CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 02 - “Transformada de Laplace”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

24 de abril de 2017

Introdução

- Uma variável complexa, s, é aquela que se escreve como

$$s = \sigma + j\omega \tag{2.1}$$

- Uma função complexa, $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, é aquela que se escreve como

$$F(s) = F_x(s) + jF_y(s) \tag{2.2}$$

Importante!

A unidade imaginária, j, tem a seguinte propriedade:

$$j^2 = -1 \tag{2.3}$$

Magnitude, Ângulo e Conjugado

- A magnitude do número complexo s é

$$|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \tag{2.4}$$

- O ângulo do número complexo s é

$$\arg(s) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \tag{2.5}$$

- O conjugado do número complexo s é

$$\bar{s} = \sigma - j\omega \tag{2.6}$$

Importante!

As definições de magnitude, ângulo e conjugado se aplicam de forma análoga a uma função complexa $F(s)$.

Funções Analíticas

Definição

Uma função complexa, F, é dita analítica em uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ se, $\forall s \in \Omega$, se verifica a existência da derivada de F em relação a s em qualquer ordem, ou seja:

$$s \in \Omega \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, s^n} F(s) \in \mathbb{C}, \forall s \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema (Condições de Cauchy-Riemann)

Seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa. F é analítica se, e somente se forem satisfeitas as condições

$$\frac{\partial F_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega} \tag{2.7a}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \omega} = -\frac{\partial F_y}{\partial \sigma} \tag{2.7b}$$

Exemplo

Considere a função complexa:

$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

Usando (2.1), reescrevemos:

$$F(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{1}{\sigma + 1 + j\omega}$$

Multiplicando e dividindo pelo conjugado, chega-se a:

$$F(\sigma + j\omega) = \underbrace{\frac{\sigma + 1}{(\sigma+1)^2 + \omega^2}}_{F_x} + j \underbrace{\frac{-\omega}{(\sigma+1)^2 + \omega^2}}_{F_y}$$

Assim, as derivadas parciais são

$$\frac{\partial F_x}{\partial \sigma} = \frac{\omega^2 - (\sigma+1)^2}{((\sigma+1)^2 + \omega^2)^2} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega}$$

que valem se $\omega \neq 0$ e $\sigma \neq -1$ ($s \neq -1$).
Pode-se mostrar que a segunda condição de Cauchy-Riemann também vale. Logo, F é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$. Assim, pode-se calcular $F'(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, F(s)}{\mathrm{d}\, s} &= \frac{\partial F_x}{\partial \sigma} + j\frac{\partial F_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega} - j\frac{\partial F_x}{\partial \omega} \\ &= -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} = -\frac{1}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Pontos Singulares, Polos e Zeros

Definição

Seja F uma função complexa, $p, z \in \mathbb{C}$.

i) *Os pontos de $\mathbb{C}$, onde F não é analítica são ditos singulares.*

ii) *Os pontos singulares onde F ou alguma de suas derivadas tende ao infinito são ditos polos.*

iii) *Se p é um polo de F, tal que $|(s-p)^n F(s)| < \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, p é dito um polo de ordem n.*

iv) *Se $F(z) = 0$, então z é dito um zero de F.*

v) *Se z é zero de F, tal que $\displaystyle \lim_{s_o \to z} \left.\frac{F(s)}{(s-s_o)^{n-1}}\right|_{s=z} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, z é dito um zero de ordem n.*

Relação de Euler

- A partir das expansões de Taylor das funções seno e cosseno, pode-se verificar a relação de Euler:

$$\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{j\theta} \tag{2.8}$$

- Duas relações importantes podem, também, ser obtidas:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \tag{2.9a}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2} \tag{2.9b}$$

Definição da Transformada de Laplace

Definição (Transformada de Laplace)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função. A Transformada de Laplace (TL) de* f*,* $\mathcal{L}[f(t)]$ *é dada por*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t \tag{2.10}$$

quando a integral (2.10) *convergir.*

Pergunta

Sob quais condições uma função de variável real possui TL?

Existência da Transformada de Laplace

Teorema (Existência da TL)

Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uma função real. A integral* (2.10) *converge se:*

i) f *for seccionalmente contínua no intervalo* $[0, \infty)$*, e;*

ii) $\exists \sigma \in \mathbb{R}$*, tal que:*

$$\lim_{t \to \infty} |f(t)| e^{-\sigma t} = 0$$

Observação

Caso as condições anteriores se verifiquem, então:

- f *é dita de ordem exponencial;*
- σ *é dita abscissa de convergência.*

Exemplo

A função $f(t) = Ae^{-\alpha t}$ possui TL, pois é contínua e:

$$|Ae^{-\alpha t}|e^{-\sigma t} = |A|e^{-(\sigma+\alpha)t}$$

Note que esta expressão tenderá a zero se, e somente se:

$$\sigma + \alpha > 0 \Rightarrow \sigma > -\alpha$$

Assim, a TL dessa função pode ser calculada e vale:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty Ae^{-\alpha t}e^{-st}\,\mathrm{d}\,t = A\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{A}{s+\alpha}$$

Atraso no Tempo

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Então, para $\alpha \geq 0$, a TL de $f(t-\alpha)$ é dada por:

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = \int_0^\infty f(t-\alpha)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t$$

Fazendo as substituições $\tau = t - \alpha$ e $\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,t$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\alpha)] &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}\,\mathrm{d}\,\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}e^{-s\alpha}\,\mathrm{d}\,\tau \\ &= e^{-\alpha s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\,\tau\end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s) \tag{2.11}$$

Funções Degrau, Pulso e Impulso I

- A função degrau unitário é definida por

$$\tilde{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.12}$$

- Sua TL é dada por:

$$\mathcal{L}[\tilde{1}(t)] = \int_0^\infty \tilde{1}(t) e^{-st} \, \mathrm{d}\, t = \int_0^\infty e^{-st} \, \mathrm{d}\, t = \frac{1}{s} \tag{2.13}$$

- Dado, $t_o > 0$, define-se a função pulso como

$$p_{t_o}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_o} & \text{se } 0 \leq t \leq t_o \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.14}$$

Funções Degrau, Pulso e Impulso II

- Uma definição equivalente pode ser feita usando degraus unitários:

$$p_{t_o}(t) = \frac{1}{t_o}[\tilde{1}(t) - \tilde{1}(t - t_o)] \tag{2.15}$$

- Aplicando a propriedade (2.11) em (2.13) e em (2.15):

$$P_{t_o}(s) = \frac{1}{t_o}\left[\mathcal{L}[\tilde{1}(t)] - e^{-t_o s}\mathcal{L}[\tilde{1}(t)]\right] = \frac{1 - e^{-t_o s}}{t_o s} \tag{2.16}$$

- A função impulso ou delta de Dirac é definida com $t_o \to 0$ em (2.14):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.17}$$

- Fazendo o mesmo limite em (2.16):

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{t_o \to 0} \frac{1 - e^{-t_o s}}{t_o s} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t_o \to 0} \frac{s e^{-t_o s}}{s} = 1 \tag{2.18}$$

O Produto $f(t)e^{-\alpha t}$

Sejam $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)e^{-\alpha t}] &= \int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t}e^{-st}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

Portanto, tem-se:

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-\alpha t}] = F(s+\alpha) \tag{2.19}$$

Mudança na Escala de Tempo

Sejam $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} \,\mathrm{d}\, t$$

Observando que $\tau = \dfrac{t}{\alpha} \Rightarrow \alpha \,\mathrm{d}\, \tau = \mathrm{d}\, t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] &= \int_0^\infty \alpha f(\tau) e^{-\alpha s \tau} \,\mathrm{d}\, \tau \\ &= \alpha F(\alpha s) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Teorema da Diferenciação Real

Teorema

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. *Então:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}\right] = sF(s) - f(0) \tag{2.21}$$

Observação

Para uma diferenciação de n*-ésima ordem:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n\,f(t)}{\mathrm{d}\,t^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i \overset{<n-1-i>}{f(0)} \tag{2.22}$$

Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final

Teorema (Valor Final)

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$*, com todos os seus polos no semi-plano esquerdo e, no máximo um polo na origem, então:*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) \tag{2.23}$$

Teorema (Valor Inicial)

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$*, então:*

$$\lim_{t \to 0_+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \tag{2.24}$$

Teorema da Diferenciação Complexa

Teorema

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. *Então, exceto em seus polos:*

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{\mathrm{d}\,F(s)}{\mathrm{d}\,s} \tag{2.25}$$

Observação

Para uma diferenciação de n*-ésima ordem:*

$$\mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n\,F(s)}{\mathrm{d}\,s^n} \tag{2.26}$$

Teorema da Convolução

Definição (Convolução)

Sejam f e g funções reais. Sua convolução é definida por

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \tag{2.27}$$

Observação

A convolução é comutativa. De fato, basta fazer $\xi = t - \tau$ em (2.27) para verificar tal proposição.

Teorema (Convolução)

Se as TLs de f e g existem, então:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s) \tag{2.28}$$

Transformada Inversa de Laplace

Definição (Transformada Inversa de Laplace)

Sejam $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa e $c \in \mathbb{R}$, maior que todas as partes reais das singularidades de F.
A Transformada Inversa de Laplace (TIL) de $F(s)$, $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, é a função de variável real, f, dada por

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} \, \mathrm{d}\, s \tag{2.29}$$

- Obter TILs a partir de (2.29), não é prático;
- Melhor é utilizar tabelas de TL e a expansão em frações parciais.

Funções Racionais

Definição (Função Racional)

Uma função racional é aquela que se escreve como

$$F(s) = \frac{\overbrace{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}^{N(s)}}{\underbrace{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}_{D(s)}} \tag{2.30}$$

- Se $n \geq m$, a função racional é dita própria;
- Se $n > m$, a função racional é dita estritamente própria;
- Para funções racionais estritamente próprias, a Expansão em Frações Parciais (EFP) segue casos distintos.

1ºcaso: Polos reais e distintos

Neste caso, reescreve-se $D(s)$ como

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)$$

e (2.30) reescreve-se como

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - p_i}$$

onde r_i é o resíduo de F no polo p_i. O cálculo dos resíduos é feito com

$$\left[(s - p_k)F(s)\right]_{s=p_k} = (s - p_k)\left[\frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_k}{s - p_k} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n}\right] = r_k \tag{2.31}$$

Com os resíduos calculados, pode-se obter a TIL como

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{n} r_i e^{p_i t} \tag{2.32}$$

Exemplo

Calculemos a TIL de $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$. Para tanto, observe que:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2}$$

Os resíduos são calculados com (2.31):

$$r_1 = \left[(s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1} = 2$$

$$r_2 = \left[(s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2} = -1$$

Assim, usando (2.32):

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

2ºCaso: Polos complexos e distintos

Neste caso, considere que o par conjugado de polos seja $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$. Assim:

$$s^2 + bs + c = (s - \alpha + j\omega)(s - \alpha - j\omega) = (s - \alpha)^2 + \omega^2$$

Desta forma, chega-se a:

$$F(s) = \frac{ds + f}{s^2 + bs + c} = k_1 \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} + k_2 \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

com k_1 e k_2 a determinar. Aplicando a TIL, obtém-se o resultado desejado.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = k_1 e^{\alpha t} \operatorname{sen} \omega t + k_2 e^{\alpha t} \cos \omega t \qquad (2.33)$$

Exemplo

Calculemos a TIL de $F(s) = \dfrac{2s+12}{s^2+2s+5}$. Seus polos são $-1 \pm j2$. Reescrevendo a função, tem-se:

$$F(s) = k_1 \frac{2}{(s+1)^2+4} + k_2 \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

Donde, comparando as formas, conclui-se que $k_1 = 5$ e $k_2 = 2$. Usando (2.33), tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-t}(5 \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t)$$

3ºCaso: Polos reais múltiplos

Neste caso, assume-se o denominador de $F(s)$ sob a forma

$$D(s) = (s-p)^n$$

Então, pode-se reescrever a função sob a forma

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(s-p)^i} \Rightarrow (s-p)^n F(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i (s-p)^{n-i}$$

Pode-se verificar que, com o resultado acima, os resíduos podem ser calculados com:

$$r_i = \frac{1}{(n-i)!} \frac{\mathrm{d}^{n-i}}{\mathrm{d}\, s^{n-i}} \left[(s-p)^n F(s)\right]_{s=p} \tag{2.34}$$

Usando a tabela de TLs, tem-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_i}{(s-p)^i}\right] = \frac{r_i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{pt} \tag{2.35}$$

Exemplo

Determine-se a TIL de $F(s) = \dfrac{s+1}{(s+3)^2}$. Calculando os resíduos:

$$r_2 = \frac{1}{(2-2)!}\frac{\mathrm{d}^{2-2}}{\mathrm{d}\,s^{2-2}}[s+1]_{s=-3} = -2$$

$$r_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}\,s^{2-1}}[s+1]_{s=-3} = 1$$

Assim, usando (2.35), tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+3)^2}\right] = (1-2t)e^{-3t}$$

Solução de Equações Diferenciais Ordinárias

- A TL é muito conveniente para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs);
- Em particular, usa-se para solucionar Problemas de Valor Inicial (PVIs).
- Segue-se o procedimento:
  - i) Determine a TL para o PVI;
  - ii) Isole a função incógnita no domínio s;
  - iii) Determine a TIL da expressão resultante.

Exercício

É possível solucionar o PVI

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = \tilde{1}(t)$$

sob condições iniciais nulas? Se for, encontre y.