UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Facom - Faculdade de Computação

Curso: Engenharia de Computação — Data: 03/07/2017

Professor: Dr. Victor Leonardo Yoshimura — Disciplina: Controle e Servomecanismos

Acadêmico:____ Matrícula:________________

Prova P2 - Solução Padrão

Questão 1 (2 pontos) *Dada a planta:*

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

a) *Projete um controlador via equação diofantina de forma a assegurar:*

- *Erro estático nulo para a posição;*
- *Comportamento dominante de segunda ordem;*
- *Tempo de acomodação inferior a* 12s *(critério 2%);*
- *Overshoot inferior a* 10%*;*

b) *Avalie o efeito do posicionamento de zeros após o projeto feito.*

Solução:

a) Como o erro estático deve ser nulo, deve-se ter um polo na origem para a FT do controlador. Este polo será artificialmente posto na planta, gerando a planta artificial:

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 6s}$$

Com a finalidade de garantir solução para a equação diofantina, faz-se $m_c = n_g - 1 = 2$. Logo:

$$\tilde{C}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_o}{a_1 s + a_o}$$

Escrevendo os blocos de Sylvester, tem-se:

$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}' \qquad \mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

Para overshoot inferior a 10%, faz-se $\zeta \geq 0{,}6$ e para $t_s < 12\text{s}$, faz-se $\sigma > 0{,}333\text{s}^{-1}$. Escolhendo $\zeta = 0{,}65$ e $\sigma = 0{,}5\text{s}^{-1}$, chega-se a $-0{,}5 \pm j0{,}58$. Para comportamento dominante de segunda ordem, as demais raízes devem ter parte real 5 vezes superior, pelo menos. Escolhamos -5 como raiz dupla. Assim:

$$Q_{al}(s) = (s + 0{,}5 + j0{,}58)(s + 0{,}5 - j0{,}58)(s+5)^2 = s^4 + 11s^3 + 35{,}6s^2 + 30{,}9s + 14{,}7$$

Para o qual a solução fica sendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 14{,}7 & -5{,}1 & -0{,}4 \end{bmatrix}'$$

Logo, o compensador fica:

$$C(s) = \frac{-0{,}4s^2 - 5{,}1s + 14{,}7}{s^2 + 6s}$$

b) Neste projeto, os zeros do compensador (que também são de malha fechada), estão em $-15{,}2$ e em $2{,}4$. Enquanto o primeiro está distante o suficiente para ser considerado desprezível na resposta, o segundo está no SPD, o que leva a um sistema de fase não-mínima, o que leva a um sistema com atraso considerável na resposta, devido à partida em sentido oposto ao do degrau.

□

Questão 2 (3 pontos) *Considere a planta:*

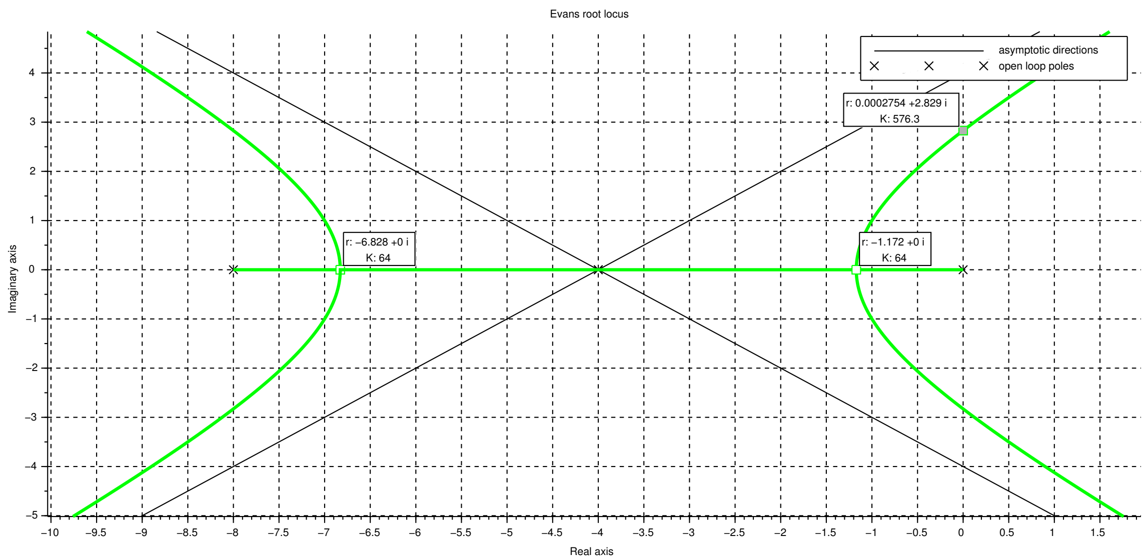
$$G(s) = \frac{10}{s(s+4)^2(s+8)}$$

a) Esboce seu lugar das raízes;

b) Determine a faixa de ganhos de um compensador P (se existir), de forma a garantir:

- *Erro estático de posição nulo;*
- *Comportamento dominante de segunda ordem, sem oscilações.*

Solução:



a) Desenvolvamos em passos:

- Lugar das raízes sobre o eixo real: É o intervalo $(-8, 0)$.
- Assíntotas: São quatro. A partir de (16.6), o ponto de encontro é -4 e os ângulos são $\pm 45°$ e $\pm 135°$.
- Ramificações: Resolvendo (16.7), chega-se a $-1{,}17$, -4 e $-6{,}83$. O primeiro e o último são soluções, já que fazem parte do lugar das raízes. Calculando o ganho nestes pontos, chega-se igualmente a $K = 6{,}4$.
- Cruzamento do eixo imaginário: Usando o critério de Routh na FTMF: O valor $k_p = 57{,}6$ anula a

$$\begin{array}{c|lll} s^4 & 1 & 80 & 10k_p \\ s^3 & 16 & 128 & \\ s^2 & 72 & 10k_p & \\ s^1 & 2359296 - 40960k_p & & \\ s^0 & 10k_p & & \end{array}$$

  linha s^1. Usando o polinômio auxiliar chega-se a $s = \pm j2{,}83$, como os pontos onde o lugar das raízes atravessa o eixo imaginário.

b) Observando o lugar das raízes, para comportamento de segunda ordem, deve-se resolver:

$$6s_x = -8 \qquad \Longrightarrow \qquad s_x = 1{,}33 \ (K = 6{,}32)$$

Assim a faixa de ganhos é de 6,32 a 6,4.

$\square$

Questão 3 (3 pontos) *Considere a planta de um sistema de controle de posição angular de satélite:*

$$G(s) = \frac{500}{s^2}$$

Projete um compensador pelo método do lugar das raízes de tal forma a assegurar:

- *Erro estático nulo para a posição;*
- *Comportamento dominante de segunda ordem;*
- *Tempo de acomodação inferior a* 1s *(critério 2%);*
- *Overshoot inferior a* 10%.

Avalie o efeito do posicionamento de zeros após o projeto feito.

Solução:

Não é necessário fazer o tratamento de erro para este sistema. Pelo tempo de acomodação, deve-se fazer $\sigma \geq 4\text{s}^{-1}$ e, para o overshoot, deve-se fazer $\zeta > 0{,}6$. Escolhamos, então, como raízes dominantes $s_d = -4 \pm j5{,}4$. Como temos um problema em tornar o sistema estável, somos levados a projetar um compensador avanço de fase. A deficiência angular fica:

$$\varphi = 180^\circ - \arg(G(s_d)) = 180^\circ - 2\arg(-4 + j5{,}4) = 73^\circ$$

Posicionemos o polo do controlador em -50 (a fim de dar comportamento dominante de segunda ordem) e determinemos seu zero:

$$\arg(C(s_d)) = 73^\circ \Rightarrow \arg(-4 + j5{,}4 - z) = \underbrace{73^\circ + \arg(-4 + j5{,}4 + 50)}_{79{,}7^\circ} \Rightarrow z \approx -5$$

Determinemos o ganho do compensador com o critério de magnitude:

$$\left| k_c \frac{s_d + 5}{s_d + 50} \frac{500}{s_d^2} \right| = 1 \Rightarrow k_c \approx 0{,}76$$

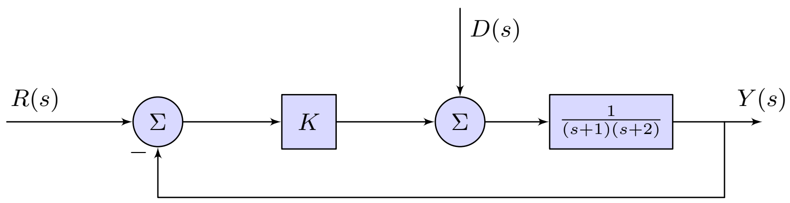
Assim, o compensador fica:

$$C(s) = 0{,}76 \frac{s + 5}{s + 50}$$

Como o zero do compensador (que também é do sistema em malha fechada), está muito próximo do par dominante (menos de 4 vezes a parte real das raízes dominantes), então é de se esperar que haja efeito significativo sobre o overshoot e este projeto deveria passar por uma segunda etapa[1].

□

Questão 4 (2 pontos) *Considere o sistema de controle sujeito a perturbação da figura a seguir:*



Determine:

a) *O valor do ganho de um compensador P para obter overshoot igual a* 16%;

b) *O máximo ganho que uma perturbação senoidal irá apresentar na saída.*

Solução:

a) Dada a configuração de polos, o lugar das raízes toma aspecto de cruz, com eixo horizontal entre -1 e -2 e eixo vertical passando por $-1{,}5$. Ainda, o overshoot exigido requer $\zeta = 0{,}5$. Assim, as raízes desejadas são $s_d = -1{,}5 \pm j2$. Assim, com o critério de magnitude:

$$\left| \frac{K}{(s_d + 1)(s_d + 2)} \right| = 1 \Rightarrow K = 7$$

[1] Porém, para o exercício aqui proposto, isto não será exigido.

b) A FT da perturbação para a saída é:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 9}$$

Fazendo a substituição $s = j\omega$ e notando que o máximo ganho será dado no mínimo da magnitude do denominador da Função Transferência (FT) calculada. Deve-se fazer um estudo de mínimo da função:

$$f(\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 81$$

Aplicando o teste da derivada primeira, obtém-se os pontos críticos $-2{,}24$, 0 e $2{,}24$, dos quais apenas o último é uma solução viável e, de fato, aplicando o teste da derivada segunda, chega-se à conclusão de que se trata de um ponto de mínimo. Assim, o ganho fica:

$$G_{max} = \left|\frac{1}{s^2 + 3s + 9}\right|_{s=j2{,}24} \approx 0{,}128$$

□