CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 09 - "Análise da Resposta Transitória II"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

15 de maio de 2017

Sistemas de 2ª Ordem

A forma geral de um sistema de 2ª ordem é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{9.1}$$

onde:

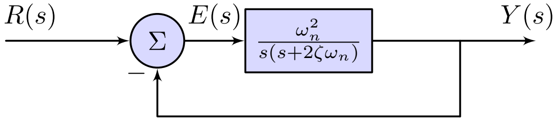
$\omega_n \rightarrow$ frequência natural não-amortecida;

$\zeta \rightarrow$ amortecimento.

Um parâmetro importante para estes sistemas é a atenuação, dada por:

$$\sigma = \zeta\omega_n \tag{9.2}$$

DB em Realimentação Unitária



Aplicando a regra da realimentação unitária (3.6) a (9.1):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Sistemas de 2ª Ordem: Resposta ao Degrau

- É a principal resposta dos SLIT-Cs;
- Para projetos, normalmente as plantas são reduzidas a um par de polos;
- Fazendo $r = \tilde{1}$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right] \tag{9.3}$$

Observação

O comportamento de sistemas de 2ª ordem é altamente dependente de ζ!

Caso Subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

Neste caso, escreve-se:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{9.4}$$

Defina a frequência natural amortecida:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{9.5}$$

Observação

Mostre que $A = -B = 1$ *e que* $C = -2\zeta\omega_n$.

Caso Subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

Aplicando a técnica de completar quadrados:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \underbrace{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_d^2}_{\omega_n^2} = (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

Assim, (9.4) torna-se:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \left(\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right) \\ &= \frac{1}{s} - \left(\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right) \qquad (9.6) \end{aligned}$$

Caso Subamortecido $(0 < \zeta < 1)$

Aplicando a TIL a (9.6):

$$\begin{aligned} y(t) &= \tilde{1}(t) - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_d t \\ &= \tilde{1}(t) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \end{aligned} \tag{9.7}$$

E o erro, evidentemente, é:

$$\varepsilon(t) = \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \tag{9.8}$$

Observação

(9.7)-(9.8) *são as respostas mais importantes dos SLIT-C-SISOs!*

Caso Criticamente Amortecido ($\zeta = 1$)

Neste caso, (9.3) toma a forma mais simples:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}\right] \tag{9.9}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+\omega_n} + \frac{B_2}{(s+\omega_n)^2}\right] \tag{9.10}$$

Aplicando a TIL a (9.10):

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \tag{9.11}$$

Caso Sobreamortecido ($\zeta > 1$)

Neste caso, as raízes de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ são reais e distintas:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{9.12}$$

Aplicando a Expansão em Frações Parciais (EFP) a (9.3):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{C}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}\right] \tag{9.13}$$

Observação

Determine que $B = \dfrac{-1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$, $C = \dfrac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$ *e* $A = 1$.

Caso Sobreamortecido ($\zeta > 1$)

Aplicando a TIL:

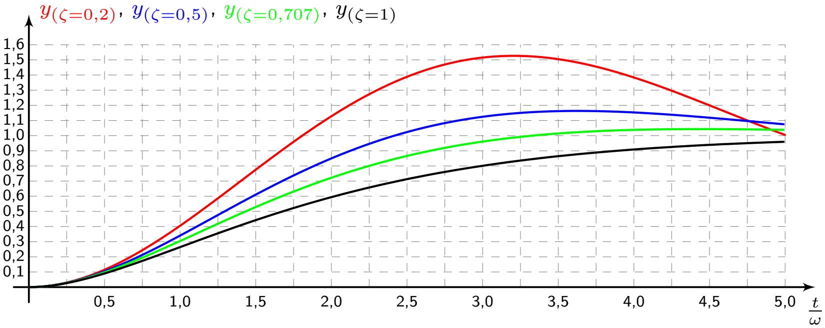
$$y(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \qquad (9.14)$$

Observação

Se $\zeta \gg 1$, o polo em $(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ domina o polo em $(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Assim:

$$y(t) \approx 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \qquad (9.15)$$

Efeito do Amortecimento

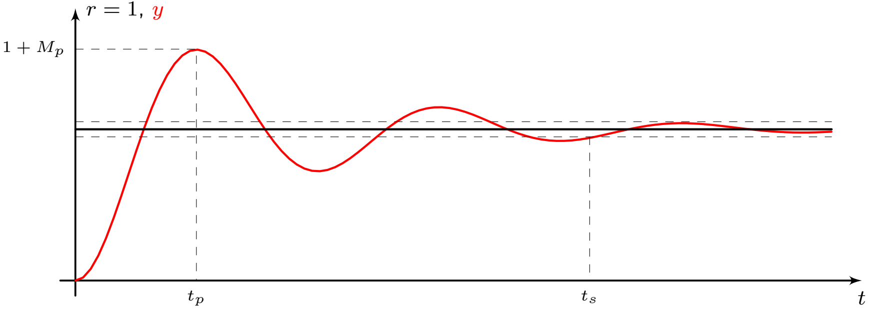


Especificações de Resposta Transitória

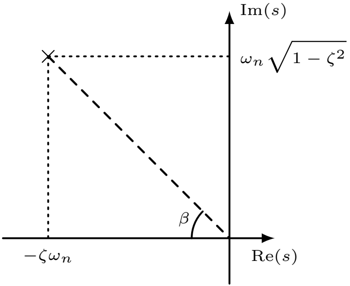
Parâmetros de especificação de resposta transisória:

- Tempo de atraso (t_d): É o tempo que a saída leva para atingir 50% do valor desejado pela primeira vez;
- Tempo de subida (t_r): É o tempo que a saída leva para percorrer de 0 a 100% (5% a 95% ou 10% a 90%) do valor desejado;
- Tempo de pico (t_p): É o tempo para atingir o valor máximo da saída;
- Tempo de acomodação (t_s): É o tempo para que o erro fique permanentemente dentro de uma faixa escolhida (geralmente 2% ou 5%);
- Overshoot (M_p): É o valor que excede o desejado na saída. Pode ser dado em forma percentual.

Especificações de Resposta Transitória



Lugar das Raízes (Sistema Subamortecido)



Aplicando (9.7):

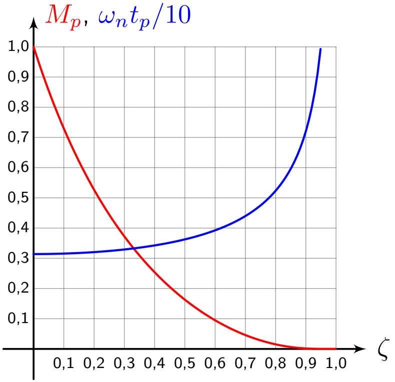
$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{9.16}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{9.17}$$

$$M_p = e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}} \tag{9.18}$$

$$t_s = \begin{cases} \frac{4}{\sigma} & \text{critério } 2\% \\ \frac{3}{\sigma} & \text{critério } 5\% \end{cases} \tag{9.19}$$

Observação Importante!



Observação

Muito do projeto depende do amortecimento, ζ. Se for baixo, o sistema responde rapidamente (os tempos envolvidos serão pequenos), mas apresentará overshoot excessivo e vice-versa. Muitos projetos tentam fazer $0{,}4 < \zeta < 0{,}8$.