CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 05 - “Modelagem de Sistemas Dinâmicos III: Sistemas Mecânicos”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

28 de abril de 2017

1. Sistemas Mecânicos Translacionais

2. Sistemas Mecânicos Rotacionais

Sistemas Mecânicos: Forças e Posições

Em Sistemas Mecânicos, em geral, relaciona-se entre forças e posições;

Observação

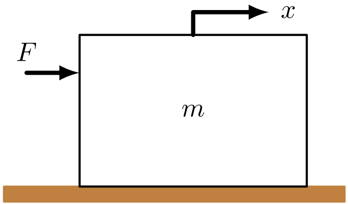
Para evitar erro na modelagem de Sistemas Mecânicos, pergunte-se:

> *"Em quem a força é aplicada?"*

Devemos, então, modelar os três elementos principais dos sistemas mecânicos:

- Massa;
- Mola linear;
- Amortecedor viscoso.

Sistemas Mecânicos: Massa



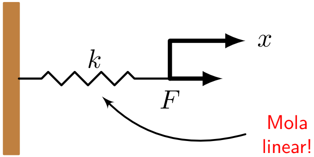
A relação força/posição é dada pela 2ª lei de Newton:

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}\,t} = m\dot{v} = m\ddot{x} \tag{5.1}$$

Ainda, a massa retém energia cinética, segundo a relação:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \tag{5.2}$$

Sistemas Mecânicos: Mola Linear



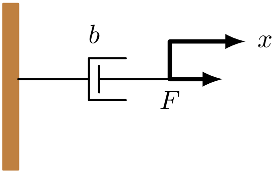
A relação força/posição é dada pela 2ª lei de Hooke:

$$F = kx \tag{5.3}$$

Ainda, a mola retém energia potencial elástica, segundo a relação:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.4}$$

Sistemas Mecânicos: Amortecedor



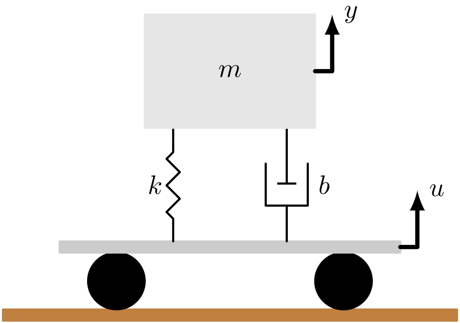
- O amortecedor linear é constituído por um êmbolo envolto por óleo: atrito viscoso!
- A relação força/posição é dada por

$$F = b\dot{x} \tag{5.5}$$

Observação

O amortecedor, ao contrário dos elementos anteriores, dissipa energia!

Exemplo: Suspensão Automotiva



Força da mola sobre o bloco

$$F_{\text{mola}} = k(u - y)$$

Força do amortecedor sobre o bloco

$$F_{\text{amort}} = b(\dot{u} - \dot{y})$$

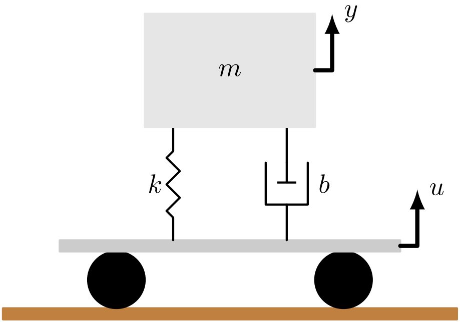
Com a 2ª lei de Newton:

$$k(u - y) + b(\dot{u} - \dot{y}) = m\ddot{y}$$

Logo:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

Exemplo: Suspensão Automotiva



Ao aplicar a TL:

$$G(s) = \frac{\frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Ou, no espaço de estado:

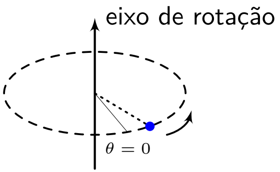
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ \frac{b}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

1. Sistemas Mecânicos Translacionais

2. Sistemas Mecânicos Rotacionais

Momento de Inércia



A relação torque/ângulo para uma partícula:

$$|\vec{T}| = \left|\frac{\mathrm{d}(\vec{d} \times \vec{p})}{\mathrm{d}\, t}\right| = |\vec{d} \times \dot{\vec{p}}| = |\vec{d} \times m\ddot{\vec{d}}| = \underbrace{m|\vec{d}|}_{J}\, \dot{\theta} \tag{5.6}$$

Para um corpo rígido:

$$J = \int_{\text{corpo}} d^2 \,\mathrm{d}\, m \tag{5.7}$$

Molas e Amortecedores Torcionais

- Na rotação, tem-se molas com relação entre torque e ângulo de deformação:

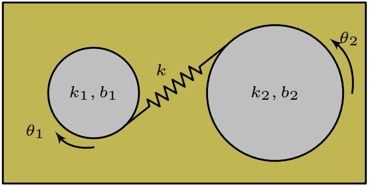
$$T = k\theta \tag{5.8}$$

- Temos amortecedores com relação entre torque e velocidade angular;

$$T = b\dot{\theta} \tag{5.9}$$

- Cuidado! Verifique as unidades de b em (5.3) e (5.8) e de k em (5.5) e (5.9).

Exemplo: Pêndulo Torcional



Para cada cilindro, tem-se:

$$J_i\ddot{\theta}_i = -T_m - b_i\dot{\theta}_i - k_i\theta_i, \quad i = 1, 2$$

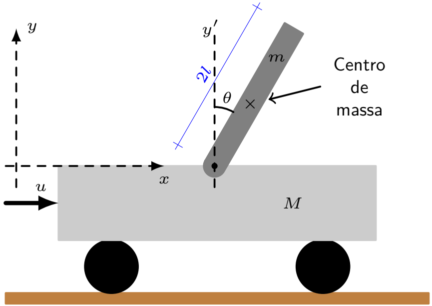
O torque devido à mola k é dado por:

$$T_m = r_iF_m = r_ik(r_i\theta_i - r_j\theta_j), \quad j = 2, 1$$

Combinando os resultados anteriores:

$$J_i\ddot{\theta}_i + b_i\dot{\theta}_i + (k_i + kr_i^2)\theta_i - r_ir_jk\theta_j = 0$$

Exemplo: Pêndulo Invertido



Observação

O modelo não é linear!

Coordenadas do centro de massa:

$$x_g = x + l \operatorname{sen}\theta$$
$$y_g = l\cos\theta$$

Rotação de (x_g, y_g) em relação à polia:

$$J\ddot{\theta} = F_y l \operatorname{sen}\theta - F_x l\cos\theta$$

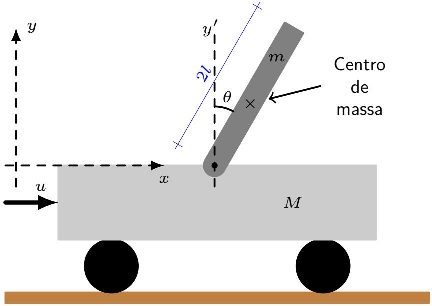
As forças na haste e no carro são:

$$F_x = m\ddot{x}_g = m\ddot{x} + ml\frac{\mathrm{d}^2(\operatorname{sen}\theta)}{\mathrm{d}\,t^2}$$

$$F_y - mg = m\ddot{y}_g = ml\frac{\mathrm{d}^2(\cos\theta)}{\mathrm{d}\,t^2}$$

$$M\ddot{x} = u - F_x$$

Exemplo: Pêndulo Invertido



Para $\theta \approx 0$:

$$J\ddot{\theta} = F_y l\theta - F_x l$$
$$F_x = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$$
$$F_y = mg$$
$$M\ddot{x} = u - F_x$$

Donde se obtém:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$(J+ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta + ml\ddot{x} = 0$$