# CONTROLE E SERVOMECANISMOS
## Engenharia da Computação
### Aula 03 - "Modelagem de Sistemas Dinâmicos I: Funções Transferência e Diagramas de Blocos"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

26 de abril de 2017

UFMS

FACOM-UFMS

# Introdução

- Um modelo é um conjunto de equações que descrevem com um certo grau de precisão um sistema.

**Importante!**

*Um compromisso existe entre:*

*Simplicidade e Complexidade*

- Sistemas lineares: Aqueles aos quais o princípio da superposição se aplica;
- Sistemas invariantes no tempo: Aqueles cuja estrutura não se altera ao longo do tempo.

# Introdução

- Os Sistemas Lineares, Contínuos e Invariantes no Tempo (SLIT-Cs) são descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) lineares com coeficientes constantes;
- A maior parte dos sistemas é, a rigor, não-linear;
- Para muitos deles, é possível realizar uma linearização;
- O modelo linear de um sistema não-linear é mais simples para projetos porém, é menos precisa.

# Funções Transferência

Considere o SLIT-C descrito pela EDO:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overset{\langle i \rangle}{y} = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \overset{\langle j \rangle}{u} \tag{3.1}$$

onde $u$ é a entrada e $y$, a saída (e $n$, a ordem do sistema).
A Função Transferência (FT) desse SLIT-C é definida por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left. \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} \right|_{y(0)=\dot{y}(0)=\ldots=\overset{\langle n-1 \rangle}{y}(0)=0} \tag{3.2}$$

Combinando (3.1) e (3.2):

$$G(s) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \beta_j s^j}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i} \tag{3.3}$$

# Funções Transferência: Observações

**Observação**

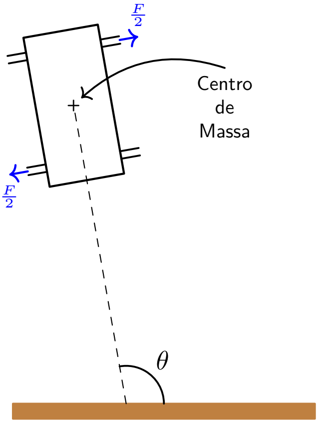
*A Função Transferência:*

i) *É uma característica do sistema, independendo da entrada aplicada;*

ii) *Não fornece informação alguma a respeito da estrutura interna do sistema. Com efeito, diferentes sistemas podem ter a mesma FT;*

iii) *Pode ser experimentalmente levantada. Após isto, tem-se total conhecimento das características dinâmicas do sistema.*

# Exemplo: Sistema de Controle de Posição de Satélite




A EDO para a posição do satélite é:

$$J\ddot{\theta} = T \Rightarrow J\ddot{y} = u$$

Aplicando a Transformada de Laplace (TL) sob condições iniciais nulas:

$$Js^2Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

onde:
$T \rightarrow$ torque (entrada)

$\theta \rightarrow$ ângulo de guinada (saída)

$J \rightarrow$ momento de inércia

# Funções Transferência

Usando a propriedade da convolução em (3.2):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$
$$\Rightarrow y(t) = \int_0^\infty u(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \qquad (3.4)$$

**Observação**

*Não se esqueça que a convolução é comutativa!!!!*

# FTs: Identificação de Sistemas via Impulso

Em (3.2), se fizermos $u = \delta$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]\Big|_{u=\delta} \tag{3.5}$$

Assim, para obter a FT de forma experimental, faz-se:

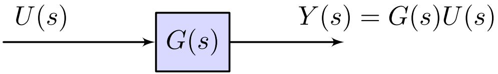
1º) Aplique um impulso (delta de Dirac) à entrada;

2º) Obtenha a resposta do sistema ao longo do tempo;

3º) A FT será a TL da resposta do sistema.

# Diagramas de Blocos

Diagramas de Blocos (DBs) são representações esquemáticas das interações entre os elementos de um sistema.
Um bloco é a representação para a operação matemática sobre o sinal de entrada que produz a saída.



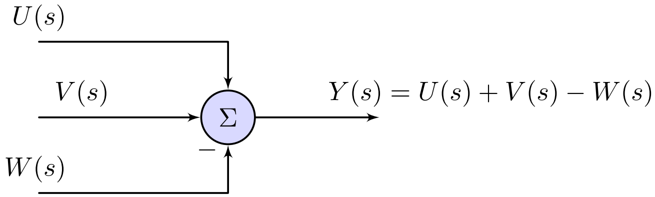

### Observação

*Como as FTs, os DBs fornecem o comportamento dinâmico do sistema, mas nada falam sobre sua estrutura interna. Diferentes sistemas podem ter o mesmo diagrama de blocos.*

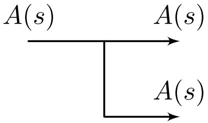
# Diagramas de Blocos

Também compõem um diagrama de blocos:

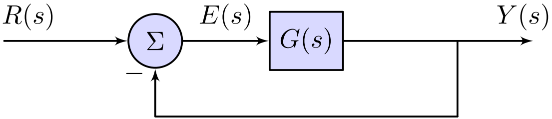
- Ponto de soma:




- Ponto de ramificação:



# Exemplo: Malha Fechada e Realimentação Unitária




Note que:

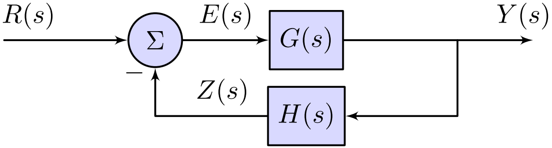
$$E(s) = R(s) - Y(s) \text{ e que } Y(s) = G(s)E(s)$$

Assim:

$$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{3.6}$$

# Sistema em Malha Fechada



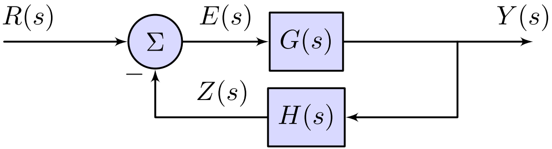

- Função Transferência de Malha Aberta (FTMA): É a razão entre o sinal do sensor e o de erro.

$$Z(s) = G(s)H(s)E(s) \quad \Rightarrow \quad FTMA(s) = G(s)H(s) \tag{3.7}$$

- Função Transferência de Feed Forward (FTFF): É a razão entre o sinal de saída e o de erro.

$$Y(s) = G(s)E(s) \quad \Rightarrow \quad FTFF(s) = G(s) \tag{3.8}$$

# Função Transferência de Malha Fechada



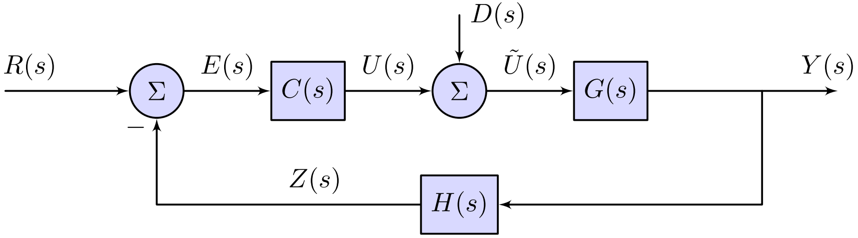

É a razão entre o sinal de saída e o de entrada.
Note que:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \text{ e que } Y(s) = G(s)E(s)$$

Assim:

$$FTMF(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{3.9}$$

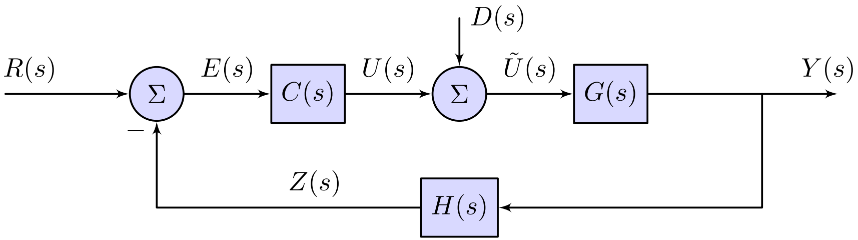
# Sistemas sob Perturbação




Como se trata de um SLIT-C, fazemos $D(s) \equiv 0$ e, usando (3.9):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \tag{3.10}$$

# Sistemas sob Perturbação




Fazendo $R(s) \equiv 0$ e, usando (3.9):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \tag{3.11}$$

# Sistemas sob Perturbação

Somando (3.10) e (3.11):

$$Y(s) = \left[\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \quad \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}\right] \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

- Se $|C(s)G(s)H(s)|, |C(s)H(s)| \gg 1$, então a perturbação é suprimida;
- Neste caso, tem-se $Y(s) = \dfrac{R(s)}{H(s)}$.

Assim, um sistema em malha fechada pode ser projetado para:

- rejeitar perturbações;
- igualar saída e entrada (seguir a referência, com $H(s) = 1$).

# Simplificação de Diagramas de Blocos

**Observação**

*Blocos podem ser postos em série somente se a saída do bloco antecedente não for afetada pelo bloco subsequente.*

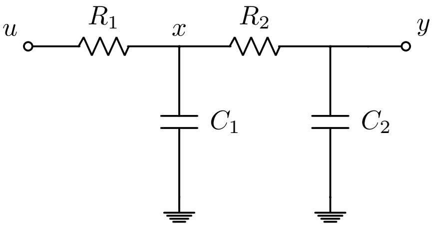
**Observação**

*Simplificar o diagrama de blocos implica em tornar mais complexa a FT de cada bloco.*

Ao simplificar blocos deve-se:

- Manter o produto das FTs no caminho direto;
- Manter o produto das FTs em torno de cada laço.

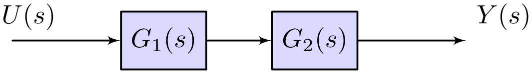
# Exemplo: Carga Afetando Bloco Anterior




- Note que o sinal $x$ (tensão em $C_1$) é afetado pela carga ($R_2$ e $C_2$);
- Assim, não é possível fazer uma associação série de blocos com FTs para cada par RC.

# Operações com Blocos

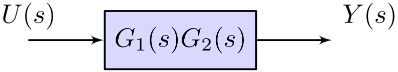
I- Associação série




Observando que:

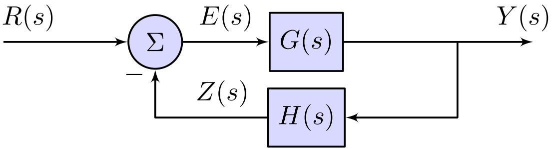
$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) \tag{3.13}$$

Então este diagrama é equivalente a:

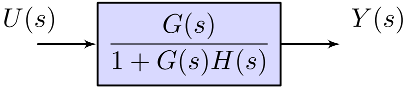


# Operações com Blocos

II- Laço de realimentação (feedback)

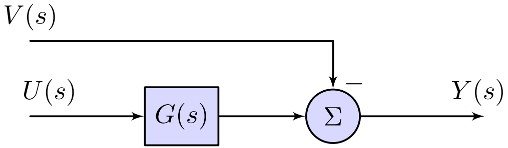



De acordo com (3.9), temos que este DB é equivalente a:



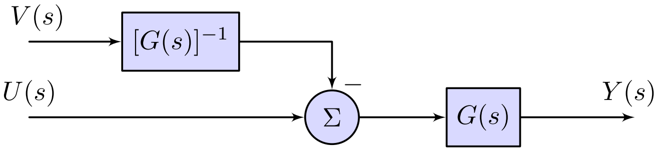
# Operações com Blocos

III- Deslocamento de bloco a jusante de ponto de soma:



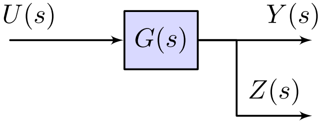

Notando a relação

$$Y(s) = G(s)U(s) - V(s) \tag{3.14}$$



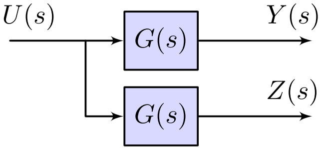
# Operações com Blocos

IV- Deslocamento de bloco a jusante de ponto de ramificação:



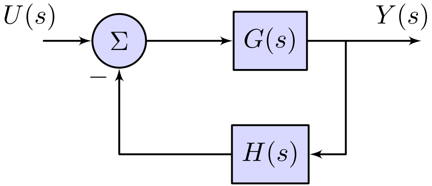

Notando a relação

$$Y(s) = Z(s) = G(s)U(s) \tag{3.15}$$

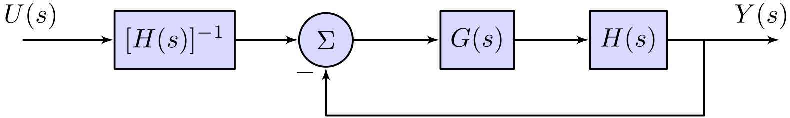


# Exemplo I

Transforme o diagrama a seguir em uma realimentação unitária:

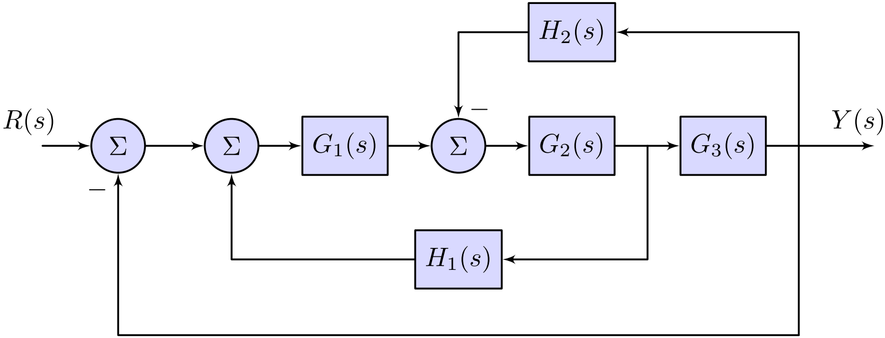



Após usar (3.14):



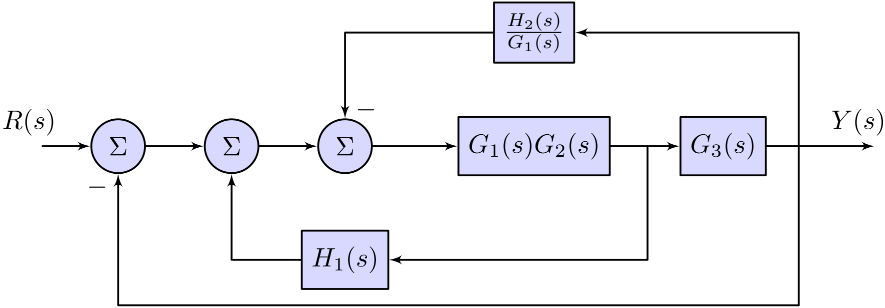
# Exemplo II

Obtenha a Função Transferência de Malha Fechada (FTMF).



# Exemplo II

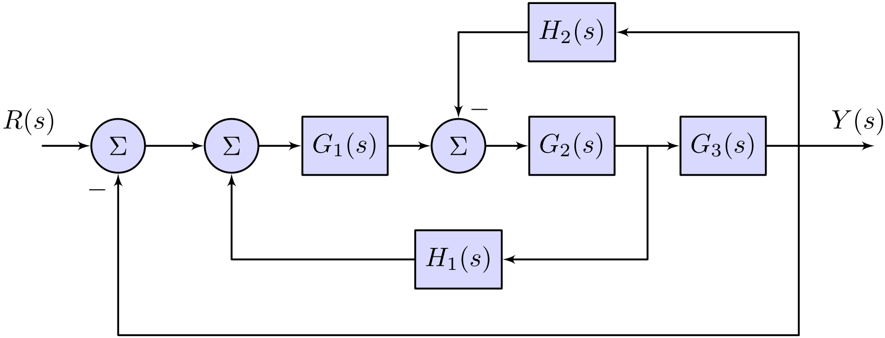
Movendo $G_1$ a jusante do 3º ponto de soma:




Aplicando sucessivamente (3.9):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 - [G_1(s)G_2(s)H_1(s) - G_2(s)G_3(s)H_2(s) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)]}$$

# Exemplo II: Constatação Importante!




## Observação

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\textit{produto dos blocos no caminho direto}}{1 - \sum \textit{produto dos blocos em cada laço}} \tag{3.16}$$