线性代数 A 讲义 01

Caiyou Yuan

September 20, 2021

1 线性方程组

- 矩阵的初等行变换
- 阶梯形矩阵，简化阶梯形矩阵
- Guass-Jordan 算法, 无解/有唯一解/有无数解
- 数域, Q, R, C

例题

1. 证明任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化为 (简化) 阶梯形矩阵

2. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} = 2 \\ x_3 + x_4 + \cdots + x_{n+2} = 3 \\ \vdots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n} = n+1 \end{cases}$$

3. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = b_1 \\ nx_1 + x_2 + \cdots + (n-2)x_{n-1} + (n-1)x_n = b_2 \\ (n-1)x_1 + nx_2 + \cdots + (n-3)x_{n-1} + (n-2)x_n = b_3 \\ \vdots \\ 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} + x_n = b_n \end{cases}$$

其中 $b_1, \cdots b_n$ 为给定常数

2 行列式

2.1 n 元排列

- 逆序数
- 奇/偶排列

例题

这里使用 $\tau(a_1a_2\cdots a_k)$ 表示排列 $a_1a_2\cdots a_k$ 的逆序数.

1. 设 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}$ 有

$$\tau(a_1a_2\cdots a_k) = \tau(b_1b_2\cdots b_{n-k}) = 0$$

   那么 $\tau(a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k})$ 是多少? $n, k, a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_{n-k}$ 均已知.

2. 说明 n(n>1) 元排列中，奇偶排列各占一半

3. (1) 若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n) = r$, 那么 $\tau(a_na_{n-1}\cdots a_1)$ 是多少?

   (2) 计算所有 n 元排列的逆序数之和

2.2 n 阶行列式的定义

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\end{aligned}$$

例题

1. 下列行列式是 x 的几次多项式, 求出 x^4 项和 x^3 项的系数

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

2. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

2.3 行列式的性质

例题

- 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

  其中 $a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$.

2.4 行列式按一行 (列) 展开

- 代数余子式, 行列式按行展开
- Vandermonde 行列式

例题

1. 计算下列行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

2. 计算如下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$