CONTROLE E SERVOMECANISMOS

Engenharia da Computação

Aula 19 - "Resposta em Frequência II"

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

07 de julho de 2017

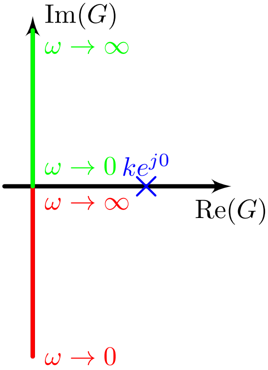
1. Diagrama de Nyquist

2. Critério de Estabilidade de Nyquist

Introdução

- Nesta representação, a frequência está implícita;
- Diagrama de Nyquist (DN): $\mathrm{Re}(G(j\omega)) \times \mathrm{Im}(G(j\omega))$;
- Vantagens: plotagem única, obtenção de magnitude e ângulo por simples inspeção;
- Desvantagem: não é possível determinar as contribuições individuais dos polos e zeros;
- A título ilustrativo, faremos o estudo dos termos possíveis em uma FT.

Termo Constante e Termo Integrador/Derivador



Termo constante:

$$G(j\omega) = K = Ke^{j0} \tag{19.1}$$

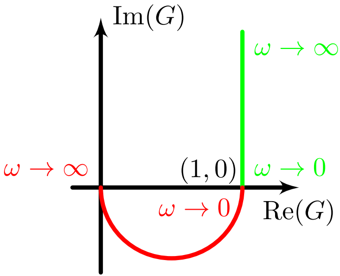
Termo integrador/integrador:

$$G(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1} = \omega^{\pm 1} e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \tag{19.2}$$

Observação

Para o termo constante, temos apenas um ponto. Para integrador/derivador, uma semi-reta vertical iniciando na origem.

Termo de 1ª Ordem



É trivial o resultado para expoente positivo de

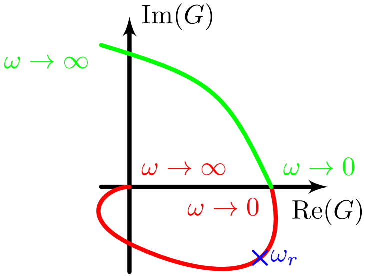
$$G(j\omega) = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$$

Para o caso negativo, note que:

$$|G(j\omega) - 0{,}5| = \left|\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_n}} - 0{,}5\right| = \left|0{,}5\frac{1 - j\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_n}}\right| = 0{,}5$$

Ou seja, é parte de uma circunferência de raio e centro iguais a $0{,}5$. Na verdade, a parte inferior. (Por quê?)

Termo de 2ª Ordem



- O caso dos zeros é trivial;
- Só interessa o caso dos polos subamortecidos;
- Observe que:

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1$$

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega_n) = -j\frac{1}{2\zeta}$$

- A frequência de ressonância ocorre no ponto mais distante da origem.

Efeito do Atraso de Transporte

O atraso de transporte, no domínio da frequência é escrito como:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \operatorname{sen} \omega T \tag{19.3}$$

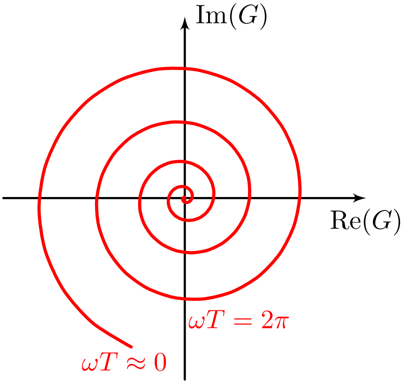
Observação

O DN do atraso de transporte é a circunferência unitária centrada na origem, girando no sentido horário.

Importante!

O atraso de transporte adiciona a fase $-\omega T$ a todos os pontos do diagrama de Nyquist traçado com os demais termos.

Exemplo: Integrador com Atraso $G(s) = \dfrac{e^{-sT}}{s}$



Observe que:

$$G(j\omega) = -j\frac{1}{\omega}e^{-j\omega T} = \frac{1}{\omega}e^{-j\left(\omega T + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Assim:

- $|G(j0)| \to \infty$;
- $\arg(G(j0)) \to -90°$;
- $|G(j\infty)| \to 0$
- O diagrama "gira" no sentido horário.

Regras Gerais do Diagrama de Nyquist

Considere uma FT senoidal dada por (17.13), causal e estritamente próprio. Se:

- $N = 0$, o DN inicia-se perpendicularmente ao eixo real em um valor positivo e termina na origem, tangenciando um dos eixos;
- $N = 1$, o DN inicia-se com magnitude infinita e fase de $-90°$ e termina com magnitude nula, tangenciando um dos eixos;
- $N = 2$: similar ao anterior, com fase inicial de $-180°$.
- O traçado intermediário do DN depende dos termos do numerador.

Funções Complexas e Seus Mapeamentos

Seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Então:

1º) Se $l \subset \mathcal{D}(F)$ é uma curva fechada que não contém singularidades de F, então $F(l) \subset \mathcal{CD}(F)$ é fechada;

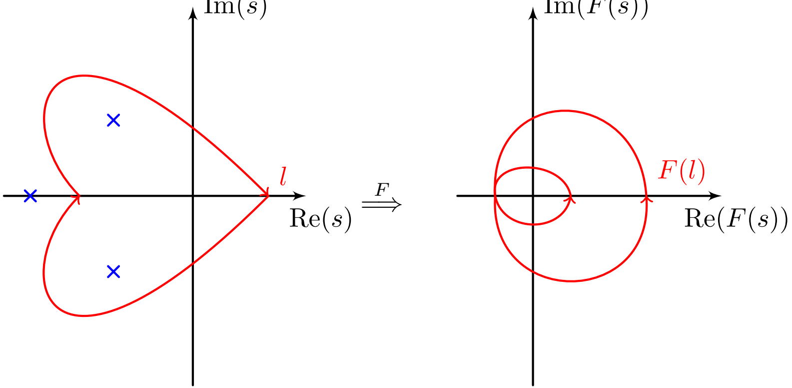
2º) Se l contém n polos (m zeros) de F em seu interior e gira no sentido horário, então $F(l)$ circundará a origem n (m) vezes no sentido anti-horário (horário);

Teorema (Mapeamento)

Sejam $F(s)$ uma função complexa racional e P e Z, respectivamente o número de polos e de zeros de F, circundados por uma curva fechada $l \subset \mathcal{D}(F)$ que não passe por polo ou zero de F. Então, o número de circundações de $F(l)$ em torno da origem no sentido horário, N, é:

$$N = Z - P \tag{19.4}$$

Funções Complexas e Seus Mapeamentos

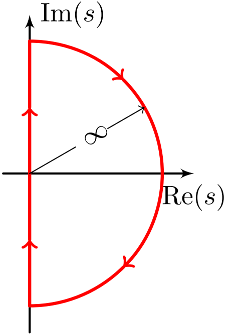


Mapeamento e Estabilidade de SLIT-Cs

Considere um sistema realimentado, (3.9), então:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) \quad (19.5)$$

deverá ter todas as raízes (zeros!) no semi-plano esquerdo.



- A curva da figura é chamada caminho de Nyquist;
- Tal caminho não poderá conter zeros de (19.5) (para estabilidade);

Observação

Apenas o caminho de $-j\infty$ a $j\infty$ será utilizado para o DN se for constante

$$\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) \quad (19.6)$$

Critério de Estabilidade de Nyquist

Teorema (Critério de Estabilidade de Nyquist)

Se a FTMA tem k polos no semi-plano direito (no domínio) e (19.6) *vale, então o DN dessa FTMA, com $\omega \in (-\infty, \infty)$, deverá circundar k vezes o ponto $-1 + j0$ no sentido anti-horário para que o sistema seja estável.*

Importante!

Em outras palavras, adaptando (19.4)*:*

$$P_f = N + P_a \tag{19.7}$$

- *N é contado positivo no sentido horário e em torno de $-1 + j0$;*
- *O critério vale mesmo com polos ou zeros da FTMA sobre a origem.*
- *Se o DN passar por $-1 + j0$, há raiz sobre o eixo imaginário (E daí?);*
- *Em sistemas com múltiplas malhas, o critério de Nyquist não irá reconhecer laços internos instáveis.*