CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 29 - "Sistemas de Controle no Espaço de Estado VI"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

28 de julho de 2017

Forma Canônica Observável de SLIT-C-SISO

- Considere a FCC (26.1) da EDO (4.1);
- Faça o seguinte mapeamento:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o' & \mathbf{C}_o' \\ \mathbf{B}_o' & \mathbf{D}_o \end{bmatrix} \tag{29.1}$$

- Desta forma, obtém-se a Forma Canônica Observável (FCO);
- O vetor de estado não é o mesmo!

Erro de Observação

- Devemos, primeiro determinar a "eficiência" do observador (28.4);
- Será que ele consegue fazer $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$?
- Restrinjamos nosso estudo a SLIT-C-SISOs;
- Definamos o erro de observação com (4.1a) e (28.4a):

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y})) \\
&= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\
&\overset{\substack{(4.1b)\\(28.4b)}}{=} \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} - (\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u})) \\
&= (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (29.2)
\end{aligned}$$

Dualidade e Projeto de Observadores

Lema

Seja ε o erro de estimação do SLIT-C-SISO (4.1)-(28.4). Então $\varepsilon \to \mathbf{0}$, para $t \to \infty$ se, e somente se, $\exists \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, tal que $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ tenha seus autovalores no semi-plano complexo esquerdo.

Importante!

Defina o sistema dual de (4.1):

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{A}'\boldsymbol{\chi} + \mathbf{C}'\boldsymbol{\nu} \tag{29.3a}$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{B}'\boldsymbol{\chi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\nu} \tag{29.3b}$$

O lema proposto nos induz a aplicar a solução do problema da alocação de polos ao sistema dual para resolver o problema da observação de estado, com realimentação:

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\chi} \tag{29.4}$$

Observadores de Estado: Procedimento de Projeto

1º) Verifique se o sistema dual é controlável (o primal é observável);

2º) Escreva o polinômio característico de $\mathbf{A}'$:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}') = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} s^i \tag{29.5}$$

3º) Determine $\mathbf{T}$ com (26.3) (se necessário, use (26.1) também);

4º) Determine o polinômio característico desejado com (26.4);

5º) Determine a matriz de ganho de saída com (26.5) e (26.6).

Observação

- *Adapte adequadamente os passos 3 a 5 do procedimento anterior.*
- *É possível aplicar a fórmula de Ackermann de forma adequada.*

Teorema da Separação I

- Garantimos que $\hat{\mathbf{x}} \to \mathbf{x}$ para $t \to \infty$;
- Mas, como o sistema se comportará, já que, em geral $\hat{\mathbf{x}}_o \neq \mathbf{x}_o$?
- Recompilemos o sistema (4.1), (28.5) e (29.2):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{BKM} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r \tag{29.6a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{DK} & -\mathbf{DK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \mathbf{DKM}r \tag{29.6b}$$

Teorema da Separação II

Lema

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in (\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbb{R}^{m\times m})$. *Então:*

i) $\lambda \in \Lambda\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda(\mathbf{A})$ *ou* $\lambda \in \Lambda(\mathbf{C})$, *e;*

ii) *A multiplicidade de* λ *em* $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\end{bmatrix}$ *é a soma de suas multiplicidades em* $\mathbf{A}$ *e em* $\mathbf{C}$.

Teorema (Separação)

O projeto das matrizes de realimentação de estado e de ganho da saída podem ser realizados independentemente e alocando os polos de $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ *e de* $\mathbf{A}+\mathbf{LC}$ *em posições arbitrárias do plano complexo, desde que valores complexos ocorram em pares conjugados, respectivamente.*

Projeto da Matriz de Ganho da Referência

Observe que:

$$\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{LC} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} (s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK}))^{-1} & (s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK}))^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{LC}))^{-1} \\ \mathbf{0} & (s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{LC}))^{-1} \end{bmatrix} \tag{29.7}$$

Observação

- *A FT de (29.6), usando (4.2) é (25.8);*
- *Logo, o projeto da matriz de ganho da referência,* $\mathbf{M}$, *pode ser feito com (27.4);*
- *Pode-se usar, também, (27.5) para a solução de (27.4) com menor norma euclidiana possível;*
- *É interessante posicionar os autovalores do observador de 2 a 5 vezes mais à esquerda do último autovalor da planta (realimentada).*