CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 30 - “Sistemas de Controle no Espaço de Estado VII”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

31 de julho de 2017

Introdução

- Para SLIT-Cs, muitos critérios de estabilidade estão disponíveis:
  - Critério de Routh-Hurwitz;
  - Critério de Nyquist.
- Se o sistema não for linear ou não for invariante, esses critérios são inválidos.
- A Teoria de Lyapunov (formulada em 1892!) é aplicável a tais situações.
- Para SLIT-Cs, a Teoria de Lyapunov proporciona uma análise e síntese de controladores mais versátil.

Importante!

A Teoria de Lyapunov não invalida o que estudamos até aqui! Apenas é mais completa (e complexa) do que os métodos anteriormente estudados.

Sistemas em Tempo Contínuo (SCs)

- Considere um SC definido pela Equação Diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{30.1}$$

  onde $\mathbf{f}$ é uma função dependente do estado, $\mathbf{x}$, e, possivelmente, do tempo, t.
- (30.1) define um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$.
- Suponha que $\phi(t; \mathbf{x}_o, t_o)$ seja a solução única de (30.1).

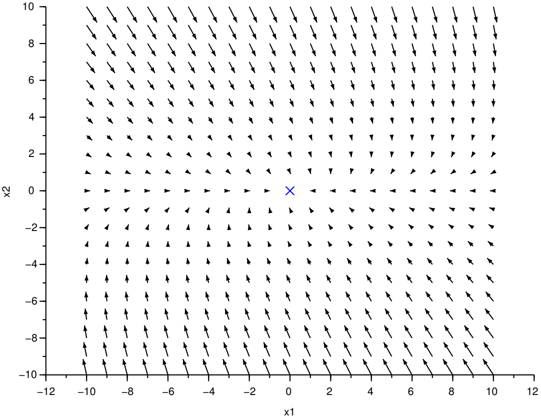
Definição (Ponto de Equilíbrio)

Seja $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$*, tal que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0}, \forall t \geq 0$*. Então,* $\mathbf{x}_e$ *é dito um ponto de equilíbrio de* (30.1)*.*

Exemplo: Campo Vetorial de SLIT-Cs

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ -5x_2 \end{bmatrix}$$



Definições de Estabilidade I

Observação

Se $\mathbf{x}_e \neq \mathbf{0}$*, pode-se fazer* $\mathbf{z}_e = \mathbf{0}$*, onde* $\mathbf{z}$ *é obtida por uma mudança adequada de variáveis de estado (translação) em* $\mathbf{x}$*.*

Definição (Estabilidade no Sentido de Lyapunov)

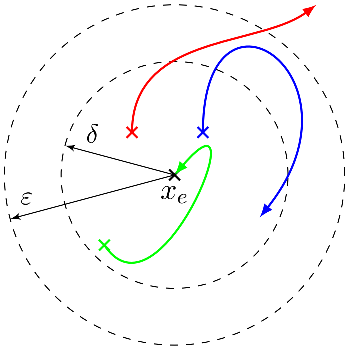
O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ *é dito (localmente) estável no sentido de Lyapunov (ou Lyapunov-estável) se, dado* $\varepsilon > 0$*, então* $\exists \delta > 0$*, tal que:*

$$||\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_e|| < \delta \Rightarrow ||\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_o, t_o) - \mathbf{x}_e|| < \varepsilon$$

Definição (Estabilidade Assintótica)

O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ *é dito (localmente) assintoticamente estável se, além de Lyapunov-estável, verifica-se, para* $t \to \infty$*,* $\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_o, t_o) \to \mathbf{x}_e$*.*

Definições de Estabilidade II



Lyapunov-estável
Assintoticamente estável
Instável

- Os fatos ilustrados na figura devem ocorrer para todo $\mathbf{x}$ na esfera δ!
- Se cada definição de estabilidade ocorre para $\delta \to \infty$, então a estabilidade é dita global.
- Se dado $\varepsilon > 0$ não existir δ (mesmo muito pequeno) para as definições dadas, o ponto de equilíbrio é dito instável.

Positividade

Definição (Positividade de Funções)

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função.* V *será dita positiva-definida se:*

i) $V(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$;

ii) $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Observação

- *Na definição de positividade, se* $V(\mathbf{x}) = 0$, *para algum* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *(além do próprio vetor nulo),* V *é dito positivo-semidefinido.*
- *De maneira análoga, define-se negatividade de funções.*
- *Uma função que não se enquadra nestas definições é dita indefinida.*

Positividade: Formas Quadráticas e Autovalores

Considere $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{P} = \mathbf{P}'$. Uma importante classe de funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada pela forma quadrática:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{30.2}$$

Da Álgebra Linear, tem-se:

- V é positiva definida se, e somente se, todos os autovalores de $\mathbf{P}$ forem positivos ($\mathbf{P}$ é uma matriz positiva-definida);
- V é negativa definida se, e somente se, todos os autovalores de $\mathbf{P}$ forem negativos ($\mathbf{P}$ é uma matriz negativa-definida);

Lema (Critério de Sylvester)

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{P} = \mathbf{P}'$, *é positiva-definida se, e somente se:*

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & \star \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |\mathbf{P}| > 0$$

O Teorema da Estabilidade de Lyapunov

Teorema (Lyapunov)

Seja (30.1) *um SC tendo a origem como ponto de equilíbrio. Se houver uma função* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que:*

i) V *é positiva-definida, e;*

ii) $\dot{V}$ *é negativa-definida.*

então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Adicionalmente, se $V \to \infty$ *para* $||\mathbf{x}|| \to \infty$, *a estabilidade é global.*

- Sistemas mecânicos (e elétricos) são estáveis se a energia (que é positiva-definida) decai (derivada negativa-definida);
- Em outros sistemas, pode ser difícil definir “energia”;
- Ideia de Lyapunov: definir uma função energia fictícia no sistema.

Exemplo: Função "Energia"

Para o exemplo anterior, considere $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{I}\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2$. Calculando sua derivada:

$$\begin{aligned}\dot{V} = \nabla V' \cdot \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x_1 + 2x_2 \\ -5x_2\end{bmatrix} &= -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 10x_2^2 \\ &= -2[(x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2]\end{aligned}$$

que é negativa-definida. Por outro lado, também tem-se:

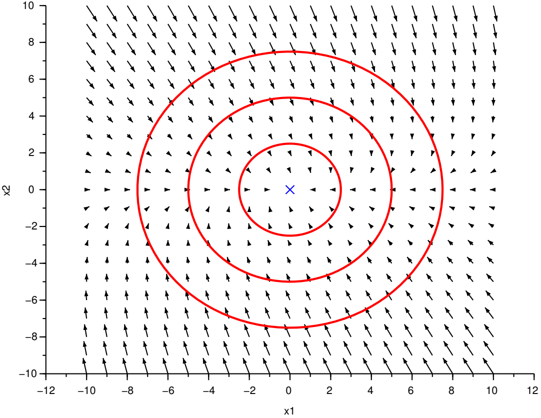
$$\dot{V} = \nabla V' \cdot \dot{\mathbf{x}} = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 10x_2^2 = -\mathbf{x}'\begin{bmatrix}2 & -2 \\ -2 & 10\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

cujos autovalores são $-1{,}5$ e $-10{,}5$. Ainda, pelo critério de Sylvester:

$$\det[2] = 2 \quad \det\begin{bmatrix}2 & -2 \\ -2 & 10\end{bmatrix} = 16$$

Logo, a origem deste sistema é global e assintoticamente estável.

Exemplo: Função "Energia"



- As trajetórias entram nas hiperfícies de energia constante;
- Nem sempre as hiperfícies de energia constante serão esferas...

Teorema Recíproco de Lyapunov

Teorema (Lyapunov Recíproco)

Seja (30.1) *um SC tendo a origem como ponto de equilíbrio. Se houver uma função* $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que:*

i) W *é positiva-definida em algum* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*;*

ii) $\dot{W}$ *é positiva-definida em* Ω*, e;*

iii) $\mathbf{0} \in \Omega$*.*

então o ponto de equilíbrio é instável.

Alguns Fatos sobre Estabilidade de SLIT-Cs

Lema

Considere o SLIT-C homogêneo (4.1). Se $\mathbf{A}$ for invertível, então a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema.

Lema

Em um SLIT-C, as seguintes afirmativas são equivalentes:

i) *A origem é global e assintoticamente estável;*
ii) *Os autovalores de $\mathbf{A}$ estão no semi-plano complexo esquerdo;*
iii) *Existem $c > 0$ e $\lambda < 0$, tais que:*

$$||\phi(t; \mathbf{x}_o, 0)|| = ||e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o|| \leq c \cdot e^{\lambda t} \tag{30.3}$$

iv) *Existe uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.*

Como Construir a Função de Lyapunov?

Considere (30.2) como uma função candidata a Lyapunov. Derivemo-la:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\mathbf{x})'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}'(\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} \quad (30.4)$$

Note que (30.4) deve ser negativa-definida para a estabilidade. Assim:

Teorema

Seja (4.1) um SLIT-C homogêneo. Uma condição necessária e suficiente para sua estabilidade global e assintótica é que, dada $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$, *positiva-definida, exista* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{P} = \mathbf{P}'$, *positiva-definida, tal que*

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (30.5)$$

Exemplo

Considere o SLIT-C homogêneo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Façamos $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (um chute inicial bem conveniente) e apliquemos (30.5):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O que origina:

$$\begin{aligned} -2p_2 &= -1 \\ p_1 - p_2 - p_3 &= 0 \\ 2p_2 - 2p_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$