CONTROLE E SERVOMECANISMOS

Engenharia da Computação

Aula 16 - “Lugar das Raízes I: Análise”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

12 de junho de 2017

1. Introdução
2. Critérios para o Traçado
3. Alocação de Polos

Introdução

Observação

Os polos de malha fechada são chamados raízes do sistema.

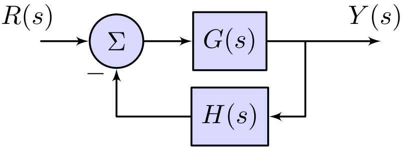
- A localização das raízes determina:
  - a estabilidade (aula 13), e;
  - o desempenho do sistema (aulas 08 e 09).
- O cálculo das raízes pode ser feito numericamente;
- Pode-se utilizar o Critério de Routh-Hurwitz, também;

Importante!

A análise do Lugar das Raízes (LR) ("root locus") determina a mudança da posição das raízes, à medida em que algum parâmetro do sistema é alterado.

Conceitos Preliminares I

Considere o sistema de controle e (3.9):



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Considere, em $G(s)$, a inclusão do compensador.
- Para encontrar o LR, deve-se resolver:

$$G(s)H(s) = -1 \tag{16.1}$$

Importante!

O método LR, determina os polos da FTMF, a partir de informações da FTMA. Logo, não é necessário determinar a FTMF!

Conceitos Preliminares II

Como as raízes são complexas, pode-se reescrever (16.1):

$$|G(s)H(s)| = 1 \tag{16.2a}$$

$$\arg(G(s)H(s)) = 180^\circ(2k+1), k \in \mathbb{N} \tag{16.2b}$$

Considere a forma fatorada em polos e zeros da FTMA (13.2c):

$$G(s)H(s) = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = K\frac{\prod_{j=1}^{m}|s-z_j|e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|e^{j\varphi_i}} \tag{16.3}$$

Importante!

Como determinar as raízes à medida em que $K \in (0,\infty)$ é alterado?

Conceitos Preliminares III

As condições (16.2) são reescritas com (16.3):

$$K = \prod_{i=1}^{n} |s - p_i| \bigg/ \prod_{j=1}^{m} |s - z_j| \tag{16.4a}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \psi_j - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 180^\circ(2k+1), k \in \mathbb{N} \tag{16.4b}$$

Observação

- *Com a forma racional para a FTMA, se reescreve* (16.1)*:*

$$D(s) + K\,N(s) = 0 \tag{16.5}$$

- *É evidente que* $\mathrm{gr}(D) = n \geq m = \mathrm{gr}(N)$*;*
- *Cada polo gera uma raiz e seu traçado é dito um ramo do LR.*

1^{a} Regra: Início e Fim do Traçado e Eixo de Simetria

Lema (Simetria)

O eixo real é um eixo de simetria do LR

Demonstração.

Basta notar que a equação característica tem coeficientes todos reais, logo, as raízes complexas aparecem em pares conjugados. $\square$

Lema (Início e Fim do Traçado)

Os ramos do LR iniciam-se em seu polo e terminam em um zero da FTMA.

Demonstração.

Basta fazer $k \to 0$ e $k \to \infty$ em (16.5). $\square$

2ª Regra: LR sobre o Eixo Real

Lema (LR sobre o Eixo Real)

Todos os pontos do eixo real que estejam à esquerda de um número ímpar de polos e zeros fazem parte do LR.

Demonstração.

Seja s um ponto do eixo real. Assim, se:

- $\varphi, \psi \in \mathbb{C}$: Então, $\varphi + \psi = 0$;
- $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ à esquerda: Então, $\varphi = \psi = 0$;
- $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ à direita: Então, $\varphi = \psi = 180°$. Neste caso, se o número for ímpar, atende-se a (16.4).

□

3ª Regra: Retas Assíntotas

Observação

Cada ramo LR inicia em um polo e termina em um zero. *E se* $n > m$*?*

Lema (Retas Assíntotas)

O LR possui $n - m$ *ramos tendendo ao infinito assintoticamente a* $n - m$ *retas com coeficientes linear e angular:*

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n - m} \tag{16.6a}$$

$$\theta_{ak} = \frac{2k - 1}{n - m} 180^\circ, \quad k = 1, 2, \ldots, n - m \tag{16.6b}$$

4ª Regra: Ramificação do LR

Observação

Se existe LR no eixo real e fora dele, de onde partem tais ramos?

Lema (Ramificação)

Se $s_b \in \mathbb{C}$ é tal que existe cruzamento de ramos do LR, então:

$$D(s_b)N'(s_b) = N(s_b)D'(s_b) \tag{16.7}$$

Demonstração.

Note que s_b é raiz múltipla de (16.5), para um $K > 0$ bem escolhido. Logo, é raiz da derivada em relação a s de (16.5), para o mesmo K. Combinando estes resultados, chega-se a (16.7). □

Sumário das Regras para o Traçado do LR

1º) Posicione os polos $(K = 0)$ e zeros $(K \to \infty)$ no plano complexo;

2º) Determine o LR sobre o eixo real;

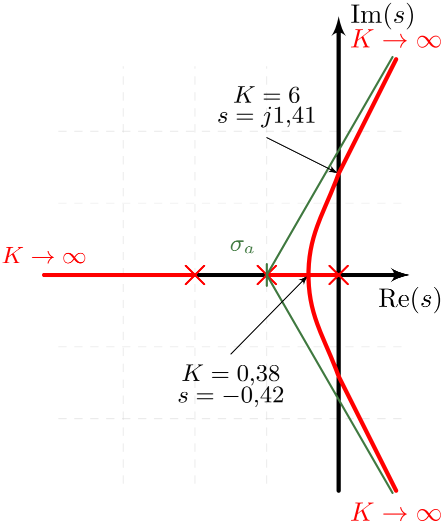
3º) Determine as assíntotas do LR com (16.6);

4º) Determine os pontos de ramificação com os respectivos ganhos K com (16.7);

5º) Determine os pontos de cruzamento do eixo imaginário com os respectivos ganhos K, com o critério de Routh-Hurwitz;

6º) Determine os ângulos de partida e de chegada com (16.4b);

Exemplo: $G(s)H(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$



Assíntotas com (16.6):

$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3-0} = -1$$

$$\theta_{ak} = (2k-1)60^\circ$$

Ramificação com (16.7) e (16.4a):

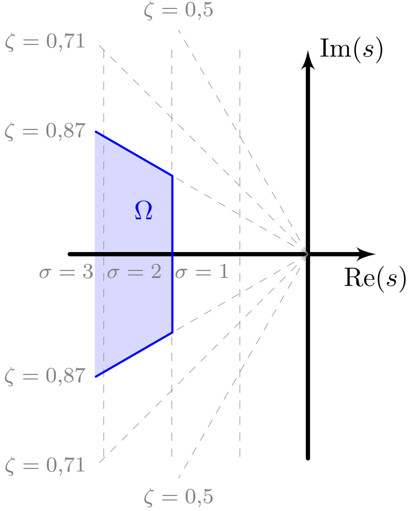
$$3s^2 + 6s + 2 = 0 \begin{cases} s_{b1} = -0{,}42 \\ s_{b2} = -1{,}58 \end{cases}$$

$$K(s_{b1}) = |s_{b1}| \cdot |s_{b1}+1| \cdot |s_{b1}+2| = 0{,}38$$

Cruzamento de $\mathrm{Im}(s)$:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & 6-K & \\ s^0 & K & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ (s = \pm\sqrt{2}) \\ (K = 6) \\ \\ \end{array}$$

A Região Ω de Desempenho Garantido



- Overshoot, de (9.18):

$$\exp\left(-\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) < M_{max} \qquad (16.8)$$

- Tempo de acomodação, de (9.19):

$$\sigma_{max} > -\frac{\ln(\varepsilon)}{t_{\varepsilon max}} \qquad (16.9)$$

- Para $M_{max} < 0{,}4\%$ e $\varepsilon(2\text{s}) < 2\%$...

Observação

Desempenho garantido: o desempenho real é, pelo menos, o das especificações!