第四章 容斥原理

§1 容斥原理引论

- 容斥原理是组合数学中的一个重要原理,它在计数问题中占有很重要地位.
- 容斥原理所研究的问题是与若干有限集的交、并或差有关的计数.
- 在实际工作中,有时要计算具有某种性质的元素个数.(约当定理)

● 在一些计数问题中，经常遇到间接计算一个集合中具有某种性质的元素个数比起直接计算来得简单.

例：计算1到700之间不能被7整除的整数个数.

● 直接计算相当麻烦，间接计算非常容易.

● 先计算1到700之间能被7整除的整数个数 =700/ 7=100，所以1到700之间不能被7整除的整数个数=700-100=600.

- 因此，当直接求解受阻或无法达到目的时，应考虑间接求解方法.
- 上面间接计数的例子利用了如下原理：如果A是集合S的子集，则A中的元素个数等于S中的元素个数减去不在A中的元素个数，这个原理可写成

$$|A|=|S|-|\overline{A}| \text{ 或 } |\overline{A}|=|S|-|A|$$

其中$\overline{A}$表示A在S中的补集或余集.

- **目的**：不仅仅讨论这样一个简单的原理，而是讨论这个原理的一个重要推广，称之为容斥原理，并且将它运用到若干问题上去，其中包括：错位排列、有限制的排列、禁位排列等.

例 假定某研究科室有7个人掌握英语，5个人懂德语，2个人既懂英语又懂德语，试问：

1）掌握英语或者德语的人数？

2）假定每个人或会英语或会德语，科里一共多少人？

3）假定科室共11人，则科里不懂英语和德语的人有多少？

解：A_1：懂英语的人的集合；

A_2：懂德语的人的集合；

S：全部元素；

则：$|A_1| = 7$, $|A_2| = 5$; $|A_1 \cap A_2|=2$

1) $|A_1 \cup A_2| = |A_1-A_2| + |A_2-A_1|+|A_1 \cap A_2|$

因为：$|A_1| = |A_1-A_2|+|A_1 \cap A_2|$

所以：$|A_1 \cup A_2| = |A_1|+|A_2| -|A_1 \cap A_2|$

§4.2 容斥原理

最简单的计数问题是求有限集合A和B并的元素数目。

定理： 两个集合的容斥原理

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (1)$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |E| - |A \cup B| = |E| - |A| - |B| + |A \cap B| \qquad (2)$$

4.2 容斥原理

- 定理：三个集合的容斥原理：

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

证明：

4.2 容斥原理

- 定理：4个集合的容斥原理：

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A|+|B|+|C| + |D| - |A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|-|A \cap D|+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

利用数学归纳法可得一般的定理

容斥原理

- 定理：设有限集合Ai，i=1，2，...，n，则有公式：

1) $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |A_i \cap A_j|$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$

2) $|\bigcap_{i=1}^{n} |A_i| = |E| - ||\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$

例　一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有170、130、120人；同时修数学、物理两门课的学生45人；同时修数学、化学的20人；同时修物理化学的22人。同时修三门的3人。问这学校共有多少学生?

例 求a,b,c,d,e,f六个字母的全排列中不允许出现ace和df图象的排列数。

例 求从1到500的整数中能被3或5除尽的数的个数。

例 求由a,b,c,d四个字母构成的n位符号串中，a,b,c至少出现一次的符号串数目。

§4.3 Jordan约当 定理

回顾：有$|A_1|=7$人懂英语；$|A_2|=5$人懂德语；

$|A_1 \cap A_2|=2$人既懂英语又懂德语；全集合$|E|=11$

观察：既不懂英语又不懂德语，懂0种语言的人数：??

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}|=|E|-|A_1 \cup A_2|=|E|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|$

恰懂1种语言的人数：??

英语：

德语：

恰懂2种语言的人数：??

§ 4.3 JORDAN约当定理

设Ai，i=1,2,3为具有性质i的元素的全体，则

$$s_1 = \sum_{i=1}^{3} |A_i| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} |A_i \cap A_j| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$$

设pi为全部性质中恰具有i个性质的元素个数，则：

（1）恰有零个性质的元素个数为：

$$p_0 = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |E| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |E| - S_1 + S_2 - S_3$$

（2）恰有一个性质的元素个数为：

$$\begin{aligned} p_1 &= |A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| + |\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3| + |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3| \\ &= S_1 - 2S_2 + 3S_3 \end{aligned}$$

(3)恰有两个性质的元素个数为

$$p_2 = |A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3| + |A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3| + |\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= S_2 - 3S_3$$

(4)恰有三个性质的元素个数为：

$$p_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = s_3$$

p_k ？

定理4.3 （JORDAN定理）广义容斥原理

假定E, Ai 为具有性质i的元素集合，i=1,2…,n, sk以及pk，k=0,1,…,n, 则

$$s_0 = |E|$$

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$p_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} s_{k+i}$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |A_i \cap A_j|$$

…

pk: n个性质恰具有k个性质的元素个数。

JORDAN定理的应用

例 假定14位考生，

9位同学数学——优，

5位同学物理——优；

4位同学化学——优；

4位数学+物理——优；

3位数学+化学——优；

3位物理+化学——优；

2位数学+物理+化学——优；

问：1）有多少同学没得到优？

2）三门课只有一个优的同学有几位？

3）恰好有二门优的同学有几位？

例　一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有170、130、120人；同时修数学、物理两门课的学生45人；同时修数学、化学的20人；同时修物理化学的22人。同时修三门的3人。问这学校共有多少学生?

若将改为“单修一门数学的学生有多少？”“只修一门课的学生有多少”

“只修两门课的学生有多少？”

则相应的答案表示如下：

$|M\cap P\cap C|$；

$|M\cap P\cap C|+|M\cap P\cap C|+|M\cap P\cap C|$

$|M\cap P\cap C|+|M\cap P\cap C|+|M\cap P\cap C|$

§ 4.3 例

§ 4 错排问题

n个元素依次给以标号1，2，…，n。n个元素的全排列中，求每个元素都不在自己原来位置上的排列数。

例：设S={1,2,...,n}, 令qn设是S上的n元错排方案数，试证：

$$q_n = n! - C(n-1)(n-1)! + C(n-2)(n-2)! + \ldots \pm C(n,n)1!$$

证明:

用容斥原理证明:

设$S=\{1,2,3,\ldots,n\}$, S_0为S的所有n!个排列的集合.

令A_j表示排列12…n中使j位置上的元素恰好是j的排列的集合, j=1,2,…,n.

则排列1,2,…,n的所有错位排列组成集合:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$

$|A_j|=(n-1)!$, $j=1,2,3,\ldots,n$.

$|A_i \cap A_j|=(n-2)!$, $i,j=1,2,3,\ldots,n$, 但$i\neq j$.

对于任意整数k且$1\leq k\leq n$, 则有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

因为$\{1,2,3,\ldots,n\}$的k组合为$C(n,k)$个,

应用容斥原理得到:

$$
\begin{aligned}
D_n &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| \\
&= n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! \\
&\quad - C(n,3)(n-3)! + \cdots + (-1)^n C(n,n)0! \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).
\end{aligned}
$$

- 例： 设S={1,2,...,n}， 求：S上恰有r个元素在相应位置上的n元错排方案数?

例 数1，2，…，9的全排列中，求偶数在原来位置上，其余都不在原来位置的错排数目。

例 求8个字母A,B,C,D,E,F,G,H的全排列中只有4个不在原来位置的排列数。

例 错排问题

举办8人参加的化妆舞会，A,B, C, D四位先生，*E, F, G, H*是四位女士。他们各自带一个面具，两两不同。随意分发面具给每位，试求：

（1）先生都拿到自己的面具，而女士无一拿到自己面具的方案数；

（2）先生们没有一位拿到自己面具的方案数；

（3）8人中，只有四位没有拿到自己面具的方案数；

1. 有限制排列:所谓有限制的排列:加上某种或某些限制.

例：4个x，3个y，2个z的全排列中，求不出现xxxx，yyy，zz图像的排列。

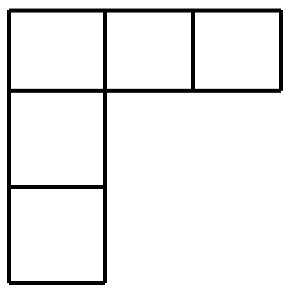
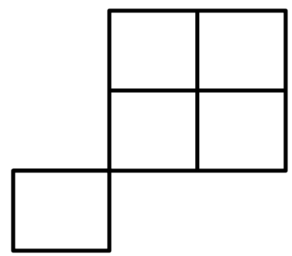
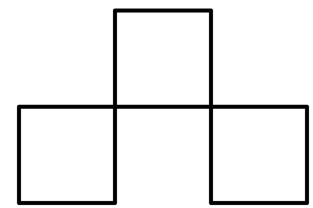
1 棋盘多项式

n个不同元素的一个全排列可看做n个相同的棋子在$n\times n$的棋盘上的一个布局。布局满足同一行（列）中有且仅有一个棋子

			X	
X				
		X		
				X
	X			

排列41352对应于如图所示的布局。

可以把棋盘的形状推广到任意形状：

布子规定同上。

令$r_k(\mathrm{C})$表示k个棋子布到棋盘C上的方案数。

$$r_1(\square)=1$$

$$r_1\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\right)=2 \qquad r_1\left(\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \\ \cline{2-2}\end{array}\right)=2$$

$$r_2\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\right)=0 \qquad r_2\left(\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \\ \cline{2-2}\end{array}\right)=1$$

规定 $r_0(C)=1$，包括$C=\Phi$时。

设C_i是棋盘C的某一指定格子所在的行与列都去掉后所得的棋盘；C_e是仅去掉该格子后的棋盘。

在上面定义下，显然有

$$r_k(C)=r_{k-1}(C_i)+r_k(C_e)$$

定义1 设C为一棋盘，称$R(C)=\sum r_k(C)\,x^k$为C的棋盘多项式。

从而

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)\,x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}[r_{k-1}(C_i)+r_k(C_e)]x^k$$

$$=x\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_i)x^k+\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_e)x^k$$

$$=xR(C_i)+R(C_e) \qquad (3)$$

例如：

$$R(\square)=1+x;$$

$$R\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right)=xR(\quad)+R(\square)=x+(1+x)=1+2x;$$

$$R\left(\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \ \\ \cline{2-2}\end{array}\right)=x\,R(\square)+R(\square)$$

$$=x(1+x)+1+x$$

$$=1+2x+x^2$$

如果C由相互分离的C_1，C_2组成，即C_1的任一格子所在的行和列中都没有C_2的格子。则有：

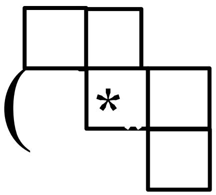
$$r_k(C) = \sum r_i(C_1)\, r_{k-i}(C_2)$$

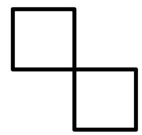
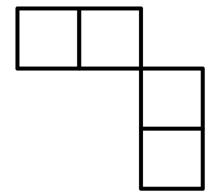
$$R(C) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)\, r_{k-i}(C_2) \right) x^k$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} r_i(C_1)\, x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} r_j(C_2)\, x^j \right)$$

$$\therefore \quad R(C) = R(C_1)\, R(C_2) \qquad (4)$$

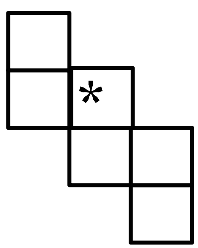
利用(３)和(４)，可以把较复杂的棋盘逐步分解成相对比较简单的棋盘，从而得到其棋盘多项式。

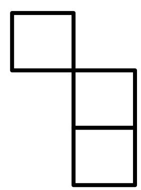
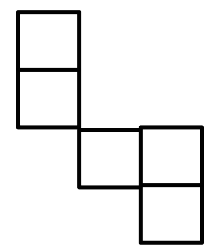
例： R(

) $= x$R()+R()

$$= x(1+x)^2 + (1+2x)^2$$

$$= 1+5x+6x^2+x^3$$

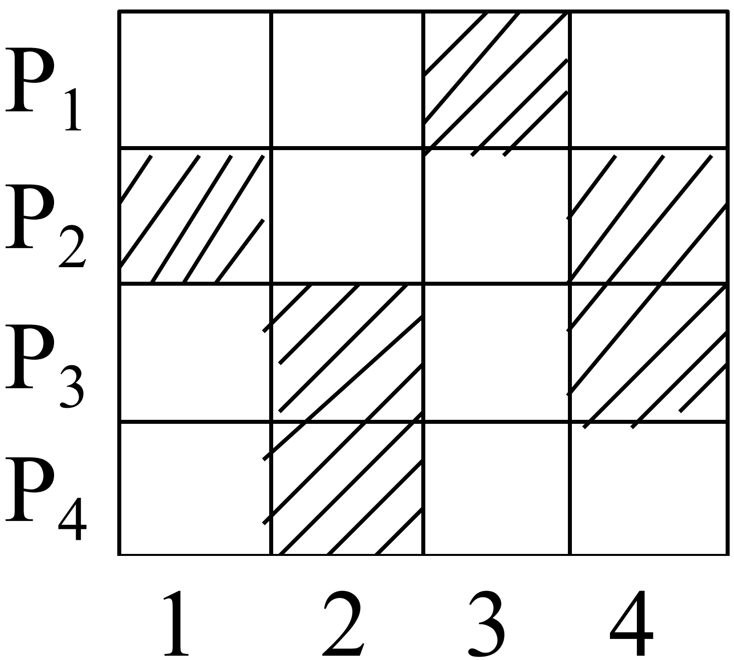
R(

) $= x$R() + R()

$$= 1+6x+10x^2+4x^3$$

2 有禁区的排列

例　设对于排列$P=P_1P_2P_3P_4$，规定$P_1\neq 3$，$P_2\neq 1,4$，$P_3\neq 2,4$，$P_4\neq 2$。



这样的排列对应于有禁区的布子。如左图有影线的格子表示禁区。

定理 设 r_i 为 i 个棋子布入禁区的方案数，$i=1,2,3,\cdots,n$。有禁区的布子方案数（即禁区内不布子的方案数）为

$$r_0 n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots + (-1)^n r_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)!$$

证明：设A_i为第i个棋子布入禁区，其它棋子任意布的方案集，$i=1, 2, 3, \cdots, n$。

则所有棋子都不布入禁区的方案数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$= n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! + \ldots + (-1)^n r_n 0!$$

而rk正是k个棋子布入禁区，其他n-k个棋子任意分布的方案数。

由假设可知，$r_k(n-k)!$, 有：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = n! + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)$$

例2 1 , 2 , 3 , 4 四位工人，A,B,C,D四项任 务。

条件如下：

1 不干B；　　2 不干B、C；

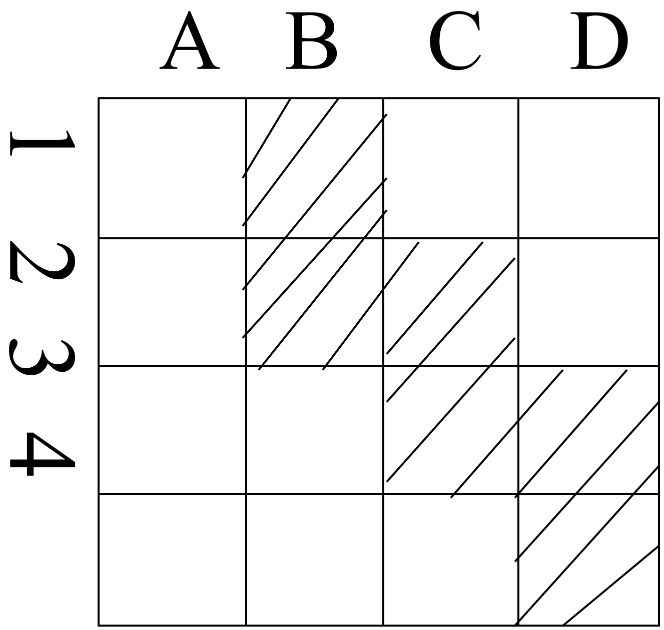
3 不干C、D；　4 不干D。

问有多少种可行方案？

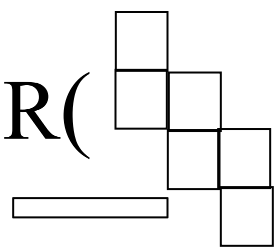
思路：1、先计算出禁区的多项式，得出k个人所做任务的方案数r_k

2、代入定理2. $\sum(-1)^k r_k(n-k)!$

解： 由题意，可得如下棋盘：



其中有影线的格子表示禁区。

R() $=1+6x+10x^2+4x^3$

方案数 $=4!-6(4-1)!+10(4-2)!-4(4-3)!+0(4-4)!=4$

小结

- 容斥原理：集合的并和补之间的关系；
- 已知条件转化为集合语言；
- 应用：错排问题；
- 有禁区的排列；