

线性代数 A(II) 习题课讲义 07

Caiyou Yuan

May 23, 2022

1 具有度量的线性空间

1.1 双线性函数

- 双线性函数, 及其在基下的度量矩阵: 不同基下的度量矩阵是合同的, 以及合同的矩阵可以看作是同一双线性函数在不同基下的度量矩阵;
- 对称/反对称的双线性函数/矩阵, 及其标准形式
 1. 特征不为 2 的域上, 对称矩阵可以合同于对角矩阵
 2. 特征不为 2 的域上, 反对称矩阵合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

3. 特征为 2 的域 F 上, 因为 $\forall a \in F, -a = a$, 所以对称矩阵和反对称矩阵相同.

- * 若 $\exists \alpha \in F^n$, 使得 $\alpha^T A \alpha \neq 0$, 则 A 可以合同于一个对角矩阵;
- * 若 $\forall \alpha \in F^n$, 使得 $\alpha^T A \alpha = 0$, 则 A 可以合同于矩阵 1.1.

1.2 对称双线性函数和二次型的关系

设 V 是域 F 上的线性空间, 映射 $q: V \rightarrow F$ 定义为 V 上的二次函数, 如果存在 V 上的对称双线性函数 f , 使得 $\forall \alpha \in V, q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$. 若 $\text{char } F \neq 2$, 则二次函数和对称双线性函数一一对应, 因为注意到,

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta)].$$

1.3 双线性函数空间

V 上的所有双线性函数, 关于函数的加法和数乘, 构成域 F 上的线性空间, 记为 $T_2(V)$. 易见 $T_2(V) \cong M_n(F) \cong \text{Hom}(V, V)$.

例题 取 V^* 中的对偶基为 $\{f_i\}_{i=1}^n$, 证明 $f_i \otimes f_j$ 是 $T_2(V)$ 的一组基, 其中 $(f \otimes g) \in T_2(V)$, 定义为 $(f \otimes g)(\alpha, \beta) = f(\alpha)g(\beta)$.

1.4 例题

设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数,

1. (a) 映射 $L_f : \alpha \rightarrow \alpha_L$ 是 V 到 V^* 的线性映射;

(b) f 是非退化的当且仅当 L_f 是线性空间 V 到 V^* 的一个同构映射.

2. 若 f 非退化

(a) 任给 V 上的一个双线性函数 g , 存在 V 上唯一的一个线性变换 G , 使得

$$g(\alpha, \beta) = f(G\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in V$$

(b) 令 $\sigma : g \rightarrow G$, 则 σ 是 $T_2(V)$ 到 $Hom(V, V)$ 的一个同构映射.

(c) 设域 F 的特征不为 2, 且 f, g 对称, 证明 V 中存在一个基使得 f, g 在此基下的度量矩阵都是对角矩阵的充分必要条件是 G 可以对角化.

(d) 设 A, B 都是特征不为 2 的域 F 上的 n 级对称矩阵, 且 A 是可逆的, 证明 A, B 可以同时合同对角化的充分必要条件是 $A^{-1}B$ 可以对角化.

2 实内积空间

实线性空间 + 正定的对称双线性函数 = 实内积空间, 有限维的实内积空间即欧氏空间.

2.1 实内积空间的度量

定义 $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$, 有柯西不等式

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|, \forall \alpha, \beta.$$

定义 $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$, 证明 d 是一个距离, 即满足对称性, 正定性和三角不等式.

2.2 实内积空间的同构

同构映射 σ , 不仅作为线性空间的同构映射, 还要求保持内积, 即 $(\sigma\alpha, \sigma\beta) = (\alpha, \beta)$. 两个欧氏空间同构的充要条件是维数相同.

2.3 例题

在 $R[x]_{n+1}$ 中定义内积

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

令

$$P_0(x) = 1, P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k), k = 1, 2, \dots, n.$$

证明, 这是 $R[x]_{n+1}$ 的一个正交基.

3 正交变换

实内积空间 V 到自身的满射 A , 满足

$$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta$$

则称 A 是 V 上的正交变换. 可以证明

1. A 是线性的;
2. A 是单的, 从而 A 是可逆的.
3. A 是 V 到自身的一个同构映射.

3.1 例题

1. 证明, 实内积空间 V 到自身的满射 A 是正交变换当且仅当 A 是保持向量长度不变的线性变换。

2. 设 V 是 n 维欧氏空间, η 是 V 中一单位向量, 设 P 是 V 在 $\langle \eta \rangle$ 上的正交投影, 令 $A = I - 2P$, 称 A 为关于 $\langle \eta \rangle^\perp$ 的镜面反射. 证明这是第二类正交变换.

3. 设 A 是 n 维欧氏空间 V 上的一个线性变换, 证明 A 是镜面反射当且仅当 A 在 V 的任意一个标准正交基下的矩阵形如 $I - 2\alpha\alpha^T$, 其中 α 是 R^n 中的一单位向量.

4. (正交变换的矩阵表示) A 是实内积空间 V 上的正交变换.

(a) 假设 A 有特征值, 证明特征值为 1 或 -1.

(b) 证明 A 属于不同特征值的特征向量互相正交.

(c) 若 W 是 A 的一个有限维不变子空间, 则 W^\perp 也是 A 的不变子空间.

(d) 若 $\dim V = 2$, 若 A 是第一类的, 那么 V 中存在一组正交基, 使得 A 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta \leq \pi,$$

如果 A 是第二类的, 那么存在一组正交基, A 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) 若 $\dim V < \infty$, 证明 V 中存在一个标准正交基, 使得此基下 A 的矩阵为分块对角:

$$\text{diag} \left\{ \lambda_1, \dots, \lambda_r, \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos \theta_m & -\sin \theta_m \\ \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \right\}$$

其中 $\lambda_i = 1$ 或 -1 , $0 < \theta_i < \pi$.

4 复内积空间

- Hermite 性
- 酉变换, Hermite 变换
- 伴随变换, 正规变换

4.1 例题

1. 设 A 是复/实内积空间 V 上的线性变换, 如果存在 V 上的线性变换, 记做 A^* , 满足

$$(A\alpha, \beta) = (\alpha, A^*\beta), \forall \alpha, \beta \in V,$$

则称 A^* 是 A 的伴随变换. 证明对于有限维的复/实内积空间, 伴随变换是存在唯一的.

2. (a) (Schur 引理) 设 A 是 n 阶复方阵, 则 A 可酉上三角化, 即存在酉矩阵 U , 使得 UAU^* 为上三角矩阵.

(b) (酉对角化的充分必要条件) 设 A 是 n 阶复方阵, A 可以酉对角化的充分必要条件是 $AA^* = A^*A$.