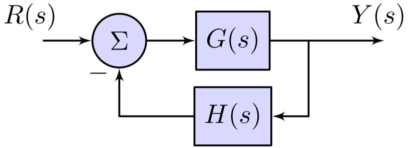
CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 13 - “Ações Básicas de Controle III”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

29 de maio de 2017

Sistemas de Ordem Superior



Considerando

$$G(s) = \frac{N_g(s)}{D_g(s)} \tag{13.1a}$$

$$H(s) = \frac{N_h(s)}{D_h(s)} \tag{13.1b}$$

Assim, observe que são possíveis as formas:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N_g(s)N_h(s)}{D_g(s)D_h(s) + N_g(s)N_h(s)} \tag{13.2a}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \beta_j s^j \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \tag{13.2b}$$

$$= K \prod_{j=1}^{m} (s - z_j) \Bigg/ \prod_{i=1}^{n} (s - p_i), \quad K \in \mathbb{R} \text{ e } p_i, z_j \in \mathbb{C} \tag{13.2c}$$

1º Caso: Apenas Polos Reais

Neste caso, para entrada degrau e aplicando a EFP a (13.2c):

$$Y(s) = \frac{A_o}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - p_i} \tag{13.3}$$

onde os A_i são obtidos pelo método de Heavyside.
Aplicando a TIL a (13.3):

$$y(t) = A_o + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t} \tag{13.4}$$

Pergunta

Quando um sistema de ordem qualquer com polos todos reais será estável?

1º Caso: Apenas Polos Reais

Observação

1º- *Todos os polos do sistema devem ser negativos, ou algum termo exponencial de* (13.4) *cresceria indefinidamente;*

2º- *Se houver* $p_i = z_j$ *para algum* i, j*, então o resíduo* A_i *é nulo;*

3º- *Esta é uma forma de cancelar o efeito de um polo;*

4º- *Se algum polo estiver muito afastado da origem (em relação aos demais), sua exponencial reduz-se muito mais rapidamente;*

5º- *O efeito deste polo pode, então, ser desprezado;*

6º- *Efeitos análogos ocorrem para polos múltiplos.*

2º Caso: Presença de Polos Não Reais

Novamente, aplicando a entrada degrau e a EFP a (13.2c):

$$Y(s) = K \frac{\prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{s \prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \tag{13.5a}$$

$$= \frac{A_o}{s} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_i}{s - p_i} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{B_k(s + \zeta_k \omega_k) + C_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \tag{13.5b}$$

onde $n = n_1 + 2n_2$ e $0 < \zeta_k < 1$.

2º Caso: Presença de Polos Não Reais

Aplicando a TIL a (13.5b)

$$y(t) = A_o + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^{n_2} e^{-\zeta_k \omega_k t}(B_k \cos \omega_{d_k} + C_k \operatorname{sen} \omega_{d_k}) \qquad (13.6)$$

Pergunta

Quando um sistema de ordem qualquer será estável?

Observação

1º- *Para que y não cresça indefinidamente, deve-se ter $p_i < 0$ e $\zeta_k \omega_k > 0$;*

2º- *O decréscimo dos termos exponenciais depende das partes reais de seus respectivos polos;*

3º- *O cancelamento de polos e zeros também é válido para os termos complexos.*

Comentários Importantes

Importante!

Polo dominante: *Se* p_1 *e* p_2 *são polos com parte real negativa e* $\mathrm{Re}(p_1) \gg \mathrm{Re}(p_2)$, *então os efeitos de* p_2 *são suprimidos pelos de* p_1. *Diz-se que* p_1 *domina* p_2.

Importante!

Estabilidade: *Para garantir que* $y(t)$ *não cresça indefinidamente (para entrada limitada), devemos assegurar que todos os polos da FTMF estejam no semi-plano complexo esquerdo. Neste caso, diz-se que o sistema é estável. A estabilidade de um sistema é uma característica inerente, independendo da entrada aplicada.*

Polinômios e Estabilidade

- Os polos da FTMF devem estar no semi-plano esquerdo;
- Fatorar polinômios é uma tarefa complexa;
- Acima do 5º grau, é impossível através de operações elementares em seus radicais (teorema de Abel-Ruffini);

Observação

Objetivo do Critério de Routh-Hurwitz (CRH): determinar se um sistema é estável sem fatorar seus polinômios.

O Critério de Routh-Hurwitz

Considere a FTMF do sistema em malha fechada como em (3.3):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{13.7}$$

Referindo ao denominador de (13.7), considere o polinômio:

$$D(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{s-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_o \tag{13.8}$$

Lema

Se (13.7) é estável, então $\alpha_i \alpha_j > 0$, $0 \leq i, j \leq n$.

O Critério de Routh-Hurwitz

Com coeficientes todos positivos, escreva o arranjo de Routh:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_o & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots
\end{array}
$$

onde $a_i = \alpha_{n-i}$ e :

$$
b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_o a_{2i+1}}{a_1} \tag{13.9}
$$

Escreva as linhas $s^{n-3}, \dots, s^0$ de forma análoga.

Teorema (Critério de Routh-Hurwitz)

O número de raízes de (13.8) *com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna do arranjo de Routh.*

Exemplo 1

O polinômio $D(s) = 5s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$ é estável?

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 5 & 3 & 1 \\
\color{red}{s^3} & \color{red}{4} & \color{red}{2} & \\
s^3 & 2 & 1 & \\
s^2 & 0{,}5 & 1 & \\
s^1 & -3 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

Dividindo esta linha por 2...

Assim, conclui-se que $D(s)$ tem dois polos no semi-plano esquerdo.

Exemplo 2

Para quais valores de k o polinômio

$$D(s) = s^3 + s^2 + s + k$$

é estável?

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & k \\ s^1 & 1-k & \\ s^0 & k & \end{array}$$

Donde se nota que se deve ter $k, 1-k > 0$, ou seja:

$$0 < k < 1$$

para estabilidade.

Elemento Nulo na 1ª Coluna

Considere como exemplo o polinômio $D(s) = 2s^4 + s^3 + 2s^2 + s + 1$.

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 2 & 2 & 1 \\
s^3 & 1 & 1 & \\
s^2 & 0 & 1 & \\
s^2 & \varepsilon & 1 & \\
s^1 & \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

- Troque o zero em s^2 por um $\varepsilon > 0$;
- Fazendo $\varepsilon \to 0_+$, tem-se:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \to -1$$

Logo, o polinômio possui duas raízes no semi-plano direito.

Linha Nula

Considere o exemplo:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 11 & 28 \\
s^4 & 5 & 23 & 12 \\
s^3 & 6{,}4 & 25{,}6 & \\
s^2 & 3 & 12 & \\
\color{red}{s^1} & \color{red}{0} & & \\
s^1 & 6 & & \\
s^0 & 12 & &
\end{array}$$

- Considere a linha acima da linha nula

$$\begin{bmatrix} a_i & a_{i-2} & a_{i-4} & \dots \end{bmatrix} \tag{13.10}$$

- Tome o polinômio auxiliar:

$$P_i(s) = a_i s^i + a_{i-2} s^{i-2} + a_{i-4} s^{i-4} + \dots \tag{13.11}$$

- Para a linha $i-1$, tome os coeficientes de P';
- As raízes de P_i são raízes de P. Assim...

Estabilidade Relativa

- De acordo com (13.6) (e (13.4)) a parte real da raiz determina a rapidez do transitório;
- Assim, é interessante não só garantir a estabilidade de um sistema, mas esta queda;
- Ou seja, $\mathrm{Re}(p_i) < \sigma_{\mathsf{min}}, i = 1, 2, \ldots, n$;
- Isto equivale a fazer, no arranjo de Routh:

$$s = \hat{s} + \sigma \tag{13.12}$$

Exemplo 3

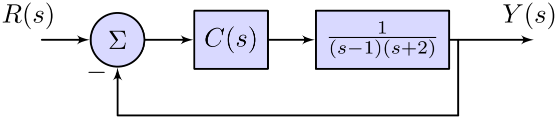
Sabemos que $D(s) = s^3 + s^2 + s + k$ é estável para $0 < k < 1$.
Determinemos a faixa de valores para a qual os polos terão parte real menor que $-0{,}5$.
Para tanto, com (13.12):

$$\begin{aligned} D(\hat{s}) &= (\hat{s} + \sigma)^3 + (\hat{s} + \sigma)^2 + (\hat{s} + \sigma) + k \\ &= \hat{s}^3 + (3\sigma + 1)\hat{s}^2 + (3\sigma^2 + 2\sigma + 1)\hat{s} + \sigma^3 + \sigma^2 + \sigma + k \end{aligned}$$

Donde concluímos que não existe k para este decaimento mínimo. (Por quê?)

Exemplo 4

Considere o sistema de controle



Determinemos os compensadores PI capazes de estabilizar este sistema. Usando (9.7):

$$C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

Assim, a FTMF torna-se:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_p s + k_i}{s^3 + s^2 + (k_p - 2)s + k_i}$$

Exemplo 4

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & k_p - 2 \\
s^2 & 1 & k_i \\
s^1 & k_p - 2 - k_i & \\
s^0 & k_i &
\end{array}
$$

Ou seja:

$$
\begin{cases}
k_i > 0 \\
k_p > k_i + 2
\end{cases}
$$