24.6)*:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = e^{\mathbf{A}t} \tag{24.7}$$

Exemplo

Solucionemos o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o.$

Observe que:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Para inverter esta matriz, usamos:

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo

Aplicando a TIL:

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\right\}$$

$$\overset{\text{EFP}}{=} \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

E a solução é imediata com o uso de (24.6), para qualquer condição inicial.

Caso Não-Homogêneo ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$)

Considere a EDO (4.1a):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$$

Rearranjando a EDO e pré-multiplicando por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}\left[\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x}\right] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade corresponde a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}]$.

$$e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}\Big|_0^t = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\,\tau$$

Portanto:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\,\tau \qquad (24.8)$$

Caso Não-Homogêneo via TL

Aplicando a TL a (4.1):

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}\} = \mathcal{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}\} \Rightarrow s\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}_o = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_o+\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}})$$

Aplicando a TIL ao resultado anterior, escreve-se:

$$\mathbf{x} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_o + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}\} \tag{24.9}$$

Observação

(24.8) *é obtida de* (24.9) *com a aplicação do Teorema da Convolução.*

Exemplo

Solucionemos o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o, \quad u = \tilde{1}.$

Usando (24.8) com os resultados obtidos no exemplo anterior:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\,\tau = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_o + $$
$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \mathrm{d}\,\tau$$

Portanto:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_o + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$