CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 07 - "Modelagem de Sistemas Dinâmicos V: Sistemas de Nível e Térmicos; Linearização de Modelos"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

5 de maio de 2017

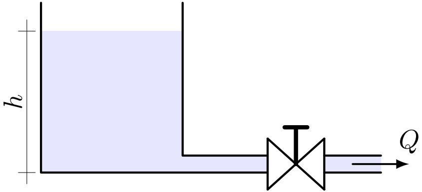
Sistemas de Controle de Nível

- O escoamento de fluidos depende do número de Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v D}{\mu} \tag{7.1}$$

  - ρ é a massa específica do fluido (em kg/m³);
  - v é a velocidade de escoamento;
  - D é o diâmetro da tubulação, e;
  - μ é a viscosidade dinâmica (em Pa · s).
- $\mathcal{R} \leq 2000$: escoamento laminar, e;
- $\mathcal{R} > 2000$: escoamento turbulento (não linear, logo...).

Sistemas de Controle de Nível: Resistências



A resistência da válvula é dada por:

$$R = \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,Q} \qquad (7.2)$$

Escoamento Laminar:

$$Q = Kh \qquad (7.3)$$

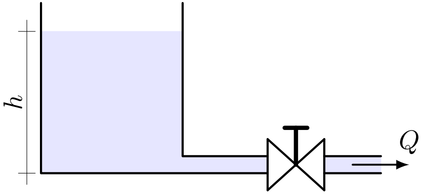
$$R = K^{-1} \qquad (7.4)$$

Escoamento Turbulento:

$$Q = K\sqrt{h} \qquad (7.5)$$

$$R = \frac{2}{K}\sqrt{h} \qquad (7.6)$$

Sistemas de Controle de Nível: Capacitâncias



A capacitância do tanque é dada por:

$$C = \frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,h} \qquad (7.7)$$

Para secção transversal constante:

$$V = Ah$$

Logo

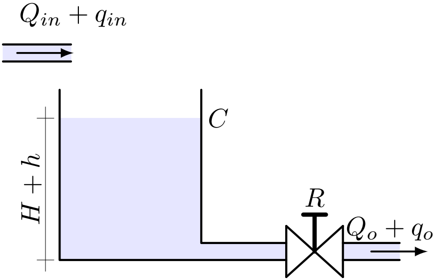
$$C = A \qquad (7.8)$$

Observação

Para modelar sistemas de nível, use a equação da vazão:

$$Q = \frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,h}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t} \overset{(7.7)}{=} C\dot{h} \qquad (7.9)$$

Exemplo: Suprimento de Fluido a um Tanque



Com (7.3)

$$q_o = \frac{1}{R} h$$

Usando (7.9)

$$C\dot{h} = \dot{V} = q_i - q_o$$

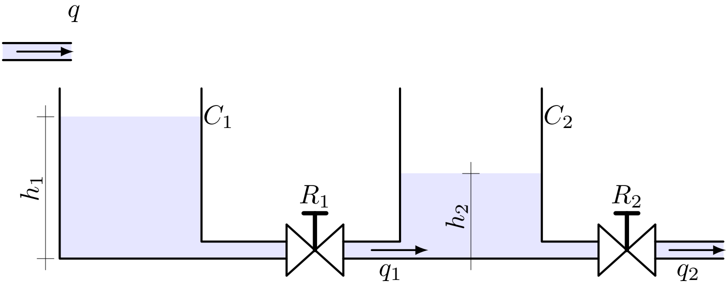
Combinando

$$RC\dot{h} + h = Rq_i$$

Logo:

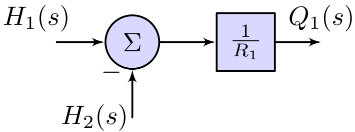
$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Exemplo: Tanques Comunicantes

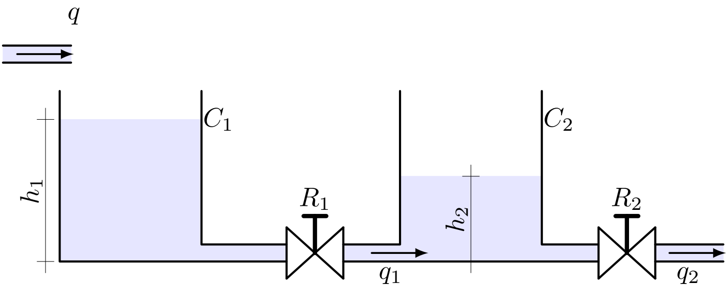


Para o registro 1, de (7.3):

$$h_1 - h_2 = R_1 q_1$$

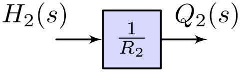


Exemplo: Tanques Comunicantes

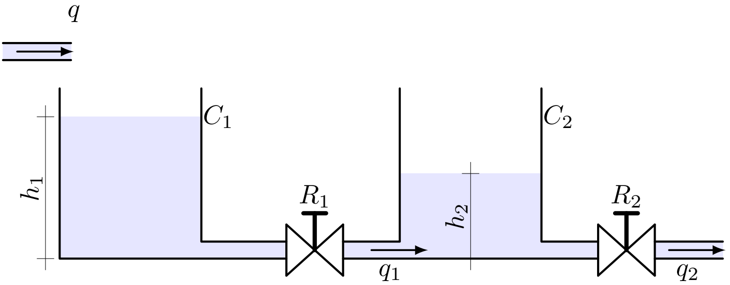


Para o registro 2, de (7.3):

$$h_2 = R_2 q_2$$

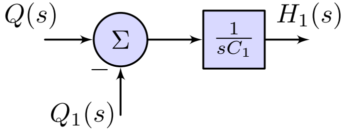


Exemplo: Tanques Comunicantes

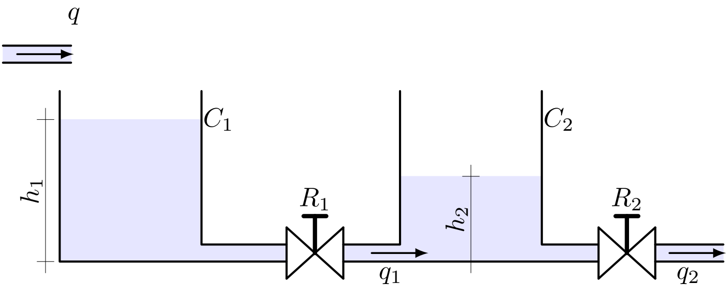


Para o tanque 1, de (7.9):

$$C_1\dot{h}_1 = q - q_1$$

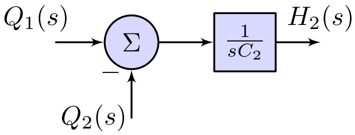


Exemplo: Tanques Comunicantes

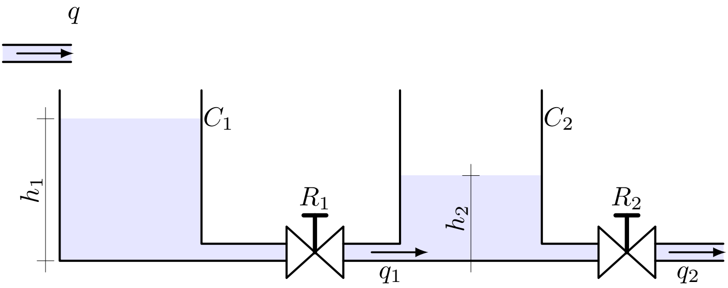


Para o tanque 2, de (7.9):

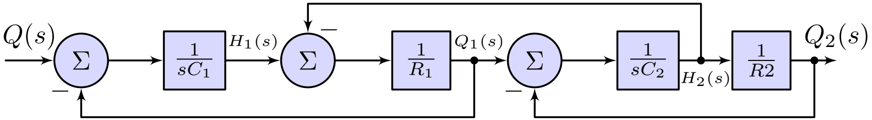
$$C_2\dot{h}_2 = q_1 - q_2$$



Exemplo: Tanques Comunicantes



Unindo os diagramas de blocos de forma conveniente



Sistemas Térmicos

- Sistemas térmicos: transferência de calor;
- A rigor são sistemas distribuídos ($n = \infty$);
- A transferência de calor se dá por:
  - Condução;
  - Convecção (envolve transferência de massa);
  - Radiação (altas temperaturas).
- O modelo para Sistemas Térmicos segue o de Sistemas de Nível.
  - Nível (h) $\leftrightarrow$ Temperatura (θ);
  - Vazão (q) $\leftrightarrow$ Fluxo de Calor (h);

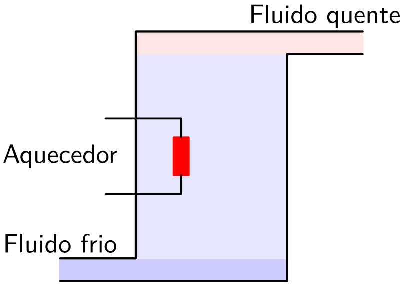
Observação

Para modelar Sistemas Térmicos:

$$\theta = Rh \tag{7.10}$$

$$h = C\dot{\theta} \tag{7.11}$$

Exemplo: Aquecedor de fluido



h_i: calor de entrada (do aquecedor)
h_o: calor de saída
θ: temperatura do tanque

Relação entre o tanque e a saída (usando (7.10)):

$$\theta = Rh_o \overset{\text{TL}}{\Rightarrow} \Theta(s) = RH_o(s)$$

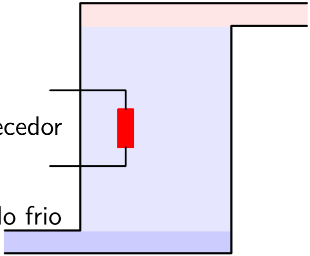
Para o armazenamento de calor (usando (7.11)):

$$\dot{\theta} = \frac{h_i - h_o}{C} \overset{\text{TL}}{\Rightarrow} \Theta(s) = \frac{H_i(s) - H_o(s)}{sC}$$

Fazendo h_i a entrada e θ, a saída:

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Exemplo: Aquecedor de fluido (Modelo Melhorado)



h_i: calor de entrada (do aquecedor)
h_o: calor de saída
θ: temperatura do tanque
θ_i: temperatura do fluido frio

Usando a linearidade ($h_i = 0$):

$$C\dot{\theta} = h_{\text{total}} = \frac{1}{R}(\theta_i - \theta)$$

Aplicando TL:

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

θ_i é uma perturbação. Assim:

$$\Theta(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{RCs+1} & \frac{R}{RCs+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i(s) \\ H_i(s) \end{bmatrix}$$

Linearização de Modelos

Elementos podem apresentar comportamento não-linear, da forma:

$$y(t) = f(u(t)) \tag{7.12}$$

Com a série de Taylor em torno de um ponto de operação, $(\tilde{u}, \tilde{y} = f(\tilde{u}))$.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f(\tilde{u})}{\mathrm{d}\, t^n} (u - \tilde{u})^n \tag{7.13}$$

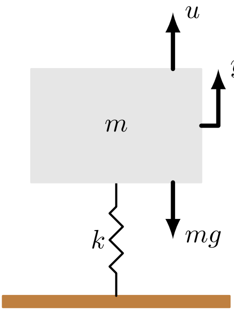
Truncando no segundo termo:

$$y \approx f(\tilde{u}) + \frac{\mathrm{d}\, f(\tilde{u})}{\mathrm{d}\, t} (u - \tilde{u})$$

Donde:

$$\underbrace{y - \overbrace{f(\tilde{u})}^{\tilde{y}}}_{\bar{y}} \approx \underbrace{\frac{\mathrm{d}\, f(\tilde{u})}{\mathrm{d}\, t}}_{k} \underbrace{(u - \tilde{u})}_{\bar{u}} \tag{7.14}$$

Exemplo: Sistema Massa-Mola Não Linear



Mola não linear:

$$F_{\text{mola}} = ky^2$$

Note que:

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{F} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,F} = \frac{1}{2\sqrt{kF}}$$

Aplicando (7.14) em $\left(mg, \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)$:

$$y - \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx \frac{1}{2\sqrt{mgk}}(u - mg)$$

Sistemas MIMO Não Lineares

Considere a i-ésima saída de um elemento não linear, da forma

$$y_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_m) \tag{7.15}$$

Tome um ponto de operação $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_m, \tilde{y}_i)$ e, similarmente a (7.14):

$$y_i - \tilde{y}_i \approx \frac{\partial f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_m)}{\partial u_1}(u_1 - \tilde{u}_1) + \frac{\partial f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_m)}{\partial u_2}(u_2 - \tilde{u}_2) + \\ + \ldots + \frac{\partial f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_m)}{\partial u_m}(u_m - \tilde{u}_m) \tag{7.16}$$

Sistemas MIMO Não Lineares

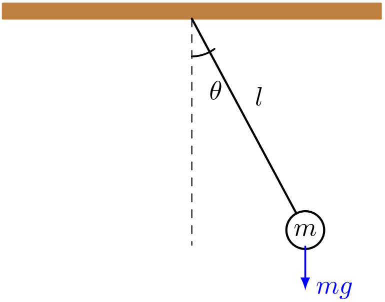
Aplicando a cada saída, tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_1 - \tilde{y}_1 \\ y_2 - \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ y_n - \tilde{y}_n \end{bmatrix} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} u_1 - \tilde{u}_1 \\ u_2 - \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ u_m - \tilde{u}_m \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

Observação

- *As derivadas parciais em* (7.17) *são calculadas em* $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_m)$*;*
- *A matriz de derivadas parciais,* $\mathcal{J}$*, é chamada jacobiana.*

Exemplo: Pêndulo



Dinâmica não linear:

$$T = mgl \operatorname{sen} \theta$$

No ponto $(\tilde{\theta}, \tilde{T}) = (0, 0)$:

$$T - \tilde{T} = \left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \right|_{\theta = \tilde{\theta}} (\theta - \tilde{\theta})$$

Ou seja:

$$T = mgl\theta$$

para pequenos ângulos.