CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 26 - “Sistemas de Controle no Espaço de Estado III”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

22 de julho de 2017

1. Forma Canônica Controlável de SLIT-C-SISO

2. Realimentação de Estado (continuação...)

Forma Canônica Controlável de SLIT-C-SISO

Dada a EDO (4.1), se pode escrever sua FCC com:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_o}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} & \dots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{26.1a}$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_o & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_n \end{bmatrix} u \tag{26.1b}$$

Observação

- *A saída de interesse,* (26.1b)*, não corresponde à da EDO (4.1);*
- *Obter* (26.1) *é um exercício!*

Alocação de Polos I

- Neste problema, iremos impor uma dinâmica desejada ao sistema (4.1), transformando-o em (25.7);
- Para tanto, devemos projetar a matriz de realimentação de estado, $\mathbf{K}$ de forma a localizar os polos de malha fechada na região Ω desejada;
- Perguntas:
  - Isto é possível?
  - Se for, como se faz o projeto da matriz $\mathbf{K}$?
  - Existe alguma restrição aos polos impostos ao sistema em malha fechada?

Alocação de Polos II

- Seja um SLIT-C-SISO com realimentação de estado, dado por (4.1), (25.6) e $r = 0$.
- Considere, ainda, uma condição inicial, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o$, devida a uma perturbação.
- Sua solução, a partir de (24.3) torna-se:

$$\mathbf{x} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BK})t}\mathbf{x}_o \qquad (26.2)$$

Alocação de Polos: Condição Suficiente I

Lema

Seja $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times 1}$ *um par controlável,* $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times 1}$ *o par canônico controlável e* $\mathcal{C}$ *e* $\tilde{\mathcal{C}}$ *suas respectivas matrizes de controlabilidade. Então*

$$\mathbf{T} = \mathcal{C}\tilde{\mathcal{C}}^{-1} \tag{26.3}$$

é a transformação de similaridade entre estes pares.

Demonstração.

Se existe a similaridade, então $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}})$. Note que:

$$\mathcal{C} \overset{(25.2)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} & \ldots & \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\tilde{\mathcal{C}}$$

□

Alocação de Polos: Condição Suficiente II

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ os autovalores escolhidos (possivelmente em pares conjugados). Então, pode-se escrever o polinômio característico desejado:

$$P(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} s^i, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \tag{26.4}$$

Seja $\mathbf{T}$ a similaridade que leva $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ em $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Logo, tem-se:

$$u = \mathbf{Kx} = \mathbf{KT}\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \tag{26.5}$$

Assim, referindo ao sistema em FCC, tem-se, em (4.1):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}u = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT})\tilde{\mathbf{x}}$$

Deseja-se fazer (lembre da invariância de autovalores)

$$\begin{aligned} P(s) = \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})) &= \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT})) \\ &= \det(s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{KT})) \end{aligned}$$

Alocação de Polos: Condição Suficiente III

Por outro lado

$$\det(s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}\mathbf{T})) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ a_1 - k_1 & a_2 - k_2 & a_3 - k_3 & \dots & a_{n-1} - k_{n-1} & s + a_n - k_n \end{bmatrix}$$

$$= s^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - k_{i+1}) s^i$$

Donde sai a condição:

$$k_i = a_i - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{26.6}$$

Alocação de Polos: Condição Suficiente IV

- As condições (26.6) sempre podem ser atendidas, se o sistema for controlável;
- Assim, pode-se enunciar o seguinte

Teorema

Se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times 1}$ *for controlável, então* $\exists \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, *tal que os autovalores de* $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ *podem ser alocados em qualquer posição do plano complexo, desde que os autovalores complexos ocorram em pares conjugados.*

- A condição do teorema é também necessária!!!!!!

Alocação de Polos: Procedimento de Projeto

1º) Verifique se o sistema dado é controlável;

2º) Escreva o polinômio característico de $\mathbf{A}$:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} s^i \qquad (26.7)$$

3º) Determine $\mathbf{T}$ com (26.3) (se necessário, use (26.1) também);

4º) Determine o polinômio característico desejado com (26.4);

5º) Determine a matriz de ganho de realimentação de estado com (26.5) e (26.6).

Exemplo

Posicione os autovalores em $-2 \pm j4$ e -10 para o SLIT-C com matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>1º passo</u>: Matriz de controlabilidade

$$\det \mathcal{C} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema controlável}$$

<u>2º passo</u>: Polinômio característico

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 1 \\ 1 & s+5 & 0 \\ 1 & 5 & s+1 \end{bmatrix} = s^3 + 6s^2 + 5s + 1$$

Exemplo

3º passo: Transformação de similaridade
Com o polinômio característico do passo anterior e observando (26.1a):

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(26.3)}{\Rightarrow} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4º passo: Polinômio desejado

$$P(s) = (s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

5º passo: Determinação de $\mathbf{K}$
Com (26.6):

$$\mathbf{KT} = \begin{bmatrix} -199 & -55 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -199 & -55 & 47 \end{bmatrix}$$