CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 21 - "Resposta em Frequência IV"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

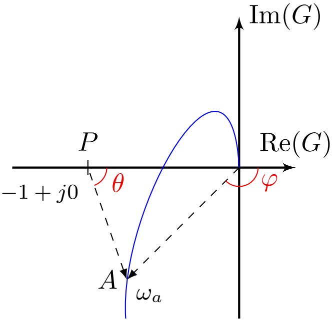
12 de julho de 2017

1. Resposta em Frequência em Malha Fechada

2. Determinação Experimental de Funções Transferência

Relação Malha Aberta e Malha Fechada

Considere sistema em malha fechada e realimentação unitária:



Observe que $\vec{OA} = G(j\omega_a)$ e que $\vec{PA} = 1 + G(j\omega_a)$.

Logo:

$$\frac{||\vec{OA}||}{||\vec{PA}||} = \left| \frac{G(j\omega_a)}{1 + G(j\omega_a)} \right| \tag{21.1a}$$

$$\arg\left(\frac{G(j\omega_a)}{1 + G(j\omega_a)}\right) = \varphi - \theta \tag{21.1b}$$

Defina:

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = M(j\omega)e^{j\alpha(j\omega)} \tag{21.2}$$

Objetivo

Determinar os lugares geométricos de ganho e de fase constantes, para a FTMF.

Lugares de Magnitude Constante I

Escreva $G(j\omega) = X(j\omega) + jY(j\omega) = X + jY$. Tendo em vista (21.1a), a magnitude, M, é dada por:

$$M^2 = \frac{|X + jY|^2}{|1 + X + jY|^2} = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

ou, ainda:

$$(1 - M^2)X^2 - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0 \qquad (21.3)$$

Importante!

Se $M = 1$, temos uma reta vertical, passando por $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Lugares de Magnitude Constante II

Para $M \neq 1$, pode-se fazer:

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \tag{21.4}$$

Observação

(21.4) *é uma circunferência com centro em* $\left(-\frac{M^2}{M^2 - 1}, 0\right)$ *e raio* $\left|\frac{M}{M^2 - 1}\right|$.

Note, ainda, que:

$$M < 1 \Rightarrow \text{ centro à direita da reta (21.3)}$$
$$M > 1 \Rightarrow \text{ centro à esquerda da reta (21.3)}$$

Lugares de Fase Constante I

De forma similar à obtenção do ganho, para a fase, temos:

$$\alpha = \arg\left(\frac{X + jY}{1 + X + jY}\right) = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X} - \operatorname{arctg}\frac{Y}{1+X}$$

Definindo $N = \operatorname{tg}\alpha$ e usando $\operatorname{tg}(A - B) = \dfrac{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B}{1 + \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$:

$$N = \frac{\dfrac{Y}{X} - \dfrac{Y}{1+X}}{1 + \dfrac{Y}{X}\dfrac{Y}{1+X}} \Rightarrow X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N}Y = 0$$

Lugares de Fase Constante II

Somando $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{(2N)^2}$ a ambos os membros:

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2} \tag{21.5}$$

Observação

i) *O N-círculo de α e o de $\alpha \pm 180^\circ$ são o mesmo.*

ii) *Os M-círculos e N-círculos, no diagrama de Nyquist, dão origem à carta de Hall.*

Diagrama de Black e a Carta de Nichols

- Diagrama de Black: É a representação gráfica de $||G|| \times \arg(G)$;
- Frequência implícita, mas MF e MG são facilmente reconhecíveis;
- Carta de Nichols: Plotagem dos M-círculos e N-círculos no diagrama de Black;
- Esses círculos não aparecerão como tais no diagrama de Black. (Por quê?)

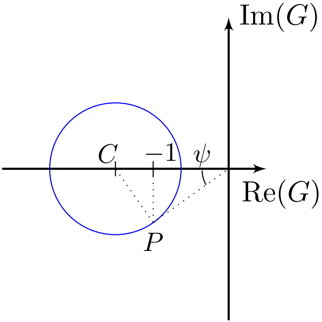
Exemplo

Analise o sistema com:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(0{,}5s+1)}$$

e obtenha MF, MG, ζ, M_r e ω_b. O que ocorre com a alteração de k?

Ajuste de Ganho I



- No LR, alguns projetos poderiam ser realizados com um ajuste de ganho;
- Considere o M-círculo da figura ao lado;
- Deseja-se fazer o pico de ressonância ficar limitado a um certo valor, isto é:

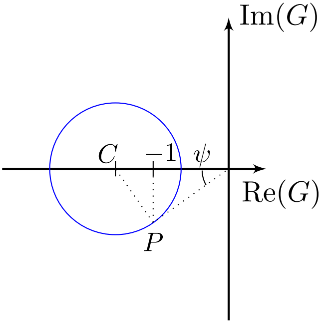
$$\left\| \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} \right\| \leq M_{rmax} \qquad (21.6)$$

onde $M_{rmax} > 1$ é dado.

Observação

Pode-se provar que a vertical por P passa por $-1 + j0$.

Ajuste de Ganho II



Passos para o projeto:

i) Trace o DN para G, sem o ganho;

ii) Desenhe o segmento OP, tal que ψ seja:

$$\psi = \operatorname{arcsen} M_r^{-1} \tag{21.7}$$

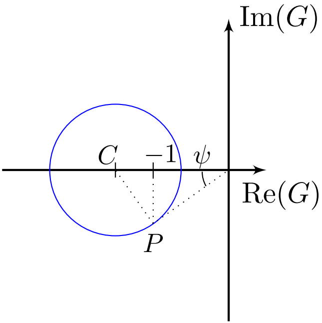
iii) Ajuste o M-círculo tocando-lhe o DN;

iv) Desenhe uma reta vertical por P, a qual, no eixo real, passara por um ponto A;

v) O valor de k deverá lançar A sobre $-1 + j0$. Logo:

$$k = \frac{1}{||\overrightarrow{OA}||} \tag{21.8}$$

Ajuste de Ganho: Exemplo



Considere um sistema de controle com realimentação unitária e FTMA:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Determine $k > 0$, tal que $M_r \leq 1{,}4$.

Introdução

- Em muitos casos, é difícil estabelecer um modelo analítico para sistemas;
- Um modelo aproximado pode ser obtido por testes na resposta em frequência;
- Procedimento:
  1º) Excitar a entrada do sistema com um sinal senoidal: amplitude, frequência e fase conhecidas;
  2º) Coletar o sinal (senoidal) de saída: amplitude e fase;
  3º) Repetir para diversas frequências;
  4º) Traçar os diagramas de Bode e obter uma Função Transferência (FT) aproximada;

Sistemas de Fase Mínima

Importante!

Ao observar o diagrama de fase em $\omega \to \infty$:

$$\arg(G(j\infty)) = -90^\circ(n-m) \Leftrightarrow \textit{fase mínima (Por quê?)}$$

- Com os dados experimentais observe-se:
  - i- Cada variação de ± 20dB/década implica em um termo da forma

$$\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^{\pm 1} \tag{21.9}$$

  - ii- Cada variação de ± 40dB/década implica em um termo da forma

$$\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_o} + \left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2\right)^{\pm 1} \tag{21.10}$$

  - iii- O valor de ζ é obtido ao observar o pico de ressonância (em ω_o).

Sistemas de Fase Mínima

- Na região de baixa frequência ($\omega \ll \min\{\omega_{c_i}, \omega_{o_i}\}$):
  - i- Apenas termos constantes, derivadores ou integradores são detectados:

$$k \cdot s^{\pm N} \tag{21.11}$$

  - ii- Sistemas tipo 0: O ganho é horizontal e igual a $20 \log k$
  - iii- Sistemas tipo 1: Inclinação de -20dB/década e $G(jk) = 0$dB.
  - iv- Sistemas tipo 2: Inclinação de -40dB/década e $G(j\sqrt{k}) = 0$dB.

Sistemas de Fase Não-Mínima

- O caso mais comum ocorre quando há uma variação constante da fase com a frequência;
- Assim, pode-se assumir que há um atraso de transporte no sistema, da forma:

$$G(s) = H(s)e^{-Ts} \tag{21.12}$$

- Assim, observe que:

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega} H(s)e^{-Ts} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega} \left(-90^\circ(n-m) - \omega T\right) = -T$$

- Então, a partir dessa inclinação, para a região $\omega \gg \max\{\omega_{c_i}, \omega_{o_i}\}$, se pode obter o termo referente ao atraso de transporte.

Comentários Finais

- É mais simples obter medidas acuradas de amplitude do que de fase;
- O equipamento de medida deve ter resposta em frequência:
  - plana para magnitude;
  - proporcional à frequência para a fase;
- O sistema a ser caracterizado pode ter muitas não-linearidades. Estas podem acarretar:
  - Saturação para sinais de teste com grande amplitude;
  - Zona morta para sinais de teste com pequena amplitude;