# CONTROLE E SERVOMECANISMOS
## Engenharia da Computação
### Aula 04 - "Modelagem de Sistemas Dinâmicos II: Espaço de Estado"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

28 de abril de 2017

# Introdução

Controle Moderno: É o estudo de sistemas no espaço de estado (domínio do tempo). Alguns termos:

- Estado: É o menor conjunto de variáveis cujo conhecimento em $t_o$, juntamente com o da entrada em $t \geq t_o$, determina completamente o comportamento do sistema para $t \geq t_o$;
- Variáveis de estado: Cada uma das variáveis com compõem o estado;
- Espaço de estado: O espaço $\mathbb{R}^n$, cujos eixos representam cada uma das variáveis de estado;
- Equações do espaço de estado: São equações que relacionam as entradas, $u$, as saídas, $y$, e as variáveis de estado, $x$, com as derivadas destas, $\dot{x}$.

# Espaço de Estado

Em forma matricial, podemos representar um SLIT-C no espaço de estado como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.1a}$$

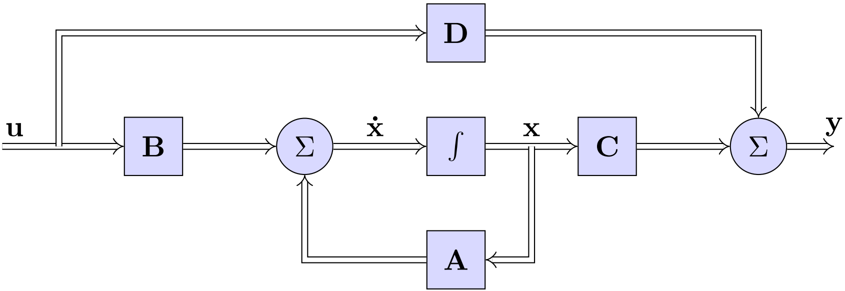
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{4.1b}$$

onde:

- $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de estado)
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz de entrada)
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (matriz de saída)
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (matriz de transmissão direta)

# Espaço de Estado

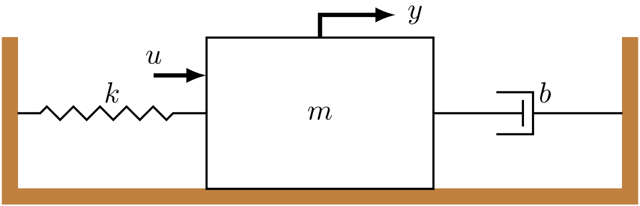
Em Diagrama de Blocos:




## Observação

*As matrizes* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ *serão funções do tempo, caso o sistema seja variante no tempo.*

# Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor



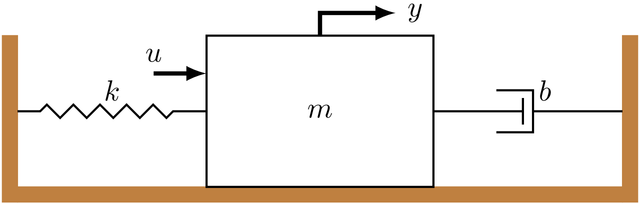

Força da mola sobre o bloco (lei de Hooke):

$$F_{\text{mola}} = -ky$$

Força do amortecedor sobre o bloco (atrito viscoso):

$$F_{\text{amort}} = -b\dot{y}$$

# Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor



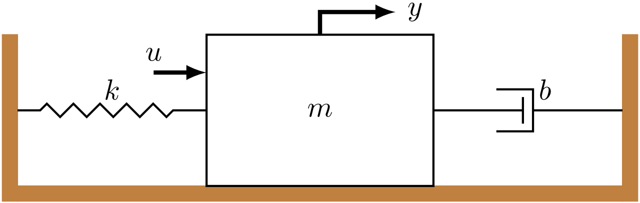

Pela lei de Newton:

$$u + F_{\text{mola}} + F_{\text{amort}} = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u$$

Escolhendo as variáveis de estado $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0x_1 + 1x_2 + 0u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{m}u\end{aligned}$$

# Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor




Portanto:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{b}{m} & -\dfrac{k}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

# Funções Transferência e Espaço de Estado

Considere um SLIT-C-SISO ($m = p = 1$) descrito por (4.1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Aplicando a TL:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$
$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s)$$

Admitindo que $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ seja invertível:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{4.2}$$

# Funções Transferência e Espaço de Estado

Lembrando que:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

Tem-se:

$$G(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} (\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{D}) \tag{4.3}$$

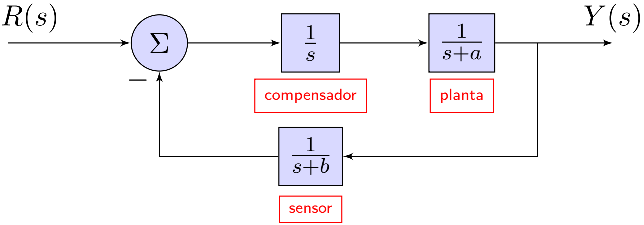
## Observação

i) *De acordo com* (4.3), *os polos da Função Transferência (FT) são os autovalores de* $\mathbf{A}$*;*

ii) *Se o sistema não for SISO, então* (4.2) *resultará em uma Matriz Transferência (MT)!*

# Exemplo

Obtenhamos uma representação no espaço de estado para o sistema:

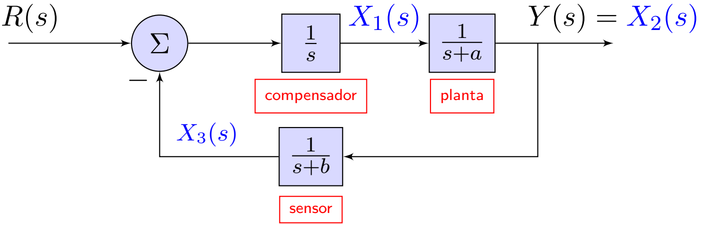



## Observação

*A solução a ser apresentada não é a única! Fica como exercício encontrar uma forma de mostrar todas as representações possíveis no espaço de estado para o diagrama de blocos apresentado.*

# Exemplo

Escolhendo as saídas dos blocos como variáveis de estado:

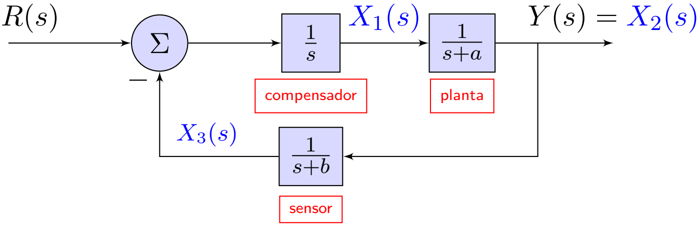



Donde:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s}[R(s) - X_3(s)] \\ X_2(s) &= \frac{1}{s+a} X_1(s) \\ X_3(s) &= \frac{1}{s+b} X_2(s) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} sX_1(s) &= -X_3(s) + R(s) \\ sX_2(s) &= X_1(s) - aX_2(s) \\ sX_3(s) &= X_2(s) - bX_3(s) \end{aligned}$$

# Exemplo

Escolhendo as saídas dos blocos como variáveis de estado:




Aplicando a TIL:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

# Representação de SLIT-Cs no Espaço de Estado

Considere um SLIT-C-SISO, como em (3.1):

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overset{\langle i \rangle}{y} = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \overset{\langle j \rangle}{u}$$

- Consideraremos apenas os casos onde $n \geq m$ (Por quê?);
- Dois casos podem ser estudados:
  - O sistema não envolve derivadas da entrada: $m = 0$;
  - O sistema envolve derivadas da entrada: $0 < m \leq n$.

# Representação de Sistemas: caso $m = 0$

Com $m = 0$, (3.1) fica:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overset{\langle i \rangle}{y} = \beta_o u$$

Neste caso, uma escolha <u>conveniente</u> de variáveis de estado é:

$$x_i = \overset{\langle i-1 \rangle}{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \overset{\langle i-2 \rangle}{y} = \dot{x}_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.4}$$

Aplicando (4.4) a (3.1), com $m = 0$:

$$\dot{x}_n = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_n} x_{i+1} + \frac{\beta_o}{\alpha_n} u \tag{4.5}$$

# Representação de Sistemas: caso $m = 0$

Com (4.4)-(4.5), escreve-se:

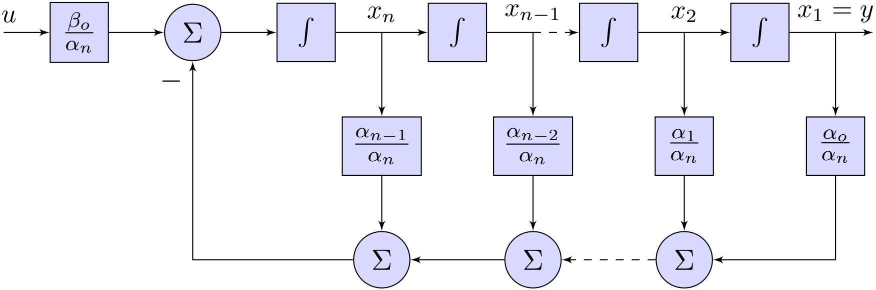
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_o}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} & \dots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\beta_o}{\alpha_n} \end{bmatrix} u \tag{4.6a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{4.6b}$$

É possível aplicar a TL em (3.1), originando

$$G(s) = \frac{\beta_o}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i} \tag{4.7}$$

# Representação de Sistemas: caso $m = 0$




$$x_i = \overset{\langle i-1\rangle}{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\overset{\langle i-2\rangle}{y} = \dot{x}_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\dot{x}_n = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_n} x_{i+1} + \frac{\beta_o}{\alpha_n} u$$

# Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

(3.1) estará possivelmente completa ($m = n$).

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overset{\langle i \rangle}{y} = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \overset{\langle j \rangle}{u}$$

- Se não estiver completa, faça alguns (mas, não todos!) $\beta_j = 0$;
- Não é possível proceder com (4.4) (solução inconsistente, não-única).

Uma abordagem é definir

$$\dot{x}_1 = -\alpha_o y + \beta_o u \tag{4.8}$$

Substituindo e integrando em (3.1):

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} \overset{\langle i \rangle}{y} - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j+1} \overset{\langle j \rangle}{u} = x_1$$

# Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

A partir de $x_2$, faz-se (analogamente)

$$\dot{x}_2 = x_1 - \alpha_1 y + \beta_1 u \tag{4.9}$$

Novamente, substituindo no resultado anterior

$$\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_{i+2} \overset{\langle i \rangle}{y} - \sum_{j=0}^{n-2} \beta_{j+2} \overset{\langle j \rangle}{u} = x_2$$

Continuando e obtendo $\dot{x}_n$:

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u \tag{4.10}$$

Tem-se

$$\alpha_n y - \beta_n u = x_n \tag{4.11}$$

# Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

Com (4.8)-(4.11), escreve-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_o}{\alpha_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_o - \alpha_o \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \beta_1 - \alpha_1 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \beta_2 - \alpha_2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_{n-2} \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \frac{\beta_n}{\alpha_n} \end{bmatrix} u \qquad (4.12a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{\beta_n}{\alpha_n} \end{bmatrix} u \qquad (4.12b)$$

**Observação**

*Em SLIT-C-SISOs, haverá transmissão direta se, e somente se,* $n = m$*!*

# Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

É possível aplicar a TL em (3.1), originando

$$G(s) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \beta_j s^j}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i} \tag{4.13}$$

**Exercício**

*Desenhe o diagrama de blocos para o caso* $0 < m \leq n$.