CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 25 - “Sistemas de Controle no Espaço de Estado II”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

21 de julho de 2017

1 Controlabilidade

2 Realimentação de Estado

1. Controlabilidade

2. Realimentação de Estado

Introdução

- Até agora, vimos esquemas de realimentação pela leitura da saída;
- Estratégia até então adotada: detectar o erro e levá-lo a zero;
- Realimentação de estado: leitura de $\mathbf{x}$ via sensores!
- Objetivo da realimentação de estado: transferir o estado de um sistema $\mathbf{x}_o \mapsto \mathbf{x}_f$ no tempo $t_o \mapsto t_f$;
- Pergunta imediata: "Sob quais condições isto é possível?"

Definição de Controlabilidade

Definição (Controlabilidade)

A EDO (4.1a) é dita controlável se, dados uma condição inicial e um estado final, $\mathbf{x}(t_o), \mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$*, existe uma entrada,* $\mathbf{u}$*, tal que* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f$ *para algum instante de tempo* $t_o < t < \infty$.

- A controlabilidade responde à questão: "É possível transferir o estado a qualquer ponto em tempo finito, com um sinal de controle conveniente?"
- Se a controlabilidade for verificada para um dado sistema, diz-se que o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é controlável;
- Como verificar a controlabilidade de um dado par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$?

Matriz de Controlabilidade I

À solução de (4.1a), (21.8), com a definição acima, $t_o = 0$ e $\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_o + \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\,\tau$$

Assim:

$$\mathbf{x}_o = -\int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\,\tau$$

Usando a fórmula de interpolação de Sylvester:

$$\mathbf{x}_o = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^k\mathbf{B}\underbrace{\int_0^{t_f} -\alpha_k(\tau)\mathbf{u}\,\mathrm{d}\,\tau}_{\beta_k} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix} \tag{25.1}$$

Matriz de Controlabilidade II

Ao observar (25.1), nota-se que a transformação linear

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{25.2}$$

deve ser capaz de gerar qualquer vetor $\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$.

Teorema

A EDO (4.1a) é controlável se, e somente se

$$\mathrm{rank}(\mathcal{C}) = n \tag{25.3}$$

além disto, a controlabilidade de um sistema não é afetada por nenhuma transformação de similaridade, $\mathbf{T}$.

Exemplo

Considere o sistema massa-mola-amortecedor (aula 04):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{b}{m} & -\dfrac{k}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Determinemos a matriz de controlabilidade:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{m} \\ \dfrac{1}{m} & -\dfrac{k}{m^2} \end{bmatrix}$$

Neste caso, para $k, m > 0$, $\mathrm{rank}(\mathcal{C}) = 2$. Logo, este sistema é controlável.

Forma Canônica Controlável

Definição (Forma Canônica Controlável)

Um SLIT-C da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ -\alpha_0 \mathbf{I}_m & -\alpha_1 \mathbf{I}_m & -\alpha_2 \mathbf{I}_m & -\alpha_3 \mathbf{I}_m & \dots & -\alpha_{n-2} \mathbf{I}_m & -\alpha_{n-1} \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{25.4a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{25.4b}$$

é dito estar na Forma Canônica Controlável (FCC).

Qual a importância da FCC?

Calculemos a matriz de controlabilidade de (25.4):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \; \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \\ -\alpha_{n-1}\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \; \ldots \; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\alpha_{n-1}\mathbf{I}_m \\ (\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})\mathbf{I}_m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

que possui sempre n colunas LI!

Lema

i) *A FCC é controlável.*

ii) *Todo SLIT-C similar à FCC é controlável.*

Alguns Comentários

- No item ii do lema anterior, vale a recíproca!
- A controlabilidade no plano s ocorre se não ocorrer cancelamentos na FT;
- Pode ser necessário determinar a controlabilidade de saída;
- Neste caso, é possível mostrar que a matriz:

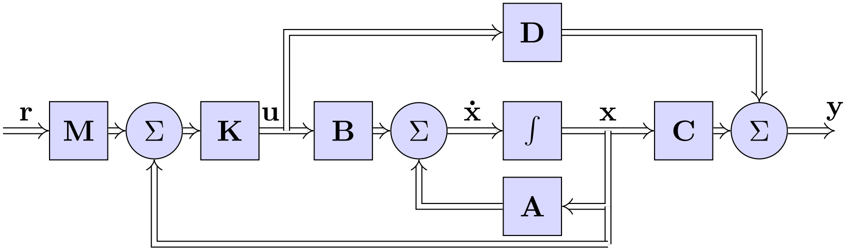
$$\mathcal{C}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \ldots & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{25.5}$$

deve ser tal que $\mathrm{rank}(\mathcal{C}_y) = p$, para tal controlabilidade.

1 Controlabilidade

2 Realimentação de Estado

Diagrama de Blocos em Malha Fechada

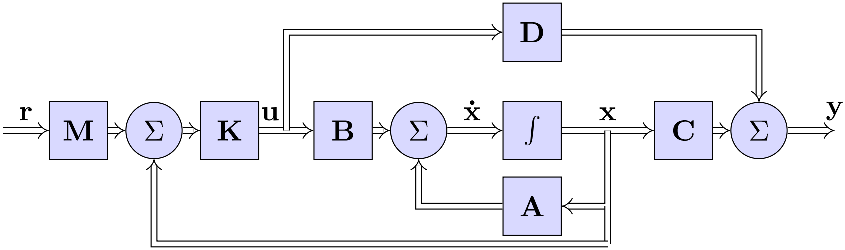


- O sinal de controle é:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{M}\mathbf{r} + \mathbf{x}) \tag{25.6}$$

- Todas as variáveis de estado devem possuir sensor;

Representação em Malha Fechada



Substituindo (25.6) em (4.1), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BKMr} \quad (25.7a)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{C} + \mathbf{DK})\mathbf{x} + \mathbf{DKMr} \quad (25.7b)$$

Princípios de Projeto (SISO)

- Tome um SLIT-C-SISO;
- Ao usar a lei (25.6), troca-se a FT (4.2) por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left[(\mathbf{C}+\mathbf{D}\mathbf{K})\left(s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]\mathbf{K}\mathbf{M} \tag{25.8}$$

- Dada uma região Ω, como posicionar os autovalores nessa região?
- Note que apenas $\mathbf{K}$ interfere nesta etapa de projeto!
- Este é o chamado problema de alocação de polos.
- Precisamos de mais tempo para abordá-lo...