线性代数 A(II) 习题课讲义 03

Caiyou Yuan

March 27, 2022

8.1

- 域, 以及域 F 上的线性空间
- 基和维数
  a. 所有非零线性空间均有基
  b. 线性空间中的任意一组线性无关的向量可以扩充为基
- 过渡矩阵

例题

1. (a) 把域 F 看成是 F 上的线性空间，求它的一个基和维数；
   (b) 把复数域 C 看成是实数域 R 上的线性空间，求它的一个基和维数；
   (c) 把实数域 R 看成是有理数域 Q 上的线性空间，证明: 对于任意大于 1 的正整数，

$$1, \sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{3^2}, \cdots, \sqrt[n]{3^{n-1}}$$

   是线性无关的. (提示: 已知 $g(x) = x^n - 3$ 是 Q 上的不可约多项式)
   (d) 证明: 实数域 R 作为有理数域 Q 上的线性空间是无穷维的.

2. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，域 F 包含域 E, F 可看作域 E 上的 m 维线性空间
   (a) 求证：V 可以成为域 E 上的线性空间
   (b) 证明: 求 V 作为域 E 上线性空间的维数

3. (Complexification of real vector space) 设 V 是数域 R 上的 n 维线性空间，设 $V_C = \{(u, v), u, v \in V\}$, 定义 V_C 上的加法

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

   以及 C 上的数乘

$$(a + bi)(u, v) = (au - bv, av + bu)$$

(a) 求证：V_C 是一个复线性空间

(b) 计算 V_C 的维数

4. (对偶空间) 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，考虑复数域 C 上的线性空间 C^V(从 V 到 R 的函数全体) 中具有下述性质的函数组成的子集 W:

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V,$$

$$f(k\alpha) = kf(\alpha), \quad \forall \alpha \in V, k \in K.$$

(a) 求证：W 是一个复线性空间

(b) 求 W 的一个基和维数；设 $f \in W$, 求 f 在这个基下的坐标

5. (零化多项式和最小多项式) 设 A 是数域 K 上的一个非零 n 阶矩阵，说明 $K[A]$ 是 K 上的一个线性空间. $K[A]$ 至多多少维? [1]

6. 设递推方程

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

其中 a, b 都是非零复数. 若 N 上的一个复值数列 u_n 满足上述递推关系，则称为上述递推方程的解. 一元多项式 $f(x) = x^2 - ax - b$ 称为上述递推方程的特征多项式. 求证

(a) 上述递推方程的解集 W 是一个复线性空间

(b) 设 α 是一个非零复数，则 $\alpha^n \in W$ 当且仅当 $f(\alpha) = 0$

(c) 设 α 是一个非零复数，则 $n\alpha^n \in W$ 当且仅当 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$.

(d) 若 $f(x)$ 有两不同的根 α_1, α_2, 则任意 $u_n \in W$, 可以表示为

$$u_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n$$

其中 C_1, C_2 是常数;

(e) 若 $f(x)$ 有二重根 α, 则任意 $u_n \in W$, 可以表示为

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n$$

其中 C_1, C_2 是常数;

[1] Hamilton-Cayley 定理告诉我们，K[A] 至多 n 维.

8.2

- 子空间
- 子空间的维数定理

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

- 直和

例题

1. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是域 F 上线性空间 V 的 s 个真子空间，证明：如果 $charF \neq 0, V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s \neq V$.

2. 在数域 K 上的线性空间 $K^{M_n(K)}$ 中，如果 f 满足，对于任意的 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，任意的 n 维列向量 α, 以及任意 $k \in K$, $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 有

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + \alpha, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n) + f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n)$$

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, k\alpha_j, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n) = kf(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n)$$

那么称 f 是 $M_n(K)$ 上的列线性函数. 同理如果 $g(A^T)$ 是列线性函数，则称 $g(A)$ 是行线性函数。记所有的列/行线性函数组成的集合分别记为 V_1 和 V_2.

(a) 证明：V_1, V_2 都是 $K^{M_n(K)}$ 的子空间

(b) 分别求 V_1, V_2 的一个基和维数

(c) 分别求 $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$ 的一个基和维数

8.3

- 线性空间的同构
- 有限维线性空间同构的充要条件

例题

1. 令
$$H=\left\{\begin{bmatrix} z_1 & z_2\\ -z_2 & z_1\end{bmatrix}, z_1, z_2\in C\right\}$$
   (a) H 对于矩阵的加法，以及实数和矩阵的乘法构成一个实线性空间
   (b) 给出 H 的一个基和维数
   (c) 证明: H 与 R^4 同构，并写出 H 到 R^4 的一个同构映射

2. 设 $A\in M_n(K)$, 令 $AM_n(K)=\{AB, B\in M_n(K)\}$.
   (a) 证明 $AM_n(K)$ 是数域 K 上线性空间 $M_n(K)$ 的子空间
   (b) 设 A 的列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$, 证明 $AM_n(K)$ 和 $M_{r\times n}(K)$ 同构，并写出一个同构映射.
   (c) 证明: $\dim[AM_n(K)]=\mathrm{rank}(A)n$.

8.4

- 商空间
- $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$

例题

1. 设 U, W 都是域 F 上线性空间 V 的子空间, 证明 $(U+W)/W\cong U/(U\cap W)$

9.1-4

- 线性映射，线性变换，线性函数
- 线性映射的核与像:
  1. $\dim(\mathrm{Ker}\,A)+\dim(\mathrm{Im}\,A)=\dim V$

2. 有限维线性变换，单等价于满

- 线性映射的矩阵表示:

1. $Hom(V, V') \cong M_{s\times n}(F)$
2. 相似矩阵 $\Longleftrightarrow$ 线性变换在不同基下的表示

- 线性映射的行列式，秩，迹，特征值，特征向量等

例题

1. 设 $A \in Hom(V, V)$, 证明对于任意的 k,

$$\operatorname{rank} A^k - \operatorname{rank} A^{k+1} \geq \operatorname{rank} A^{k+1} - \operatorname{rank} A^{k+2}$$

2. 设 f 是 $M_n(K)$ 上的线性函数，且对于任意的 $A, B \in M_n(K), f(AB) = f(BA)$, 求证 $f = c\mathrm{tr}$, 其中 c 是某一常数，tr 是迹算子.

3. (Frobenius 秩不等式) 设 V, U, W, M 都是域 F 上的线性空间, 并且 V, U 都是有限维的, 设 $A \in Hom(V, U), B \in Hom(U, W), C \in Hom(W, M)$. 证明，

$$\operatorname{rank}(CBA) \geq \operatorname{rank}(CB) + \operatorname{rank}(BA) - \operatorname{rank}(B).$$

4. (幂零矩阵的矩阵表示) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，A 是 V 上的一个线性变换. 如果 $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$, 那么在 V 中存在一个基，使得 A 在此基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

5. 设 V 和 V' 分别是域 F 上 n 维，s 维线性空间，A 是 V 到 V' 的一个线性映射，证明存在 V 的一个基和 V' 的一个基，使得 A 在这对基下的矩阵为,

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r = \mathrm{rank}(A)$.

6. (两两正交的幂等变换的充要条件) 设 $A_i \in M_n(K)$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 其中 K 是数域. 令 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$.

(1) 证明: 如果

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_1) + \mathrm{rank}(A_2) \cdots + \mathrm{rank}(A_s),$$

那么

$$AM_n(K) = A_1 M_n(K) \oplus A_2 M_n(K) \oplus \cdots \oplus A_s M_n(K).$$

(2) 证明: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两正交的幂等矩阵, 当且仅当 A 是幂等矩阵，并且

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_1) + \mathrm{rank}(A_2) \cdots + \mathrm{rank}(A_s).$$