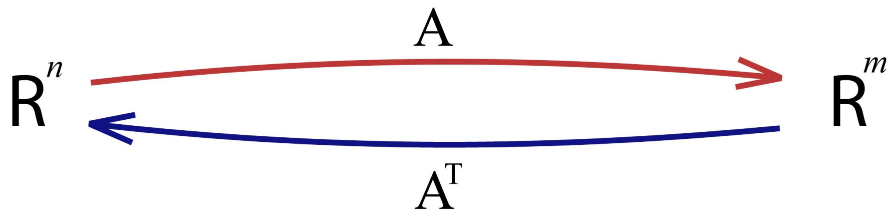

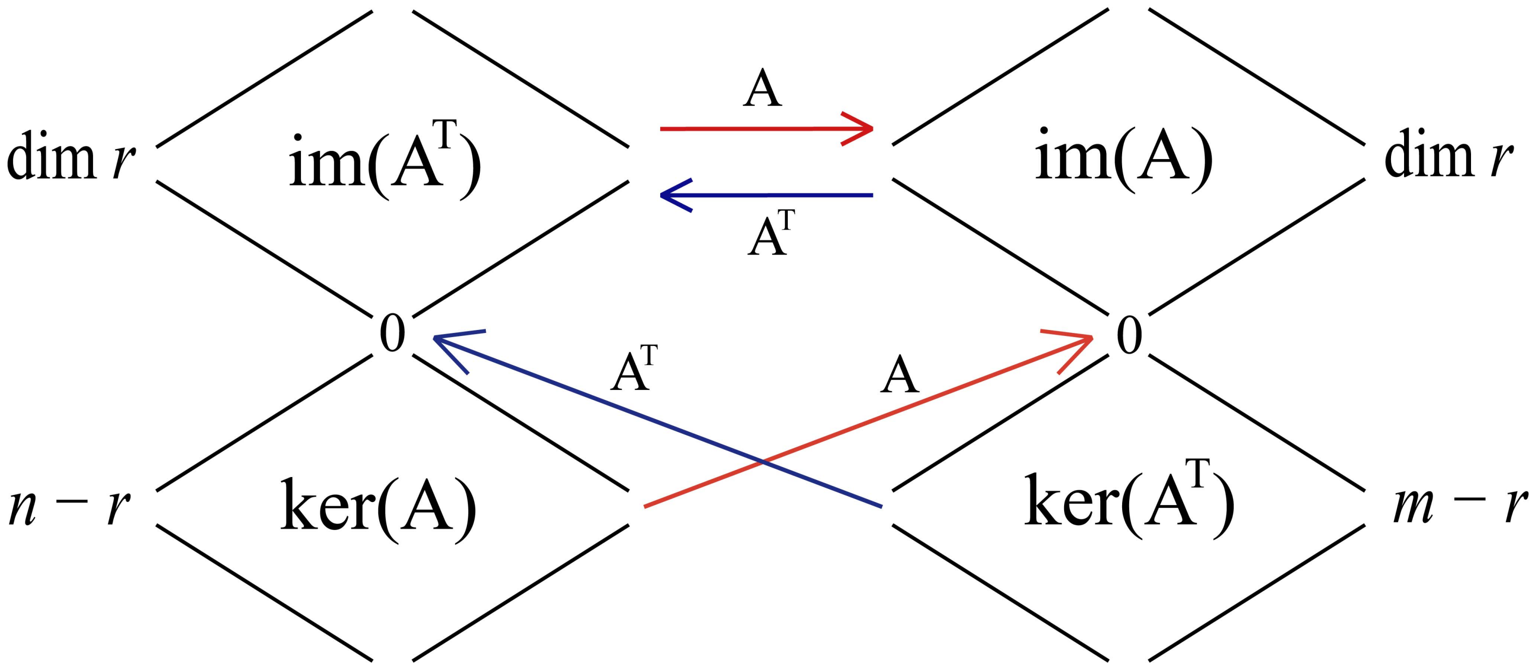

线性代数 A 习题课讲义集

作者： Caiyou Yuan

时间： October 5, 2021

特别声明

这里主要整理了作者在担任北京大学线性代数 A 这门课程的助教期间，在习题课上讲解的一些题目，主要参考了，

1. 高等代数（第三版）丘维声，高等教育出版社
2. 高等代数学习指导书（第二版）丘维生，清华大学出版社

以及一些其他书籍。

作者能力有限，难免有考虑不周和疏漏之处，欢迎批评指正。

Caiyou Yuan
October 5, 2021

目录

第 1 章 线性方程组

- 矩阵的初等行变换
- 阶梯形矩阵，简化阶梯形矩阵
- Guass-Jordan 算法, 无解/有唯一解/有无数解
- 数域, Q, R, C

例题

1. 证明任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化为 (简化) 阶梯形矩阵.

   解 对行数 s 进行数学归纳：$s=1$ 显然成立，假设 $s=k$ 时成立，而当 $s=k+1$ 时,

   1. 若 $a_{11}\neq 0$, 使用初等行变换，将 $a_{21},\cdots,a_{k+1,1}$ 化为 0，对右下的子矩阵使用归纳假设即可；
   2. 若 $a_{11}=0$, $a_{i1}\neq 0$, 交换 1 行和 i 行，即化为情况 1;
   3. 若第一列均为零，则对右下 k 行的子矩阵使用归纳假设即可;

   所以对于阶梯形，结论成立。而简化阶梯形只需在阶梯形基础上再做若干次初等行变换即可。

2. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=1 \\ x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=2 \\ x_3+x_4+\cdots+x_{n+2}=3 \\ \vdots \\ x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}=n+1 \end{cases}$$

   解 相邻两式相减; 注意到 $x_{n+2},x_{n+3},\cdots,x_{2n}$ 是自由变量即可

3. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\cdots+(n-1)x_{n-1}+nx_n=b_1 \\ nx_1+x_2+\cdots+(n-2)x_{n-1}+(n-1)x_n=b_2 \\ (n-1)x_1+nx_2+\cdots+(n-3)x_{n-1}+(n-2)x_n=b_3 \\ \vdots \\ 2x_1+3x_2+\cdots+nx_{n-1}+x_n=b_n \end{cases}$$

   其中 $b_1,\cdots b_n$ 为给定常数

   解 各式相加; 相邻两项相减

第 2 章 行列式

2.1 n 元排列

- 逆序数
- 奇/偶排列

例题

1. 设 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}$ 有

$$\tau(a_1a_2\cdots a_k) = \tau(b_1b_2\cdots b_{n-k}) = 0$$

那么 $\tau(a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k})$ 是多少? $n, k, a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_{n-k}$ 均已知, $\tau(a_1a_2\cdots a_k)$ 表示排列 $a_1a_2\cdots a_k$ 的逆序数.

解 $\sum_{i=1}^{k} a_i - \frac{k(k+1)}{2}$, 答案不唯一

2. 说明 n(n>1) 元排列中，奇偶排列各占一半

解 任意两位置的对换，建立了奇排列和偶排列间的一一对应

3. (1) 若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n) = r$, 那么 $\tau(a_na_{n-1}\cdots a_1)$ 是多少?

解 $\frac{n(n-1)}{2} - r$

(2) 计算所有 n 元排列的逆序数之和

解 在上一问的基础上，将所有排列分为 $\frac{n!}{2}$ 组；

2.2 n 阶行列式的定义

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\end{aligned}$$

注 如何从上一行定义，导出下一行定义？见课本[1]24-25 页

例题

1. 下列行列式是 x 的几次多项式, 求出 x^4 项和 x^3 项的系数
$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$
解 按照定义讨论, 或者按某行/列展开; 四次多项式; $5x^4, -2x^3$

2. 计算下列行列式
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$
解 箭形行列式, 利用定义; $a_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - \cdots a_nb_n$

2.3 行列式的性质

例题

- 计算下列行列式
$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$
其中 $a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$.
解 $(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \cdots - \frac{x_n}{a_n}\right)$
  1. 第一行的 -1 倍加到 2 到 n 行, 化为箭形矩阵行列式;
  2. 非对角元素补上减去 0, 每列拆分为两列, 2^n 个行列式中经有 $n+1$ 个非零;
  3. 和方法二类似, 但只对第一列拆分, 找到 n 阶结果和 $n-1$ 阶结果的关系;

2.4 行列式按一行 (列) 展开

- 余子式, 代数余子式
- Vandermonde 行列式 (行列式的递推)

注 按行展开如何从行列式定义推导?

例题

1. 计算下列行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

解 递推;$S_n = 2aS_{n-1} - a^2S_{n-2}, S_n = (n+1)a^n$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解 递推; $S_n = (a+b)S_{n-1} - abS_{n-2}$, 若 $a = b$, 则化为上一小问; 若 $a \neq b$, $S_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

解 递推

$$S_n = \begin{cases} (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n & a^2 = 4bc \\ \frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2} & a^2 \neq 4bc \end{cases}$$

其中 x_1, x_2 是 $x^2 - ax + bc = 0$ 的两个根。

2. 计算如下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

解 考虑如下的 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

所需计算的行列式，即是该 Vandermonde 行列式（按最后一列展开）的 x^{n-1} 项系数的相反数。结果为 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Pi_{i<j}(x_j - x_i)$.

2.5 Cramer 法则

例题

1. 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad B_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

证明:

a. 当 $\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解；

b. 当 $\det A \neq 0$ 时，方程组的唯一解为

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

2.6 行列式按多行展开

例题

1. 证明

$$(\det A)(\det B) = \det C$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

提示，考虑如下 $2n$ 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

解 通过初等行变换，将其变为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

第 3 章 n 维向量空间

3.1 K^n 及其子空间

- K^n 的定义 (有限维线性空间的典例)
- 子空间
- 线性表出（求解线性方程组的另一个角度)

3.2 线性相关/无关

- 原向量组线性相关/无关，部分组如何?
- 部分组线性相关/无关，该向量组如何?
- 原向量组线性相关/无关，延伸组/缩短组如何?

例题

1. 设数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 证明：$H$ 的任意 s 列 ($s \leq \min\{m, n\}$) 都线性无关当且仅当，$Hx = 0$ 的任意非零解的非零分量大于 s

   解 必要性, 考虑其逆否命题；充分性，考虑其逆否命题.

3.3 极大线性无关组，向量组的秩

- 向量组的等价
- 极大线性无关组: 向量组及其极大线性无关组等价
- 向量组的秩: 向量组的极大线性无关组的向量数目相同
- 如果向量组 I 可以由向量组 II 线性表出，则二者的秩有大小关系

例题

1. 设数域 K 上 $s \times n$ 矩阵 ($s \leq n$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

   满足

$$2|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, s$$

   证明：A 的行向量的组的秩等于 s.

   解 考虑 A 的前 s 行和列组成的子矩阵, 严格对角占优, 列秩为 s, 行列式不为零, 所以行秩也为 s. 或者直接利用矩阵的三秩合一

2. 证明两个向量组等价的充要条件是：秩相等且其中一个向量组可以被另一个线性表出。
   解 必要性显然; 充分性, 考虑这两个的极大线性无关组 I 和 II，两个向量组数目均是 r，而且 I 可以被 II 线性表出, 只需要证明 II 也可以被 I 线性表出即可。任取 II 中的向量，放到 I 中，此向量组 $r+1$ 各元素，但是可以被 II(r 个元素) 线性表出，所以 $r+1$ 个元素线性相关，II 中任意向量均可以被 I 线性表出

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r, 在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}$, 证明此向量组的秩 $\geq r+m-s$.
   解 原向量组 s 个向量分为两类：r 个极大线性无关组中的元素，$s-r$ 个可以被线性表出的元素. 任意取的 m 个向量中，取在前面极大线性无关组中的，至少有 $m-(s-r)$ 个，即有这么多向量线性无关.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3. 证明
   $$\max(r_1, r_2) \leq r_3 \leq r_1 + r_2$$
   解 取各自的极大线性无关组放在一起

3.4 基, 维数

- 基
- 维数

3.5 矩阵的秩

- 行秩等于列秩，即为矩阵的秩；如何说明?
- 任意非零矩阵的秩等于其非零子式的最高阶数; 如何说明?

例题

1. 证明:
   $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$
   解
   (a) 从非零子式上考虑：分别取 A，B 对应的最高阶非零子式对应的行列，构成一个新的非零子式;
   (b) 从行空间上考虑：分别取 A，B 行空间的极大线性无关组, 然后考虑对应延伸组，这两组线性无关.

2. 证明：如果 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 则它的任意 s 行组成的子矩阵，秩不小于 $r+s-m$.
   解 从行空间的角度，或者非零子式

3.6 线性方程组有解的充要条件

- 系数矩阵和增广矩阵有相同的秩

3.7 齐次/非齐次线性方程组的解

- 齐次/非齐次线性方程组的解集是一个子空间/陪集

例题

1. 用行列式给出三点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3,$ 不在一条直线上的充要条件
   解 考虑直线方程 $Ax + By + C = 0$, 联立无解; 考虑向量不共线;

2. 给出通过不在一条直线上三点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3,$ 的圆的方程
   解 考虑圆的表达式 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, 带入这三点, 这是关于 A, B, C 的线性方程组, 求解后带回方程即可; 或者考虑 $D(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0, D \neq 0$,
   $$\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$
   有非零解且 $D \neq 0$.

3. 证明: 通过有理数坐标的三点的圆，其圆心坐标也是有理数
   解 数域封闭性, 求解线性方程组只在此数域中

4. 求三个平面
   $$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$
   通过一条直线但是不合并为一个平面的充分必要条件.
   解 对应非齐次线性方程组的解空间维数为 1. 即系数/增广矩阵秩为 2

第 4 章 矩阵

4.1 矩阵的运算和特殊矩阵

- 相同行列数目的矩阵全体在加法和数乘下构成线性空间
- 矩阵的乘法 (线性映射的复合, 有限维线性映射的典型)

例题

1. (矩阵的幂次)

   (a)
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$
   计算 A^m, 其中 m 为正整数.

   (b)
   $$J = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$
   计算 J^m, 其中 m 为正整数.

2. 证明: 反对称矩阵的秩为偶数

   解 取行向量组的极大线性无关组，记为 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行, 考虑这些行列组成的子矩阵, 行列式不为零, 且反对称，故 r 为偶数.

4.2 矩阵相乘的秩与行列式

- $\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$
- 实数域上，$\mathrm{rank}(A^TA) = \mathrm{rank}(A)$
- Binet-Cauchy 公式

例题

1. 举例说明，对于复矩阵 A, 有可能 $\operatorname{rank}(A^TA) \neq \operatorname{rank}(A)$

2. 证明，对于实数域上的任意 $s \times n$ 矩阵 A, 都有 $\operatorname{rank}(AA^TA) = \operatorname{rank}(A)$

3. 设 A, B 分别是数域 K 上的 $s \times n, n \times m$ 矩阵，证明：如果 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$, 那么对于任意的数域 K 上的 $m \times r$ 的矩阵 C, 都有
$$\operatorname{rank}(ABC) = \operatorname{rank}(BC).$$
解 注意到 $ABx = 0$ 和 $Bx = 0$ 同解, 证明 $ABCx = 0$ 和 $BCx = 0$ 同解即可.

4. 计算如下矩阵的行列式
$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{bmatrix}$$
解 $\cos(\alpha_i - \beta_j) = \cos(\alpha_i)\cos(\beta_j) + \sin(\alpha_i)\sin(\beta_j)$, 然后使用 Binet-Cauchy 公式; $n \geq 2$ 时为 0，其他时候计算可得.

4.3 可逆矩阵

- $\det A \neq 0$ 是方阵 A 可逆的充分必要条件
- 可逆矩阵可以表示为若干初等矩阵的乘积

例题

1. (不可约对角占有矩阵) 求如下矩阵的逆矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

解 计算伴随矩阵即可; 注意到, 伴随矩阵对称, 而且当 $i \geq j$ 时, $A_{ij} = S_{n-i}S_{j-1} = (n-i+1)j$, 其中 $S_k = k+1$ 表示 k 阶和 A 同类型矩阵的行列式.

2. (AB 和 BA 的非零谱相同) A,B 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 的矩阵
   (a). 证明, 若 $I_n - AB$ 可逆，则 $I_m - BA$ 也可逆.
   解 验证 $(I_m - BA)^{-1} = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$

   (b). 证明 $\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$
   解 考虑分块矩阵
$$\begin{bmatrix} \lambda I_n & A \\ B & \lambda I_m \end{bmatrix}$$
   使用初等行/列变换，计算其行列式

4.4 分块矩阵

例题

1. (矩阵的 LU 分解) 证明: 如果 A 的所有顺序主子式不等于零，则存在可逆的下三角矩阵 L, 使得 LA 是上三角矩阵
   解 考虑 Gauss 消去，使用初等变换将矩阵化为阶梯型的过程. 使用数学归纳法, 和分块矩阵的记号说明.

4.5 正交矩阵和欧氏空间

- 正交矩阵的定义和性质 (实数域)
- 欧氏空间的内积 (对称正定的双线性函数)
- Schmidt 正交化

例题

1. (矩阵的 QR 分解) 证明: 可逆矩阵 A, 可以唯一分解为正交矩阵 Q 与主对角元都是正数的上三角矩阵 R 的乘积

解 存在性可以通过 Householder 变换，Givens 变换或者 Schimidt 正交化来说明; 唯一性，注意到上三角的正交矩阵为主对角元为 ± 1 的对角矩阵;

2. A 是 $s \times n$ 的实矩阵, 说明 A^T 的像空间和 A 的核空间正交, 即在两空间中各自任意取一个向量，内积均为零

3. (最小二乘) A 是 $m \times n$ 的实矩阵, $m > n$, $b \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 x_0 使得，对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,
$$|Ax_0 - b|^2 \leq |Ax - b|^2$$
则称 x_0 是 $Ax = b$ 的最小二乘解. 证明 x_0 是最小二乘解，当且仅当 x_0 是如下线性方程组的解
$$A^T Ax = A^T b$$
解 转化为无约束二次优化问题, 求梯度可得必要性, 充分性可以求 Hessian, 利用函数的凸性; 或者利用扰动说明充分性,
$$|Ax_0 - b|^2 \leq |A(x_0 + ty) - b|^2$$
即 $t^2(y^T A^T Ay) + 2ty^T(A^T Ax_0 - A^T b) \geq 0$.

4.6 线性映射

- $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im} A) = \dim(K^n)$

例题

1. 设 S 是一个有限集合, 映射 $f : S \to S$, 证明: f 为单射和 f 为满射互相等价.
解 $|f(S)| = |S|$

2. 上一题结论在 S 不是有限集合的时候成立么？若成立，请证明；不成立给出反例

3. 设 V 是一个有限维线性空间, 线性映射 $L : V \to V$, 证明: L 为单射和 L 为满射互相等价.
解 映射的线性，保证了 $L(V)$ 也是一个线性空间. 考虑 V 的一组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, 以及 $L\alpha_1, \ldots, L\alpha_n$,
   1. 若 L 为单射, 则 $L\alpha_i$ 也有 n 个, 其线性无关. 所以 $\dim L(V) = n$, $L(V) = V$, 所以是满射.
   2. 若 L 为满射, $\dim L(V) = n$, 注意到 $L\alpha_1, \ldots, L\alpha_n$ 张成 $L(V)$, $n \leq \mathrm{rank}(\{L\alpha_1, \ldots, L\alpha_n\}) \leq n$, 故 $L\alpha_i$ 线性无关，故 L 为单射

第 5 章 矩阵相抵和相似

5.1 矩阵相抵

- 如果矩阵 A 可以通过初等行/列变换为矩阵 B, 则称 A, B 相抵
- 矩阵相抵是 $M_{m\times n}(K)$ 上的一个等价关系
- $M_{m\times n}(K)$ 中的两矩阵相抵当且秩相等

例题

1. 设 A, B, C 分别是数域 K 上 $s\times n, p\times m, s\times m$ 矩阵, 证明矩阵方程 $AX - YB = C$ 有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

解 必要性将 $C = AX - YB$ 代入即可; 充分性, 假设 $\operatorname{rank}(A) = a, \operatorname{rank}(B) = b$, 则存在可逆矩阵 P_a, Q_a, P_b, Q_b, 使得

$$P_aAQ_a = \begin{bmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_bBQ_b = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} P_a & \\ & P_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_a & \\ & Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$P_aCQ_b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

由已知条件, $C_{22} = 0$. 所以

$$\begin{bmatrix} I & & -C_{11} & \\ & I & -C_{21} & \\ & & I & \\ & & & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_a & \\ & P_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_a & \\ & Q_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & & & -C_{12} \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意右上角的分块计算结果为 0, 整理即可获得原矩阵方程的解.

5.2 广义逆矩阵

- (矩阵相抵标准型的应用) 如果 A 的相抵标准型为
$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$
其中 P, Q 分别是 s, n 级可逆矩阵, 那么矩阵方程 $AXA = A$ 通解为
$$X = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & B \\ C & D \end{bmatrix}P^{-1}$$
其中 B, C, D 分别是任意的 $r\times(s-r), (n-r)\times r, (n-r)\times(s-r)$ 矩阵. 证明?
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的通解为 $X = A^{-}\beta$, 其中 A^{-} 是 A 的任意一个广义逆. 证明?

例题

1. (广义逆的一个充分必要条件) 设 A, B 分别是数域 K 上的 $s\times n, n\times s$ 的矩阵
   (a) 证明 $\operatorname{rank}(A - ABA) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - BA) - n$
   解 Sylvester 不等式, 考虑等式成立的条件

   (b) 证明 B 是 A 的一个广义逆的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - BA) = n$.

2. (两两正交的幂等矩阵的充分必要条件) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是数域 K 上的 n 级矩阵
   (a) 令 $D = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$, $E = (\underbrace{I_n, I_n, \cdots, I_n}_{s\text{个}})$. 证明:$A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是幂等矩阵, 且 $A_iA_j = 0$(当 $i \neq j$) 的充分必要条件是 E^TE 是 D 的一个广义逆.
   解 验证 $DE^TED = D$

   (b) 令 $A = \sum_{i=1}^{s} A_i$, 证明:$A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是幂等矩阵, 且 $A_iA_j = 0$(当 $i \neq j$) 的充分必要条件是 A 是幂等矩阵, 且 $\operatorname{rank}(A) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{rank}(A_i)$.
   解 使用第一题的结论, 验证 E^TE 是 D 的一个广义逆. 其中 $\operatorname{rank}(I - E^TED) = n(s-1) + \operatorname{rank}(I_n - A)$(使用初等变换化为块对角).

5.3 矩阵的相似和对角化

- 相似矩阵有相同的行列式, 秩, 迹, 特征多项式, 特征值
- n 级矩阵可对角化的充分必要条件是有 n 个线性无关的特征向量
- 如何求矩阵的所有线性无关的特征向量?

例题

1. (Frobenius 矩阵) 复数域上的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

A 是否可以对角化? 若是求它的所有特征值和特征向量, 若否说明原因.

解 特征多项式为 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, 设其 n 个根为 λ_i 注意到 $\operatorname{rank}(\lambda_i I - A) = n-1$. 故 A 可对角化当且仅当特征多项式无重根.

5.4 实对称矩阵的对角化

- 实对称矩阵在实数域上有特征值
- 实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵

例题

1. (复 Schur 分解) 定义 U^H 表示矩阵的共轭转置, 若 $U^H U = I$, 则称方阵 U 为酉矩阵. 证明对任意的复数方阵 A, 存在酉矩阵 U, 使得 $U^H AU$ 为上三角矩阵.

2. (实 Schur 分解) 证明，对任意的实数方阵, 存在实正交矩阵 U, 使得 $U^T AU$ 为分块上三角矩阵, 形如

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1r} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & T_{rr} \end{bmatrix}$$

其中 T_{ii} 为 1 阶或 2 阶矩阵, 且当是 2 阶矩阵，其特征值是一对共轭复根.

解 若 λ 为 A 的实特征值，取其实特征向量即可, 做法相同；若 $\lambda = \omega + i\mu$ 为复特征值 $(\mu \neq 0)$, 取其复特征向量 $x = u + iv$, 则

$$A[u, v] = [u, v] \begin{bmatrix} \omega & \mu \\ -\mu & \omega \end{bmatrix}$$

且 u 和 v 线性无关 (首先 $v \neq 0$, 否则 $i\mu u = 0$; 其次假设 $u = kv$,k 为实数, 则可推出 $(1+k^2)\mu = 0$ 矛盾), 取 QR 分解,

$$Q[u, v] = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$QAQ^T\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega & \mu\\-\mu & \omega\end{bmatrix}$$

由于 u,v 的线性无关，所以 R 非奇异，

$$QAQ^T=\begin{bmatrix}T & *\\0 & *\end{bmatrix}$$

其中 $T=R\begin{bmatrix}\omega & \mu\\-\mu & \omega\end{bmatrix}R^{-1}$.

5.5 二次型和矩阵合同

- 数域 K 上的任一对称矩阵都合同于一个对角矩阵 (合同标准形)
- 合同标准形并不唯一; 实对称矩阵的规范形是唯一的 (惯性定律); 复对称矩阵呢?
- n 阶实对称矩阵是正定的，当且仅当正惯性指数为 n/特征值全大于 0/所有顺序主子式大于 0

例题

1. 设实二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+u}^2$$

其中 l_i 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的一次齐次多项式. 证明 f 的正惯性指数 $p\leq s$, 负惯性指数 $q\leq u$.

解 仿照惯性定律的证明方式

2. (复对称矩阵的合同) 证明, 复对称矩阵 A,B 合同的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

解 由于 A,B 相抵, 必要性得证; 充分性, 只需证明 A 合同于 $\operatorname{diag}\{I_r,0\}$, 其中 $\operatorname{rank}(A)=r$. 首先, A 可以通过可逆矩阵 C_1, 合同对角化于对角矩阵 $\operatorname{diag}\{d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0\}$, 然后令 $C_2=\operatorname{diag}\{\sqrt{d_1},\cdots,\sqrt{d_r},1,\cdots,1\}$, 故 A 可以通过 $C_2^{-1}C_1$, 合同于 $\operatorname{diag}\{I_r,0\}$.

3. 证明, 如果 A,B 都是 n 级正定矩阵，那么 AB 是正定矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

解 必要性，由 AB 的对称性可知; 充分性，$AB=BA$ 则意味着这两个正定矩阵可以同时对角化, 具体的，存在正交矩阵 T, 使得 $A=T^T\Lambda T$, 其中 $\Lambda=\operatorname{diag}\{\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{n_1\text{个}},\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{n_2\text{个}},\cdots\underbrace{\lambda_k,\cdots,\lambda_k}_{n_k\text{个}}\}, n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,

故 $T^T\Lambda TB=BT^T\Lambda T$, 即 $\Lambda TBT^T=TBT^T\Lambda$, 故 TBT^T 是块对角矩阵, 形如 $\operatorname{diag}\{B_1,\cdots,B_k\}$, 其中 B_i 是 n_i 级的对称方阵. 所以存在 $n_i\times n_i$ 的正交矩阵 T_i, 使得

$$T_i^TB_iT_i=\operatorname{diag}\{\underbrace{\lambda_i,\cdots,\lambda_i}_{n_i\text{个}}\}$$

所以 $S=\mathrm{diag}\{T_1,\cdots,T_k\}T$ 使得 A,B 同时对角化.

4. (Hadamard 不等式)

(a) 证明: 如果 A 是 n 级正定矩阵, $B\neq 0$ 是 n 级半正定矩阵, 那么

$$|A+B|>\max\{|A|,|B|\}$$

解 存在可逆矩阵 C, 使得 $C^TAC=I, C^TBC=D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}, \lambda_i\geq 0$. $|A+B|=|C^{-T}||C^{-1}|(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n), |A|=|C^{-T}||C^{-1}|, |B|=|C^{-T}||C^{-1}|\lambda_1\cdots\lambda_n$,

(b) 证明: 若

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D\end{bmatrix}$$

是正定矩阵. 证明 $|M|\leq|A||D|$, 等号成立当且仅当 $B=0$.

解 $|M|=|A||D-B^TA^{-1}B|$ 并利用 (a) 的结论.

(c) 证明：如果 $C=(c_{ij})$ 是 n 级实矩阵, 则

$$|C|\leq\prod_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}c_{ij}^2}$$

这说明, 欧氏空间中,n 个向量张成的超多面体的体积不超过这 n 个向量的长度乘积.

解 将 (b) 的结论推广到任意多个对角块; 考虑 C 非奇异， 则 C^TC 正定, 对其使用推广的 (b) 中结论.

4. (正定矩阵的平方根分解) 证明: 对于正定矩阵 A, 存在唯一的正定矩阵 C, 使得 $A=C^2$.

解 存在性通过对 A 正交对角化易得. 唯一性, 假设

$$C_1=T_1^T\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}T_1$$
$$C_2=T_2^T\mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_n\}T_2$$

由于 $C_1^2=C_2^2$, 这两个对角阵相似, 所以 $\mu_i=\lambda_i$. (可能有 $T_1\neq T_2$), 由于 $T_1^T\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2\}T_1=T_2^T\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2\}T_2$, 所以 $T_2T_1^T\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2\}T_1=\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2\}T_2T_1^T$, $T_2T_1^T$ 块对角, 故有

$$T_2T_1^T\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}T_1=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}T_2T_1^T$$

证毕.

5. (极坐标分解) 证明任意实可逆矩阵 A, 可以被唯一分解为

$$A = TS_1 = S_2 T,$$

其中 T 为正交矩阵, S_1, S_2 为正定矩阵.

解 存在性:$A = A(A^TA)^{-\frac{1}{2}}(A^TA)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $A(A^TA)^{-\frac{1}{2}}$ 为正交阵, 唯一性: 由 A^TA 平方根的唯一性

6. (SVD 分解)

(a) 证明任意的实可逆矩阵 A, 都存在正交矩阵 T_1, T_2, 使得

$$A = T_1 \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} T_2,$$

其中 λ_i 是 A^TA 特征值的平方根. 这个分解具有唯一性么?

解 $A = A(A^TA)^{-\frac{1}{2}}(A^TA)^{\frac{1}{2}}$, 再对 $(A^TA)^{\frac{1}{2}}$ 做谱分解即可. 考虑 A 正定时, A 的正交对角化是 SVD 分解，正交对角化的特征向量的选择不唯一，故 SVD 也不唯一.

(b) A 不可逆的时候呢?

解 同理考虑 A^TA 的谱分解，并做矩阵分块

$$\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} A^TA \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $V_2^TA^TAV_2 = 0$, 注意到 $\mathrm{tr}(V_2^TA^TAV_2) = ||AV_2||_F = 0$, 所以 $AV_2 = 0$. 取 $U_1 = MV_1D^{-\frac{1}{2}}$, $U_1^TU = D^{-\frac{1}{2}}V_1^TM^TMV_1D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}DD^{-\frac{1}{2}} = I$, 且 $U_1D^{\frac{1}{2}}V_1^T = MV_1V_1^T = M(I - V_2V_2^T) = M$. 所以将 U_1 扩充为一组基, 得到对应的 U_2, 有

$$M = U_1D^{\frac{1}{2}}V_1^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

参考文献

[1] 丘维生. 高等代数（第三版）上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.