CONTROLE E SERVOMECANISMOS
Engenharia da Computação
Aula 10 - “Redução de Modelos”

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

19 de maio de 2017

1 Sistemas de Segunda Ordem com Zero

2 Redução de Modelos

1. Sistemas de Segunda Ordem com Zero

2. Redução de Modelos

Efeito de um Zero na Resposta de Segunda Ordem

Considere uma FT de 2ª ordem subamortecida, com zero, normalizada:

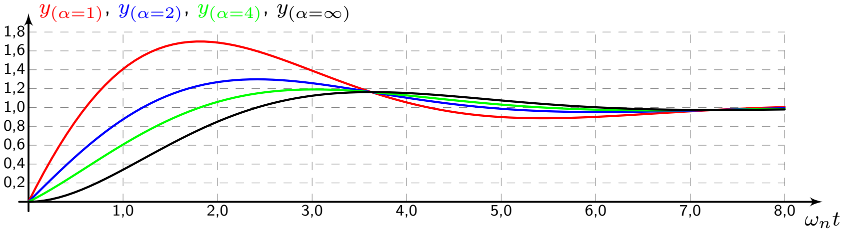
$$G(s) = \frac{\frac{s}{\alpha\zeta\omega_n} + 1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^* \tag{10.1}$$

Considerando (2.21) e (9.7) para a resposta ao degrau:

$$y(t) = \tilde{1}(t) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\operatorname{sen}\left(\omega_d t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) - \frac{1}{\alpha\zeta}\operatorname{sen}\omega_d t\right] \tag{10.2}$$

Efeito de um Zero na Resposta de Segunda Ordem

Para $\zeta = 0{,}5$:



Observação

- *O zero não afeta o tempo de acomodação de forma significativa!*
- *Sempre aumenta o overshoot e seu efeito é visível para* $\alpha < 4$.

1 Sistemas de Segunda Ordem com Zero

2 Redução de Modelos

Considerações

- Muitos SLIT-Cs são de ordem elevada;
- Sua representação por FTs é simples, porém o projeto pode ser bastante complexo;
- Como os polos dominantes possuem resposta mais persistente:
  - É possível aproximar $G(s)$ por outra FT, $\tilde{G}(s)$, de ordem menor?
  - Como fazer isto?
  - Qual o erro introduzido?
- Assunções:
  - $\tilde{G}$ tem ordem $\tilde{n} < n$ (não faz sentido o caso $\tilde{n} = n$, evidentemente);
  - $\tilde{G}$ pode apresentar $\tilde{m}$ zeros, mas $\tilde{m} \leq \tilde{n}$;
  - Pares de polos complexos conjugados devem ser retidos e com constantes multiplicativas conjugadas.

Procedimento via Polos Dominantes I

Escreva-se a FT do sistema com os polos ordenados:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - p_i}, \quad \mathrm{Re}(p_k) \geq \mathrm{Re}(p_{k+1}) \tag{10.3}$$

Após a redução do modelo, deseja-se ter FT da forma:

$$\tilde{G}(s) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{b_i}{s - p_i} \tag{10.4}$$

Onde os $\tilde{n}$ polos dominantes foram retidos no modelo.

Observação

Em geral, não é interessante fazer $b_i = a_i$ no modelo reduzido, pois o erro introduzido torna-se maior.

Procedimento via Polos Dominantes II

Observação

Proposta: A escolha dos coeficientes b_i tratará do comportamento em regime permanente de $\tilde{G}$ para $t \to \infty$.
Justificativa: Os polos retidos já tratam do comportamento transitório.

Considere as entradas $u = t^i \tilde{1}$, $i = 0, 1, \ldots, \tilde{n}$. Para cada entrada, pode-se determinar o regime permanente com:

$$\frac{G(s)}{s^{i+1}} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{s^j} \frac{\mathrm{d}^{i-j}\, G(0)}{\mathrm{d}\, s^{i-j}} + R_i(s) \tag{10.5}$$

onde $R_i(s)$ são "restos" que desaparecem para $t \to \infty$.

Procedimento via Polos Dominantes III

De acordo com a proposta feita, deve-se ter:

$$\frac{\mathrm{d}^i G(0)}{\mathrm{d}\, s^i} = \frac{\mathrm{d}^i \tilde{G}(0)}{\mathrm{d}\, s^i}, \forall i \in \{0, 1, \ldots, \tilde{n}-1\}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{p_1} & -\frac{1}{p_2} & \cdots & -\frac{1}{p_{\tilde{n}}} \\ -\frac{1}{p_1^2} & -\frac{1}{p_2^2} & \cdots & -\frac{1}{p_{\tilde{n}}^2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{(\tilde{n}-1)!}{p_1^{\tilde{n}}} & -\frac{(\tilde{n}-1)!}{p_2^{\tilde{n}}} & \cdots & -\frac{(\tilde{n}-1)!}{p_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\tilde{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(0) \\ \dot{G}(0) \\ \vdots \\ \overset{\langle \tilde{n}-1 \rangle}{G}(0) \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

Exemplo

Procedamos à redução do sistema a seguir à 2ª ordem:

$$G(s) = \frac{150(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+2)(s^2+6s+18)}$$

1º) Polos: $-1 \pm j$, -2 e $-3 \pm j3$

2º) Derivadas de G: $G(0) = 2{,}0833$ e $G'(0) = -1{,}7361$

3º) Usando (10.6):

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{-1+j} & \frac{-1}{-1-j} \\ \frac{-1}{(-1+j)^2} & \frac{-1}{(-1-j)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0833 \\ -1{,}7361 \end{bmatrix} \Rightarrow b_{1,2} = 0{,}3472 \mp j1{,}7361$$

4º) Assim, com (10.4):

$$\tilde{G}(s) = \frac{0{,}3472 - j1{,}7361}{s+1-j} + \frac{0{,}3472 + j1{,}7361}{s+1+j} = \frac{0{,}6944s + 4{,}1666}{s^2+2s+2}$$