CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 18 - "Resposta em Frequência I"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

05 de julho de 2017

FACOM-UFMS

Resposta à Excitação Senoidal

- Resposta em Frequência: Resposta em regime a uma entrada senoidal.
- Esta resposta foi obtida na aula 14: vide (14.1)-(14.8):

$$u(t) = U_{max} \operatorname{sen} \omega t \overset{G(j\omega)}{\Longrightarrow} y(t) = U_{max}|G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \arg(G(j\omega)))$$

- A representação gráfica da resposta em frequência, $G(j\omega)$, pode ser feita por:
  - Diagramas de Bode (logarítmicos);
  - Diagramas de Nyquist (polares);
  - Diagramas de Black-Nichols (log magnitude *versus* fase).

Diagramas de Bode

Observe que a resposta em frequência pode ser reescrita como:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\arg(G(j\omega))} \tag{18.1}$$

Para facilitar a escrita de respostas de produtos de FTs, define-se:

$$||G(j\omega)|| = 20\log|G(j\omega)| \quad [\text{dB}] \tag{18.2}$$

Pois, para $G(s)H(s)$:

$$G(j\omega)H(j\omega) = |G(j\omega)H(j\omega)|e^{j(\arg(G(j\omega))+\arg(H(j\omega)))} \tag{18.3}$$

Logo:

$$||G(j\omega)H(j\omega)|| = ||G(j\omega)|| + ||H(j\omega)|| \tag{18.4a}$$

$$\arg(G(j\omega)H(j\omega)) = \arg(G(j\omega)) + \arg(H(j\omega)) \tag{18.4b}$$

Regras para o Traçado

Observação

Diagramas de Bode: Dois gráficos, $||G|| \times \log \omega$ *e* $\arg(G) \times \log \omega$*.*
O traçado dos diagramas de Bode necessita de papel mono-log!

- Como a FT é uma função racional, determinamos apenas 4 termos:
  - Termo constante;
  - Fator integrador ou derivador;
  - Fator de 1ª ordem;
  - Fator de 2ª ordem.
- Diagramas exatos: Difícil construção, não apresenta erro;
- Diagramas assintóticos: Simples, porém com erros.

Termo Constante e Integrador/Derivador

Ganho constante ($K > 0$):

$$||K|| = 20 \log |K| \tag{18.5a}$$

$$\arg(K) = 0^\circ \tag{18.5b}$$

Termo integrador/derivador:

$$||(j\omega)^{\pm 1}|| = 20 \log |(j\omega)^{\pm 1}| = \pm 20 \log |\omega| \tag{18.6a}$$

$$\arg((j\omega)^{\pm 1}) = \arg(\pm j\omega^{\pm 1}) = \pm 90^\circ \tag{18.6b}$$

Observação

Termo constante: ganho constante e fase nula para $\omega \in [0, \infty)$*.*
Termo integrador/derivador: variação de ± 20dB *por década, desde a origem e fase constante em* $\pm 90^\circ$*.*

Termo de 1ª Ordem $\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

Determinação de ganho e de fase:

$$\begin{aligned} ||\cdot|| = 20\log\left|\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}\right| &= \pm 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right| \\ &= \pm 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{18.7a}$$

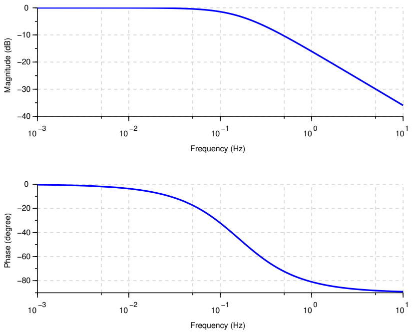
$$\arg(\cdot) = \pm\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \tag{18.7b}$$

Regras assintóticas:

- Ganho: Nulo até ω_n, a partir de então ± 20dB por década.
- Fase: Nula até uma década antes de ω_n. 90° uma década após ω_n. Variação linear entre estes valores.

Termo de 1ª Ordem $\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

$\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)$	$\|\|G\|\|$[dB]	$\arg(G)[°]$
-3	$\pm 4{,}34 \cdot 10^{-6}$	$\pm 0{,}057$
-2	$\pm 4{,}34 \cdot 10^{-4}$	$\pm 0{,}57$
-1	$\pm 4{,}32 \cdot 10^{-2}$	$\pm 5{,}7$
0	$\pm 3{,}01$	± 45
1	$\pm 20{,}04$	$\pm 84{,}29$
2	± 40	$\pm 89{,}43$
3	± 60	$\pm 89{,}94$



Termo de 2ª Ordem $\left(1+2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}$

Observação

Interessa apenas o caso subamortecido. Por quê?

Ganho e fase:

$$\left\|\left(1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}\right\| = \pm 10\log\left(\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \tag{18.8a}$$

$$\arg\left(\left(1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}\right) = \pm\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \tag{18.8b}$$

Termo de 2ª Ordem $\left(1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}$

Algumas observações:

- Traçado fortemente dependente do amortecimento!
- Para $\omega \ll \omega_n$: $||\cdot||, \arg(\cdot) \to 0$;
- Para $\omega \gg \omega_n$: $\arg(\cdot) \to 180^\circ$, e:

$$||\cdot|| \to \pm 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \tag{18.9}$$

- Para $\omega = \omega_n$, $\arg(\cdot) = \pm 90^\circ$ e o ganho:

$$||\cdot|| = \pm 10 \log(1 + (2\zeta)^2) \tag{18.10}$$

Frequência e Pico de Ressonância

Considere a FT senoidal:

$$G(j\omega) = \frac{1}{D(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{18.11}$$

- Frequência de ressonância (ω_r): Frequência de ganho máximo.
- Pico de ressonância (M_r): O ganho anteriormente citado.

Aplicando as técnicas de obtenção de mínimo em $||D(j\omega)||$:

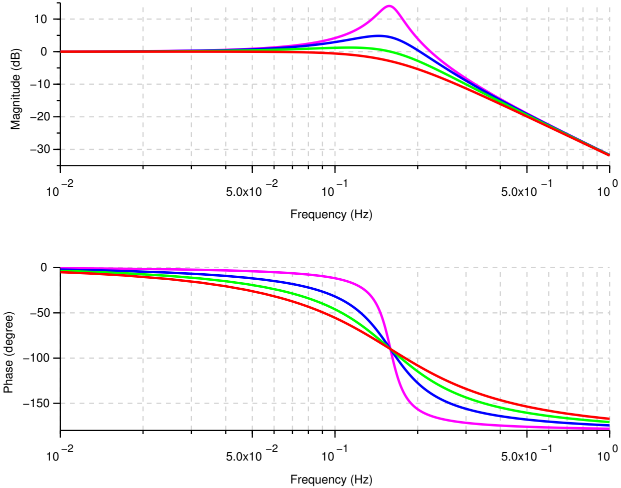
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{18.12a}$$

$$M_r = ||G(j\omega_r)|| = \left(2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}\right)^{-1} \tag{18.12b}$$

Observação

Não há ressonância para $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$.

$\zeta = 0{,}1$, $\zeta = 0{,}3$, $\zeta = 0{,}5$ e $\zeta = 0{,}707$



Sistemas de Fase Mínima

Importante!

Considere um SLIT-C estável. Diz-se que este é de fase mínima se seus zeros estiverem no semi-plano complexo esquerdo.

Importante!

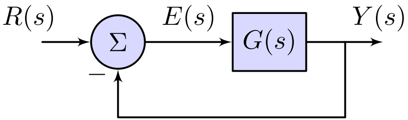
Sejam $G(s)$ *e* $H(s)$ *SLIT-Cs estáveis,* $G(s)$ *de fase mínima, e* $||G(j\omega)|| = ||H(j\omega)||, \forall \omega > 0$. *Então a excursão de fase de* G *é menor ou igual à de* H.

Observação

O sistema $G(s) = e^{-sT}, T > 0$ *(atraso de transporte puro) é de fase não-mínima. (Por quê?)*

Curva de Ganho e Erros Estáticos

Considere o sistema:



Partindo de (14.10), pode-se reescrever:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^N} \frac{\prod_{k=1}^{m} (1 + j\omega\tau_k)}{\prod_{i=1}^{n-N} (1 + j\omega T_i)} \tag{18.13}$$

Observação

Note que, com o TVF, $s \to 0 \Rightarrow \omega \to 0$.

Curva de Ganho e Erros Estáticos

Partindo de (14.13):

$$||G(j0)|| = 20 \log K_p, \quad N = 0 \tag{18.14}$$

Partindo de (14.15):

$$||G(j\omega)|| = 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|, \quad N = 1 \tag{18.15}$$

Em (18.15), observe que $||G(jK_v)|| = 0$dB. Partindo de (14.17):

$$||G(j\omega)|| = 20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|, \quad N = 2 \tag{18.16}$$

Similarmente, para $||G(j\sqrt{K_a})|| = 0$, obtém-se a constante de erro.