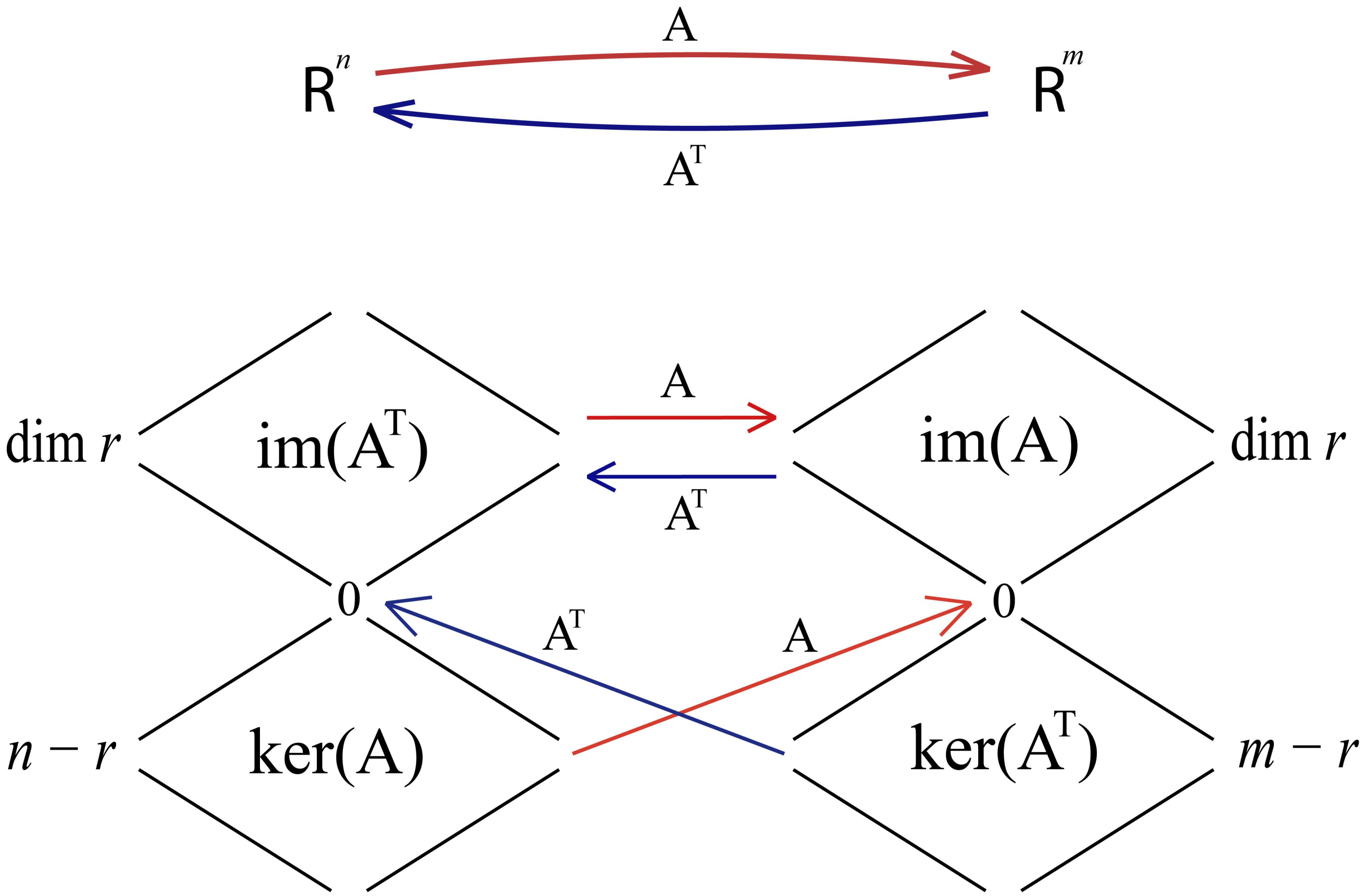

线性代数 A 习题课讲义集

作者：Caiyou Yuan

时间：October 5, 2021

特别声明

这里主要整理了作者在担任北京大学线性代数 A 这门课程的助教期间，在习题课上讲解的一些题目，主要参考了，

1. 高等代数（第三版）丘维声，高等教育出版社
2. 高等代数学习指导书（第二版）丘维生，清华大学出版社

以及一些其他书籍。

作者能力有限，难免有考虑不周和疏漏之处，欢迎批评指正。

Caiyou Yuan

October 5, 2021

目录

第 1 章 线性方程组

- 矩阵的初等行变换
- 阶梯形矩阵，简化阶梯形矩阵
- Guass-Jordan 算法, 无解/有唯一解/有无数解
- 数域, Q, R, C

例题

1. 证明任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化为 (简化) 阶梯形矩阵.

   解 对行数 s 进行数学归纳：$s=1$ 显然成立，假设 $s=k$ 时成立, 而当 $s=k+1$ 时,

   1. 若 $a_{11}\neq 0$, 使用初等行变换，将 $a_{21},\cdots,a_{k+1,1}$ 化为 0，对右下的子矩阵使用归纳假设即可；
   2. 若 $a_{11}=0$, $a_{i1}\neq 0$, 交换 1 行和 i 行，即化为情况 1;
   3. 若第一列均为零，则对右下 k 行的子矩阵使用归纳假设即可;

   所以对于阶梯形，结论成立。而简化阶梯形只需在阶梯形基础上再做若干次初等行变换即可。

2. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=1\\ x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=2\\ x_3+x_4+\cdots+x_{n+2}=3\\ \vdots\\ x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}=n+1 \end{cases}$$

   解 相邻两式相减; 注意到 $x_{n+2},x_{n+3},\cdots,x_{2n}$ 是自由变量即可

3. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\cdots+(n-1)x_{n-1}+nx_n=b_1\\ nx_1+x_2+\cdots+(n-2)x_{n-1}+(n-1)x_n=b_2\\ (n-1)x_1+nx_2+\cdots+(n-3)x_{n-1}+(n-2)x_n=b_3\\ \vdots\\ 2x_1+3x_2+\cdots+nx_{n-1}+x_n=b_n \end{cases}$$

   其中 $b_1,\cdots b_n$ 为给定常数

   解 各式相加; 相邻两项相减

第 2 章 行列式

2.1 n 元排列

- 逆序数
- 奇/偶排列

例题

1. 设 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}$ 有
$$\tau(a_1a_2\cdots a_k) = \tau(b_1b_2\cdots b_{n-k}) = 0$$
那么 $\tau(a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k})$ 是多少? $n, k, a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_{n-k}$ 均已知, $\tau(a_1a_2\cdots a_k)$ 表示排列 $a_1a_2\cdots a_k$ 的逆序数.
解 $\sum_{i=1}^{k} a_i - \frac{k(k+1)}{2}$, 答案不唯一

2. 说明 n(n>1) 元排列中，奇偶排列各占一半
解 任意两位置的对换，建立了奇排列和偶排列间的一一对应

3. (1) 若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n) = r$, 那么 $\tau(a_na_{n-1}\cdots a_1)$ 是多少?
解 $\frac{n(n-1)}{2} - r$

   (2) 计算所有 n 元排列的逆序数之和
解 在上一问的基础上，将所有排列分为 $\frac{n!}{2}$ 组;

2.2 n 阶行列式的定义

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\end{aligned}$$

注 如何从上一行定义，导出下一行定义？见课本[1]24-25 页

例题

1. 下列行列式是 x 的几次多项式, 求出 x^4 项和 x^3 项的系数

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

解 按照定义讨论, 或者按某行/列展开；四次多项式；$5x^4, -2x^3$

2. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解 箭形行列式，利用定义；$a_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - \cdots a_nb_n$

2.3 行列式的性质

例题

- 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n.$

解 $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \cdots - \frac{x_n}{a_n}\right)$

1. 第一行的 -1 倍加到 2 到 n 行, 化为箭形矩阵行列式;
2. 非对角元素补上减去 0，每列拆分为两列, 2^n 个行列式中经有 $n+1$ 个非零;
3. 和方法二类似，但只对第一列拆分, 找到 n 阶结果和 $n-1$ 阶结果的关系;

2.4 行列式按一行 (列) 展开

- 余子式, 代数余子式
- Vandermonde 行列式 (行列式的递推)

注 按行展开如何从行列式定义推导?

例题

1. 计算下列行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

解 递推;$S_n = 2aS_{n-1} - a^2S_{n-2}, S_n = (n+1)a^n$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解 递推;$S_n = (a+b)S_{n-1} - abS_{n-2}$, 若 $a = b$, 则化为上一小问;若 $a \neq b$, $S_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

解 递推

$$S_n = \begin{cases} (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n & a^2 = 4bc \\ \frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2} & a^2 \neq 4bc \end{cases}$$

其中 x_1, x_2 是 $x^2 - ax + bc = 0$ 的两个根。

2. 计算如下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

解 考虑如下的 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

所需计算的行列式，即是该 Vandermonde 行列式（按最后一列展开）的 x^{n-1} 项系数的相反数。结果为 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Pi_{i<j}(x_j - x_i)$.

2.5 Cramer 法则

例题

1. 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad B_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

证明:

a. 当 $\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解；

b. 当 $\det A \neq 0$ 时，方程组的唯一解为

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

2.6 行列式按多行展开

例题

1. 证明

$$(\det A)(\det B) = \det C$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

提示，考虑如下 $2n$ 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

解 通过初等行变换，将其变为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

第 3 章 n 维向量空间

3.1 K^n 及其子空间

- K^n 的定义 (有限维线性空间的典例)
- 子空间
- 线性表出（求解线性方程组的另一个角度)

3.2 线性相关/无关

- 原向量组线性相关/无关，部分组如何?
- 部分组线性相关/无关，该向量组如何?
- 原向量组线性相关/无关，延伸组/缩短组如何?

例题

1. 设数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 证明：$H$ 的任意 s 列 ($s \leq \min\{m, n\}$) 都线性无关当且仅当，$Hx = 0$ 的任意非零解的非零分量大于 s
   解 必要性, 考虑其逆否命题；充分性，考虑其逆否命题.

3.3 极大线性无关组，向量组的秩

- 向量组的等价
- 极大线性无关组: 向量组及其极大线性无关组等价
- 向量组的秩: 向量组的极大线性无关组的向量数目相同
- 如果向量组 I 可以由向量组 II 线性表出，则二者的秩有大小关系

例题

1. 设数域 K 上 $s \times n$ 矩阵 ($s \leq n$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

   满足

$$2|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

   证明：A 的行向量的组的秩等于 s.
   解 考虑 A 的前 s 行和列组成的子矩阵, 严格对角占优, 列秩为 s, 行列式不为零, 所以行秩也为 s. 或者直接利用矩阵的三秩合一

2. 证明两个向量组等价的充要条件是：秩相等且其中一个向量组可以被另一个线性表出。
   解 必要性显然; 充分性, 考虑这两个的极大线性无关组 I 和 II，两个向量组数目均是 r，而且 I 可以被 II 线性表出, 只需要证明 II 也可以被 I 线性表出即可。任取 II 中的向量，放到 I 中，此向量组 $r+1$ 各元素，但是可以被 II(r 个元素) 线性表出，所以 $r+1$ 个元素线性相关，II 中任意向量均可以被 I 线性表出

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r, 在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}$, 证明此向量组的秩 $\geq r+m-s$.
   解 原向量组 s 个向量分为两类：r 个极大线性无关组中的元素，$s-r$ 个可以被线性表出的元素. 任意取的 m 个向量中，取在前面极大线性无关组中的，至少有 $m-(s-r)$ 个，即有这么多向量线性无关.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3. 证明
   $$\max(r_1, r_2) \leq r_3 \leq r_1 + r_2$$
   解 取各自的极大线性无关组放在一起

3.4 基, 维数

- 基
- 维数

3.5 矩阵的秩

- 行秩等于列秩，即为矩阵的秩；如何说明？
- 任意非零矩阵的秩等于其非零子式的最高阶数; 如何说明？

例题

1. 证明:
   $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$
   解
   (a) 从非零子式上考虑：分别取 A，B 对应的最高阶非零子式对应的行列，构成一个新的非零子式;
   (b) 从行空间上考虑：分别取 A，B 行空间的极大线性无关组, 然后考虑对应延伸组，这两组线性无关.

2. 证明：如果 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 则它的任意 s 行组成的子矩阵，秩不小于 $r+s-m$.
   解 从行空间的角度，或者非零子式

3.6 线性方程组有解的充要条件

- 系数矩阵和增广矩阵有相同的秩

3.7 齐次/非齐次线性方程组的解

参考文献

[1] 丘维生. 高等代数（第三版）上册[M]. 北京: 高等教育出版社.