



线性代数 A 习题课讲义集

作者：Caiyou Yuan

时间：October 5, 2021

特别声明

这里主要整理了作者在担任北京大学线性代数 A 这门课程的助教期间，在习题课上讲解的一些题目，主要参考了，

1. 高等代数（第三版）丘维声，高等教育出版社
2. 高等代数学习指导书（第二版）丘维生，清华大学出版社

以及一些其他书籍。

作者能力有限，难免有考虑不周和疏漏之处，欢迎批评指正。

Caiyou Yuan
October 5, 2021

目录

1	线性方程组	1
2	行列式	2
2.1	n 元排列	2
2.2	n 阶行列式的定义	2
2.3	行列式的性质	3
2.4	行列式按一行(列)展开	3
2.5	Cramer 法则	5
2.6	行列式按多行展开	5
3	n 维向量空间	7
3.1	K^n 及其子空间	7
3.2	线性相关/无关	7
3.3	极大线性无关组, 向量组的秩	7
3.4	基, 维数	8
3.5	矩阵的秩	8
3.6	线性方程组有解的充要条件	8
3.7	齐次/非齐次线性方程组的解	8
4	矩阵	10
4.1	矩阵的运算和特殊矩阵	10
4.2	矩阵相乘的秩与行列式	10
4.3	可逆矩阵	11
4.4	分块矩阵	12
4.5	正交矩阵和欧氏空间	12
4.6	线性映射	13
5	矩阵相抵和相似	14
5.1	矩阵相抵	14

第 1 章 线性方程组

- 矩阵的初等行变换
- 阶梯形矩阵, 简化阶梯形矩阵
- Gauss-Jordan 算法, 无解/有唯一解/有无数解
- 数域, Q, R, C

例题

1. 证明任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化为 (简化) 阶梯形矩阵.

2. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} = 2 \\ x_3 + x_4 + \cdots + x_{n+2} = 3 \\ \vdots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n} = n + 1 \end{cases}$$

3. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = b_1 \\ nx_1 + x_2 + \cdots + (n-2)x_{n-1} + (n-1)x_n = b_2 \\ (n-1)x_1 + nx_2 + \cdots + (n-3)x_{n-1} + (n-2)x_n = b_3 \\ \vdots \\ 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} + x_n = b_n \end{cases}$$

其中 b_1, \cdots, b_n 为给定常数

第2章 行列式

2.1 n元排列

- 逆序数
- 奇/偶排列

例题

1. 设 $1, 2, \dots, n$ 的 n 元排列 $a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_{n-k}$ 有

$$\tau(a_1 a_2 \cdots a_k) = \tau(b_1 b_2 \cdots b_{n-k}) = 0$$

那么 $\tau(a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_{n-k})$ 是多少? $n, k, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k}$ 均已知, $\tau(a_1 a_2 \cdots a_k)$ 表示排列 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 的逆序数.

2. 说明 $n(n>1)$ 元排列中, 奇偶排列各占一半

3. (1) 若 $\tau(a_1 a_2 \cdots a_n) = r$, 那么 $\tau(a_n a_{n-1} \cdots a_1)$ 是多少?

- (2) 计算所有 n 元排列的逆序数之和

2.2 n阶行列式的定义

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}\end{aligned}$$

注 如何从上一行定义, 导出下一行定义? 见课本^[1]24-25 页

例题

1. 下列行列式是 x 的几次多项式, 求出 x^4 项和 x^3 项的系数

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

2. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

2.3 行列式的性质

例题

- 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, \dots, n$.

2.4 行列式按一行 (列) 展开

- 余子式, 代数余子式
- Vandermonde 行列式 (行列式的递推)

注 按行展开如何从行列式定义推导?

例题

1. 计算下列行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

2. 计算如下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

2.5 Cramer 法则

例题

1. 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad B_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

证明:

- a. 当 $\det A \neq 0$ 时, 方程组有唯一解;
- b. 当 $\det A \neq 0$ 时, 方程组的唯一解为

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.6 行列式按多行展开

例题

1. 证明

$$(\det A)(\det B) = \det C$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

提示，考虑如下 $2n$ 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

第3章 n 维向量空间

3.1 K^n 及其子空间

- K^n 的定义 (有限维线性空间的典例)
- 子空间
- 线性表出 (求解线性方程组的另一个角度)

3.2 线性相关/无关

- 原向量组线性相关/无关, 部分组如何?
- 部分组线性相关/无关, 该向量组如何?
- 原向量组线性相关/无关, 延伸组/缩短组如何?

例题

1. 设数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 证明: H 的任意 s 列 ($s \leq \min\{m, n\}$) 都线性无关当且仅当, $Hx = 0$ 的任意非零解的非零分量大于 s

3.3 极大线性无关组, 向量组的秩

- 向量组的等价
- 极大线性无关组: 向量组及其极大线性无关组等价
- 向量组的秩: 向量组的极大线性无关组的向量数目相同
- 如果向量组 I 可以由向量组 II 线性表出, 则二者的秩有大小关系

例题

1. 设数域 K 上 $s \times n$ 矩阵 ($s \leq n$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

满足

$$2|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, s$$

证明: A 的行向量的组的秩等于 s .

2. 证明两个向量组等价的充要条件是：秩相等且其中一个向量组可以被另一个线性表出。
3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$, 证明此向量组的秩 $\geq r + m - s$.
4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 . 证明

$$\max(r_1, r_2) \leq r_3 \leq r_1 + r_2$$

3.4 基, 维数

- 基
- 维数

3.5 矩阵的秩

- 行秩等于列秩，即为矩阵的秩；如何说明？
- 任意非零矩阵的秩等于其非零子式的最高阶数；如何说明？

例题

1. 证明:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

2. 证明：如果 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r , 则它的任意 s 行组成的子矩阵，秩不小于 $r + s - m$.

3.6 线性方程组有解的充要条件

- 系数矩阵和增广矩阵有相同的秩

3.7 齐次/非齐次线性方程组的解

- 齐次/非齐次线性方程组的解集是一个子空间/陪集

例题

1. 用行列式给出三点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, 不在一条直线上的充要条件
2. 给出通过不在一条直线上三点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, 的圆的方程
3. 证明: 通过有理数坐标的三点的圆, 其圆心坐标也是有理数

4. 求三个平面

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

通过一条直线但是不合并为一个平面的充分必要条件.

第4章 矩阵

4.1 矩阵的运算和特殊矩阵

- 相同行列数目的矩阵全体在加法和数乘下构成线性空间
- 矩阵的乘法 (线性映射的复合, 有限维线性映射的典型)

例题

1. (矩阵的幂次)

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

计算 A^m , 其中 m 为正整数.

(b)

$$J = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix}_{n \times n}$$

计算 J^m , 其中 m 为正整数.

2. 证明: 反对称矩阵的秩为偶数

4.2 矩阵相乘的秩与行列式

- $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$
- 实数域上, $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$
- Binet-Cauchy 公式

例题

1. 举例说明, 对于复矩阵 A , 有可能 $\text{rank}(A^T A) \neq \text{rank}(A)$
2. 证明, 对于实数域上的任意 $s \times n$ 矩阵 A , 都有 $\text{rank}(AA^T A) = \text{rank}(A)$
3. 设 A, B 分别是数域 K 上的 $s \times n, n \times m$ 矩阵, 证明: 如果 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$, 那么对于任意的数域 K 上的 $m \times r$ 的矩阵 C , 都有

$$\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC).$$

4. 计算如下矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{bmatrix}$$

4.3 可逆矩阵

- $\det A \neq 0$ 是方阵 A 可逆的充分必要条件
- 可逆矩阵可以表示为若干初等矩阵的乘积

例题

1. (不可约对角占有矩阵) 求如下矩阵的逆矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

2. (AB 和 BA 的非零谱相同) A, B 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 的矩阵

(a). 证明, 若 $I_n - AB$ 可逆, 则 $I_m - BA$ 也可逆.

(b). 证明 $\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$

4.4 分块矩阵

例题

1. (矩阵的 LU 分解) 证明: 如果 A 的所有顺序主子式不等于零, 则存在可逆的下三角矩阵 L , 使得 LA 是上三角矩阵

4.5 正交矩阵和欧氏空间

- 正交矩阵的定义和性质 (实数域)
- 欧氏空间的内积 (对称正定的双线性函数)
- Schmidt 正交化

例题

1. (矩阵的 QR 分解) 证明: 可逆矩阵 A , 可以唯一分解为正交矩阵 Q 与主对角元都是正数的上三角矩阵 R 的乘积

2. A 是 $s \times n$ 的实矩阵, 说明 A^T 的像空间和 A 的核空间正交, 即在两空间中各自任意取一个向量, 内积均为零

3. (最小二乘) A 是 $m \times n$ 的实矩阵, $m > n$, $b \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 x_0 使得, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|Ax_0 - b|^2 \leq |Ax - b|^2$$

则称 x_0 是 $Ax = b$ 的最小二乘解. 证明 x_0 是最小二乘解, 当且仅当 x_0 是如下线性方程组的解

$$A^T Ax = A^T b$$

4.6 线性映射

- $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim(K^n)$

例题

1. 设 S 是一个有限集合, 映射 $f: S \rightarrow S$, 证明: f 为单射和 f 为满射互相等价.
2. 上一题结论在 S 不是有限集合的时候成立么? 若成立, 请证明; 不成立给出反例
3. 设 V 是一个有限维线性空间, 线性映射 $L: V \rightarrow V$, 证明: L 为单射和 L 为满射互相等价.

第 5 章 矩阵相抵和相似

5.1 矩阵相抵

- 如果矩阵 A 可以通过初等行/列变换为矩阵 B , 则称 A, B 相抵
- 矩阵相抵是 $M_{m \times n}(K)$ 上的一个等价关系
- $M_{m \times n}(K)$ 中的两矩阵相抵当且秩相等

例题

1. 设 A, B, C 分别是数域 K 上 $s \times n, p \times m, s \times m$ 矩阵, 证明矩阵方程 $AX - YB = C$ 有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

参考文献

- [1] 丘维生. 高等代数（第三版）上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.