

1.1 题 从{1, 2,50}中找两个数{a, b}, 使其满足 (1) $|a-b|=5$; (2) $|a-b|\leq 5$;

解: (1): 由 $|a-b|=5 \Rightarrow a-b=5$ 或者 $a-b=-5$,

由列举法得出, 当 $a-b=5$ 时, 两数的序列为 (6, 1) (7, 2) (50, 45), 共有 45 对。

当 $a-b=-5$ 时, 两数的序列为 (1, 6), (2, 7) (45, 50) 也有 45 对。

所以这样的序列有 90 对。

(2): 由题意知, $|a-b|\leq 5 \Rightarrow |a-b|=1$ 或 $|a-b|=2$ 或 $|a-b|=3$ 或 $|a-b|=4$ 或 $|a-b|=5$ 或 $|a-b|=0$;

由上题知当 $|a-b|=5$ 时 有 90 对序列。

当 $|a-b|=1$ 时两数的序列有 (1, 2), (3, 4), (2, 1) (1, 2) ... (49, 50), (50, 49) 这样的序列有 $49*2=98$ 对。

当此类推当 $|a-b|=2$, 序列有 $48*2=96$ 对, 当 $|a-b|=3$ 时, 序列有 $47*2=94$ 对, 当 $|a-b|=4$ 时, 序列有 $46*2=92$ 对,

当 $|a-b|=0$ 时有 50 对

所以总的序列数= $90+98+96+94+92+50=520$

1.2 题 5 个女生, 7 个男生进行排列, (a) 若女生在一起有多少种不同的排列? (b) 女生两两不相邻有多少种不同的排列? (c) 两男生 A 和 B 之间正好有 3 个女生的排列是多少?

解: (a) 可将 5 个女生看作一个单位, 共八个单位进行全排列得到排列数为: $8! \times 5!$,

(b) 用 x 表示男生, y 表示空缺, 先将男生放置好, 共有 8 个空缺,

Y X Y X Y X Y X Y X Y X Y X Y

在其中任取 5 个得到女生两两不相邻的排列数: $C(8, 5) \times 7! \times 5!$

(c) 先取两个男生和 3 个女生做排列, 情况如下:

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 6. 若 A, B 之间存在 0 个男生, | A, B 之间共有 3 个人, 所有的排列应为 | $P_6=C(5,3)*3!*8!*2$ |
| 1. 若 A, B 之间存在 1 个男生, | A, B 之间共有 4 个人, 所有的排列应为 | $P_1=C(5,1)*C(5,3)*4!*7!*2$ |
| 2. 若 A, B 之间存在 2 个男生, | A, B 之间共有 5 个人, 所有的排列应为 | $P_2=C(5,2)*C(5,3)*5!*6!*2$ |
| 3. 若 A, B 之间存在 3 个男生, | A, B 之间共有 6 个人, 所有的排列应为 | $P_3=C(5,3)*C(5,3)*6!*5!*2$ |
| 4. 若 A, B 之间存在 4 个男生, | A, B 之间共有 7 个人, 所有的排列应为 | $P_4=C(5,4)*C(5,3)*7!*4!*2$ |
| 5. 若 A, B 之间存在 5 个男生, | A, B 之间共有 8 个人, 所有的排列应为 | $P_5=C(5,5)*C(5,3)*8!*3!*2$ |

所以总的排列数为上述 6 种情况之和。

1.3 题 m 个男生, n 个女生, 排成一行, 其中 m,n 都是正整数, 若

(a)男生不相邻 ($m \leq n+1$); (b)n 个女生形成一个整体; (c)男生 A 和女生 B 排在一起;
分别讨论有多少种方案。

解: (a) 可以考虑插空的方法。

n 个女生先排成一排, 形成 $n+1$ 个空。因为 $m \leq n+1$ 正好 m 个男生可以插在 $n+1$ 个空中, 形成不相邻的关系。

则男生不相邻的排列个数为 $p_n^n \cdot p_{n+1}^{n+1}$

(b) n 个女生形成一个整体有 $n!$ 种可能, 把它看作一个整体和 m 个男生排在一起, 则排列数有 $(m+1)!$ 种可能。因此, 共有 $n! \cdot (m+1)!$ 种可能。

(c)男生 A 和女生 B 排在一起, 因为男生和女生可以交换位置, 因此有 $2!$ 种可能, A、B 组合在一起和剩下的学生组成排列有 $(m+n-1)!$

(这里实际上是 $m+n-2$ 个学生和 AB 的组合形成的)种可能。共有组合数为 $2! \cdot (m+n-1)!$

1.4 题 26 个英文字母进行排列, 求 x 和 y 之间有 5 个字母的排列数

解: $C(24, 5) * 13!$

1.5 题 求 3000 到 8000 之间的奇整数的数目, 而且没有相同的数字。

解: 根据题意, 千位可以从 3, 4, 5, 7, 6 中选取, 个位可以从 1, 3, 5, 7, 9 中选取; 因此 $2*5*8*7+3*4*8*7=1232$

1.6 题 计算, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$

解: 由序数法公式可知 $1!+1=2! \quad 2 \cdot 2!+1 \cdot 1!+1=3! \quad 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 1=4!$

$n \cdot n!+(n-1)(n-1)!+\dots +2 \cdot 2!+1 \cdot 1!+1=(n+1)!$

所以 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

1.7 题 试证: $(n+1)(n+2)\dots(2n)$ 被 2^n 除尽。

证明: 因 $(2n)! = 2^n n! (2n-1)!!$

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n} = \frac{n!(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n!2^n} = \frac{(2n)!}{n!2^n} = (2n-1)!!$$

因为 $(2n-1)!!$ 是整数所以 $(n+1)(n+2)\dots(2n)$ 能被 2^n 除尽。

1.8 题 求 10^{40} 和 20^{30} 的公因数数目。

解：因为 $10^{40} = 2^{40} * 5^{40} = 2^{40} * 5^{30} * 5^{10}$ $20^{30} = 2^{60} * 5^{30} = 2^{40} * 2^{20} * 5^{30}$

它们最大公因子为 $2^{40} * 5^{30}$ 转化为求 最大公因子 能除尽的整数个数，能除尽它的整数是 $2^a * 5^b, 0 \leq a \leq 40, 0 \leq b \leq 30$

根据乘法法则，能除尽它的数个数为 $41 * 31 = 1271$

1.9 题 试证 n^2 的正除数的数目是奇数。

证明：设有 $0 < a < n, n < b < n^2$ ，则一定有表达式 $n^2 = a \times b$ ，

则 可知符合范围的 a 和 b 必成对出现，所以为偶数。

又当 $a=b=n$ 时，表达式 $n^2 = a \times b$ 仍然成立。 所以 n^2 的正除数的数目是“偶数+1”为奇数。

1.10 题 证任一正整数 n 可唯一地表示如下形式： $$n = \sum_{i=1}^k a_i \cdot i!$$, $0 \leq a_i \leq i, i=1, 2, \dots$ 。

证：对 n 用归纳法。

先证可表示性：当 $n=0, 1$ 时，命题成立。

假设对小于 n 的非负整数，命题成立。

对于 n ，设 $k! \leq n < (k+1)!$ ，即 $0 \leq n - k! < k \cdot k!$

由假设对 $n - k!$ ，命题成立，设
$$n - k! = \sum_{i=1}^k a_i \cdot i!$$

$$n = \sum_{i=1}^k a_i \cdot i! + k!$$
，其中 $a_k \leq k-1$ ，命题成立。

再证表示的唯一性：设
$$n = \sum_{i=1}^k a_i \cdot i! = \sum_{i=1}^k b_i \cdot i!$$
，不妨设 $a_j > b_j$ ，令 $j = \max \{i | a_i \neq b_i\}$

$a_j \cdot j! + a_{j-1} \cdot (j-1)! + \dots + a_1 \cdot 1! = b_j \cdot j! + b_{j-1} \cdot (j-1)! + \dots + b_1 \cdot 1!$

$(a_j - b_j) \cdot j! = \sum (b_i - a_i) \cdot i! \geq j! > \sum i \cdot i! \geq \sum |b_i - a_i| \cdot i! \geq \sum (b_i - a_i) \cdot i!$ 矛盾，命题成立。

1.11 题 证明 $nC(n-1, r) = (r+1)C(n, r+1)$ ，并给予组合解释。

证：
$$nC(n-1, r) = n \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-r-1)!} = \frac{(r+1) \cdot n!}{(r+1) \cdot r! \cdot (n-r-1)!} = \frac{(r+1) \cdot n!}{(r+1)! \cdot (n-r-1)!} = (r+1)C(n, r+1)$$

所以左边等于右边

组合意义：等式左边： n 个不同的球，先任取出 1 个，再从余下的 $n-1$ 个中取 r 个；

等式右边： n 个不同球中任意取出 $r+1$ 个，并指定其中任意一个为第一个。

所以两种方案数相同。

1.12 题 证明等式： $$\sum_{k=1}^n kC(n, k) = n2^{n-1}$$

证明： 等式左边 $= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} = n [C(n-1, 0) + C(n-1, 1) + \dots + C(n-1, n-1)] = n2^{n-1} =$ 右边

1.13 题 有 N 个不同的整数，从中间取出两组来，要求第 1 组的最小数大于另一组的最大数。

解题思路：（取法由大到小）

第 1 步：从 N 个数由大到小取一个数做为第一组，其它 $N-1$ 个数为第二组，

组合数为： $c(n, 1) * \{c(n-1, 1) + c(n-1, 2) + \dots + c(n-1, n-1)\}$

第 2 步：从 N 个数由大到小取两个数做为第一组，其它 $N-2$ 个数为第二组，

组合数为： $c(n, 2) * \{c(n-2, 1) + c(n-2, 2) + \dots + c(n-2, n-2)\}$

...

第 $n-2$ 步：从 N 个数由大到小取 $n-2$ 个数做为第一组，其它 2 个数为第二组，组合数为： $c(n, n-2) * \{c(2, 1)\}$

第 $n-1$ 步：从 N 个数由大到小取 $n-1$ 个数做为第一组，其它 1 个数为第二组，组合数为： $c(n, n-1) * \{c(1, 1)\}$

总的组合数为：

$$C(n, 1) \cdot \{C(n-1, 1) + C(n-1, 2) + \dots + C(n-1, n-1)\} + C(n, 2) \cdot \{C(n-2, 1) + C(n-2, 2) + \dots + C(n-2, n-2)\} + \dots + C(n, n-2) \cdot \{C(2, 1) + C(n, n-1) \cdot C(1, 1)\}$$

1.14 题 6个引擎分列两排，要求引擎的点火顺序两排交错开来，试求从特定一引擎开始有多少种方案？

解：第1步从特定引擎对面的3个中取1个有 $C(3,1)$ 种取法，
第2步从特定引擎一边的2个中取1个有 $C(2,1)$ 种取法，
第3步从特定引擎对面的2个中取1个有 $C(2,1)$ 中取法，剩下的每边1个取法固定。
所以共有 $C(3,1) \cdot C(2,1) \cdot C(2,1) = 12$ 种方案。

1.15 题 求1至1000000中0出现的次数。

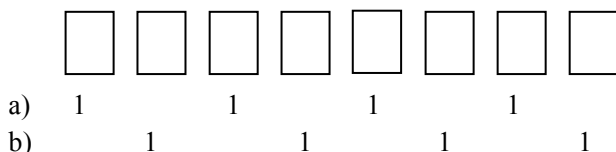
解：当第一位为0时，后面6位组成的数可以从1-100000，共100000个0；
当第二位为0时，当第一位取0-9时，后面5位可以取1-9999，此外当第一位取0时，后面5位还可以取为10000，这样共有 $9999 \cdot 10 + 1 = 99991$ 个0；
同理第三位为0时，共有99901个0；第四位为0时，共有99001个0；第五位为0时，共有90001个0；第六位为0时，只有1个0；
这样总共的0数为： $100000 + 99991 + 99901 + 99001 + 90001 + 1 = 488895$ 。

1.16 题 n 个相同的球放到 r 个不同的盒子里，且每个盒子里不空的放法。

解：如果用“O”表示球，用“|”表示分界线，就相当于用 $r-1$ 个“|”把 n 个“O”分成 r 份，要求是每份至少有一个球。如下图所示：
00|00000000|00000000|00000|000000.....
对于第一个分界线，它有 $n-1$ 种选择，对于第二个分界线只有 $n-2$ 个选择，(因为分界线不能相邻，如果相邻它们之间就没有了球，这不合要求)，依次第 $r-1$ 个分界线只有 $n-(r-1)$ 种选择。但是这样的分法中存在重复，重复度为 $(r-1)!$ ，所以总得放法为： $(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) / (r-1)! = C(n-1, r-1)$ 。

1.18 题 8个盒子排成一列，5个有标志的球放到盒子中，每盒最多放一个球，要求空盒不相邻，问有多少种排列方案？

解：要求空盒不相邻，这样球的位置共有8种。而不同标志的球的排列有 $p_5^5 = 5!$ 。所以共有 $8 \cdot 5!$ 种排列。
8种排列如下两类。因为要求空盒不相邻，途中1代表球



在a)中剩下的一个球有四种位置，b)中剩下的一个球也有四种位置，两者合起来一共有8种

1.17 题 n 和 r 都是正整数，而且 $r \leq n$ ，试证下列等式：

$$(a) p_r^n = n p_{r-1}^{n-1} \quad (b) p_r^n = (n-r+1) p_{r-1}^n \quad (c) p_r^n = \frac{n}{n-r} p_r^{n-1}, r < n$$

$$(d) p_r^{n+1} = p_r^n + r p_{r-1}^n \quad (e) p_r^{n+1} = r! + r(p_{r-1}^n + p_{r-1}^{n-1} + L + p_{r-1}^r)$$

解：(a) $n p_{r-1}^{n-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = p_r^n$ 等式成立。

(b) $(n-r+1) p_{r-1}^n = (n-r+1) \cdot \frac{n!}{(n-r+1)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = p_r^n$ 等式成立。

(c) $\frac{n}{n-r} p_r^{n-1} = \frac{n}{n-r} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = p_r^n$ 等式成立。

(d) $p_r^n + r p_{r-1}^n = \frac{n!}{(n-r)!} + r \cdot \frac{n!}{(n-r+1)!} = \frac{n!(n-r+1)}{(n-r+1)!} + r \cdot \frac{n!}{(n-r+1)!} = \frac{(n+1)! - n! \cdot r + r \cdot n!}{(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} = p_r^{n+1}$

(e) 利用(d)的结论可证明本题。

$$\begin{aligned} r! + r(p_{r-1}^n + p_{r-1}^{n-1} + L + p_{r-1}^r) &= p_r^r + r p_{r-1}^n + r p_{r-1}^{n-1} + L + r p_{r-1}^r \\ &= p_r^r + r p_{r-1}^r + r p_{r-1}^{r+1} + r p_{r-1}^{r+2} + L + r p_{r-1}^{n-1} + r p_{r-1}^n \\ &= p_r^{r+1} + r p_{r-1}^{r+1} + r p_{r-1}^{r+2} + L + r p_{r-1}^{n-1} + r p_{r-1}^n = p_r^{n+1} \end{aligned}$$

1.19 题 $n+m$ 位由 m 个0， n 个1组成的符号串，其中 $n \leq m+1$ ，试问不存在两个1相邻的符号串的数目。

解： m 个0进行排列，留出 $m+1$ 个空挡，任选 n 个空挡放1，共有 $C(m+1, n)$ 种方案。

1.21 题 一个盒子里有7个无区别的白球，5个无区别的黑球，每次从中随机取走一个球，已知前面取走6个，其中3个是白的，试问取第6个球是白球的概率。

解： $C(6, 2) \cdot C(5, 2) \cdot C(5, 3) / C(5, 3) C(7, 3) C(6, 3) = 3/14$

1.20 题 甲单位有 10 个男同志, 4 个女同志, 乙单位有 15 个男同志, 10 个女同志, 由他们产生一个 7 人的代表团, 要求其中甲单位占 4 人, 而且 7 人中男同志占 5 人, 试问有多少中方案?

解: 1. 甲单位出 4 个男同志, 乙单位出 1 个男同志, 从乙单位出 2 个女同志 $C(10,4)*C(15,1)*C(10,2)=141750$

2. 甲单位出 3 个男同志, 乙单位出 2 个男同志, 从甲单位出 1 个女同志, 从乙单位出 1 个女同志。

$$C(10,3)*C(15,2)*C(4,1)*C(10,1)=504000$$

3. 甲单位出 2 个男同志, 乙单位出 3 个男同志, 从甲单位出 2 个女同志. $C(10,2)*C(15,3)*C(4,2)=122850$

1+2+3 即为所求, 总的方案数为 768600

1.22 题 求图 1-22 中从 O 到 P 的路径数:

(a) 路径必须经过 A 点;

(b) 路径必须过道路 AB;

(c) 路径必须过 A 和 C

(d) 道路 AB 封锁(但 A,B 两点开放)

解: (a) 分两步走 $O(0,0) \rightarrow A(3,2)$ $A(3,2) \rightarrow P(8,5)$, 根据乘法法则:

$$N = \binom{3+2}{2} \times \binom{3+5}{3} = 560$$

									P
								C	
			A		B				

(b) 分两步走 $O(0,0) \rightarrow A(3,2)$, $B(4,2) \rightarrow P(8,5)$, 根据乘法法则: $N = \binom{3+2}{2} \times \binom{4+3}{3} = 350$

(c) 分三步走: $O(0,0) \rightarrow A(3,2)$, $A(3,2) \rightarrow C(6,3)$, $C(6,3) \rightarrow P(8,5)$, 根据乘法法则: $N = \binom{3+2}{2} \times \binom{3+1}{1} \times \binom{2+2}{2} = 240$

(d) AB 封锁路径数加必经 AB 路径数即 $O(0,0) \rightarrow P(8,5)$ 的所有路径数有加法法则可得:

$$N = \binom{5+8}{5} - \binom{3+2}{2} \times \binom{4+3}{3} = 1287 - 350 = 937$$

1.23 题 令 $s=\{1,2,\dots,n+1\}, n \geq 2, T=\{(x,y,z) | x,y,z \in s, x < z, y < z\}$, 试证: $|T| = \sum_{k=1}^n k^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$

证明: 要确定 x,y,z 的取值, 有两种方法,

(1) 可先确定 z , 由题意可得 当 $z=2$ 时, x 可取 1, y 可取 1, 根据乘法法则, x,y 取值共有 $1 \times 1 = 1^2$ 种可能;

当 $z=3$ 时, x 可取 1,2, y 可取 1,2, 根据乘法法则, x,y 取值共有 $2 \times 2 = 2^2$ 种可能;

当 $z=4$ 时, x 可取 1,2,3, y 可取 1,2,3, 根据乘法法则, x,y 取值共有 $3 \times 3 = 3^2$ 种可能;

.....

当 $z=n+1$ 时, x 可取 1,2,...,n, y 可取 1,2,...,n, 根据乘法法则, x,y 取值共有 $n \times n = n^2$ 种可能。

根据加法法则, 当 z 取 2,3,...,n+1 时, x,y 取值共有 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$ 种可能。故 $|T| = \sum_{k=1}^n k^2$ 。

(2) 由 $x < z, y < z$, 可以分为三种情况:

① $x=y < z$, x,y 可看作一个元素, 这种情况等价于从 1,2,...,n+1 中取 2 个进行组合, 然后比较大小, 小者为 $x(y)$, 大者

为 z , 其组合数为 $\binom{n+1}{2}$;

② $x < y < z$, 等价于从 1,2,...,n+1 中取 3 个进行组合, 然后比较大小可得 x,y,z , 其组合数为 $\binom{n+1}{3}$;

③ $y < x < z$, 等价于从 1,2,...,n+1 中取 3 个进行组合, 然后比较大小可得 x,y,z , 其组合数为 $\binom{n+1}{3}$ 。

所以满足题意的 x,y,z 的组合数为 $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$ 。

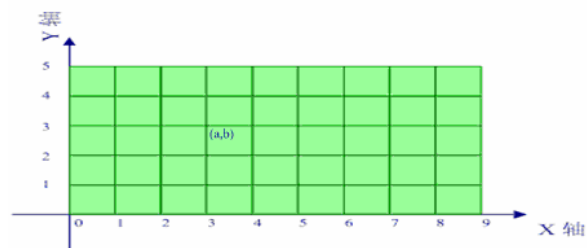
由于这两种方法是等价的，故可得 $|T| = \sum_{k=1}^n k^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$ 。证毕。

1.24 题 $A = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 5\}$ (a) 求 $x-y$ 平面上以 A 作顶点的长方形的数目。

(b) 求 $x-y$ 平面上以 A 作顶点的正方形数目。

解(a): 如图(a), 从图中可以看出, 对于 $x-y$ 平面上满足题意的任一点 $A(a, b)$, 除它本身以外, 横坐标取值有 9 种可能, 纵坐标取值有 5 种可能。顶点 $A(a, b)$ 与和它不在同一水平线或垂直线上的任一点 (x, y) 均可构成一个长方形。故满足要求的长方形的数目为 $9 \times 5 = 45$ 个。

解(b): 如下图(b), 网格左边是 b 的取值, 下面是 a 的取值。网格内是 $x-y$ 平面上对应每个顶点 $A(a, b)$ 所得的正方形的数目。



图(a)

5	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5
4	5	7	8	9	10	10	9	8	7	5
3	5	7	9	10	10	10	10	9	7	5
2	5	7	9	10	10	10	10	9	7	5
1	5	7	8	9	10	10	9	8	7	5
0	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

图(b)

1.26 题 $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$, $a, b \in S$, 使 $ab \equiv 0 \pmod{5}$, 求数偶 $\{a, b\}$ 的数目

解: 根据题意, ab 可以整除 5, $2 * C(200, 1) * 1000 = 400000$

1.25 题 平面上有 15 个点 P_1, P_2, \dots, P_{15} , 其中 $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ 共线, 此外不存在 3 点共线的。

(1) 求至少过 15 个点中两点的直线的数目 (2) 求由 15 个点中 3 点组成的三角形的数目

解: 1) 由题意知: $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ 共线, 此外不存在 3 点共线的, 所以与这五点分别相连的其他的十点的直线数目为: $5 * 10 = 50$ 。另外十个点两两相连得直线数目为: $C_{10}^2 = 45$

又因为 $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ 共线, 所以可算作一条至少 2 点相连的直线

所以至少过 15 个点中两点的直线的数目 $= 50 + 45 + 1 = 96$

2) 有三种情况 a: 没有 $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ 这五个点的三角个数: $C_{10}^3 = 120$

b: 有这五个点的其中一个点: $5 * C_{10}^2 = 225$

c: 有着五个点的两个点: $10 * C_5^2 = 100$

由 15 个点中 3 点组成的三角形的数目 $= 425$

故数目为 $C(15, 2) - C(5, 2) + 1$

(b) $C(5, 0)C(10, 3) + C(5, 1)C(10, 2) + C(5, 2)C(10, 1)$

1.27 题 6 位男宾, 5 位女宾围一圆桌而坐, (1) 女宾不相邻有多少种方案? (2) 所有女宾在一起有多少种方案? (3) 一女宾 A 和两位男宾相邻又有多少种方案?

解: (1) 若 5 位女宾不相邻, 先考虑 6 位男宾围圆桌而做的方案数, 然后女宾插入 $Q(6, 6) * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 = 86400$

(2) 把 5 位女宾看成一个整体, 然后插入 $Q(6, 6) * 6 * P(5, 5) = 86400$

(3) $C(5, 1) * C(6, 2) * Q(8, 8) = 194000$

$C(5, 1) * C(6, 2) * C(5, 2) * P(4, 2) * 7!$

1.28 题 k 和 n 都是正整数, kn 位来宾围着 k 张圆桌而坐, 试求其方案数。

解: 若每个圆桌的人数相等, 则每个桌子有 n 个人。因为圆周排列的个数为 $\frac{p_r^n}{r}$

因此本题的结果为 $\frac{(kn)!}{n \cdot n \cdots n} = \frac{(kn)!}{n^k}$ 。

1.29 题 从 n 个对象中取个 r 做圆排列, 求其方案数目。 $1 \leq r \leq n$

解: $c(n, r) * Q(r, r) = c(n, r) * (r-1)!$

1.31 题 试证任意 r 个相邻数的连乘: $(n+1)(n+2) \cdots (n+r)$ 被 $r!$ 除尽。

证明: 由 $P(n, r) = n(n-1) \cdots (n-r+1)$ 可知: $(n+1)(n+2) \cdots (n+r) = P(n+r, r) = c(n+r, r) * r!$

所以 $[(n+1)(n+2) \cdots (n+r)] / r! = P(n+r, r) / r! = c(n+r, r)$

故任意个相邻数连乘可被 $r!$ 除尽。

1.30 题 (1) $\binom{n}{r} = n/r \binom{n-1}{r-1}$, $1 \leq r \leq n$; (2) $\binom{n}{r} = (n-r+1)/r \binom{n}{r-1}$, $1 \leq r \leq n$; (3) $\binom{n}{r} = n/(n-r) \binom{n-1}{r}$, $0 \leq r \leq n$;

解: (1): $\binom{n}{r} = n!/(r!(n-r)!)$ $n/r \binom{n-1}{r-1} = n/r * ((n-1)!/((r-1)!(n-r)!)) = n!/(r!(n-r)!)$ = 上式 所以两式相等

(2): $\binom{n}{r} = n!/(r!(n-r)!)$ $(n-r+1)/r \binom{n}{r-1} = (n-r+1)/r * (n!/(r!(n-r+1)!)) = n!/(r!(n-r)!)$ = 上式 所以两式相等

(3): $\binom{n}{r} = n!/(r!(n-r)!)$ $n/(n-r) \binom{n-1}{r} = (n-1)!/(r!(n-r-1)!)) = n!/(r!(n-r)!)$ = 上式 所以两式相等

1.32 题 在 a, b, c, d, e, f, x, x, x, y, y 的排列中, 要求 y 必须夹在两个 x 之间, 问这样的排列数等于多少?

解: 满足 y 必须加在两个 x 之间应为 x y x y x 然后再把 a, b, c, d, e, f 插入, a 插入时有 6 种选择, b 插入时有 7 种选择, c 插入时有 8 种选择, d 插入时有 9 种选择, e 插入时有 10 种选择, f 插入时有 11 种选择, 由此可得排列数 $N = 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 = 11!/5!$

1.33 题 已知 r, n, k 都是正整数, $r \geq nk$, 将 r 个无区别的球放在 n 个有标志的盒子里, 每盒至少 k 个球, 试问有多少种方案?

解: 首先从 r 个球中取出 nk 个球放入 n 个盒中, 因为球是无区别的。因此只有一种排列方案。剩下的球, 每个球放的时候都有 n 中可能。因此方案数为 $n^{(r-nk)}$ 。

1.34 题 在 r, s, t, u, v, w, x, y, z 的排列中求 y 居于 x 和 z 中间的排列数

解: $2 * (5+4+3+2+1) * 6! = 2430$

1.35 题 凸十边形的任意三条对角线不共点。试求这凸十边形的对角线相交于多少个点?

解: 根据题意, 1 个顶点有 7 条对角线, 与它相邻的顶点有 7 条对角线, 这样的点 2 个;

与它不相邻的顶点有 6 条对角线 (有 1 条与它重复的), 这样的点 8 个;

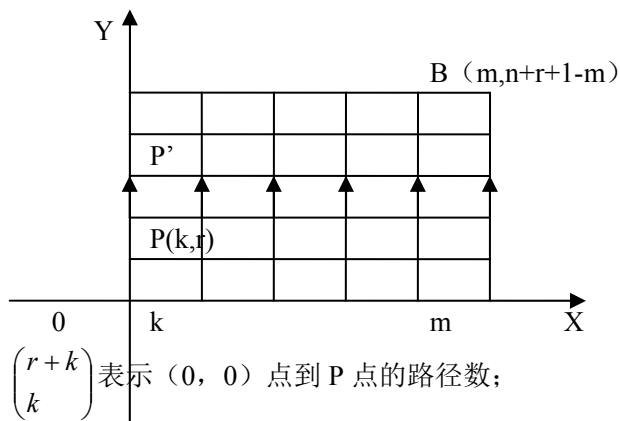
因此 $(2 * C(7, 1) * C(7, 1) + 8 * C(6, 1) * C(7, 1)) * (9+1) = 4340$

1.36 题 试证一整数是另外一整数的平方的必要条件是除尽他的数的数目是整数

证明: 设 $N = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_n^{a_n}$, P_1, P_2, \dots, P_n 是 n 个不同的素数, 每个能整除 n 的正整数都可以选取每个素数 P_i 从 0 到 a_i 次, 即每个素数都有 a_i+1 种选择, 所以能整除 n 的正整数的数目为 $(a_1+1)(a_2+1) \dots (a_n+1)$ 个。而设 $M = N^2 = P_1^{2a_1} P_2^{2a_2} \dots P_n^{2a_n}$, 能被 $(2a_1+1)(2a_2+1) \dots (2a_n+1)$ 个整除。所以一整数是另外一整数的平方的必要条件是除尽他的数的数目是整数。

1.37 题 给出 $\binom{n}{m} \binom{r}{0} + \binom{n-1}{m-1} \binom{r+1}{1} + \binom{n-2}{m-2} \binom{r+2}{2} + \dots + \binom{n-m}{0} \binom{r+m}{m} = \binom{n+r+1}{m}$ 的组合意义。

解:



如上图所示, $\binom{r+k}{k}$ 表示 (0, 0) 点到 P 点的路径数;

P 点到 P' 点只有一步; $\binom{n-m+m-k}{m-k} = \binom{n-k}{m-k}$ 表示 P' 点到 B 点的路径数; $\binom{n+r+1}{m}$ 表示 (0, 0) 点到 B 点的路径数。

所以 0 点到 B 点的路径由 0 点到 P 点再从 P 点到 P' 点, 最后从 P' 点到达 B 点。

$$\sum_{k=0}^m \binom{r+k}{k} * 1 * \binom{n-k}{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{n}{m} \binom{r}{0} + \binom{n-1}{m-1} \binom{r+1}{1} + \binom{n-2}{m-2} \binom{r+2}{2} + \dots + \binom{n-m}{0} \binom{r+m}{m} = \binom{n+r+1}{m}$$

1.41 题 分别写出按照字典序, 有给定排列计算其对应序号的算法及有给定序号计算其对应排列的算法。

解: 利用“字典序法”生成下一排列的算法, 计算该排列的对应序号, 生成已知排列序号算法:

设 $\text{int } M$ 为每一排列的对应序号初始时: $P_1-P_2-\dots-P_{i-1}-P_i-P_{i+1}-\dots-P_n$ (其中 $P_1 < P_2 < \dots < P_{i-1} < P_i < P_{i+1} < \dots < P_n$) $M=1$ (初始化)

I. 满足关系式 $P_{j-1} < P_j$ 的 j 的最大值, 设为 i , 即 $i = \max\{j \mid P_{j-1} < P_j\}$

II. 满足关系式 $P_{i-1} < P_k$ 的 k 的最大值, 设为 j , 即 $j = \max\{j \mid P_{i-1} < P_k\}$

III. 使 P_{i-1} 与 P_j 互换得 $(p) = P_1-P_2-\dots-P_{i-1}-P_i-P_{i+1}-\dots-P_n$

IV. $(p) = P_1-P_2-\dots-P_{i-1}-P_i-P_{i+1}-\dots-P_n$ 中的 $P_i-P_{i+1}-\dots-P_n$ 部分的顺序逆转, 得下一排列。

V. 判断 (p) 排列是否与给定排列相同, 相同则输出 M , ELSE $M=M+1$ GOTO I

(2) 给定序列号计算排列算法:

设 $\text{Int } M$ 为每一排列的对应序号, $M=N$ (N 为给定序号)

设 $\text{Int } K$ 为循环次数

FOR ($K=1$; $K++$; $K \leq N$)

{

满足关系式 $P_{j-1} < P_j$ 的 j 的最大值, 设为 i , 即 $i = \max\{j \mid P_{j-1} < P_j\}$

满足关系式 $P_{i-1} < P_k$ 的 k 的最大值, 设为 j , 即 $j = \max\{j \mid P_{i-1} < P_k\}$

使 P_{i-1} 与 P_j 互换得 $(p) = P_1-P_2-\dots-P_{i-1}-P_i-P_{i+1}-\dots-P_n$

$(p) = P_1-P_2-\dots-P_{i-1}-P_i-P_{i+1}-\dots-P_n$ 中的 $P_i-P_{i+1}-\dots-P_n$ 部分的顺序逆转, 得下一排列

}

输出 (p) 排列。

1.38 题 给出 $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ 的组合意义。

解: 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-r+1}, \dots, a_{n+1}\}$, 从 A 中取 $r+1$ 个元素组合成 C , 考虑以下 $n-r+1$ 种情况:

(1) $a_1 \in C$, 则 A 需要从 $A \setminus \{a_1\}$ 中取 r 个配合, 构成 C , 共 $\binom{n}{r}$ 种可能

(2) $a_1 \notin C$, $a_2 \in C$, 则需要从 $A \setminus \{a_1, a_2\}$ 中取 $r-1$ 个, 加上 a_2 构成 C , 共 $\binom{n-1}{r}$ 中可能

($n-r$) $a_1, a_2, \dots, a_{n-r-1} \notin C$, $a_{n-r} \in C$, 则需从 $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-r}\}$ 中取 r 个组合, 再加上 a_{n-r} 构成 C , 共 $\binom{r+1}{r}$ 种可能。

($n-r+1$) $a_1, a_2, \dots, a_{n-r} \notin C$, 这时只有 $\binom{r}{r} = 1$ 种可能。

$$\text{故 } \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r+1}{r} + \binom{r}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

(法二) $C(n+1, r+1)$ 是指从 $n+1$ 个元素 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} 中任取 $r+1$ 个进行组合的方案数。

左边: 若一定要选 a_{n+1} , 则方案数为 $C(n, r)$. 若不选 a_{n+1} , 一定要选 a_n , 则方案数为 $C(n-1, r)$.

若不选 $a_{n+1}, a_n, \dots, a_{r+2}$, 则方案数为 $C(r, r)$. 所有这些可能性相加就得到了总方案数。

1.39 题 证明 $(m, 0)C(m, n) + C(m, 1)C(m-1, n-1) + \dots + C(m, n)C(m-n, 0) = 2^n C(m, n)$

证明: 由公式 $C(n, l)C(l, r) = C(n, r)C(n-r, l-r)$ 其中: $l \geq r$ 得: $C(m, 0)C(m, n) = C(m, n)C(n, 0)$

同理: $C(m, 1)C(m-1, n-1) = C(m, n)C(n, 1) \dots C(m, n)C(m-n, 0) = C(m, n)C(n, n)$

由上知: 左边 $= [C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)] C(m, n)$

由 $(x+y)^n = C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y + C(n, 2)x^{n-2}y^2 + \dots + C(n, n)y^n$

令 $x=y=1$ 可得 $C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n$ 左边 $= 2^n C(m, n) =$ 右边 命题得证。

1.40 题 从 n 个人中选 r 个围成一圈, 问有多少种不同的方案?

解: 圆排列: 共有 $P(n, r)/r$ 种不同的方案。

1.48 题 在由 n 个 0 及 n 个 1 构成的字符串中, 在任意前 k 个字符中, 0 的个数不少于 1 的个数的字符串有多少?

解: 转化为格路问题(弱领先条件), 即从 $(0, 0)$ 到 (n, n) , 只能从对角线上方走, 可以碰到对角线, 故方案数为

$$C(2n, n) - C(2n, n-1).$$

1.42 题 (a) 按照 1.41 的要求, 写出邻位对换法 (排列的生成算法之二) 的相应算法.

(b) 写出按照邻位对换法由给定排列生成其下一个排列的算法.

解: 1: 给定排列求相应序号:

设 Int I 为每一排列的对应序号 $I=1$ (初始化)

假定 $A[1:n]$ 和 $E[2:n]$; $D[2:n]$; $B[1:n]$ 都是整数数组, 其中 $B[1:n]$ 为给定序列

```

S1:   A[1] ← 1
        i 从 2 到 n 作
        始   A[i] ← i, D[i] ← i, E[i] ← -1   终;
S2:   q ← 0;
        判断 A[1:n] 是否与 B[1:n] 相等
        若相等则输出 I 值
        否则 I ← I + 1;
S3:   k 从 n 降到 2 作
        始   D[k] ← D[k] + E[k];   p ← D[k];
        若 p = k   则作 E[k] ← -1;
        否则作
        始   若 p = 0 则作
            始   E[k] ← 1, q ← q + 1   终
            否则作
            始   p ← p + q; r ← A[p]; A[p] ← A[p + 1];
                A[p + 1] ← r; 转 S2   终
        终
    终

```

2: 给定序号求相应排列:

设 Int I 为每一排列的对应序号 $I=1$ (初始化) M 为给定序列号 $M=N$

假定 $A[1:n]$ 和 $E[2:n]$; $D[2:n]$; 都是整数数组

```

S1:   A[1] ← 1
        i 从 2 到 n 作
        始   A[i] ← i, D[i] ← i, E[i] ← -1   终;
S2:   q ← 0;
        判断 I 是否与 M 相等
        若相等则   i 从 1 到 n 输出 A[i];
        否则 I ← I + 1;
S3:   k 从 n 降到 2 作
        始   D[k] ← D[k] + E[k];   p ← D[k];
        若 p = k   则作 E[k] ← -1;
        否则作
        始   若 p = 0 则作
            始   E[k] ← 1, q ← q + 1   终
            否则作
            始   p ← p + q; r ← A[p]; A[p] ← A[p + 1];
                A[p + 1] ← r; 转 S2   终
        终
    终

```

(a) 由给定排列生成其下一个排列的算法

从排列 $p = p_1 p_2 \dots p_n$ 生成下一个排列

S₁: 若在 $p = p_1 p_2 \dots p_n$ 中无一处于活动状态则停止。

S₂: 求处于活动状态各数中的数值最大者,
 设为 m, m 和它箭头所指一侧相邻数互换位置。

S₃: 比 m 大的数一律改变箭头的指向; 转 S₁。

1.43 题 对于给定的正整数 N , 证明, 当 $K = \begin{cases} \frac{N-1}{2} \text{ 或 } \frac{N+1}{2} & \text{若 } N \text{ 是奇数} \\ \frac{N}{2} & \text{若 } N \text{ 是偶数} \end{cases}$ 时, $C(N, K)$ 是最大值。

证明: 要证明 $C(N, K)$ 是最大值, 只需证明 $C(N, K)$ 大于 $C(N, K-1)$ 即可

根据以往证明大小值的经验, 可以用相减或是相除的方法来证明, 就此题, 相减不合适, 采用相除可以消除等式中的一些项

$$C(N, K) / C(N, K-1) = (N! / K! (N-K)!) * ((K-1)! (N-K+1)! / N!) = (N-K+1) / K$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数, } k=n/2 \text{ 时 } (N-K+1) / K = ((n+2)/n) * (2/n) = (n+2)/n > 1$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数, } k=(n-1)/2 \text{ 时 } (N-K+1) / K = ((n+3)/2) * (2/(n-1)) = 1 + 4/(n-1) > 1$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数, } k=(n+1)/2 \text{ 时 } (N-K+1) / K = ((n+1)/2) * (2/(n+1)) = 1$$

综上所述, 当 n 取以上三种情况, $C(N, K)$ 取最大值

1.46 题 证明在由字母表 $\{0,1,2\}$ 生成的长度为 n 的字符串中. (a) 0 出现偶数次的字符串有 $\frac{3^n+1}{2}$ 个;

(b) $\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{2}2^{n-1} + \dots + \binom{n}{q}2^{n-q} = \frac{3^n+1}{2}$, 其中 $q = 2\left[\frac{n}{2}\right]$.

证: (a) 归纳法: 当 $n=1$ 时, 0 出现偶数次的字符串有 $(3^1+1)/2=2$ 个(即 1,2), 成立。

假设当 $n=k$ 时, 0 出现偶数次的字符串有 $(3^k+1)/2$ 种。总的字符串有 3 种。0 出现奇数次的字符串有 $(3^k-1)/2$ 种。

当 $n=k+1$ 时, 0 出现偶数次的字符串包括两部分:

$n=k$ 时, 0 出现偶数次再增加一位不是 0 的, 共有 $2(3^k+1)/2$ 种, 0 出现奇数次再增加一位 0, 共有 $(3^k-1)/2$ 种。

所以共有 $2(3^k+1)/2 + (3^k-1)/2 = (3^{k+1}+1)/2$ 种, 证毕。

(b) 等式左边第 m 项是 0 出现 m 次的字符串数, 总和就是 0 出现偶数次的字符串数,

右边由(a)得是 0 出现偶数次的字符串数, 两边显然相等。

1.44 题 (a) 用组合方法证明 $\frac{(2n)!}{2^n}$ 和 $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$ 都是整数。 (b) 证明 $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是整数。

解: (a) ①方法一: 因为: $(2n)! = 2^n \cdot n! (2n-1)!!$ 所以 $\frac{(2n)!}{2^n} = \frac{2^n \cdot n! (2n-1)!!}{2^n} = n! (2n-1)!!$

$n! (2n-1)!!$ 是整数, 因此 $\frac{(2n)!}{2^n}$ 是整数。

方法二: 设有 $2n$ 个不同球放入 n 个不同的盒子里, 每盒两个, 这个方案数应该是整数。

对 $2n$ 个球进行排列得到方案数为 $(2n)!$ 。

而把 2 个球放入同一个盒子里不计顺序,

应该把全排列数除掉这些重复计算的次数, n 个盒子内部的排列共重复计算了 2 次。

得到 $2n$ 个不同球放入 n 个不同的盒子里, 每盒两个的方案数 $\frac{(2n)!}{2^n}$

②若有 $3n$ 个不同的球, 放入 n 个不同盒子, 每个盒子放三个, 这个方案应该是整数。

对这 $3n$ 个球进行排列得到方案数为 $(3n)!$ 。

而把 3 个球放入同一个盒子里不计顺序, 应该把全排列数除掉这些重复计算的次数,

n 个盒子内部的排列共重复计算了 $3!$ 次。

得到 $3n$ 个不同的球放入 n 个不同的盒子里, 每盒三个的方案数 $\frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{3^n \cdot 2^n}$

(b) 有 n^2 个不同的球, 放入 n 个相同的盒子里, 每盒 n 个, 求方案数, 方案数应该是一个整数。

按前面(a)的方法, 应该得到 $(n^2)! / (n!)^n$ 是整数。另外由于 n 个盒子相同, 放入不同的盒子是没有区别的,

应该把 n 个盒子的排列数 $n!$ 除去。

因此得到 $(n^2)! / (n!)^{n+1}$ 是整数。

1.49 题 在 1 到 n 的自然数中选取不同且互不相邻的 k 个数, 有多少种选取方案?

解: 设从 1- n 中选取互不相邻的 k 个数的方案为 $g(n, k)$ 。若选 n , 则方案为 $g(n-2, k-1)$, 若不选 n , 则方案数为 $g(n-1, k)$ 。

显然 $g(n, k) = g(n-2, k-1) + g(n-1, k)$, 且只有当 $n \geq 2k-1$ 时, $g(n, k) > 0$, 否则 $g(n, k) = 0$, 可给定初始值 $g(2k-1, k) = 1, g(2k-2, k) = 0$ 。

1.45 题 (a) 在 $2n$ 个球中, 有 n 个相同. 求从这 $2n$ 个球中选取 n 个的方案数.

(b) 在 $3n+1$ 个球中, 有 n 个相同. 求从这 $3n+1$ 个球中选取 n 个的方案数.

解(a): 有 n 个相同就有 n 个不相同

取 n 个不相同和 0 个相同的为 $C(n,n)$, 取 $n-1$ 个不相同的球和 1 个相同的球为 $C(n,n-1)$, 等等.

所以总的方案数为 $C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n$

解(b): 方法同上, 方案数为 $C(2n+1,0) + C(2n+1,1) + \cdots + C(2n+1,n)$

由于 $C(2n+1,0)=C(2n+1,2n+1), \dots, C(2n+1,n)=C(2n+1,n+1)$

$C(2n+1,0) + C(2n+1,1) + \cdots + C(2n+1,2n+1) = 2^{2n+1}$

则 $C(2n+1,0) + C(2n+1,1) + \cdots + C(2n+1,n) = \frac{1}{2} 2^{2n+1} = 2^{2n}$

1.47 题 5 台教学机器 m 个学生使用, 使用第一台和第二台的人数相等, 有多少种分配方案?

解: 当使用第 1 台机器的学生为 n 个时, 使用第 2 台机器的学生也为 n , 从 m 个学生中选出 $2n$ 个使用这两台机器, 剩余的学生可以任意使用剩下的机器的组合数为 $C(m,2n)C(2n,n)3^{(m-2n)}$.

所以总的方案数为 $\sum_{n=0}^q C(m,2n)C(2n,n)3^{(m-2n)}$ $q = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$

1.50 题 (1) 在有 5 个 0, 4 个 1 组成的字符串中, 出现 01 或 10 的总次数为 4 的字符串, 有多少个?

(2) 在有 m 个 0, n 个 1 组成的字符串中, 出现 01 或 10 的总次数为 k 的字符串, 有多少个?

解: **(1)**、先将 5 个 00000 排成一排, 1 若插在两个 0 中间, 即: “010”则出现 2 个“01”或“10”;

若插在两端, 则出现 1 个“01”或“10”; 要使出现“01”, “10”总次数为 4, 有两种办法:

1、把两个 1 插入 0 的空当内, 剩下的 1 插入 1 的后面 (类似 010111000)。

2、把 1 个 1 插入 0 的空当, 再取两个 1 分别插入两端, 剩下的 1 插入 1 的前面。(类似 10100011)。

由 1 和 2 得: $3 * C_4^2 + 3 * C_4^1 = 30$

(2)、 m 个 0 产生 $m-1$ 个空当。

若 k 为偶数时: 要得到出现“01”与“10”总次数为 k , 可以先按上题中 1 的情况讨论, 则在 $m-1$ 个空当中分别插入 $\frac{k}{2}$

个 1 即可, 也就是 $C_{m-1}^{\frac{k}{2}}$ 。剩下的 1 如何插入的问题与书 P20 页的定理 1.2 类似(在 n 个不同元素中取 r 个允许重复的组合,

其组合数为 $(C(n+r-1, r))$, 在这里无区别的球的个数也就是剩下的 1 的个数 (即 $n - \frac{k}{2}$), 盒子的个数也就是插入

到 $m-1$ 个空当中的 1 的个数(即 $\frac{k}{2}$), 则得出剩下的 1 的插入方法有 $C_{n-1}^{\frac{k}{2}}$ 。即第一种情况的总的插入方法为: $C_{m-1}^{\frac{k}{2}} * C_{n-1}^{\frac{k}{2}}$ 。

同理可得, 按 2 的情况讨论后的第二种情况的总的插入方法为: $C_{m-1}^{\frac{k-2}{2}} * C_{n-1}^{\frac{k-2}{2}-2}$ 。

1 和 2 得总的插入方法为: $C_{m-1}^{\frac{k}{2}} * C_{n-1}^{\frac{k}{2}} + C_{m-1}^{\frac{k-2}{2}} * C_{n-1}^{\frac{k-2}{2}-2}$ 。

若 k 为奇数时: 则必有且只有一个 1 插入字符串的头或尾, 剩下的 1 按照 1 的方法插入, 只有这样才能使 k 为奇数。

所以插入的总方法为: $2 * C_{m-1}^{\frac{k-1}{2}} * C_{n-1}^{\frac{k+1}{2}}$ 。

1.51 题 从 $N=\{1,2,\dots,20\}$ 中选出 3 个数, 使得没有两个数相邻, 问有多少种方案?

解: 相当于从 $N=\{1,2,\dots,20\}$ 个数中取 3 个作不相邻的组合, 故方案数为 $C(20-3+1, 3)=C(18,3)$ 种

1.52 题 从 $s=\{1,2,\dots,n\}$ 中连取 k 个数, 使之没有两个数相邻, 求不同方案数。

解: 在 n 个数中选 k 个数, 使之没有两个数相邻, 相当于在 $n-k+1$ 位置中插入 k 个数, k 个数中没有两个数相邻。

有 $C_{n-k+1}^k = \frac{(n-k+1)!}{k!}$ 种方案。有定理 1.4 直接可得。

1.53 题 把 n 个无区别的球放进有标志 1, 2, ..., n 的 n 个盒子中, 每个盒子可放多于一个球, 求有多少种方案?

解: 把 n 个无标志的球放进 n 个有标志的盒子中, 每个盒子允许多于一个球是允许重复的组合所以是

$$\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$$

1.54 题 m 个 1, n 个 0 进行排列, 求 1 不相邻的排列数. 设 $n > m$.

解: 相当于 n 个 0 排列后, 使 m 个 1 做不相邻的插入, 共产生 $n+1$ 个位置. 第一个 1 插入有 $n+1$ 种情况, 第二个是 n 种情况... 第 m 个 1 插入就有 $n-m+1$ 种情况。

所以是 $(n+1)(n)(n-1)\dots(n-m+1)$, 即此题解为 p_m^{n+1} 。

1.55 题 偶数位的对称数, 即从左向右读法与从右向左的读法相同, 如 3223。试证这样的数可被 11 整除。

证明: 根据所有偶数位置上的数字及所有奇数位置上的数字分别相加, 再求出两个和的差,

如果所得的差能被 11 整除, 那么这个整数必能被 11 整除。

例如 12344321, 偶数位上是: 2, 4, 3, 1。奇数位上是: 1, 3, 4, 2

因为对称数是偶数个, 所以偶数为相加与奇数为相加的和是相等的, 他们的差是零, 而零能被任何数整除, 所以原题成立。证毕。

1.56 题 n 个男人与 n 个女人沿一圆桌坐下, 问两个女人之间坐 1 个男人的方案数。又 m 个女人 n 个男人, 且 $m < n$, 沿一圆桌坐下, 求无两个女人并坐的方案数。

解: 根据题意, 两个女人之间坐 1 个男人的方案数 $Q(n, n) * P(n, n)$

无两个女人并坐的方案数 $Q(n, n) * P(n, m)$

1.57 题 n 个人分别沿着两张圆坐下, 一张 r 人, 另一张个 $n-r$ 人, 试问有多少种不同的方案数?

解: $C(n, r) * (r-1)!(n-r-1)!$

1.58 题 一圆周上 n 个点标以 $1, 2, \dots, n$ 。每一点与其它 $n-1$ 个点连以直线, 试问这些直线交于圆内有多少点?

解: 这些直线交于圆内有 $C(n, 4)$ 个点

每 4 个点形成矩形, 其对角线有一个交点, 故圆内交点有:

$$C(n, 4) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

因为四个点连在一起构成一个四边形, 这个四边形的对角线相交于一个点,

求这些直线交于圆内多少点就是求这些点能构成几个四边形, 即转化为从 n 个点取出四个进行组合

2.1 题 求序列 $\{0, 1, 8, 27, \dots, n^3, \dots\}$ 的母函数。

解: 由序列可得到 $G(x) = x + 2^3 x^2 + 3^3 x^3 + \dots + n^3 x^n + \dots$

因为 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

设 $p(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + (n-1)x^{n-1} + nx^n \dots$

$$[p(x)]' = 1 + x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \dots + (n-1)^2 x^{n-2} + n^2 x^{n-1} \dots$$

设 $q(x) = x[p(x)]' = x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \dots + (n-1)^2 x^{n-1} + n^2 x^n \dots$

$$[q(x)]' = 1 + 2^3 x + 3^3 x^2 + \dots + (n-1)^3 x^{n-2} + n^3 x^{n-1} \dots$$

$$x[q(x)]' = x + 2^3 x^2 + 3^3 x^3 \dots + (n-1)^3 x^{n-1} + n^3 x^n \dots$$

由以上推理可知 $x[q(x)]' = \dots, [7^3 9^n + 4^3 (-6)^n], \dots$

所以可通过求得 $x[q(x)]'$ 得到序列的母函数: $G(x) = 4x^3 + x^2 + x$

$$H(x) = \int F(x) dx = \frac{1}{6} [3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+3)x^{n+2}]$$

2.2 题 已知序列 $\left\{ \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \dots, \binom{n+3}{3}, \dots \right\}$, 求母函数

$$\begin{aligned} \text{解: } G(x) &= \frac{3*2*1}{3*2*1} + \frac{4*3*2}{3*2*1} + \dots + \frac{(n+3)*(n+2)*(n+1)}{3*2*1} x^n \\ &= \frac{1}{6} [3.2.1 + 4.3.2x + \dots + (n+3)(n+2)(n+1)x^n] \end{aligned}$$

$$F(x) = \int G(x) dx = \frac{1}{6} [3.2x + 4.3x^2 + \dots + (n+3)(n+2)x^{n+1}]$$

$$H(x) = \int F(x) dx = \frac{1}{6} [3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+3)x^{n+2}]$$

$$I(x) = \int H(x) dx = \frac{1}{6} [x^3 + x^4 + \dots + x^{n+3}]$$

因为 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+3} + \dots$ 所以 $I(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \right)$ 所以 $G(x) = \left[\frac{1}{6} \frac{x^3}{1-x} \right]'$ 就是所求序列母函数

2.3 题 已知母函数 $G(x) = \frac{3+78x}{1-3x-54x^2}$, 求序列 $\{a_n\}$ 。

$$\text{解: } G(x) = \frac{3+78x}{1-3x-54x^2} = \frac{A}{1-9x} + \frac{B}{1+6x} = \frac{7}{1-9x} - \frac{4}{1+6x}$$

$$\text{由 } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+3} + \dots \text{ 得 } \frac{7}{1-9x} = 7(1+9x+(9x)^2+\dots+(9x)^n+\dots)$$

$$\frac{4}{1+6x} = 4(1+(-6)x+(-6x)^2+\dots+(-6x)^n+\dots)$$

所以由两式相加得: 对应序列 $\{a_n\} = \{11, 39, \dots, [7*9^n + 4*(-6)^n], \dots\}$

2.4 题 已知母函数 $G(x) = \frac{3-9x}{1-x-56x^2}$, 求序列 $\{a_n\}$ 。

$$\text{解: } G(x) = \frac{3-9x}{1-x-56x^2} = \frac{A}{1-8x} + \frac{B}{1+7x} = \frac{1}{1-8x} + \frac{2}{1+7x}$$

$$\text{则 } a_n = 8^n + 2*(-1)^n * 7$$

2.5 题 设 $G_n = F_{2n}$, 其中 F_n 是 Fibonacci 数。证明: $G_n - 3G_{n-1} + G_{n-2} = 0$, $n=2,3,4,\dots$ 求 $\{G_0, G_1, G_2, \dots\}$ 的母函数。

$$\text{解: (1). 已知 } G_n = F_{2n} \quad \text{则 } G_n - 3G_{n-1} + G_{n-2} = F_{2n} - 3F_{2n-2} + F_{2n-4}$$

$$F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2} \quad F_{2n-1} = F_{2n-2} + F_{2n-3} \quad F_{2n-2} = F_{2n-3} + F_{2n-4}$$

$$\text{则 } F_{2n} = 3F_{2n-2} - F_{2n-4} \quad \text{则 } G_n - 3G_{n-1} + G_{n-2} = 0$$

$$(2). \quad G(x) = G_0 + G_1x + \sum_{n=2}^{\infty} (G_{n-1} + G_{n-2})x^n = G_0 + G_1x + x \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-2}x^{n-2}$$

$$= G_0 + G_1x + x \sum_{n=0}^{\infty} (G_n x^n - G_0) + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-2} x^{n-2} = G_0 + G_1x + xG(x) - xG_0 + x^2G(x)$$

$$= 1 + xG(x) + x^2G(x) - x \quad G(x) = \frac{1-x}{1-x-x^2}$$

2.6 题 求序列{1, 0, 2, 0, 3, 0, ...}的母函数。

$$\text{解: 序列 } a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

2.7 题 设 $G = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \dots + (n+1)x^{2n} + \dots = 1/(1-x^2)^2$ 求 $(1-x^2)G, (1-x^2)^2 G$

$$\text{解: 设 } T = \int G = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \dots + (n+1)x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$G = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{所以 } 1) (1-x^2)G = \frac{(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots \quad 2) (1-x^2)^2 G = (1-x^2)^2 \frac{1}{(1-x^2)^2} = 1$$

2.8 题 求下列序列的母函数: (1)1,0,1,0,1,0, ... (2)0,-1,0,-1,0,-1,... (3)1,-1,1,-1,1,-1,...

$$\text{解: (1) } G = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(2) G = -x - x^3 - x^5 - \dots - x^{2n+1} - \dots = -x(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots) = -x \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$(3) 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = (1 + x^2 + x^4 + \dots) - x(1 + x^2 + x^4 + \dots) = \frac{1}{1-x^2} - x \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-x^2}{1-x^2}$$

2.9 题 设 $G = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + \binom{n+2}{2} x^n + \dots$ 证明: (1) $(1-x)G = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$

$$(2) (1-x^2)G = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (3) \text{ 因为 } (1-x)^3 G = 1, \text{ 所以有 } G = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\text{证明 (1) } \because G = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + \binom{n+2}{2} x^n + \dots = \frac{1}{(1-x)^3} \therefore (1-x)G = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

$$(2) \text{ 展开 } (1-x^2)G = (1+x)/(1-2x+x^2) \quad \text{当 } |x| < 1 \text{ 时有 } \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$(3) (1-x)^3 G = (1+3x^2-3x-x^3)(1+3x+6x^2+\dots)$$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 3x^2 + 9x^3 + 18x^4 + 30x^5 - 3x - 9x^2 - 18x^3 - 30x^4 - \dots - x^3 - 3x^4 - 6x^5 - 10x^6 = 1$$

$$\therefore G = \frac{1}{(1-x)^3}$$

2.10 题 $H = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots + \binom{n+3}{3} x^n + \dots$ 证明(1) $(1-x)H = G = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$ (2) 求 H 的表达式。

$$\text{证明(1) 设 H 的第 } k+1 \text{ 项为 } h_k, \text{ 则 } h_k = \binom{n+3}{3} = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 6}{6},$$

$$\text{设 G 的前 } k+1 \text{ 项的和为 } G_k, \text{ 则 } G_k = \sum_{k=0}^k g_k = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{k+2}{2}$$

$$\begin{aligned} & \text{而} \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{k+2}{2} = 1 + \frac{3*2}{2} + \frac{4*3}{2} + \dots + \frac{(k+2)*(k+1)}{2} = 1 + \frac{1}{2} [3*2 + 4*3 + \dots + (k+2)(k+1)] \\ & = 1 + \frac{1}{2} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + 3 + 6 + \dots + 3k + 2 + 2 + \dots + 2) \quad \text{①} \{ \text{注释: 均为 } k \text{ 项, 分别为平方数列, 等差数列, 常数列} \} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + \frac{3k(1+k)}{2} + 2k \right] = 1 + \frac{(2k^2 + k)(k+1)}{12} + \frac{3k(k+1)}{4} + k$$

$$= \frac{(2k^2 + k)(k+1) + 9k(k+1) + 12k + 12}{12} = \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 6}{6} = h_k \quad \therefore H = \frac{G}{1-x}$$

$$(2) \text{ 由 } H = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots + \binom{n+3}{3} x^n + \dots = 1 + \frac{4*3*2}{3*2*1} x + \frac{5*4*3}{3*2*1} x^2 + \dots + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3*2*1} x^n + \dots$$

对其 3 次积分得 $\iiint H = \frac{x^3}{6(1-x)}$, 对此积分式 3 次求导得 $H = \left(\left(\left(\frac{x^3}{6(1-x)} \right) \right) \right)''''$. 求解完毕。

2.11 题 $a_n = (n+1)^2$, $G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 4x + \dots + (n+1)^2 x^n + \dots$, 证明 $(1-3x+3x^2-x^2)G$ 是一个多项式, 并求母函数 G 。

$$\text{解: } G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 1) x^n \Rightarrow G = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{①}$$

$$\Rightarrow G = xG + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \Rightarrow G(1-x) = \frac{x+1}{(1-x)^2} \Rightarrow G = \frac{x+1}{(1-x)^3} \quad \text{即为所求}$$

$$\therefore (1-3x+3x^2-x^2)G = (1-x)^3 G = (1-x)^3 \frac{x+1}{(1-x)^3} = x+1 \quad \text{求解完毕。}$$

$$\text{①说明: 可以由 } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$$

2.12 题 已知 $a_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$, $\frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$, 求序列 $\{a_n\}$ 的母函数。

解: 设序列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $G(x)$, 则 $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$

$$\therefore a_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$\therefore G(x) = 1 + (1+2^2)x + (1+2^2+3^2)x^2 + \dots + (1+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2)x^n + \dots$$

$$= 1 + x + x^2 + \dots x^n + \dots + 2^2 x(1+x+x^2+\dots x^n+\dots) + 3^2 x^2(1+x+x^2+\dots x^n+\dots) + \dots$$

$$+ (n+1)^2 x^n (1+x+x^2+\dots x^n+\dots) + \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots x^n+\dots)(1+2^2 x+3^2 x^2+\dots+n^2 x^{n-1}+(n+1)^2 x^n+\dots) = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$$

$$\therefore \frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n \quad \therefore G = \frac{1}{1-x} \frac{x+1}{(1-x)^3} \Rightarrow G = \frac{x+1}{(1-x)^4} \quad \text{即为序列 } \{a_n\} \text{ 的母函数。求解完毕。}$$

2.13 题 已知 $a_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^3, \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 x^n$, 求序列 $\{a_n\}$ 的母函数。

解: $B(x) = 1^3 + 2^3 x + 3^3 x^2 + \dots$

$$1: a_0 = 1^3 \quad b_0 = 1^3$$

$$x: a_1 = 1^3 + 2^3 \quad b_1 = 2^3$$

$$x^2: a_2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \quad b_2 = 3^3$$

.....

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_0 + b_1$$

$$a_2 = b_0 + b_1 + b_2$$

.....

$$A(x) = b_0(1+x+x^2+\dots) + b_1x(1+x+x^2+\dots) + b_2x^2(1+x+x^2+\dots) + \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = \frac{B(x)}{1-x} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^5}$$

2.14 题 已知 $\{P_n\}$ 的母函数为 $\frac{x}{1-2x-x^2}$, (a) 求 P_0 和 P_1 ; (b) 求序列 $\{P_n\}$ 的递推关系

$$\text{解: 特征多项式 } K(x) = x^2 - 2x - 1 \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{解得: } r_1 = 1 + \sqrt{2} \quad r_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$P(x) = \frac{A}{1 - (1 + \sqrt{2})x} + \frac{B}{1 - (1 - \sqrt{2})x}$$

$$A + B = 0$$

$$-A(1 - \sqrt{2}) - B(1 + \sqrt{2}) = 1 \quad \text{得: } A = \frac{\sqrt{2}}{4}, B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$P(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{1 - (1 + \sqrt{2})x} - \frac{1}{1 - (1 - \sqrt{2})x} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} [(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k] x^k$$

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{4} [(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n] \quad P_0 = 0, P_1 = 1$$

2.15 题 已知 $\{a_n\}$ 的母函数为 $\frac{1}{1-x+x^2}$, 求序列 $\{a_n\}$ 的递推关系 a_0, a_1 。

解: 特征多项式 $K(x) = x^2 - x + 1$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{解得: } r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$A(x) = \frac{A}{1 - r_1 x} + \frac{B}{1 - r_2 x}$$

$$A_1 + A_2 = 1, A_1 r_2 + A_2 r_1 = 0 \quad \text{解得: } A_1 = 1, A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_n = A_1 \cos \frac{n}{3} \pi + A_2 \sin \frac{n}{3} \pi = \cos \frac{n}{3} \pi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3} \pi \quad a_0 = 1, a_1 = 1$$

2.16 题 证明序列 $\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \dots, \binom{m+n}{m}$ 的母函数为 $(1-x)^{-m-1}$

证明：当 $m=0$ 时，命题成立。

假设对于 $m-1$ ，命题成立，即 $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m-1+k}{m-1} X^k = (1-x)^{-m}$ ，

$$\text{则 } G_m(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{m} X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m-1+k}{m} X^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m-1+k}{m-1} X^k = X \times G_m(X) + (1-x)^{-m}$$

$$\therefore (1-X) \times G_m(X) = (1-x)^{-m},$$

$$G_m(X) = \frac{1}{1-X} \frac{1}{(1-X)^m} = (1-x)^{-m-1}$$

2.17 题 已知 $G = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$ 证明 (a) $G^2 = (1-x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n$

$$(b) G^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 其中 } a_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(n+1-k) \quad (c) a_n = \binom{n+3}{3}, n = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$(a) \quad G^2 = (1-x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n$$

证明：由已知 $G = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots = (1-x)^{-2}$

所以有 $G^2 = (1-x)^{-4}$

又根据牛顿二项式展开定理 $(1 \pm x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (\pm x)^k$

$$\text{令 } n=4 \quad \text{则有 } (1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4-1}{3} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

$$G^2 = (1-x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n \quad \text{得证}$$

$$(b) \quad G^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 其中 } a_n = \sum_{k=0}^n (k+1)(n+1-k)$$

证明：已知 $G = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots = (1-x)^{-2}$

由性质：若 $b_k = \sum_{i=0}^k a_i$ 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$

$$A = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$G = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{A(x)}{1-x} \quad \text{即 } g_i = \sum_{n=0}^i a_n = \sum_{n=0}^i 1$$

$$C = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{G(x)}{1-x} \quad \text{即 } c_i = \sum_{n=0}^i g_n = \sum_{n=0}^i \sum_{h=0}^n a_h = \sum_{n=0}^i (n+1)$$

$$D = G^2 = \frac{1}{(1-x)^4} = \frac{C(x)}{1-x} \quad \text{即 } d_i = \sum_{n=0}^i c_n = \sum_{n=0}^i \sum_{h=0}^n (h+1)$$

可将 d_i 表示成如下形式:

$$\begin{array}{ll} c_0: & a_0 & (a_0=1) \\ c_1: & a_0+a_1 & (a_1=2) \\ c_2: & a_0+a_1+a_2 & (a_2=3) \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ c_n: & a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n & (a_n=n+1) \end{array}$$

$$d_n = \sum_{i=0}^n c_i = (i+1)(n+1-i)$$

其中 $(i+1)$ 表示每列上的数值, $(n+1-i)$ 表示 $(k+1)$ 这个数的个数。所以 $a_n = \sum_{k=0}^n (k+1)(n+1-k)$ 成立

(c) 证 $a_n = \binom{n+3}{3} \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

证明: 题目即证 $\sum_{k=0}^n (k+1)(n+1-k) = \binom{n+3}{3} \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

(1) 当 $n=0$ 时 $\sum_{k=0}^n (k+1)(n+1-k) = 1 \quad \binom{n+3}{3} = 1$ 等式成立

(2) 假设, 当 $n=m-1$ 时等式成立, 即

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1)(n+1-k) &= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)(m-k) = 1 \times m + 2 \times (m-1) + 3 \times (m-2) \cdots m \times 1 \\ &= \frac{(m+2)(m+1)m}{3!} = \binom{m-1+3}{3} = \binom{m+2}{3} \end{aligned}$$

(3) 当 $n=m$ 时有 $\sum_{k=0}^n (k+1)(n+1-k) = \sum_{k=0}^m (k+1)(m+1-k)$

$$\begin{aligned} &= 1 \times (m+1) + 2 \times m + 3 \times (m-1) + \cdots + (m+1) \times 1 \\ &= 1 \times m + 1 \times 1 + 2 \times (m-1) + 2 \times 1 + \cdots + m \times 1 + (m+1) \times 1 \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)(m-k) + 1 + 2 + \cdots + (m+1) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)(m-k) + \frac{(m+2)(m+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\binom{m+3}{3} = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{3!} = \binom{m+2}{3} + \frac{3(m+2)(m+1)}{3!} = \binom{m+2}{3} + \frac{(m+2)(m+1)}{2}$$

当 $n=m-1$ 时等式成立即 $\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)(m-k) = \binom{m+2}{3}$

所以 $\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)(m-k) + \frac{(m+2)(m+1)}{2} = \binom{m+2}{3} + \frac{(m+2)(m+1)}{2}$

即 $\sum_{k=0}^m (k+1)(m+1-k) = \binom{m+3}{3}$ 等式成立

综合 (1), (2), (3) $a_n = \binom{n+3}{3}$ 得证

2.18 题 用母函数法求下列递推函数关系的解.

$$(a) \quad a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 0 \quad (b) \quad a_n + 14a_{n-1} + 49a_{n-2} = 0$$

$$(c) \quad a_n - 9a_{n-2} = 0 \quad (d) \quad a_n - 6a_{n-1} - 7a_{n-2} = 0$$

$$(e) \quad a_n - 12a_{n-1} + 36a_{n-2} = 0 \quad (f) \quad a_n - 25a_{n-2} = 0$$

解(a): $x^2: a_2 - 6a_1 + 8a_0 = 0$

$$x^3: a_3 - 6a_2 + 8a_1 = 0$$

$$x^4: a_4 - 6a_3 + 8a_2 = 0$$

+) $\dots \dots \dots$

$$0 = (A(x) - a_0 - a_1x) - 6x(A(x) - a_0) + 8x^2A(x)$$

$$(1 - 6x + 8x^2)A(x) = a_0 + a_1x - 6a_0x = a_0 + (a_1 - 6a_0)x$$

$$\text{所以 } A(x) = \frac{a_n + (a_1 - 6a_0)x}{1 - 6x + 8x^2} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{1 - 4x} = \frac{A(1 - 4x) + B(1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 4x)} = \frac{(A + B) - (4A + 2B)}{(1 - 2x)(1 - 4x)}$$

$$\text{所以有 } \begin{cases} A + B = a_0 \\ -(4A + 2B) = a_1 - 6a_0 \end{cases} \quad \text{解之得: } A = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ 6a_0 - a_1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2a_0 - (6a_0 - a_1)}{2 - 4} = \frac{a_1 - 4a_0}{-2} = \frac{1}{2}(4a_0 - a_1)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 4 & 6a_0 - a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(6a_0 - a_1) - 4a_0}{2 - 4} = \frac{2a_0 - a_1}{-2} = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)$$

$$\text{因此 } \begin{cases} A = \frac{1}{2}(4a_0 - a_1) \\ B = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0) \end{cases}$$

$$\text{故此 } A(x) = \frac{1}{2}(4a_0 - a_1) \cdot \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0) \cdot \frac{1}{1 - 4x} = \frac{1}{2}(4a_0 - a_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(4a_0 - a_1) \cdot 2^n + \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0) \cdot 4^n \right] \quad (n \geq 2)$$

解(b): $x^2: a_2 + 14a_1 + 49a_0 = 0$

$$x^3: a_3 + 14a_2 + 49a_1 = 0$$

$$x^4: a_4 + 14a_3 + 49a_2 = 0$$

+) $\dots \dots \dots$

$$(A(x) - a_0 - a_1x) + 14x(A(x) - a_0) + 49x^2A(x) = 0$$

$$(1 + (4x + 49x^2))A(x) = a_0 + a_1x + 14a_0x = a_0 + (a_1 + 14a_0)x$$

$$\text{所以 } A(x) = \frac{a_0 + (a_1 + 14a_0)x}{1 + 14x + 49x^2} = \frac{A}{(1 + 7x)} + \frac{B}{(1 + 7x)^2} = \frac{A(1 + 7x) + B}{(1 + 7x)^2} = \frac{(A + B) + 7Ax}{(1 + 7x)^2}$$

$$\text{所以有 } \begin{cases} A + B = a_0 \\ 7A = a_1 + 14a_0 \end{cases}$$

$$\text{故此 } A = \frac{1}{7}(a_1 + 14a_0) \quad B = a_0 - A = a_0 - \frac{1}{7}(a_1 + 14a_0) = -\frac{1}{7}(a_1 + 7a_0)$$

$$\text{故此 } A(x) = \frac{1}{7}(a_1 + 14a_0) \frac{1}{1 + 7x} - \frac{1}{7}(a_1 + 7a_0) \frac{1}{(1 + 7x)^2}$$

$$= \frac{1}{7}(a_1 + 14a_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-7)^n x^n - \frac{1}{7}(a_1 + 7a_0) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} (-7)^n x^{n+1} \quad (\text{参见题2.16})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{7}(a_1 + 14a_0) - \frac{1}{7}(a_1 + 7a_0)(n+1) \right] (-1)^n 7^n x^n$$

$$\text{所以 } a_n = [a_0 - (a_0 + \frac{1}{7}a_1)n](-1)^n 7^n$$

$$\text{解(c): } x^2 : a_2 - 9a_0 = 0$$

$$x^3 : a_3 - 9a_1 = 0$$

$$x^4 : a_4 - 9a_2 = 0$$

$$+) \quad \therefore \quad \dots \quad \dots$$

$$(A(x) - a_0 - a_1x) - 9x^2A(x) = 0$$

$$\text{所以有 } (1 - 9x)A(x) = 0$$

$$\text{于是 } A(x) = \frac{a_0 + a_1x}{1 - 9x^2} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{1 + 3x} = \frac{A(1 + 3x) + B(1 - 3x)}{(1 - 3x)(1 + 3x)} = \frac{(A + B) + (3A - 3B)x}{(1 - 3x)(1 + 3x)}$$

$$\text{故此有 } \begin{cases} A + B = a_0 & \textcircled{1} \\ 3A - 3B = a_1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} + 3x\textcircled{1} \quad \text{有 } 6A = 3a_0 + a_1$$

$$\text{于是有 } A = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 \quad \textcircled{3}$$

$$\text{将}\textcircled{3}\text{代入}\textcircled{1}\text{有 } B = a_0 - A = a_0 - \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1 \quad \textcircled{4}$$

$$\text{即 } \begin{cases} A = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 \\ B = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故此 } A(x) &= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1\right) \frac{1}{1 - 3x} + \left(\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1\right) \frac{1}{1 + 3x} = \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1\right) \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \left(\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1\right) + \left(\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1\right)(-1)^n \right] \cdot 3^n x^n \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_n = \left[\left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1\right) + (-1)^n \left(\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1\right) \right] \cdot 3^n \quad (n \geq 2)$$

$$\text{解(d): } x^2 : a_2 - 6a_1 - 7a_0 = 0$$

$$x^3 : a_3 - 6a_2 - 7a_1 = 0$$

$$x^4 : a_4 - 6a_3 - 7a_2 = 0$$

$$+) \quad \therefore \quad \dots \quad \dots$$

$$(A(x) - a_0 - a_1x) - 6x(A(x) - a_0) - 7x^2A(x) = 0$$

$$\text{所以 } (1 - 6x - 7x^2)A(x) = a_0 + a_1x - 6a_0x$$

$$\text{因而 } A(x) = \frac{a_0 + (a_1 - 6a_0)x}{1 - 6x - 7x^2} = \frac{A}{(1 - 7x)} + \frac{B}{1 + x} = \frac{A(1 + x) + B(1 - 7x)}{(1 - 7x)(1 + x)} = \frac{(A + B) + (A - 7B)x}{(1 - 7x)(1 + x)}$$

$$\text{故此有 } \begin{cases} A + B = a_0 & \textcircled{1} \\ A - 7B = a_1 - 6a_0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} + 7 \times \textcircled{1} \text{ 得 } 8A = a_1 + a_0$$

$$\text{于是有 } A = \frac{1}{8}(a_0 + a_1) \quad \textcircled{3}$$

$$\text{将}\textcircled{3}\text{代入}\textcircled{1}\text{有 } B = a_0 - A = a_0 - \frac{1}{8}(a_0 + a_1) = \frac{1}{8}(7a_0 - a_1) \quad \textcircled{4}$$

$$\text{从而 } \begin{cases} A = \frac{1}{8}(a_0 + a_1) \\ B = \frac{1}{8}(7a_0 - a_1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故此 } A(x) &= \frac{1}{8}(a_0 + a_1) \frac{1}{1 - 7x} + \frac{1}{8}(7a_0 - a_1) \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{8}(a_0 + a_1) \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n + \frac{1}{8}(7a_0 - a_1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{8}(a_0 + a_1) \cdot 7^n + \frac{1}{8}(7a_0 - a_1)(-1)^n \right] x^n \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{8}(a_0 + a_1) \cdot 7^n + \frac{1}{8}(7a_0 - a_1)(-1)^n \quad (n \geq 2)$$

$$\text{解}(e): x^2: a_2 - 12a_1 + 36a_0 = 0$$

$$x^3: a_3 - 12a_2 + 36a_1 = 0$$

$$x^4: a_4 - 12a_3 + 36a_2 = 0$$

$$+) \quad \therefore \quad \dots$$

$$(A(x) - a_0 - a_1x) - 12x(A(x) - a_0) + 36x^2A(x) = 0$$

$$\text{于是 } (1 - 12x + 36x^2)A(x) = a_0 + a_1 - 12a_0x$$

$$\text{从而 } A(x) = \frac{a_0 + (a_1 - 12a_0)x}{(1 - 12x + 36x^2)} = \frac{A}{(1 - 6x)} + \frac{B}{(1 - 6x)^2} = \frac{A(1 - 6x) + B}{(1 - 6x)^2} = \frac{(A + B) - 6Ax}{(1 - 6x)^2}$$

$$\text{故有 } \begin{cases} A + B = a_0 & \textcircled{1} \\ -6A = a_1 - 12a_0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{由}\textcircled{2}\text{有 } A = 2a_0 - \frac{1}{6}a_1 \quad \textcircled{3}$$

$$\text{代入}\textcircled{3}\text{就有 } B = a_0 - A = a_0 - (2a_0 - \frac{1}{6}a_1) = -a_0 + \frac{1}{6}a_1 \quad \textcircled{4}$$

$$\text{即 } \begin{cases} A = 2a_0 - \frac{1}{6}a_1 \\ B = -a_0 + \frac{1}{6}a_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } A(x) &= (2a_0 - \frac{1}{6}a_1) \cdot \frac{1}{1 - 6x} + (-a_0 + \frac{1}{6}a_1) \cdot \frac{1}{(1 - 6x)^2} = (2a_0 - \frac{1}{6}a_1) \sum_{n=0}^{\infty} 6^n x^n + (-a_0 + \frac{1}{6}a_1) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} 6^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(2a_0 - \frac{1}{6}a_1) + (-a_0 + \frac{1}{6}a_1)(n+1)] \cdot 6^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [a_0 + (-a_0 + \frac{1}{6}a_1)n] 6^n x^n \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_n = [a_0 + (-a_0 + \frac{1}{6}a_1)n] \cdot 6^n \quad (n \geq 2)$$

$$\text{解}(f): x^2: a_2 - 25a_0 = 0$$

$$x^3: a_3 - 25a_1 = 0$$

$$x^4: a_4 - 25a_2 = 0$$

$$+) \quad \therefore \quad \dots$$

$$(A(x) - a_0 - a_1x) - 25x^2A(x) = 0$$

$$\text{故此 } (1 - 25x^2)A(x) = a_0 + a_1x$$

$$\text{从而 } A(x) = \frac{a_0 + a_1x}{1 - 25x^2} = \frac{A}{1 - 5x} + \frac{B}{1 + 5x} = \frac{A(1 + 5x) + B(1 - 5x)}{1 - 25x^2} = \frac{(A + B) + (5A - 5B)x}{1 - 25x^2}$$

$$\text{故此 } \begin{cases} A + B = a_0 \\ 5A - 5B = a_1 \end{cases} \text{ 于是有 } \begin{cases} A = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{10}a_1 \\ B = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{10}a_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } A(x) &= (\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{10}a_1) \frac{1}{1 - 5x} + (\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{10}a_1) \frac{1}{1 + 5x} = (\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{10}a_1) \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n + (\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{10}a_1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 5^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{10}a_1)5^n + (\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{10}a_1)(-1)^n 5^n x^n] x^n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

2.19 题 用特征值法求习题 2.18 的解。

(a) 特征方程为 $\gamma^2 - 6\gamma + 8 = 0$ 特征值为 $\begin{cases} \gamma_1 = 2 \\ \gamma_2 = 4 \end{cases}$ 通解为: $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n$

从而有 $\begin{cases} a_0 = A + B \\ a_1 = 2A + 4B \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A = \frac{1}{2}(4a_0 - a_1) \\ B = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0) \end{cases}$

于是 $a_n = \frac{1}{2}(4a_0 - a_1) \cdot 2^n + \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0) \cdot 4^n \quad (n \geq 2)$

(b) 特征方程为: $\gamma^2 + 14\gamma + 49 = 0$ 特征根为: $\gamma_1 = \gamma_2 = -7$ 通解为 $a_n = (A + Bn)(-1)^n 7^n$

从而有 $\begin{cases} a_0 = A \\ a_1 = -7(A + B) \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A = a_0 \\ B = -(a_0 + \frac{1}{7}a_1) \end{cases}$

故 $a_n = [a_0 - (a_0 + \frac{1}{7}a_1)n](-1)^n 7^n \quad (n \geq 2)$

(c) 特征方程为: $\gamma^2 - 9 = 0$ 特征根为: $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = -3$ 通解为 $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n 3^n$

从而有 $\begin{cases} a_0 = A + B \\ a_1 = 3A - 3B \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 \\ B = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1 \end{cases}$

故 $a_n = [(\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1) + (-1)^n(\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6}a_1)] \cdot 3^n = [\frac{1}{2}a_0(1 + (-1)^n) + \frac{1}{6}a_1(1 - (-1)^n)] \cdot 3^n \quad (n \geq 2)$

(d) 特征方程为: $\gamma^2 - 6\gamma - 7 = 0$ 特征根为: $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 7$ 通解为 $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 7^n$

从而有 $\begin{cases} a_0 = A + B \\ a_1 = -A + 7B \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A = \frac{1}{8}(7a_0 - a_1) \\ B = \frac{1}{8}(a_0 + a_1) \end{cases}$ 故 $a_n = \frac{1}{8}(7a_0 - a_1)(-1)^n + \frac{1}{8}(a_0 + a_1) \cdot 7^n \quad (n \geq 2)$

(e) 特征方程为: $\gamma^2 - 12\gamma - 36 = 0$ 特征根为: $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 6$ 通解为 $a_n = (A + Bn) \cdot 6^n$

从而有 $\begin{cases} a_0 = A \\ a_1 = 6(A + B) \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A = a_0 \\ B = \frac{1}{6}a_1 - a_0 \end{cases}$ 故 $a_n = [a_0 + (\frac{1}{6}a_1 - a_0)n] \cdot 6^n \quad (n \geq 2)$

(f) 特征方程为: $\gamma^2 - 25 = 0$ 特征根为: $\gamma_1 = 5, \gamma_2 = -5$ 通解为 $a_n = A \cdot 5^n + B \cdot (-1)^n 5^n$

从而有 $\begin{cases} a_0 = A + B \\ a_1 = 5A - 5B \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} A = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{10}a_1 \\ B = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{10}a_1 \end{cases}$ 故 $a_n = [(\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{10}a_1) + (-1)^n(\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{10}a_1)] \cdot 5^n$

2.20 题 已知 $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, (a)求一般解; (b)求满足 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 的特解;

(c)求满足的 $a_0 = a_1 = 2$ 的特解;

解(a): 特征方程为: $\gamma^2 - 2\gamma - 1 = 0$ 特征根为: $\gamma_1 = 1 + \sqrt{2}, \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$
通解为 $a_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n$

解(b): 由 $a_n = 0, a_1 = 1$ 得 $\begin{cases} A + B = 0 \\ (1 + \sqrt{2})A + (1 - \sqrt{2})B = 1 \end{cases}$ 解之有 $\begin{cases} A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

因此, 特解 $a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n]$

解(c): 由 $a_0 = a_1 = 2$ 可得 $\begin{cases} A + B = 2 \\ (1 + \sqrt{2})A + (1 - \sqrt{2})B = 2 \end{cases}$ 解之有 $\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$
因此, 特解 $a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$

2.21 题 2.21 已知 $a_n = 5^n + d \cdot (-4)^n$, c 和 d 为常数, $n \in N$,
求 $a_0 = 5, a_1 = -2$ 时的 c 和 d 及序列的递推关系

解: 由 $a_n = 5, a_1 = -2$ 得 $\begin{cases} c + d = 0 \\ 5c - 4d = 1 \end{cases}$ 解之有 $\begin{cases} c = 2 \\ d = 3 \end{cases}$

因此, 特解 $a_n = 2 \cdot 5^n + 3 \cdot (-4)^n$

由于特征根为: $\gamma_1 = 5, \gamma_2 = -4$

故特征方程为: $(\gamma - 5)(\gamma + 4) = 0$ 即 $\gamma^2 - \gamma - 20 = 0$

因此对应的递推关系为: $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ 或者 $a_n = a_{n-1} + 20a_{n-2}$

2.22 题 已知 $a_n = c3^n + d(-1)^n$, c 和 d 为常数, $n \in N$, 求 $\{a_n\}$ 满足的递推关系。

解: 由题意可知, a_n 的特征方程为, $(x-3)(x+1)=0$, 即 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 所以递推关系为 $a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0$

2.23 题 $a_n = (k_1 + k_2 n)(-3)^n$, k_1 和 k_2 是常数, $n \in N$, 求 $\{a_n\}$ 的递推关系

解: 特征根为: $\gamma_1 = \gamma_2 = -3$, 故特征方程为: $(\gamma + 3)^2 = 0$, 即: $\gamma^2 + 6\gamma + 9 = 0$,
于是递推关系为: $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$

2.24 题 设 $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 5, a_0 = 1, a_1 = 2$, 求解这个递推关系

解: 首先解得 $a_2 = 8$

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 5 \quad (1)$$

$$a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} = 5 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \quad a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$$

建立特征方程为: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

解这个方程得: $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1/3$

设 $a_n = A(1)^n + B(-1)^n + C(1/3)^n$

$$a_0 = A + B + C \quad a_1 = A - B + (1/3)C \quad a_2 = A + B + (1/9)C$$

解得 $A = 2 \quad B = 7 \quad C = -9$

$$a_n = 2(1)^n + 7(-1)^n - 9(1/3)^n$$

2.25 题 设 $\{a_n\}$ 序列的母函数为 $\frac{4-3x}{(1-x)(1+x-x^3)}$, 但 $b_0 = a, b_1 = a_1 - a_0, \dots, b_n = a_n - a_{n-1}, \dots$, 求序列 $\{b_n\}$ 的母函数

解:

设 B 的母函数是 $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$

$$b_0 = a_0$$

$$x : b_1 = a_1 - a_0$$

$$x^2 : b_2 = a_2 - a_1$$

$$x^3 : b_3 = a_3 - a_2$$

...

+))

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \dots$$

$$\text{即 } B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = (1-x)a_0 + (1-x)a_1x + \dots$$

$$= (1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = (1-x)A(x)$$

$$= \frac{4-3x}{1+x-x^3}$$

2.26 题 设 $G=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$, 且 $a_0=1, a_n=a_0a_{n-1}+a_1a_{n-2}+\dots+a_{n-1}a_0$, 试证 $1+xG^2=G$.

证明: 因为 $G=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$

$$x^2:a_2=a_0a_1+a_1a_0$$

$$x^3:a_3=a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0$$

$$x^4:a_4=a_0a_3+a_1a_2+a_2a_1+a_3a_0$$

$$+)\dots$$

$$G-1-X=a_0+a_1x-1-X+(a_0a_1+a_1a_0)x^2+(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)x^3+\dots$$

因为 $a_0=1$, 得 $a_1=1$

$$\text{所以 } G-1-X=(a_0a_1+a_1a_0)x^2+(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)x^3+\dots$$

$$=a_0a_1x^2+a_1a_0x^2+a_0a_2x^3+a_1a_1x^3+a_2a_0x^3+\dots$$

$$=a_0(a_1x^2+a_2x^3+\dots)+a_1x(a_0x+a_1x^2+\dots)+a_2x^2(a_0x+\dots)+\dots$$

$$=a_0a_1x^2+a_0a_2x^3+\dots+a_1x(a_0x+a_1x^2+\dots)+a_2x^2a_0x+\dots$$

$$=a_0a_0x+a_0a_1x^2+a_0a_2x^3+\dots+a_1x(a_0x+a_1x^2+\dots)+a_2x^2a_0x+\dots-x$$

$$=-x+(a_0x+a_1x^2+\dots)(a_0+a_1x+\dots)=-X+X(a_0+a_1x+\dots)(a_0+a_1x+\dots)$$

$$\text{所以: } G-1-X=-X+(a_0+a_1x+\dots)^2x \quad G-1=G^2x$$

2.27 题 求下列递推关系的一般解:

$$(a)a_n-4a_{n-1}=5^n$$

$$(b)a_n+6a_{n-1}=5\cdot 3^n$$

$$(c)a_n-4a_{n-1}=4^n$$

$$(d)a_n+6a_{n-1}=4\cdot(-6)^n$$

$$(f)a_n-4a_{n-1}=7\cdot 4^n-6\cdot 5^n$$

$$(g)a_n+6a_{n-1}=(-6)^n(2n+3n^2)$$

$$(h)a_n-4a_{n-1}=(n-n^2)\cdot 4^n$$

$$(i)a_n-a_{n-1}=4n^3-6n^2+4n-1$$

$$(j)a_n-7a_{n-1}+12a_{n-2}=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n$$

$$(k)a_n+2a_{n-1}-8a_{n-2}=3\cdot(-4)^n-14\cdot 3^n$$

$$(l)a_n-6a_{n-1}+9a_{n-2}=3^n$$

$$(m)a_n-7a_{n-1}+9a_{n-2}=3^n$$

$$(n)a_n-2a_{n-1}=2^n+3^n+4^n$$

解(a): 特征方程: $\gamma-4=0$, 特征根: $\gamma=4$, 齐次通解: $a_n=A\cdot 4^n$

非齐次特解: $a_n=B\cdot 4^n$, 代入齐次方程可得: $B=5$

非齐次的通解: $a_n=A\cdot 4^n+5\cdot 5^n=A\cdot 4^n+5^{n+1}$

解(b): 特征方程: $\gamma+6=0$, 特征根: $\gamma=-6$, 齐次通解: $a_n=A\cdot(-6)^n$,

非齐次特解: $a_n=B\cdot 3^n$ 代入齐次方程可得: $B=\frac{5}{3}$,

非齐次的通解: $a_n=A\cdot(-6)^n+\frac{5}{3}\cdot 3^n=A\cdot(-6)^n+5\cdot 3^{n-1}$

解(c): 特征方程: $\gamma-4=0$, 特征根: $\gamma=4$, 齐次通解: $a_n=A\cdot 4^n$

非齐次特解: $a_n=(B+Cn)\cdot 4^n$ (因为 $f(n)=4^n$, 4 是一重特征根)

代入齐次方程可得: $C=1$, 非齐次的通解: $a_n=A\cdot 4^n+(B+n)4^n=(A+B+n)4^n$

设新的 A 为 $A+B$, 故有 $a_n=(A+n)\cdot 4^n$

解(d): 特征方程: $\gamma+6=0$, 特征根: $\gamma=-6$, 齐次通解: $a_n=A\cdot(-6)^n$

非齐次特解: $a_n=(B+Cn)\cdot(-6)^n$ (因为 $f(n)=(-6)^n$, -6 是一重特征根)

代入齐次方程可得: $C=4$, 非齐次的通解: $a_n=A\cdot(-6)^n+(B+4n)(-6)^n=(A+B+4n)(-6)^n$

设新的 A 为 $A+B$, 故有 $a_n=(A+4n)\cdot(-6)^n$

解(e): 特征方程: $\gamma-4=0$, 特征根: $\gamma=4$, 齐次通解: $a_n=A\cdot 4^n$

非齐次特解: $a_n=(B+Cn)\cdot 4^n+D\cdot 5^n$ (因为 $f(n)=2\cdot 5^n-3\cdot 4^n$, 4 是一重特征根)

代入非齐次方程可得: $\begin{cases} C=-3 \\ D=10 \end{cases}$ 即特解为 $a_n=(B-3n)\cdot 4^n+10\cdot 5^n$

非齐次的通解: $a_n=A\cdot 4^n+(B-3n)4^n+10\cdot 5^n=(A+B-3n)4^n+2\cdot 5^{n+1}$

设新的 A 为 $A+B$, 故有 $a_n=(A-3n)\cdot 4^n+2\cdot 5^{n+1}$

解(f): 特征方程: $\gamma-4=0$, 特征根: $\gamma=4$, 齐次通解: $a_n=A\cdot 4^n$,

非齐次特解: $a_n=(B+Cn)\cdot 4^n+D\cdot 5^n$ (因为 $f(n)=7\cdot 4^n-6\cdot 5^n$, 4 是一重特征根)

代入非齐次方程可得: $\begin{cases} C=7 \\ D=-30 \end{cases}$ 即特解为 $a_n=(B+7n)\cdot 4^n-30\cdot 5^n$

非齐次的通解: $a_n=A\cdot 4^n+(B+7n)4^n-30\cdot 5^n=(A+B+7n)4^n-30\cdot 5^n$

设新的 A 为 $A+B$, 故有 $a_n=(A+7n)\cdot 4^n-30\cdot 5^n$

解(g): 特征方程: $\gamma + 6 = 0$, 特征根: $\gamma = -6$, 齐次通解: $a_n = A \cdot (-6)^n$

非齐次特解: $a_n = (B + Cn + Dn^2 + En^3) \cdot (-6)^n$,

代入非齐次方程可得: $(B + Cn + Dn^2 + En^3) \cdot (-6)^n + 6[B + C(n-1) + D(n-1)^2 + E(n-1)^3](-6)^{n-1}$
 $= (-6)^n [C + D(2n-1) + E(3n^2 - 3n - 1)] = (-6)^n [3En^2 + (2D - 3E)n + (C - D + E)]$
 $= (-6)^n (2n + 3n^2)$

故有 $\begin{cases} 3E = 3 \\ 2D - 3E = 2 \\ C - D + E = 0 \end{cases}$, 解之得 $\begin{cases} C = \frac{3}{2} \\ D = \frac{5}{2} \\ E = 1 \end{cases}$, 即非齐次特解为 $a_n = (B + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}n^2 + n^3)(-6)^n$

非齐次的通解: $a_n = A \cdot (-6)^n + (B + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}n^2 + n^3)(-6)^n = (A + B + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}n^2 + n^3)(-6)^n$

设新的A为A+B, 故有 $a_n = (A + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}n^2 + n^3) \cdot (-6)^n$

解(h): 特征方程: $\gamma - 4 = 0$, 特征根: $\gamma = 4$, 齐次通解: $a_n = A \cdot 4^n$,

非齐次特解: $a_n = (B + Cn + Dn^2 + En^3) \cdot 4^n$, 代入非齐次方程可得:

$(B + Cn + Dn^2 + En^3) \cdot 4^n + 6[B + C(n-1) + D(n-1)^2 + E(n-1)^3]4^{n-1} = 4^n [C + D(2n-1) + E(3n^2 - 3n - 1)]$
 $= 4^n [3En^2 + (2D - 3E)n + (C - D + E)] = 4^n (n - n^2)$

故有 $\begin{cases} 3E = -1 \\ 2D - 3E = 1 \\ C - D + E = 0 \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} C = \frac{1}{3} \\ D = 0 \\ E = -\frac{1}{3} \end{cases}$

即非齐次特解为 $a_n = (B + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}n^3)4^n$

非齐次的通解: $a_n = A \cdot 4^n + (B + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}n^3)4^n = (A + B + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}n^3)4^n$

设新的A为A+B, 故有 $a_n = (A + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}n^3)4^n$

解(i): 特征方程: $\gamma - 1 = 0$, 特征根: $\gamma = 1$, 齐次通解: $a_n = A \cdot 1^n$

非齐次特解: $a_n = (B + Cn + Dn^2 + En^3 + Fn^4) \cdot 1^n = B + Cn + Dn^2 + En^3 + Fn^4$

代入非齐次方程可得:

$(B + Cn + Dn^2 + En^3 + Fn^4) - [B + C(n-1) + D(n-1)^2 + E(n-1)^3 + F(n-1)^4]$
 $= [C + D(2n-1) + E(3n^2 - 3n - 1) + F(4n^3 - 6n^2 + 4n - 1)]$
 $= 4Fn^3 + (3E - 6F)n^2 + (2D - 3E + 4F)n + (C - D + E - F)$
 $= 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

故有 $\begin{cases} 4F = 4 \\ 3E - 6F = -6 \\ 2D - 3E + 4F = 4 \\ C - D + E - F = -1 \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \\ E = 0 \\ F = 1 \end{cases}$

即非齐次特解为 $a_n = B + n^4$

非齐次的通解: $a_n = A + B + n^4$

设新的A为A+B, 故有 $a_n = A + n^4$

解(j): 特征方程: $\gamma^2 - 7\gamma + 12 = 0$, 特征根: $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 4$,

齐次通解: $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 4^n$

非齐次特解: $a_n = C \cdot 2^n + (D + En) \cdot 3^n$ (因为 $f(n) = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$, 且3是一重特征根)

代入非齐次方程可得:

$(C \cdot 2^n + (D + En) \cdot 3^n) - 7[C \cdot 2^{n-1} + (D + E(n-1)) \cdot 3^{n-1}] + 12[C \cdot 2^{n-2} + (D + E(n-2)) \cdot 3^{n-2}]$
 $= C \cdot 2^{n-2} (4 - 14 + 12) + 3^{n-2} [(9D - 21D + 12D) + (9En - 21E(n-1) + 12E(n-2))]$
 $= C \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-1} = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$

于是, 可得 $\begin{cases} C = 10 \\ E = 12 \end{cases}$ 即非齐次特解为 $a_n = 10 \cdot 2^n + (D + 12n) \cdot 3^n$

非齐次的通解: $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 4^n + 10 \cdot 2^n + (D + 12n) \cdot 3^n = 10 \cdot 2^n + (A + D + 12n) \cdot 3^n + B \cdot 4^n$

设新的A为A+D, 故有 $a_n = 10 \cdot 2^n + (A + 12n) \cdot 3^n + B \cdot 4^n$

解(k): 特征方程: $\gamma^2 + 2\gamma - 8 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = -4, \gamma_2 = 2$ 齐次通解: $a_n = A \cdot (-4)^n + B \cdot 2^n$

非齐次特解: $a_n = (C + Dn) \cdot (-4)^n + E \cdot 3^n$ (因为 $f(n) = 3 \cdot (-4)^n - 14 \cdot 3^n$, 且 -4 是一重特征根)

代入非齐次方程可得:

$$\begin{aligned} & [(C + Dn)(-4)^n + E \cdot 3^n] + 2[(C + D(n-1))(-4)^{n-1} + E \cdot 3^{n-1}] - 8[(C + D(n-2))(-4)^{n-2} + E \cdot 3^{n-2}] \\ &= [(C - \frac{C}{2} - \frac{C}{2}) + (Dn - \frac{D}{2}(n-1) - \frac{D}{2}(n-2))](-4)^n + E3^{n-2}(9+6-8) = (\frac{D}{2} + D)(-4)^n + 7E \cdot 3^{n-2} \\ &= \frac{3}{2}D(-4)^n + \frac{7}{9}E \cdot 3^n = 3 \cdot (-4)^n - 14 \cdot 3^n \end{aligned}$$

于是, 可得 $\begin{cases} \frac{3}{2}D = 10 \\ \frac{7}{9}E = -14 \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} D = 2 \\ E = -18 \end{cases}$ 即非齐次特解为 $a_n = (C + 2n)(-4)^n - 18 \cdot 3^n$

非齐次的通解: $a_n = A \cdot (-4)^n + B \cdot 2^n + (C + 2n) \cdot (-4)^n - 18 \cdot 3^n = (A + C + 2n)(-4)^n + B \cdot 2^n - 18 \cdot 3^n$

设新的 A 为 $A + C$, 故有 $a_n = (A + 2n)(-4)^n + B \cdot 2^n - 18 \cdot 3^n$

解(l): 特征方程: $\gamma^2 - 6\gamma + 9 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$ 齐次通解: $a_n = (A + Bn) \cdot 3^n$

非齐次特解: $a_n = (C + Dn + En^2) \cdot 3^n$ (因为 $f(n) = 3^n$, 且 3 是二重特征根)

代入非齐次方程可得:

$$\begin{aligned} & (C + Dn + En^2) \cdot 3^n - 6(C + D(n-1) + E(n-1)^2) \cdot 3^{n-1} + 9(C + D(n-2) + E(n-2)^2) \cdot 3^{n-2} \\ &= [(C - 2C + C) + (D - 2D + D)n + (E - 2E + E) + (2D - 2D) + 2E(2n-1) + E(-4n+4)]3^n \\ &= E \cdot (4n - 2 - 4n + 4) \cdot 3^n \\ &= E \cdot 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n \end{aligned}$$

故有 $E = \frac{1}{2}$ 即非齐次特解为 $a_n = (C + Dn + \frac{1}{2}n^2) \cdot 3^n$

非齐次的通解: $a_n = (A + Bn) \cdot 3^n + (C + Dn + \frac{1}{2}n^2) \cdot 3^n = ((A + C) + (B + D)n + \frac{1}{2}n^2) \cdot 3^n$

设新的 A 为 $A + C$, 新的 B 为 $B + D$, 故有 $a_n = (A + Bn + \frac{1}{2}n^2) \cdot 3^n$

解 (m): 特征方程: $\gamma^2 - 7\gamma + 9 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}, \gamma_2 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$

齐次通解: $a_n = A \cdot (\frac{7 + \sqrt{13}}{2})^n + B \cdot (\frac{7 - \sqrt{13}}{2})^n$ 非齐次通解: $a_n = C \cdot 3^n$

代入非齐次方程: $C \cdot 3^n - 7C \cdot 3^{n-1} + 9C \cdot 3^{n-2} = 3^n$ $C \cdot 3^n (1 - \frac{7}{3} + 1) = 3^n$ $C \cdot (-\frac{1}{3}) = 1$ $C = -3$

故此非齐次方程的特解为: $a_n = (-3) \cdot 3^n$

于是非齐次方程的通解为: $a_n = A \cdot (\frac{7 + \sqrt{13}}{2})^n + B \cdot (\frac{7 - \sqrt{13}}{2})^n - 3 \cdot 3^n$

解 (n): 特征方程: $\gamma - 2 = 0$ 特征根: $\gamma = 2$ 齐次通解: $a_n = A \cdot 2^n$

非齐次通解: $a_n = (B + Cn)2^n + D \cdot 3^n + E \cdot 4^n$ (因为 $f(n) = 2^n + 3^n + 4^n$, 是现齐次的一重特征根)

代入非齐次方程:

$$\begin{aligned} & (B + Cn)2^n + D \cdot 3^n + E \cdot 4^n - 2(B + C(n-1))2^{n-1} - 2D \cdot 3^{n-1} - 2E \cdot 4^{n-1} \\ &= 2^n \cdot C + D \cdot 3^n (1 - \frac{2}{3}) + E \cdot 4^n (1 - \frac{1}{2}) = 2^n \cdot C + \frac{1}{3}D \cdot 3^n + \frac{1}{2}E \cdot 4^n = 2^n + 3^n + 4^n \end{aligned}$$

故有 $C = 1, D = 3, E = 2$

故此非齐次方程的特解为: $a_n = (B + n)2^n + 3 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n$

于是非齐次方程的通解为: $a_n = A \cdot 2^n + (B + n)2^n + 3 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n = (A + B + n)2^n + 3 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n$

令新的 A 为 $A + B$, 有: $a_n = (A + n)2^n + 3 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n$

2.28 $a_n = a_{n-1}^3 a_{n-2}^{10}$, 利用置换 $b_n = \log_2(a_n)$ 求解。

【解】: 由 $a_n = a_{n-1}^3 a_{n-2}^{10}$, 两边取对数: $\log_2 a_n = 3\log_2 a_{n-1} + 10\log_2 a_{n-2}$

令: $b_n = \log_2 a_n$, 则有 $b_n = 3b_{n-1} + 10b_{n-2}$ 从而 $b_n - 3b_{n-1} - 10b_{n-2} = 0$

特征方程: $\gamma^2 - 3\gamma - 10 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = 5$ 齐次通解: $b_n = A \bullet (-2)^n + B \bullet 5^n$

将 $b_n = \log_2 a_n$ 代入上式, 有 $\log_2 a_n = A \bullet (-2)^n + B \bullet 5^n$ $a_n = 2^{A \bullet (-2)^n + B \bullet 5^n}$

2.29 题 $a_n = a_{n-1} a_{n-2}$ 求这个递推关系的解

解: 设 $b_n = \log_2 a_n$ 由 $a_n = a_{n-1} a_{n-2}$ 得 $b_n - b_{n-1} - b_{n-2} = 0$ $k(x) = x^2 - x - 1 = 0$

解得: $r_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), r_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ $b_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$

由 $\begin{cases} b_0 = A + B \\ b_1 = Ar_1 + Br_2 \end{cases}$ 得 $A = \frac{b_1 - r_2 b_0}{r_1 - r_2} = \frac{2b_1 - (1 - \sqrt{5})b_0}{2\sqrt{5}}, B = \frac{r_1 b_0 - b_1}{r_1 - r_2} = \frac{(1 + \sqrt{5})b_0 - 2b_1}{2\sqrt{5}}$

$b_n = \frac{2b_1 - (1 - \sqrt{5})b_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{(1 + \sqrt{5})b_0 - 2b_1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$ $a_n = 2^{b_n}$

2.30 题 解递推式 $a_n = a_{n-1}^2 a_{n-2}^3$

解: 令: $b_n = \log_2 a_n$

$b_n = \log_2(a_{n-1}^2 a_{n-2}^3) = 2\log_2 a_{n-1} + 3\log_2 a_{n-2} = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$

$k(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$

$r_1 = 3, r_2 = -1$

$b_n = A3^n + B(-1)^n$

$a_0 = 1, b_0 = 0$

$a_1 = 2, b_1 = 1$

$A + B = 0$ (1) $3A - B = 1$ (2)

由(1)(2)得:

$A = 1/4, B = -1/4$

$b_n = (1/4)3^n + (-1/4)(-1)^n$

$\log_2 a_n = (1/4)3^n + (-1/4)(-1)^n$

$a_n = 2^{(1/4)3^n + (-1/4)(-1)^n}$

2.31 题 $a_n = \frac{a_{n-1}^7}{a_{n-2}^{12}}$, $a_0 = 1, a_1 = 2$, 解个递推关系。

【解】: 由 $a_n = \frac{a_{n-1}^7}{a_{n-2}^{12}}$, 两边取对数: $\log_2 a_n = 7\log_2 a_{n-1} - 12\log_2 a_{n-2}$

令: $b_n = \log_2 a_n$, 则有 $b_0 = \log_2 1 = 0, b_1 = \log_2 2 = 1$ $b_n = 7b_{n-1} - 12b_{n-2}$

从而 $b_n - 7b_{n-1} + 12b_{n-2} = 0$

特征方程: $\gamma^2 - 7\gamma + 12 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 4$ 齐次通解: $b_n = A \bullet 3^n + B \bullet 4^n$

由初值, 由 $\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 4B = 1 \end{cases}$, 解之 $\begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \end{cases}$ 于是有 $b_n = -3^n + 4^n$

将 $b_n = \log_2 a_n$ 代入上式, 有 $\log_2 a_n = -3^n + 4^n$ $a_n = 2^{-3^n + 4^n}$

2.32 解下列递推关系 (a) $a_n = na_{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_n = ?$ (b) $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n}$, $a_0 = 7$ (c) $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3^n}$

【解】: (a) 由 $a_n = na_{n-1}$, $a_0 = 1$, 得: $a_n = n!$

(b) $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 特征方程: $\gamma - 1 = 0$ 特征根: $\gamma = 1$ 齐次通解: $a_n = A \cdot 1^n = A$

非齐次特解: $a_n = B \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = B \cdot \frac{1}{2^n}$ 代入非齐次方程: $B \cdot \frac{1}{2^n} - B \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$

$$B - 2B = 1 \quad -B = 1 \quad B = -1$$

从而非齐次特解: $a_n = \frac{1}{2^n}$ 于是非齐次特解: $a_n = A + \frac{1}{2^n}$

$$A + 1 = 7 \quad a = 7 - 1 = 6 \quad \text{所以} \quad a_n = 6 + \frac{1}{2^n}$$

(c) $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

特征方程: $\gamma - 1 = 0$ 特征根: $\gamma = 1$ 齐次通解: $a_n = A \cdot 1^n = A$ 非齐次特解: $a_n = B \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = B \cdot \frac{1}{3^n}$

代入非齐次方程: $B \cdot \frac{1}{3^n} - B \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$ $B - 3B = 1 \quad -2B = 1 \quad B = -\frac{1}{2}$

从而非齐次特解: $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3^n}$ 于是非齐次特解: $a_n = A + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3^n}$

2.37 利用置换 $a_n = b_n^2$ 解 $a_n = (2\sqrt{a_{n-1}} + 3\sqrt{a_{n-2}})^2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ 。

【解】: (置换法) 将 $a_n = b_n^2$ 代入, 有

$$(1) \text{ 若 } b_n > 0, \quad b_n^2 = (2b_{n-1} + 3b_{n-2})^2 \quad b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$$

特征方程: $\gamma^2 - 2\gamma - 3 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = -1$ 通解: $b_n = A \cdot 3 + B(-1)^n$

$$\text{初值: } b_0 = 1, \quad b_1 = 2 \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - B = 2 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

故此, $b_n = \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4}(-1)^n = \frac{1}{4}[3 \cdot 3^n + (-1)^n]$ 于是, $a_n = b_n^2 = \frac{1}{16}[3 \cdot 3^n + (-1)^n]^2$

$$(2) \text{ 若 } b_n < 0, \text{ 则有: } b_n^2 = (-2b_{n-1} - 3b_{n-2})^2 \quad b_n = -(-2b_{n-1} - 3b_{n-2}) \quad b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$$

$$\text{从而 } b_n = A \cdot 3 + B(-1)^n \quad \text{初值: } b_0 = -1, \quad b_1 = -2 \quad \begin{cases} A + B = -1 \\ 3A - B = -2 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} A = -\frac{3}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

故此, $b_n = -\frac{1}{4}[3 \cdot 3^n + (-1)^n]$ 于是, $a_n = b_n^2 = \frac{1}{16}[3 \cdot 3^n + (-1)^n]^2$

2.33 F_0, F_1, F_2 是 Fibonacci 序列, 求解 $a_n - a_{n-1} = F_{n+2}F_{n-1}$. (提示: $F_{n+2}F_{n-1} = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) = F_{n+1}^2 - F_n^2$)

【解】: 特征方程: $\gamma - 1 = 0$ 特征根: $\gamma = 1$ 齐次通解: $a_n = A \cdot 1^n = A$

由于 $F_{n+2}F_{n-1} = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) = F_{n+1}^2 - F_n^2$ 故此非齐次得一个特解: $a_n = F_{n+1}^2$

因此, 非齐次得通解为: $a_n = A + F_{n+1}^2$

2.34 $a_n = a_{n-1} + \binom{n+2}{3}, a_0 = 0$, 求 a_n .

【解】: 特征方程: $\gamma - 1 = 0$ 特征根: $\gamma = 1$ 齐次通解: $a_n = A \cdot 1^n = A$

非齐次特解: $a_n = B_0 + B_1 \binom{n}{1} + B_2 \binom{n}{2} + B_3 \binom{n}{3} + B_4 \binom{n}{4}$

$$\begin{aligned} \text{于是 } a_n - a_{n-1} &= B_0 + B_1 \binom{n}{1} + B_2 \binom{n}{2} + B_3 \binom{n}{3} + B_4 \binom{n}{4} - B_0 - B_1 \binom{n-1}{1} - B_2 \binom{n-1}{2} - B_3 \binom{n-1}{3} - B_4 \binom{n-1}{4} \\ &= B_1 + B_2(n-1) + B_3 \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-2) + B_4 \cdot \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{令 } n=1, \text{ 有 } B_1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 1; \quad \text{令 } n=2, \text{ 有 } B_1 + B_2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6} = 4, \text{ 于是 } B_2 = 4 - B_1 = 3;$$

$$\text{令 } n=3, \text{ 有 } B_1 + 2B_2 + B_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10, \quad \text{于是 } B_3 = 10 - B_1 - 2B_2 = 10 - 1 - 2 \times 3 = 3;$$

$$\text{令 } n=4, \text{ 有 } B_1 + 3B_2 + B_3 + B_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20,$$

$$\text{于是 } B_4 = 10 - B_1 - 3B_2 - B_3 = 20 - 1 - 3 \times 3 - 3 \times 3 = 1;$$

$$\text{则非齐次特解: } a_n = B_0 + \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$$

$$\text{从而, 非齐次的通解: } a_n = A + B_0 + \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$$

$$\text{将 } a_0 = 0 \text{ 代入, 有 } A + B_0 = 0, \text{ 于是非齐次的解为: } a_n = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$$

2.35 $a_n = a_{n-1} + \binom{n+3}{4}, a_0 = 0$, 求 a_n 。

【解】: 特征方程: $\gamma - 1 = 0$ 特征根: $\gamma = 1$ 齐次通解: $a_n = A \cdot 1^n = A$

非齐次特解: $a_n = B_0 + B_1 \binom{n}{1} + B_2 \binom{n}{2} + B_3 \binom{n}{3} + B_4 \binom{n}{4} + B_5 \binom{n}{5}$

于是 $a_n - a_{n-1} = B_0 + B_1 \binom{n}{1} + B_2 \binom{n}{2} + B_3 \binom{n}{3} + B_4 \binom{n}{4} + B_5 \binom{n}{5} - B_0 - B_1 \binom{n-1}{1} - B_2 \binom{n-1}{2} - B_3 \binom{n-1}{3} - B_4 \binom{n-1}{4} - B_5 \binom{n-1}{5}$

$= B_1 + B_2(n-1) + B_3 \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-2) + B_4 \cdot \frac{1}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) + B_5 \cdot \frac{1}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$= \binom{n+3}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$

令 $n=1$, 有 $B_1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 1$; 令 $n=2$, 有 $B_1 + B_2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = 5$, 于是 $B_2 = 5 - B_1 = 4$;

令 $n=3$, 有 $B_1 + 2B_2 + B_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 15$, 于是 $B_3 = 15 - B_1 - 2B_2 = 15 - 1 - 2 \times 4 = 6$;

令 $n=4$, 有 $B_1 + 3B_2 + 3B_3 + B_4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35$,

于是 $B_4 = 35 - B_1 - 3B_2 - 3B_3 = 35 - 1 - 3 \times 4 - 3 \times 6 = 4$;

令 $n=5$, 有 $B_1 + 4B_2 + 5B_3 + 4B_4 + B_5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70$,

于是 $B_5 = 70 - B_1 - 4B_2 - 6B_3 - 4B_4 = 35 - 1 - 4 \times 4 - 6 \times 6 - 4 \times 4 = 1$;

则非齐次特解: $a_n = B_0 + \binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$

从而, 非齐次的通解: $a_n = A + B_0 + \binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$

将 $a_0 = 0$ 代入, 有 $A + B_0 = 0$, 于是非齐次的解为: $a_n = \binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$

2.36 利用迭代法解: (a) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n - 1, a_0 = 0$; (b) $a_n - 4a_{n-1} = 4^n, a_0 = 0$ 。

【解】: (a) (迭代法) $a_1 = 3a_0 + 3^1 - 1 = 3 - 1$ $a_2 = 3a_1 + 3^2 - 1 = 3^2 - 3 + 3^2 - 1 = 2 \cdot 3^2 - (3 + 1)$

$a_3 = 3a_2 + 3^3 - 1 = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot (3 + 1) + 3^3 - 1 = 3 \cdot 3^3 - (3^2 + 3 + 1)$

$a_4 = 3a_3 + 3^4 - 1 = 3 \cdot [3 \cdot 3^3 - (3^2 + 3 + 1)] + 3^4 - 1 = 4 \cdot 3^4 - (3^3 + 3^2 + 3 + 1)$

设 $a_{n-1} = (n-1) \cdot 3^{n-1} - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^2 + 3 + 1)$ 于是, $a_n = 3a_{n-1} + 3^n - 1$

$$\begin{aligned}
&= 3[(n-1) \cdot 3^{n-1} - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^2 + 3 + 1)] + 3^n - 1 \\
&= n \cdot 3^n - (3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1) = n \cdot 3^n - \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\
&= n \cdot 3^n - \frac{1}{2}(3^n - 1) = (n - \frac{1}{2}) \cdot 3^n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) (迭代法) $a_n = 4a_{n-1} + 4^n$ $a_1 = 4a_0 + 4^1 = 3$ $a_2 = 4a_1 + 4^2 = 4 \cdot 4 + 4^2 = 2 \cdot 4^2$
 $a_3 = 4a_2 + 4^3 = 4 \cdot 2 \cdot 4^2 + 4^3 = 3 \cdot 4^3$ $a_4 = 4a_3 + 4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 4^3 + 4^4 = 4 \cdot 4^4$
 设 $a_{n-1} = (n-1) \cdot 4^{n-1}$ 于是, $a_n = 4a_{n-1} + 4^n = 4(n-1) \cdot 4^{n-1} + 4^n = n \cdot 4^n$

2.38 利用置换 $a_n = n!b_n$ 解 $a_n = 2na_{n-1} + 7n!$, $a_0 = 1$ 。

【解】: (置换法) 将置换 $a_n = n!b_n$ 代入递推方程, 有 $n!b_n = 2n \cdot (n-1)!b_{n-1} + 7n!$

整理, 得: $b_n = 2b_{n-1} + 7$ 特征方程: $\gamma - 2 = 0$ 特征根: $\gamma = 2$

齐次通解: $b_n = A \cdot 2^n$ 非齐次特解: $b_n = B \cdot 1^n = B$

代入非齐次方程, 有: $b_n - 2b_{n-1} = B - 2B = 7$ 即 $B = -7$

从而非齐次得特解为: $b_n = 7$ 故非齐次的通解为: $b_n = A \cdot 2^n - 7$

由初值 $a_0 = 1$ 得, $a_0 = 0!b_0 = 1 \cdot b_0$, 故 $b_0 = 1$

$1 = A \cdot 2^0 - 7$, 从而 $1 = A \cdot 1 - 7$, 即 $A = 8$

于是有 $b_n = 8 \cdot 2^n - 7$, 从而 $a_n = n!(8 \cdot 2^n - 7)$

2.39 利用置换 $a_n = \frac{b_n}{n}$ 解 $a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-1} + \frac{1}{n}$, $a_1 = 5$ 。

【解】: (置换法) 将置换 $a_n = \frac{b_n}{n}$ 代入递推方程, 有 $\frac{b_n}{n} = \frac{n-1}{n} \frac{b_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}$

整理, 得: $b_n = b_{n-1} + 1$ 特征方程: $\gamma - 1 = 0$ 特征根: $\gamma = 1$ 齐次通解: $b_n = A \cdot 1^n$

非齐次特解: $b_n = (B + Cn) \cdot 1^n = B + Cn$ (因为 $f(n) = 1$, 1 是一重特征根)

代入非齐次方程, 有: $b_n - b_{n-1} = B + Cn - (B + C(n-1)) = C = 1$

从而非齐次特解为: $b_n = B + n$ 故非齐次的通解为: $b_n = A + B + n$

于是将 $a_n = \frac{b_n}{n}$ 代回, 有 $na_n = A + B + n$

由初值 $a_1 = 5$ 得 $1 \cdot 5 = A + B + 1$, 从而 $A + B = 4$

因此, 有 $a_n = \frac{4+n}{n} = 1 + \frac{4}{n}$

2.40 解下列递推关系: (a) $a_n = 4n(n-1)a_{n-2} + \frac{5}{9}n! \cdot 3^n, a_0 = 1, a_1 = -1$;

(b) $a_n = 9n(n-1)a_{n-2} + 14n! \cdot 2^n, a_0 = 42, a_1 = 28$; (c) $a_n - 3a_{n-1} = 5 \cdot 3^n, a_0 = 0$;

【解】: (a) (置换法) 令 $a_n = b_n n!$ 代入递推方程, 有 $n!b_n = 4n(n-1)b_{n-2}(n-2)! + \frac{5}{9}n! \cdot 3^n$

整理, 得: $b_n = 4b_{n-1} + \frac{5}{9} \cdot 3^n$ 特征方程: $\gamma^2 - 4 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = 2$

齐次通解: $b_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n$ 非齐次特解: $b_n = C \cdot 3^n$

代入非齐次方程, 有: $C \cdot 3^n - 4C \cdot 3^{n-2} = \frac{5}{9} \cdot 3^n$,

整理, 有 $C(1 - \frac{4}{9}) = \frac{5}{9}$, 故 $C = 1$ 从而非齐次的特解为: $b_n = 3^n$

故非齐次的通解为: $b_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n + 3^n$

由初值 $a_0 = 1$ 得, $a_0 = 0!b_0 = 1 \cdot b_0$, 故 $b_0 = 1$

$a_1 = -1$ 得, $a_1 = 1!b_1 = 1 \cdot b_1$, 故 $b_1 = -1$

代入有 $\begin{cases} A + B + 1 = 1 \\ -2A + 2B + 3 = -1 \end{cases}$, 故 $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \end{cases}$

因此, $b_n = 2 \cdot (-2)^n - 2 \cdot 2^n + 3^n$ 于是, $a_n = n! \cdot [2 \cdot (-2)^n - 2 \cdot 2^n + 3^n]$

(b) (置换法) 令 $a_n = b_n n!$ 代入递推方程, 有 $n!b_n = 9n(n-1)b_{n-2}(n-2)! + 14n! \cdot 2^n$

整理, 得: $b_n = 9b_{n-1} + 14 \cdot 2^n$ 特征方程: $\gamma^2 - 9 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = -3, \gamma_2 = 3$

齐次通解: $b_n = A \cdot (-3)^n + B \cdot 3^n$ 非齐次特解: $b_n = C \cdot 2^n$

代入非齐次方程, 有: $C \cdot 2^n - 9C \cdot 2^{n-2} = 14 \cdot 2^n$,

整理, 有 $C(1 - \frac{9}{4}) = 14$, 故 $C = -\frac{14 \times 4}{5} = -\frac{56}{5}$ 从而非齐次的特解为: $b_n = -\frac{56}{5} \cdot 2^n$

故非齐次的通解为: $b_n = A \cdot (-3)^n + B \cdot 3^n - \frac{56}{5} \cdot 2^n$

由初值 $a_0 = 1$ 得, $a_0 = 0!b_0 = 1 \cdot b_0$, 故 $b_0 = 42$

$a_1 = 28$ 得, $a_1 = 1!b_1 = 1 \cdot b_1$, 故 $b_1 = 28$

代入有 $\begin{cases} A + B - \frac{56}{5} = 42 \\ -3A + 3B - \frac{56 \times 2}{5} = 28 \end{cases}$, 故 $\begin{cases} A + B = \frac{266}{5} \\ -A + B = \frac{84}{5} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} A = \frac{91}{5} \\ B = 35 \end{cases}$

因此, $b_n = \frac{91}{5} \cdot (-3)^n + 35 \cdot 3^n - \frac{56}{5} \cdot 2^n$ 于是, $a_n = n! \cdot [\frac{91}{5} \cdot (-3)^n + 35 \cdot 3^n - \frac{56}{5} \cdot 2^n]$

(c) 特征方程: $\gamma - 3 = 0$ 特征根: $\gamma = 3$ 齐次通解: $a_n = A \cdot 3^n$ 非齐次特解: $a_n = (B + Cn) \cdot 3^n$

代入非齐次方程, 有: $a_n - a_{n-1} = (B + Cn) \cdot 3^n - 3(B + C(n-1)) \cdot 3^{n-1} = 3^n \cdot C = 5 \cdot 3^n$

故 $C = 5$, 从而, 从而非齐次的特解为: $a_n = (B + 5n) \cdot 3^n$

故非齐次的通解为: $a_n = A \cdot 3^n + (B + 5n) \cdot 3^n = (A + B + 5n) \cdot 3^n$

令 A 为 $A+B$ 后, 有 $a_n = (A + 5n) \cdot 3^n$

利用 $a_0 = 0$, 有 $A \cdot 3^0 = 0$, 知 $A = 0$, 从而 $a_n = 5n \cdot 3^n$

2.41 设 a_n 满足: $a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} = 5\gamma^n$, 其中: b_1, b_2 和 γ 都是常数, 试证该序列满足三阶奇次线性常系数奇次递推关系, 且有特征多项式 $(x-\gamma)(x^2 + b_1 x + b_2)$ 。

【解】: 满足特征多项式为 $(x-\gamma)(x^2 + b_1 x + b_2) = x^3 + (b_1 - \gamma)x^2 + (b_2 - \gamma b_1)x - \gamma b_2 = 0$ 的递推关系为

$$a_n + (b_1 - \gamma)a_{n-1} + (b_2 - \gamma b_1)a_{n-2} - \gamma b_2 a_{n-3} = 0 \quad ①$$

$$\text{整理为 } (a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2}) - \gamma(a_{n-1} + b_1 a_{n-2} + b_2 a_{n-3}) = 0 \quad ②$$

$$\text{将关于序列 } \{a_n\} \text{ 的递推关系: } a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} = 5\gamma^n \quad ③$$

$$\text{代入②, 有 } (a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2}) - \gamma(a_{n-1} + b_1 a_{n-2} + b_2 a_{n-3}) = 5\gamma^n - \gamma \cdot 5\gamma^{n-1} = 5\gamma^n - 5\gamma^n = 0$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 满足三阶奇次线性常系数奇次递推关系①, 且有特征多项式 $(x-\gamma)(x^2 + b_1 x + b_2)$ 。

2.42 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, $\{b_n\}$ 满足 $b_n - 2b_{n-1} - b_{n-2} = 0$, $c_n = a_n + b_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, 试证序列 $\{c_n\}$ 满足四阶奇次线性常系数奇次递推关系。

【解】: 方法一 (特征系数法)

$$\text{由于序列 } \{a_n\} \text{ 满足递推关系: } a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \quad ①$$

$$\text{故显然也满足递推关系: } (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) + A_1(a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}) + A_2(a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}) = 0$$

这里 A_1, A_2 为任意常数

$$\text{整理为: } a_n + (A_1 - 1)a_{n-1} + (A_2 - A_1 - 1)a_{n-2} - (A_1 + A_2)a_{n-3} - A_2 a_{n-4} = 0 \quad ②$$

$$\text{由于序列 } \{b_n\} \text{ 满足递推关系: } b_n - 2b_{n-1} - b_{n-2} = 0 \quad ③$$

$$\text{故显然也满足递推关系 } (b_n - 2b_{n-1} - b_{n-2}) + B_1(b_{n-1} - 2b_{n-2} - b_{n-3}) + B_2(b_{n-2} - 2b_{n-3} - b_{n-4}) = 0$$

这里 A_1, A_2 为任意常数

$$\text{整理为: } b_n + (B_1 - 2)b_{n-1} + (B_2 - 2B_1 - 1)b_{n-2} - (B_1 + 2B_2)b_{n-3} - B_2 b_{n-4} = 0 \quad ④$$

$$\text{令 } \begin{cases} A_1 - 1 = B_2 - 2 \\ A_2 - A_1 - 1 = B_2 - 2B_1 - 1 \\ A_1 + A_2 = B_1 + 2B_2 \\ A_2 = B_2 \end{cases}, \text{ 解之得 } \begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} B_1 = -1 \\ B_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{将此代入②, ④有 } a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-3} + a_{n-4} = 0 \quad ⑤$$

$$b_n - 3b_{n-1} + 3b_{n-3} + b_{n-4} = 0 \quad ⑥$$

$$\text{将⑤+⑥, 并注意到 } c_n = a_n + b_n, \text{ 我们有 } c_n - 3c_{n-1} + 3c_{n-3} + c_{n-4} = 0 \quad ⑦$$

这就是序列 $\{c_n\}$ 满足的四阶线性常系数奇次递推关系。

方法二 (特征根法) 递推关系 $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ 特征方程: $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$ 特征根: $\gamma_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \gamma_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{故其通解: } a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{递推关系 } b_n - 2b_{n-1} - b_{n-2} = 0$$

$$\text{特征方程: } \gamma^2 - 2\gamma - 1 = 0 \quad \text{特征根: } \gamma_1 = 1 + \sqrt{2}, \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\text{故其通解: } b_n = C(1 + \sqrt{2})^n + D(1 - \sqrt{2})^n$$

$$\text{于是 } c_n = a_n + b_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C(1 + \sqrt{2})^n + D(1 - \sqrt{2})^n$$

因此序列 $\{c_n\}$ 满足的四阶线性常系数奇次递推关系。

$$\text{其特征多项式为 } \left(\gamma - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\gamma - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\gamma - (1 + \sqrt{2}))(\gamma - (1 - \sqrt{2})) = 0$$

$$\text{整理为 } (\gamma^2 - \gamma - 1)(\gamma^2 - 2\gamma - 1) = 0 \quad \text{再整理为 } \gamma^4 - 3\gamma^3 + 3\gamma + 1 = 0$$

$$\text{因此, 对应的四阶线性常系数奇次递推关系为 } c_n - 3c_{n-1} + 3c_{n-3} + c_{n-4} = 0$$

2.43 题 已知 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$; $c_n = a_n b_n$; $n=0, 1, 2, \dots$, 求 c_n 的递推关系。

$$\begin{aligned} \text{解: } c_n &= a_n b_n = (a_{n-1} + a_{n-2})(2b_{n-1} + b_{n-2}) = 2c_{n-1} + c_{n-2} + a_{n-1}b_{n-2} + 2a_{n-2}b_{n-1} \\ &= 2c_{n-1} + c_{n-2} + (a_{n-2} + a_{n-3})b_{n-2} + 2a_{n-2}(2b_{n-2} + b_{n-3}) \\ &= 2c_{n-1} + 6c_{n-2} + a_{n-3}b_{n-2} + 2a_{n-2}b_{n-3} \\ &= 2c_{n-1} + 6c_n + a_{n-3}(2b_{n-3} + b_{n-4}) + 2(a_{n-3} + a_{n-4})b_{n-3} \\ &= 2c_{n-1} + 6c_{n-2} + 4c_{n-3} + a_{n-3}b_{n-4} + 2a_{n-4}b_{n-3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{由(1)式得: } a_{n-1}b_{n-2} + 2a_{n-2}b_{n-1} = c_n - 2c_{n-1} + c_{n-2}$$

$$\text{所以有 } a_{n-3}b_{n-4} + 2a_{n-4}b_{n-3} = c_{n-2} - 2c_{n-3} - c_{n-4}$$

$$\text{代入(2)式得 } c_n = 2c_{n-1} + 7c_{n-2} + 2c_{n-3} - c_{n-4}$$

2-44 题 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均满足递推关系 $x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} = 0$, 试证:

(a) $\{a_n b_n\}$ 满足一个三阶奇次线性常系数奇次递推关系; (b) $a_0, a_2, a_4 \dots$ 二阶线性常系数奇次递推关系。

【证】: (a) (特征根法) 二阶奇次线性常系数奇次递推关系 $x_n - b_1 x_{n-1} - b_2 x_{n-2} = 0$ 的特征方程为

$$x^2 + b_1 x + b_2 = 0 \quad (1)$$

甲. 设其特征根为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 \neq \gamma_2$, 则有: $a_n = A \cdot \gamma_1^n + B \cdot \gamma_2^n \quad b_n = C \cdot \gamma_1^n + D \cdot \gamma_2^n$

$$\begin{aligned} \text{于是 } c_n &= a_n b_n = (A \cdot \gamma_1^n + B \cdot \gamma_2^n)(C \cdot \gamma_1^n + D \cdot \gamma_2^n) \\ &= AC \cdot (\gamma_1^2)^n + (AD + BC) \cdot (\gamma_1 \gamma_2)^n + BD(\gamma_2^2)^n \end{aligned}$$

这说明 $\{c_n\}$ 满足一个三阶奇次线性常系数奇次递推关系,

$$\text{其特征方程为: } (x - \gamma_1^2)(x - \gamma_1 \gamma_2)(x - \gamma_2^2) = 0$$

$$\text{或者 } x^3 + (\gamma_1^2 + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2)x^2 + (\gamma_1^3 \gamma_2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_2^3)x - (\gamma_1 \gamma_2)^3 = 0$$

$$\text{由于 } \gamma_1 + \gamma_2 = -b_1, \gamma_1 \gamma_2 = b_2, \text{ 故 } \gamma_1^2 + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2 = b_1^2 - b_2$$

$$\text{因此有 } x^3 - (b_1^2 - b_2)x^2 + b_2(b_1^2 - b_2)x - b_2^3 = 0$$

$$\text{故此 } \{c_n\} \text{ 满足如下三阶奇次线性常系数奇次递推关系 } c_n - (b_1^2 - b_2)c_{n-1} + b_2(b_1^2 - b_2)c_{n-2} - b_2^3 c_{n-3} = 0$$

乙. 设其特征根为 γ 是一个二重根, 则: $a_n = (A + Bn) \cdot \gamma^n \quad b_n = (C + Dn) \cdot \gamma^n$

$$\begin{aligned} \text{于是 } c_n &= a_n b_n = (A + Bn)(C + Dn) \cdot (\gamma^2)^n \\ &= (AC + (AD + BC)n + BDn^2)(\gamma^2)^n \end{aligned}$$

这说明 $\{c_n\}$ 满足一个三阶奇次线性常系数奇次递推关系,

$$\text{其特征方程为: } (x - \gamma^2)^3 = x^3 - 3\gamma^2 x^2 + 3\gamma^4 x - \gamma^6 = 0$$

$$\text{由于 } 2\gamma = -b_1, \gamma^2 = b_2, \text{ 因此有 } x^3 - 3b_2 x^2 + 3b_2^2 x - b_2^3 = 0$$

$$\text{故此 } \{c_n\} \text{ 满足如下的三阶奇次线性常系数奇次递推关系 } c_n - 3b_2 c_{n-1} + 3b_2^2 c_{n-2} - b_2^3 c_{n-3} = 0$$

(b) 甲. $a_n = A \cdot \gamma_1^n + B \cdot \gamma_2^n \quad a_{2n} = A \cdot (\gamma_1^2)^n + B \cdot (\gamma_2^2)^n$

因此, 这说明 $\{a_{2n}\}$ 满足一个二阶奇次线性常系数奇次递推关系

$$\text{其特征方程为 } (x - \gamma_1^2)(x - \gamma_2^2) = 0 \quad \text{整理为: } x^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)x + (\gamma_1 \gamma_2)^2 = 0$$

$$\text{由于 } \gamma_1 + \gamma_2 = -b_1, \gamma_1 \gamma_2 = b_2, \text{ 有 } \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = b_1^2 - 2b_2$$

$$\text{于是 } x^2 - (b_1^2 - 2b_2)x + b_2^2 = 0$$

$$\text{故此序列 } \{a_{2n}\} \text{ 满足一个二阶奇次线性常系数奇次递推关系为: } c_n - (b_1^2 - 2b_2)c_{n-1} + b_2^2 c_{n-2} = 0$$

乙. $a_n = (A + Bn) \cdot \gamma^n \quad a_{2n} = (A + Bn) \cdot (\gamma^2)^n$

因此, 这说明 $\{a_{2n}\}$ 满足一个二阶奇次线性常系数奇次递推关系 其特征方程为 $(x - \gamma^2)^2 = 0$

$$\text{整理为: } x^2 - 2\gamma^2 x + \gamma^4 = 0 \quad \text{由于 } 2\gamma = -b_1, \gamma^2 = b_2, \text{ 于是 } x^2 - 2b_2 x + b_2^2 = 0$$

$$\text{故此序列 } \{a_{2n}\} \text{ 满足一个二阶奇次线性常系数奇次递推关系为: } c_n - 2b_2 c_{n-1} + b_2^2 c_{n-2} = 0$$

2.45 题 已知 F_0, F_1, F_2, \dots 是 Fibonacci 序列, 试找出常数 a, b, c, d 使:

$$F_{3n} = aF_n F_{n+1} F_{n+2} + bF_{n+1} F_{n+2} F_{n+3} + cF_{n+2} F_{n+3} F_{n+4} + dF_{n+3} F_{n+4} F_{n+5}$$

解: 当 $n=0$ 时 $F_0 = aF_0 F_1 F_2 + bF_1 F_2 F_3 + cF_2 F_3 F_4 + dF_3 F_4 F_5$

当 $n=1$ 时 $F_3 = aF_1 F_2 F_3 + bF_2 F_3 F_4 + cF_3 F_4 F_5 + dF_4 F_5 F_6$

当 $n=2$ 时 $F_6 = aF_2 F_3 F_4 + bF_3 F_4 F_5 + cF_4 F_5 F_6 + dF_5 F_6 F_7$

当 $n=3$ 时 $F_9 = aF_3 F_4 F_5 + bF_4 F_5 F_6 + cF_5 F_6 F_7 + dF_6 F_7 F_8$

注意到 $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34$, 得到

$$\begin{cases} 0 + 2b + 6c + 30d = 0 \\ 2a + 6b + 30c + 120d = 2 \\ 6a + 30b + 120c + 520d = 8 \\ 30a + 120b + 520c + 2184d = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -17 \\ b = 21 \\ c = 13 \\ d = -4 \end{cases}$$

经验证当 $n=4$ 时亦成立。

2.46 题 对所有的正整数 a, b, c , 恒有 $F_{a+b+c+3} = F_{a+2}(F_{b+1}F_{c+1} + F_{b+1}F_c) + F_{a+1}(F_{b+1}F_{c+1} + F_bF_c)$

证明: 固定 n , 利用第二归纳法可证

当 $m=1$ 时 $F_{n+1}=F_1F_{n+1}+F_0F_n, F_0=F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ 成立

假定当 $m \leq k$ 时成立 $F_{k+n}=(F_kF_{n+1})+(F_{k-1}F_n)$

则要证 $m=k+1$ 时 $F_{k+1+n}=(F_{k+1}F_{n+1})+(F_kF_n)$

$$\begin{aligned} F_{k+1+n} &= (F_{k+n}) + (F_{k+n-1}) = (F_kF_{n+1}) + (F_{k-1}F_n) + (F_{k-1}F_{n+1}) + (F_{k-2}F_n) \\ &= (F_k + F_{k-1})(F_{n+1}) + ((F_{k-1}) + F_{k-2})F_n = (F_{k+1}F_{n+1}) + F_kF_n \quad \text{即证} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } F_{b+2+c} = F_{b+2}F_{c+1} + F_{b+1}F_c \quad F_{b+1+c} = F_{b+1}F_{c+1} + F_bF_c$$

$$\text{代入右边 } F_{a+2+b+c+1} = F_{a+2}F_{b+2+c} + F_{a+1}F_{b+1+c} \quad \text{即证}$$

2.47 题 证明等式 $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ 求 $(1+x^4+x^8)^{100}$ 中 x^{20} 项的系数。

解法一: 利用第一章的第 8 节的公式 7: 令 $m=n, r=n$ 即可。

解法二: 利用恒等式 $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, 比较两边 x^n 的系数 x^n : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ 。

或是观察母函数 $(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^n$ 的常数项, 都可以得到结论。

$4x+8y=20$ 并且 $x+2y=5$ 解得 $x=5, y=0; x=1, y=2; x=3, y=1$ 。

$$1^{95}(x^4)^5(x^8)^0 : \frac{100!}{95!5!} \quad 1^{96}(x^4)^3(x^8)^1 : \frac{100!}{96!3!1!} \quad 1^{97}(x^4)^1(x^8)^2 : \frac{100!}{97!1!2!}$$

共 91457520。

2.48 题 有红、黄、蓝、白球各两个, 绿、紫、黑的球各 3 个, 问从中取出 10 个球, 试问 有多少种不同的取法?

解: (用指数型母函数, 可得母函数 x^{10} 系数即为所求。)

同色球看做是相同的。求 $(1+x+x^2)^4(1+x+x^2+x^3)^3$ 中 x^{10} 的系数。 $(1-x^3)^4(1-x^4)^3/(1-x)^7$

$$\begin{array}{lcl} x^3 & : & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ x^4 & : & 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ x & : & 10 \quad 6 \quad 2 \quad 7 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\binom{6+10}{10} - \binom{3}{1} \binom{6+6}{6} + \binom{3}{2} \binom{6+2}{2} - \binom{4}{1} \binom{6+7}{7} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{6+3}{3} - \binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{4}{2} \binom{6+4}{4} - \binom{4}{3} \binom{6+1}{1} = 678$$

2.49 题 求由 A,B,C,D 组成的允许重复的排列中 AB 至少出现一次的排列数目。

解 设 a_n 为所求个数, b_n 为不出现 AB 的串的个数

$$a_n + b_n = 4^n,$$

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2},$$

$$a_n = 4a_{n-1} + b_{n-2},$$

$$b_1 = 4, b_2 = 15, b_0 = 1, b_3 = 56.$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ 解得 } x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$b_n = S(2 + \sqrt{3})^n + t(2 - \sqrt{3})^n$$

$$\begin{cases} S + t = 1 \\ (2 + \sqrt{3})S + (2 - \sqrt{3})t = 4 \end{cases}$$

$$S = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, t = -\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1} \right]$$

$$a_n = 4^n - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1} \right] a_n = 4^n - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1} \right]$$

2.50.题 求 n 位四进制数中 2 和 3 必须出现偶次的数目。

$$\text{解: } G_e(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 = e^{2x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} e^{2x} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4} (e^{4x} + 2e^{2x} + 1)$$

$$\frac{x^n}{n!} : \frac{1}{4} (4^n + 2 \cdot 2^n) = 4^{n-1} + 2^{n-1}$$

2.51 题 试求由 a,b,c 三个文字组成的 n 位符号串 中不出现 aa 图像的符号串的数目。

解 设不出现 aa 的字符串的排列数为 a_n

在所有符合要求的 n 位串中, 最后一位是 a, 则 n-1 位是 b 或 c, 最后一位不是 a, 则是 b 或 c. 故有

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_1 = 3, a_2 = 8, a_0 = 1.$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \text{解得 } x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

$$a_n = A(1 + \sqrt{3})^n + B(1 - \sqrt{3})^n$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ (1 + \sqrt{3})A + (1 - \sqrt{3})B = 3 \end{cases}$$

$$A = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}}, B = -\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}}$$

$$a_n = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left[(1 + \sqrt{3})^{n+2} + (1 - \sqrt{3})^{n+2} \right]$$

2.52 题 证明 $C(n,n) + C(n+1,n) + \dots + C(n+m,n) = C(n+m+1,m)$.

证法一 对 m 做归纳, $m=0$ 时, 等式成立。 假设对 $m-1$, 等式成立。

$$\begin{aligned} C(n,n) + C(n+1,n) + \dots + C(n+m-1,n) + C(n+m,n) &= C(n+m,n+1) + C(n+m,n) \\ &= C(n+m,m-1) + C(n+m,m) = C(n+m+1,n+1) = C(n+m+1,m). \end{aligned} \text{ 证毕。}$$

证法二: 等式的右端相当于从 $n+m+1$ 个球中取 $n+1$ 个球的组合。 把这 $n+m+1$ 个球编号:

如果取出的 $n+1$ 个球中最小编号是 1, 则得到 $C(n+m,n)$;

如果最小编号是 2 则得到 $C(n+m-1,n)$;

如果最小编号是 m 则得到 $C(n,n)$ 。

于是就有 $C(n,n) + C(n+1,n) + \dots + C(n+m,n) = C(n+m+1,n+1) = C(n+m+1,m)$

2.53 题 利用 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$, 改善 p_n 估计式

解: 由于 $\ln G(x) < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{x}{1-x}$, 知道 $\ln P_n < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{x}{1-x} + n \cdot \ln \frac{1}{x} < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{x}{1-x} + \frac{n(1-x)}{x}$

$$\forall x \in (0,1), \text{所以 } \ln P_n < 2\sqrt{\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{x}{1-x} \cdot \frac{n(1-x)}{x}} = \sqrt{\frac{2n}{3}}\pi. \text{ 所以 } P_n < e^{\sqrt{\frac{2n}{3}}\pi}.$$

2.54 题 8 台计算机分给 3 个单位, 第一个单位的分配量不超过 3 台, 第二个单位的分配量不超过 4 台, 第三个单位的分配量不超过 5 台, 问共有几种分配方案?

解: 利用母函数 $(1+x^1+x^2+x^3)(1+x^1+x^2+x^3+x^4)(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5)$, x^8 的系数就是该题的答案。

x^8 的系数为 14, 所以该题答案: 14。

2.55 题 证明任一个正整数 n 都可以写成不同的 Fibonacci 数的和。

解: 该题的意思就是证明 $n = \sum_{i \geq 2} a_i F_i$, $a_i a_{i+1} = 0$, $a_i = 0, 1$ 。其中 $F_1 = F_2 = 1$ 是相同的 Fibonacci 数。对 n 用归纳法

1) 当 $n=1$ 时, 命题成立

2) 设对小于 n 的正整数命题成立, 对于 $n+1$, 如果存在 i 使得 $n+1 = F_i$, 显然成立。否则存在 i , 满足 $F_i < n+1 < F_{i+1}$ 。 $n+1 - F_i$ 可表示为不同的 F 数列的和, 其其中每个得下表 j 都满足 $j < i-1$ 。否则, $F_{i-1} \leq n+1 - F_i < F_{i+1} - F_i < F_{i-1}$ 矛盾。因此 $n+1$ 也可以表示成不同的 F 数列的和。

2.56 题 空间有 n 个平面, 任意 3 个平面交于一点, 无四平面共点。问这样的 n 个平面将空间分割成多少个不重叠的域?

解: 设 n 个满足条件的平面把空间分成 a_n 个域, 第 n 条直线与前 $n-1$ 个直线有 $n-1$ 个交点, 第 n 条直线被分成了 n 段, 而原来的区域被分成了 $2n$

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad a_n = A_0 + A_1 n + A_2 \binom{n}{2} \quad a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, A_0 = A_1 = A_2 = 1. \text{ 所以 } a_n = 1 + n + \binom{n}{2}$$

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-1}, \quad b_n = B_0 + B_1 n + B_2 \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \quad b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8, B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = 1. \text{ 所以 } b_n = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

2.58 题 在 Hanoi 塔问题中, 在柱 A 上从上到下套着 n 个圆盘, 其编号依次从 1 到 n 。现要将奇数编号与偶数编号的圆盘分别转移到柱 B 和柱 C 上。转移规则仍然是每次移动一个, 始终保持上面的比下面的小。一共要移动多少次?

解 设 n 为偶数 1) 先把 $n-1$ 个盘通过 B 移到 C

2) 把第 n 个盘移到 B

3) 把 $n-3$ 个盘通过 B 移到 A

4) 把第 $n-2$ 个盘移到 B

对 n 为奇数时上述四步仍然成立, 但是 B、C 对调。 $\therefore k(n) = k(n-1) + 1 + k(n-3) + 1 + k(n-3)$

其中 $k(1)=1, k(2)=2, k(3)=5$ $h(k)$ 为 Hanota 数列。

$$\therefore k(n) - k(n-3) = 2^{n-1} + 2^{n-3}$$

$$2[k(n-1) - k(n-4)] = 2^{n-1} + 2^{n-3}$$

可得特征方程: $(x-2)(x^3-1)=0$ 解得 $x_1=1, x_2=2, x_3=\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ $k(n) = A2^n + B + C \cos n \cdot \frac{2}{3}\pi + D \sin n \cdot \frac{2}{3}\pi$

代入初值可解得 $K(n) = \frac{5}{7}2^n - \frac{2}{3} - \frac{1}{21} \cos n \cdot \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{7} \sin n \cdot \frac{2}{3}\pi$

2.57 题 相邻位不同为 0 的 n 位二进制数，总共多少个 0？

解 设相邻位不同为 0 的 n 位 2 进制数的个数为 h_n 个，这些数中一共有 a_n 个 0，

当 n 位二进制数最高位为 1 时，符合条件的 n 位二进制数的个数为 h_{n-1}

最高位为 0 时，次高位必为 1 符合条件的 n 位二进制数的个数为 h_{n-2} $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$ ， $h_1=2, h_2=3, h_0=1$.

即 h_n 是 F 数列

$$h_n = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

$$\therefore a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + h_{n-2},$$

$$a_2 = 2, a_3 = 5, a_1 = 1, a_0 = 0$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = h_n$$

特征方程为： $(x^2 - x - 1)^2 = 0$ 解得 a、b 为 2 重根。 设 $a_n = (An + B)\alpha^n + (Cn + D)\beta^n$ 分析上式结构可得：

$$(An + B)\alpha^n + (Cn + D)\beta^n$$

$$= [A(n-1) + B]\alpha^{n-1} + [C(n-1) + D]\beta^{n-1}$$

$$+ [A(n-2) + B]\alpha^{n-2} + [C(n-2) + D]\beta^{n-2}$$

$$+ (\alpha^n + \beta^n) / \sqrt{5}$$

$$\therefore A\alpha^{n-1} - 2A\alpha^{n-2} + \alpha^n / \sqrt{5} = 0$$

$$C\beta^{n-1} - 2C\beta^{n-2} - \beta^n / \sqrt{5} = 0$$

把 n=2 代入可解得： $A = \alpha/5$, $C = \beta/5$ 代入 a_n

$$a_n = (\alpha/5 \cdot n + B)\alpha^n + (\beta/5 \cdot n + D)\beta^n$$

可得方程组 $\begin{cases} B + D = 0 \\ (\alpha/5 + B)\alpha + (\beta/5 + D)\beta = 1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} B = \frac{2}{5\sqrt{5}} \\ D = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \end{cases}$

$$\therefore a_n = (\frac{\alpha}{5} \cdot n + \frac{2}{5\sqrt{5}})\alpha^n + (\frac{\beta}{5} \cdot n - \frac{2}{5\sqrt{5}})\beta^n$$

$$= \left[\frac{1}{5} \cdot (\alpha \cdot n + \frac{2}{\sqrt{5}}) \cdot \alpha^n \right]$$

2.59 设一矩阵 $ABCD$ ，其中 $AB:AD = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ，作 C_1B_1 使 AB_1C_1D 是一正方形，试证 B_1C_1CB 和 $ABCD$ 相似，

试证继续这一过程可得一个与原矩形相似的矩形序列

解：... 把 AD 看成 1 则 AB 为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$B_1B = AB - AB_1 = AB - AD$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{AD}{B_1B} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{AB}{AD}$$

$$\therefore B_1C_1CB \approx ABCD$$

继续重复此过程，那么下一个矩形同理会相似于 B_1C_1CB ，所以也会相似于原矩形。

2.60: 试证: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

解: 用数学归纳法 1. $n=2$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 成立 2. 设 $n=k$ 时成立即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$

当 $n=k+1$ 时 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$ 由 1,2 得证题设成立.

2.61 求长度为 n 的符号串,只在最后两位才出现 00 的符号串总数.

解: 设所求的串的个数为 a_n , 相邻不同为 0 的串的个数为 b_n

$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$; $a_n = b_{n-3}$ 则 $a_n = b_{n-4} + b_{n-5}$, 即 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

特征方程为: $x^2 - x - 1 = 0$. 特征根为: $x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ 通解为: $a_n = A * ((1 + \sqrt{5})/2)^n + B * ((1 - \sqrt{5})/2)^n$

由初始条件 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 得 $a_n = ((1 - \sqrt{5})^2 / 2(5 - \sqrt{5}))((1 + \sqrt{5})/2)^n + (2/(5 - \sqrt{5}))((1 - \sqrt{5})/2)^n$

2.62 在一圆周上取 n 个点, 过一对定点可做一弦, 不存在三弦共点的现象, 求弦把圆分割成几部分?

解: $n-1$ 个点把圆分为 a_{n-1} 部分, 加上第 n 个点则对于前 $n-1$ 个点来说, 每选取 3 个点都有 3 条弦构成一个三角形, 而中间的一点和第 n 点的连线把中间点与第 n 点间的弦分为两个部分, 增加了一个域。而对第 n 点与其他 $n-1$ 点的连线有把第 1、 $n-1$ 、 n 点构成的三角形分为 n 个域。

$$\therefore a_n = a_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n - 1$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8,$$

$$\therefore a_n = A_0 + A_1 \binom{n}{1} + A_2 \binom{n}{2} + A_3 \binom{n}{3} + A_4 \binom{n}{4}$$

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 0 \\ A_4 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

2. 63 求 n 位二进制数中相邻两位不出现 11 的数的个数

解 设所求个数为 a_n , 第 n 位为 0 或 1, 是 0, 有 a_{n-1} ; 是 1, 则 $n-1$ 位为 0, 有 a_{n-2} .

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$$

$$\text{特征方程为 } x^2 - x - 1 = 0, \therefore x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = Ax_1^n + Bx_2^n \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}A + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}B = 2 \end{cases} \text{代入得} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

2.64 从 n 个文字中取 k 个文字做允许重复的排列, 但不允许一个文字连续出现 3 次, 求这样的排列的数目。

答案: 设所求为 a_k 则 $a_k = (n-1)a_{k-1} + (n-1)a_{k-2}$ $a_1 = n, a_2 = n^2, a^3 = n^3 - n$

特征方程为: $x^2 - (n-1)x - (n-1) = 0$ 解得 $x = (n-1) \pm \sqrt{(n-1)(n-3)} / 2$

可设 $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ 把初值代入即可求得 $A, B \Rightarrow a_n$

2.65 求 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$ 的和。

解: $\because \Delta S_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (1+n)^4$ 是 n 的 4 次方

$\therefore S_{n+1}$ 满足递推关系 $S_n - 6S_{n-1} + 15S_{n-2} - 20S_{n-3} + 15S_{n-4} - 6S_{n-5} + S_{n-6} = 0$

$$\text{代入可解得} \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 15 \\ A_3 = 50 \\ A_4 = 60 \\ A_5 = 24 \end{cases} \quad S_n = 1 \binom{n}{1} + 15 \binom{n}{2} + 50 \binom{n}{3} + 60 \binom{n}{4} + 24 \binom{n}{5}$$

2.66. 题 求矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$ 。

$$\text{解: 设} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & a_n \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$-3^{n-1} + 2a_{n-1} = 3a_{n-1} - 2^{n-1}, a_{n-1} = 2^{n-1} - 3^{n-1}, a^n = 2^n - 3^n \quad \text{所以} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 2^{100} - 3^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

2.67 题 (1) $S_n = \sum_{k=0}^n k(k-1),$ (2) $S_n = \sum_{k=0}^n k(k+2),$ (3) $S_n = \sum_{k=0}^n k(k+1)(K+2)$

解: (1) 因为 $s_n - s_{n-1} = n(n-1)$ ①

同理 $s_{n-1} - s_{n-2} = (n-1)(n-2)$ ②

①-②: $s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2} = 2(n-1)$ ③

同理: $s_{n-1} - 2s_{n-2} + s_{n-3} = 2(n-2)$ ④

③-④: $s_n - 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3} = 2$ ⑤

同理: $s_{n-1} - 3s_{n-2} + 3s_{n-3} - s_{n-4} = 2$ ⑥

⑤-⑥ $s_n - 4s_{n-1} + 6s_{n-2} - 4s_{n-3} + s_{n-4} = 0$

所以特征方程为: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ $X=1$ 是 4 重根

$$s_n = (A + Bn + Cn^2 + Dn^3)1^n$$

$$A=0 \quad B+C+D=0 \quad 2B+4C+8D=2 \quad 3B+9C+27D=8$$

解方程得 $A=0 \quad B=-\frac{1}{3} \quad C=0 \quad D=\frac{1}{3}$ 所以 $s_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$

(2) 和第一题同理

(3) $s_n = s_{n-1} + n(n+1)(n+2)$ 有二项式定理可设 $s_n = An + B \binom{n}{2} + C \binom{n}{3} + D \binom{n}{4}$

$$S_1=A=6 \quad S_2=2A+B=30 \quad S_3=3A+3B+C=90 \quad S_4=4A+6B+4C+D=210$$

$$\text{联立解} \quad A=6 \quad B=18 \quad C=18 \quad D=6 \quad \text{所以} \quad s_n = 6n + 18 \binom{n}{2} + 18 \binom{n}{3} + 6 \binom{n}{4}$$

2.68 题 在一个平面上画一个圆，然后一条一条地画 n 条与圆相交的直线。当 r 是大于 1 的奇数时，第 r 条直线只与前 $r-1$ 条直线之一在圆内相交。当 r 是偶数时，第 r 条直线与前 $r-1$ 条直线在圆内部相交。如果无 3 条直线在圆内共点，这 n 条直线把圆分割成多少个不重叠的部分？

解 当 r 是奇数 (>1) 时 $a_r = a_{r-1} + 2 = a_{r-2} + r + 1$

当 r 是偶数时 $a_r = a_{r-1} + (r-1) + 1 = a_{r-2} + r + 2$

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{(n+1)(n+3)}{4} & n \text{ 为奇数} \\ \frac{n(n+6)}{4} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

2.69 题 用 a_n 记具有整数边长、周长为 n 的三角形的个数。(1) 证明：
$$a_n = \begin{cases} a_{n-3}, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ a_{n-3} + \frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4}, & \text{当 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

(2) 求序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数。

解: (1) ①. 当 n 是偶数时 对所有符合条件的 a_{r-3} 来说，每边增加 1 各单位，则可构成符合条件的 a_r 。 $\therefore a_r \geq a_{r-3}$

设短边为 a 、 b ，长边为 c ，则 $(a+b)-c \geq 2$ 即 $a+b-2 \geq c-1$ ，对所有符合条件的 a_r 来说，每边减少 1 各单位，

则可构成符合条件的 a_{r-3} $\therefore a_r \leq a_{r-3}$ $\therefore a_r = a_{r-3}$

②. 当 n 为奇数时 由 I 的讨论知， a_r 比 a_{r-3} 多了 $a+b-c=1$ 的三角形。

而这种三角形可知 $a+b = \frac{n+1}{2}$ 当 $\frac{n+1}{2}$ 能被 2 整除时，这种三角形有 $\frac{n+1}{4}$ 个

当 $\frac{n+1}{2}$ 不能被 2 整除时，这种三角形有 $\frac{n-1}{4}$ 个 $\therefore a_n = a_{n-3} + \frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4}$

$$(2) \quad a_n = a_{n-3} + \left[\frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{8} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{8} \right]$$

下面求它的普通母函数： $a_{2k} = a_{2k-3}$ ， $a_{2k+1} = a_{2k-2} + \frac{2k+1+(-1)^{k+1}}{4}$

$$\text{记 } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$\text{那么 } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k} = a_0 + a_2 x^2 + x^3 \sum_{k=2}^{+\infty} a_{2k-3} x^{2k-3} = x^3 g(x)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = a_1 x + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_{2k-2} + \frac{2k+1+(-1)^{k+1}}{4} \right) x^{2k+1} \\ &= x^3 \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-2} x^{2k-2} + \frac{x}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) x^{2k} - \frac{x}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} (-x^2)^k = x^3 f(x) + \frac{x}{4} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k+1} - x \right)' - \frac{x}{4} \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 \right) \\ &= x^3 f(x) + \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)} \end{aligned}$$

$$\text{所以: } f(x) = \frac{x^7}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)} \quad g(x) = \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}$$

$$\{a_n\} \text{ 的普通母函数就是 } f(x) + g(x) = \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

2.70 (a) 证明边长为整数、最大边长为 L 的三角形的个数是 $\begin{cases} \frac{1}{4}(L+1)^2 & \text{当 } L \text{ 是奇数时} \\ \frac{1}{4}(L+2)L & \text{当 } L \text{ 是偶数时} \end{cases}$

(b) 设 f_n 记边长不超过 $2n$ 的三角形的个数, 而 g_n 记边长不超过 $2n+1$ 的三角形的个数, 求 f_n 和 g_n 的表达式。

解: (a) $l=1$ 时, 只有一种可能 (即 3 边都是 长度为 1)。 $\frac{1}{4}(l+1)^2 = 1$

$l=2$ 时, 有两种可能 (即“1, 2, 2”、“2, 2, 2”)。 $\frac{1}{4}2(2+2) = 2$

设三角形的 3 边边长为 x, y, z , 且 $x \leq y \leq z, x+y \geq z$ 。

$l=2k+1$ 时 $x+y=2k+2$ 时, 有 $k+1$ 种方案, 即“1, $2k+1$ ”、“2, $2k$ ”、……、“ $k+1, k+1$ ”。

$x+y=2k+3$ 时, 有 k 种方案, 即“2, $2k+1$ ”、“3, $2k$ ”、……、“ $k+1, k+2$ ”。

$x+y=2k+4$ 时, 有 k 种方案, 即“3, $2k+1$ ”、“4, $2k$ ”、……、“ $k+2, k+2$ ”。

……

$x+y=4k+1$ 时, 有 1 种方案, 即“ $2k, 2k+1$ ”。

$x+y=4k+2$ 时, 有 1 种方案, 即“ $2k+1, 2k+1$ ”。

$$\text{总和} = 2 \sum_{i=1}^k (i+k+1) = 2 * \frac{1}{2} k(k+1) + k+1 = (k+1)^2 = \frac{1}{4}(l+1)^2$$

$l=2k$ 时 $x+y=2k+1$ 时, 有 k 种方案, 即“1, $2k$ ”、“2, $2k-1$ ”、……、“ $k, k+1$ ”。

$x+y=2k+2$ 时, 有 k 种方案, 即“2, $2k$ ”、“3, $2k-1$ ”、……、“ $k+1, k+1$ ”。

$x+y=2k+3$ 时, 有 k 种方案, 即“3, $2k$ ”、“4, $2k$ ”、……、“ $k+2, k+2$ ”。

……

$x+y=4k-1$ 时, 有 1 种方案, 即“ $2k-1, 2k$ ”。

$x+y=4k$ 时, 有 1 种方案, 即“ $2k, 2k$ ”。

$$\text{总和} = 2 \sum_{i=1}^k (i) = k(k+1) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l+2}{2} = \frac{1}{4} \cdot l(l+2)$$

$$(b) \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{4}(k+1)^2, & \text{当 } k \text{ 是奇数} \\ \frac{1}{4}k(k+1), & \text{当 } k \text{ 是偶数} \end{cases}$$

$$f_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k, g_n = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k$$

$$f_n - g_{n-1} = a_{2n} = \frac{1}{4}(2n)(2n+2) = n(n+1) \quad g_n - f_n = a_{2n+1} = \frac{1}{4}(2n+2)^2 = (n+1)^2$$

$$g_n - g_{n-1} = a_{2n+1} + a_{2n} = (n+1)^2 + n(n+1) \quad f_n - f_{n-1} = n(n+1) + n^2$$

$$a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=6,$$

$$f_1=a_1+a_2=3, f_2=13, f_0=0,$$

$$f_3=34,$$

$$g_1=a_1+a_2+a_3=7, g_2=22, g_0=1,$$

$$g_3=50,$$

$$f_n = A_0 + A_1 n + A_2 \binom{n}{2} + A_3 \binom{n}{3}$$

$$A_0=0, A_2=0,$$

$$f_2=13=6+A_2 \Rightarrow A_2=7$$

$$f_3=34=9+21+A_3 \Rightarrow A_3=7$$

$$g_n = B_0 + B_1 + B_2 \binom{n}{2} + B_3 \binom{n}{3},$$

$$B_0=1,$$

$$g_1=7=1+B_1 \Rightarrow B_1=6,$$

$$g_2=22=B_0+2B_1+B_2 \Rightarrow B_2=9$$

$$g_3=50=B_0+3B_1+3B_2+B_3 \Rightarrow B_3=4,$$

$$\therefore f_n = 3n + 7 \binom{n}{2} + 4 \binom{n}{3} \quad g_n = 1 + 6n + 9 \binom{n}{2} + 4 \binom{n}{3}$$

2.71 第一类 stirling 数 $[x]^n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$, $[x+y]^n = \sum_{r=0}^n c(n, r)[x]^{n-r}[y]^r$.

证明: 左边 $= [x+y]^n = (x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n-1)$

$$\text{右边} = \sum_{r=0}^n c(n, r) [x]^{n-r} [y]^r = \binom{n}{0} [x]^n [y]^0 + \binom{n}{1} [x]^{n-1} [y]^1 + \cdots + \binom{n}{n} [x]^0 [y]^n$$

$$\therefore s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k) \therefore \text{左边} = \text{右边}.$$

2.72 试证: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, 有 $\frac{[m]^n}{n} = c(n+m-1, m-1)$ 个非负整数解, 其中 m 和 n 都是正整数。

解: 该题为第一类斯特林数, 略。

2.73 已知非负整数 S_1, S_2, \cdots, S_m , 求满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n, x_i \geq S_i, i=1, 2, \cdots, m$ 的整数解的数目。

解: 由题已知: $x_i \geq S_i, i=1, 2, \cdots, m$ 故: $x_i - S_i \geq 0, i=1, 2, \cdots, m$

$$\text{因为: } x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \text{所以有: } (x_1 - S_1) + (x_2 - S_2) + \cdots + (x_m - S_m) = n - \sum_{i=1}^m S_i$$

$$\text{设: } y_i = x_i - S_i \quad \text{则: } y_1 + y_2 + \cdots + y_m = n - \sum_{i=1}^m S_i, \quad y_i \geq 0 \text{ 其方案数为: } \binom{m + (n - \sum_{i=1}^m S_i) - 1}{n - \sum_{i=1}^m S_i}$$

$$\text{所以, 满足 } x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n, x_i \geq S_i, i=1, 2, \cdots, m \text{ 的整数解的数目为: } \binom{m + (n - \sum_{i=1}^m S_i) - 1}{n - \sum_{i=1}^m S_i}$$

2.75 设 $F_1=F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ (a) 证明 $F_n = F_k F_{n-k+1} + F_{k-1} F_{n-k}, n > k > 1$ 。

(b) 证明 $F_m | F_n$ 的充要条件是 $m | n$ 。[m 被 n 整除]

(c) 证明 $F_m F_n = F_{n+m-2} + F_{m+n-6} + F_{m+n-10} + \cdots + \begin{cases} F_{m+n-1}, & \text{当 } n \text{ 是奇数} \\ F_{m+n-2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数} \end{cases}, m \geq n \geq 2$ 。

(d) 证明 $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, (m,n) 为 m, n 的最大公约数。

解: (a) 证 (对 k 用归纳法) $k=2$ 时, $F_n = F_2 F_{n-2+1} + F_1 F_{n-2}$, 等式成立。假设对于 k, 等式成立。

下证对于 $k+1$ 等式成立。

$$\begin{aligned} \text{由归纳假设, } F_n &= F_k F_{n-k+1} + F_{k-1} F_{n-k} = F_k (F_{n-k} + F_{n-k-1}) + F_{k-1} F_{n-k} = (F_k + F_{k-1}) F_{n-k} + F_k F_{n-k-1} \\ &= F_{k+1} F_{n-k} + F_k F_{n-k-1} \quad \text{证毕。} \end{aligned}$$

(b) 证 对 m 用数学归纳法。m=0 时, 命题成立。假设对小于 m 的正整数, 命题成立, 设 $m \geq n$,

$F_m = F_n F_{m-n+1} + F_{n-1} F_{m-n}$, $F_n | F_m \leftrightarrow F_n | F_{n-1} F_{m-n}$, 因 $(F_n, F_{n-1}) = 1$, 故 $F_n | F_{n-1} F_{m-n} \leftrightarrow F_n | F_{m-n}$, 有归纳假设

$$F_n | F_{m-n} \leftrightarrow n | m - n \leftrightarrow n | m$$

(c) 证 对 n 用归纳法. $n=2$ 时, 等式成立.

$n=3$ 时, $F_m F_3 = F_{m+3-2} + F_{m-3+1} = F_{m+1} + F_{m-2} = F_m + F_{m-1} + F_m - F_{m-1} = 2 F_m$, 等式成立.

假设对小于 n 的正整数, 等式成立. $F_{m-2} F_{n-2} = F_{m-2+n-2-2} + F_{m-2+n-2-6} + \cdots + \begin{cases} F_{m-2-(n-2)+1}, & \text{当 } n \text{ 是奇数,} \\ F_{m-2-(n-2)+2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$

利用 $F_m F_n = F_{m+n-1} - F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1} - (F_{m-1+n-1-1} - F_{m-2} F_{n-2}) = F_{m+n-2} + F_{m-2} F_{n-2}$

$$\text{故有 } F_m F_n = F_{m+n-2} + F_{m+n-6} + \cdots + \begin{cases} F_{m-n+1}, & \text{当 } n \text{ 是奇数,} \\ F_{m-n+2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

(d) 证 对 $\max\{m, n\}$ 用归纳法, 当 $m=n$ 时, 等式成立. 设 $m>n$, 假设对小于 $\max\{m, n\}$ 的正整数, 等式成立.

$$\text{因 } F_m = F_n F_{m-n+1} + F_{n-1} F_{m-n}, (F_m, F_n) = (F_{n-1} F_{m-n}, F_n) = (F_{m-n}, F_n) = F(m-n, n) = F(m, n)$$

2. 76. 从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的数, 设此选取的方案为 $f(n, k)$.

(a) 求 $f(n, k)$ 的递推关系. (b) 用归纳法求 $f(n, k)$.

(c) 若设 1 与 n 算是相邻的数, 并设在此假定下从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的 k 个数的方案数为 $g(n, k)$, 利用 $f(n, k)$ 求 $g(n, k)$.

解 (a)

$$\begin{aligned} f(n, k) &= f(n-1, k) + f(n-2, k-1) \\ &= \binom{n-k+1}{k} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(n, k) &= f(n-1, k) + f(n-2, k-1) \\ &= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} = \binom{n-k+1}{k} \end{aligned}$$

$$g(n, k) = f(n, k) - f(n-4, k-2) = \binom{n-k+1}{k} - \binom{n-4-k+2+1}{k-2}$$

$$\stackrel{(c)}{=} \binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2} = f(n, k) - f(n, k-2)$$

2.77 题 设 $S(n, k)$ 是第二类 stirling 数, 证明: $S(n+1, m) = \sum_{k=m-1}^n \binom{n}{k} S(k, m-1)$

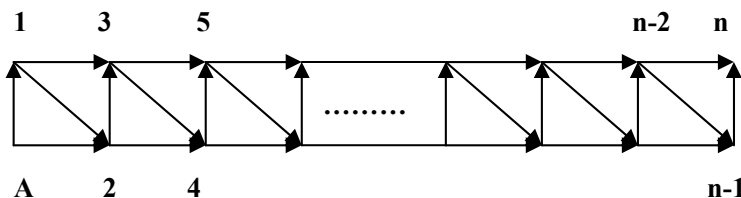
证明: 当 $n=2, m=2$ 左边 $= s(3, 2) = 2s(1, 1) + s(2, 1) = 3$ 右边 $= c(2, 1)s(1, 1) + c(2, 2)s(2, 1) = 2+1=3$ 左边=右边 等式成立

假设当 $n=nk$ 时等式成立 即 $s(nk+1, m) = \sum c(nk, m)s(k, m-1)$

当 $n=nk+1$ 时 $s(nk+2, m) = ms(nk+1, m) + s(nk+1, m-1) = \sum mc(nk, k)s(k, m-1) + s(nk+1, m-1) = \sum c(nk+1, m)s(k, m-1)$

即等式成立 $s(nk+1, m) = \sum c(n, k)s(k, m-1)$

2.78 题 求下图中从 A 点出发到 n 点的路径数.



解: 设从 A 点到 n 点的路径数为 a_n , 则得到递推公式为 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 其中 $a_1=1, a_2=2$

$$\text{特征方程为 } x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{解得特征根为 } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{故 } a_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

$$\text{将初始值 } a_1=1, a_2=2 \text{ 代入上式, 解得 } A = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, B = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \quad \text{所以, } a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

3.1 题 某甲参加一种会议，会上有 6 位朋友，某甲和其中每人在会上各相遇 12 次，每二人各相遇 6 次，每三人各相遇 3 次，每五人各相遇 2 次，每六人各相遇一次，1 人也没有遇见的有 5 次，问某甲共参加了几次会议

解：设 A_i 为甲与第 i 个朋友相遇的会议集， $i=1, \dots, 6$ 。则

$$\begin{aligned} |\bigcup A_i| &= 12 \binom{6}{1} - 6 \binom{6}{2} + 4 \binom{6}{3} - 3 \binom{6}{4} + 2 \binom{6}{5} - \binom{6}{6} \\ &= 28 \end{aligned}$$

故甲参加的会议数为: $28+5=33$ 。

3.2 题 求从 1 到 500 的整数中被 3 和 5 整除但不被 7 整除的数的个数。

解：设 A_3 : 被 3 整除的数的集合 A_5 : 被 5 整除的数的集合 A_7 : 被 7 整除的数的集合 所以

$$\begin{aligned} |\overline{A_7} \cap A_5 \cap A_3| &= |A_3 \cap A_5| - |A_7 \cap A_3 \cap A_5| \\ &= \left\lfloor \frac{500}{3 \times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 33 - 4 = 29 \end{aligned}$$

3.3.题 n 个代表参加会议，试证其中至少有 2 人各自的朋友数相等。

解:每个人的朋友数只能取 $0, 1, \dots, n-1$ 。但若有人朋友数为 0，即此人和其他人都不认识，

则其他人的最大取数不超过 $n-2$ 。故这 n 个人的朋友数的实际取数只有 $n-1$ 种可能。 $\left\lfloor \frac{n}{n-1} \right\rfloor = 2$,

所以至少有 2 人的朋友数相等。

3.4 题 试给出下列等式的组合意义。

$$\begin{aligned} (a) \quad \binom{n-m}{n-k} &= \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \binom{n-l}{k} \quad n \geq k \geq m \\ (b) \quad \binom{l-1}{n-m-1} &= \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j} \binom{n-m-j+l-1}{l} \\ (c) \quad \binom{m+l-1}{m-1} &= \binom{m+l}{m} - \binom{m+l}{m+1} + \binom{m+l}{m+2} - \dots + (-1)^l \binom{m+l}{m+l} \end{aligned}$$

解: (a) 从 n 个元素中取 k 个元素的组合，总含有指定的 m 个元素的组合数为 $\binom{n-m}{k-m} = \binom{n-m}{n-k}$ 。

设这 m 个元素为 a_1, a_2, \dots, a_m , A_i 为不含 a_i 的组合 (子集), $i=1, \dots, m$ 。

$$\begin{aligned} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}| &= \binom{n-l}{k} \\ \binom{n-m}{n-k} &= \left| \bigcap_{i=1}^m \overline{A_i} \right| = \binom{n}{k} + \sum_{l=1}^m (-1)^l \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in \mathcal{C}(m, l)} \left| \bigcap_{j=1}^l A_{i_j} \right| = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \binom{n-l}{k} \end{aligned}$$

(b) 令 $k = n - m$ 。 l 个相同的球放入 k 个不同的盒子里。

每个盒子不空的方案数为 $\binom{l-1}{k-1}$ 。设 A_i 为第 i 个盒子为空的方案集, $i=1, 2, \dots, k$ 。

$$\begin{aligned} |A_i| &= \binom{k-1+l-1}{l}, \left| \bigcap_{s=1}^j A_{i_s} \right| = \binom{k+l-1}{l} \\ \binom{l-1}{k-1} &= \left| \bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right| = \binom{k+l-1}{l} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \sum_{(i_1, \dots, i_j) \in \mathcal{C}(k, j)} \left| \bigcap_{s=1}^j A_{i_s} \right| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k-j+l-1}{l} \end{aligned}$$

l 个相同的球放入 n 个不同的盒子里，指定的 m 个盒子为空，

其他 k 个盒子不空的方案数为 $\binom{l-1}{n-m-1}$ 。

(c) 设 A_i 为 $m+l$ 个元中取 $m+i$ 个, 含特定元素 a 的方案集; N_i 为 $m+l$ 个元中取 $m+i$ 个的方案数. 则:

$$N_i = \binom{m+l}{m+i}, \quad |A_i| = \binom{m+l-1}{m+i-1}, \quad |\overline{A_i}| = \binom{m+l-1}{m+i} \quad |A_{i+1}| = |\overline{A_i}| = \binom{m+l-1}{m+i}, \quad |A_i| = N_i - |\overline{A_i}|, \quad i = 0, 1, \dots, l.$$

$$|A_0| = N_0 - |\overline{A_0}| = N_0 - |A_1| = N_0 - (N_1 - |\overline{A_1}|) = N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^l N_l.$$

3.5 题 设有三个 7 位的二进制数: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$, $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7$, $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7$. 试证存在 整数 i 和 j , $1 \leq i \leq j \leq 7$, 使得下列之一必定成立: $a_i = a_j = b_i = b_j$, $a_i = a_j = c_i = c_j$, $b_i = b_j = c_i = c_j$.

证: 显然, 每列中必有两数字相同, 共有 $\binom{3}{2}$ 种模式, 有 0 或 1 两种选择. 故共有 $\binom{3}{2} \cdot 2$ 种选择. $\binom{3}{2} \cdot 2 = 6$.

现有 7 列, $\lceil \frac{7}{6} \rceil = 2$. 即必有 2 列在相同的两行选择相同的数字, 即有一矩形, 四角的数字相等.

3.6 题 在边长为 1 的正方形内任取 5 个点试证其中至少有两点, 其间距离小于 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

证: 把 1×1 正方形分成四个 $(1/2) \times (1/2)$ 的正方形. 如上图. 则这 5 点中必有两点落在同一个小正方形内.

而小正方形内的任两点的距离都小于 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

3.7 题 在边长为 1 的等边三角形内任取 5 个点试证其中至少有两点, 期间距离小于 $1/2$.

证: 把边长为 1 的三角形分成四个边长为 $1/2$ 的三角形, 如上图:

则这 5 点中必有两点落在 同一个小三角形中. 小三角形中任意两点间的距离都小于 $1/2$.

3.8 题 任取 11 个整数, 求证其中至少有两个数它们的差是 10 的倍数.

证: 整数的个位数的可能取值为 0, 1, ..., 9. 共 10 种可能. 11 个整数中必有 2 个数的个位数相同, 即这两个数之差能被 10 整除.

3.9 题 把从 1 到 326 的 326 个整数任意分为 5 个部分, 试证其中有一部分至少有一个数是某两个数之和, 或是另一个数的两倍.

证: 用反证法. 设存在划分 $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 = [1, 326]$, P_i 中没有数是两数之差. 则有一 P_i 中至少有 66 个数, $A = \{a_1, \dots, a_{66}\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{66}$, 以下按书上 174 页的例题证明可得.

3.10 题 A、B、C 三种材料用作产品 I、II、III 的原料, 但要求 I 禁止用 B、C 作原料, II 不能用 B 作原料, III 不允许用 A 作原料, 问有多少种安排方案? (假定每种材料只做一种产品的原料)

解: 按题意可得如下的带禁区的棋盘, 其中有阴影的表示禁区.

棋盘多项式为: $R() = R()R() = (1+x)(1+3x+x^2) = 1+4x+4x^2+x^3$ 故方案数 $= 3! - 4 \cdot 2! + 4 \cdot 1! - 1 \cdot 0! = 1$

3.11 题 n 个球放到 m 个盒子中去, $n < (m/2)(m-1)$, 试证其中必有两个盒子有相同的球数.

解: 设 m 个盒子的球的个数是 a_1, \dots, a_m , 各不相等, 且有 $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m$. 则有 $a_2 \geq 1$, $a_m \geq m-1$, 故 $\geq 1+2+\dots+m-1 = (m/2)(m-1)$, 与 $n < (m/2)(m-1)$ 相矛盾! 所以必有两个盒子的球数相等.

3.12 题 一年级有 100 名学生参加中文、英语和数学的考试, 其中 92 人通过中文考试, 75 人通过英语考试, 65 人通过数学考试; 其中 65 人通过中、英文考试, 54 人通过中文和数学考试, 45 人通过英语和数学考试, 求通过 3 门学科考试的学生数.

解: 设: 通过中文考试的 92 人为集合 A, 通过英语考试的 75 人为集合 B, 通过数学考试的 65 人为集合 C

则 $|A \cap B| = 65$, $|A \cap C| = 54$, $|B \cap C| = 45$

由 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

故 $|A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$

$= 100 - 92 - 75 - 65 + 65 + 54 + 45 = 32$ 通过 3 门学科考试的学生数为 32.

3.13 题 试证(1) $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$ (2) $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| = |C| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$

证明: (1) $A \cap B = \emptyset$ $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B| = |B|$ $A \cap B \neq \emptyset$ $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$

$A = B$ $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B| = 0$ 所以 $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$ 成立

(2) $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| = |\overline{A \cup B} \cap C|$ $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

又因为 由 (a) 得 原式 $= |C| - |(A \cup B) \cap C| = |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

3.14 题 $N = \{1, 2, \dots, 1000\}$, 求其中不被 5 和 7 除尽, 但被 3 除尽的数的数目。

解: 设 A_3 为被 3 除尽的集合 A_5 为被 5 除尽的集合 A_7 为被 7 除尽的集合

$$\begin{aligned} \text{所以由题意得: } |A_3 \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}| &= |A_3| - |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 333 - 66 - 47 + 9 = 229 \end{aligned}$$

3.15 题 $N = \{1, 2, \dots, 120\}$, 求其中被 2, 3, 5, 7 中 m 个数除尽的数的数目, $m=0, 1, 2, 3, 4$ 。求不超过 120 的素数的数目。

解: (1) $m=0$ 时 不被 2, 3, 5, 7 除尽的数为

$$\begin{aligned} |\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}| &= 120 - |A_2| - |A_3| - |A_5| - |A_7| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| \\ &\quad + |A_5 \cap A_3| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| \\ &\quad - |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 8) - (4 + 2 + 1 + 1) = 27 \end{aligned}$$

$$m=0 \text{ 时 } |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3} \right\rfloor = 20 \quad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5} \right\rfloor = 12 \quad |A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 7} \right\rfloor = 8$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3 \times 7} \right\rfloor = 5 \quad |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{5 \times 7} \right\rfloor = 3$$

$$M=3 \text{ 时 } |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 4 \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1 \quad |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1$$

$$M=4 \text{ 时 } |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 0$$

(2) 因为 $11^2 = 121$, 故不超过 120 的合数必然是 2, 3, 5, 7 的倍数

而且不超过 120 的合数的因子不可能超过 11

设 A_i 为不超过 120 的数的倍数集合, $i=2, 3, 5, 7$

排除 2, 3, 5, 7 这四个数又包含 1 这个非素数

2, 3, 5, 7 本身是素数, 故所求不超过 120 的素数个数应该为 $27 + 4 - 1 = 30$

3.16 题 求正整数 n 的数目, n 除尽 10^{40} , 20^{30} 中的至少一个数。

解: N 为正整数 设 $A_{10^{40}}$ 为被 10^{40} 除尽 $A_{20^{30}}$ 为被 20^{30} 除尽

$$A_{10^{40}} = \left\lfloor \frac{n}{10^{40}} \right\rfloor \quad A_{20^{30}} = \left\lfloor \frac{n}{20^{30}} \right\rfloor \quad |A_{10^{40}} \cap A_{20^{30}}| = \left\lfloor \frac{n}{10^{40} \times 20^{30}} \right\rfloor$$

3.19 题 {1000, 1001, ..., 3000}, 求其中是 4 的倍数但不是 100 的倍数的数目。

解: 设 A, B 分别是 4, 100 的倍数。

$$|A| = \left\lfloor \frac{3000-1000}{4} \right\rfloor = 500 \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{3000-1000}{4 \times 100} \right\rfloor = 5 \quad |A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B| = 500 - 5 = 495$$

3. 20 题 在由 a,a,a,b,b,b,c,c,c,组成的排列中, 求满足下列条件的排列数, (1) 不存在相邻 3 元素相同;

解: A, B, C 分别表示 aaa,bbb,ccc 则:

$$|A| = |B| = |C| = \frac{7!}{(3!)^2} \quad |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = \frac{5!}{3!} \quad |A \cap B \cap C| = 1 \quad |S| = \frac{9!}{(3!)^3}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| = \frac{9!}{(3!)^3} - 3 * \frac{7!}{(3!)^2} + 3 * \frac{5!}{3!} - 1$$

(2) 相邻两元素不相同。

3. 21 题 求从 O (0, 0) 点到 (8, 4) 点的路径数。已知 (2, 1) 到 (4, 1) 的线段, (3, 1) 到 (3, 2) 的线段被封锁

解: 设 A 点坐标 (2, 1), B 点坐标 (4, 1), C 点坐标 (3, 1), D 点坐标 (3, 2)

令 a 为从 O 点到 M 点经过 AC

b 为从 O 点到 M 点经过 CB

c 为从 O 点到 M 点经过 CD

$$|s| = c(12, 4) =$$

$$|a| = c(3, 1) * c(8, 3) = 168 \quad |b| = c(4, 1) * c(7, 3) = 140 \quad |c| = c(4, 1) * c(7, 2) = 84$$

$$|a \cap b| = 105$$

$$|a \cap c| = 63$$

$$|b \cap c| = 0$$

$$|a \cap b \cap c| = 0$$

$$|\bar{a} \cap \bar{b} \cap \bar{c}| = |s| - (|a| + |b| + |c|) + (|a \cap b| + |a \cap c| + |b \cap c|) - |a \cap b \cap c| = 271$$

3. 22 题 求满足下列条件 $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $3 \leq x_1 \leq 9, 0 \leq x_2 \leq 8, 7 \leq x_3 \leq 17$ 的整数解数目。

解: 令 $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2, y_3 = x_3 - 7$

$$0 \leq z_1 = 6 - y_1, 0 \leq z_2 = 8 - y_2, 0 \leq z_3 = 17 - y_3,$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 6 - y_1 + 8 - y_2 + 17 - y_3 = 31 - (y_1 + y_2 + y_3) = 41 - (x_1 + x_2 + x_3) = 21$$

则所求整数解的数目: $c(23, 21) = c(23, 2) = 253$

3.24 题 求满足下列条件的整数解数目: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ $1 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 7, 4 \leq x_3 \leq 8, 2 \leq x_4 \leq 6$

解: 设 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 - 4, y_4 = x_4 - 2, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$ $0 \leq y_1 \leq 4, 0 \leq y_2 \leq 7, 0 \leq y_3 \leq 4, 0 \leq y_4 \leq 4,$

$$\text{若不附加上界条件的解根据公式应为 } \binom{13+4-1}{13} = \binom{16}{13} = \binom{16}{3} = 560$$

对于有上界的问题要作变换 $\varepsilon_1 = 4 - y_1, \varepsilon_2 = 7 - y_2, \varepsilon_3 = 4 - y_3, \varepsilon_4 = 4 - y_4, \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_3 \geq 0, \varepsilon_4 \geq 0,$

于是问题变为 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 6$

$$\text{整数解的数目 } \binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

3.25 题 证明满足下列条件： $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ $0 \leq x_i \leq k$, $i=1,2,\dots,n$ 的整数解数目为

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - (k+1)i + n - 1}{r-1}$$

解：S, $|S| = \binom{r+n-1}{r}$ 令 S 中具有 $x_1 \geq k+1$ 的子集 A_1 , \dots , $x_i \geq k+1$ 的子集 A_i , 问题转化为求 $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

$$|A_1| = \binom{r+n-k-2}{r-1} \quad |A_1 \cap A_2| = \binom{r+n-2k-4}{r-1} \quad \dots \quad |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - (k+1)i + n - 1}{r-1}$$

3.26 题 证明满足下列条件： $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ $1 \leq x_i \leq k$, $i=1,2,\dots,n$ 的整数解数目为 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - ki - 1}{r-1}$

证明：令 $y_i = x_i - 1$ 则 $y_1 + y_2 + \dots + y_n = r - n$ $0 \leq y_i \leq k$, $i=1,2,\dots,n$

$$\text{由上题知 } \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - (k+1)i + n - 1}{r-1} \text{ 代入得整数解数目为 } \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - ki - 1}{r-1}$$

3.27 题 求 n 对夫妻排成一行，夫妻不相邻的排列数。

解：(1) n 个人排成一行方案数为 $n!$ N 对夫妻排成一行方案数为 $n!2^n$

令 A_i 第 i 对夫妻相邻而坐的集合， $i=1,2,\dots,n$

(2) $2n$ 个人排成一行方案数为 $(2n)!$

$|A_i|$ 相当于将第 i 对夫妻作为一个对象排列一行然后换位，故 $|A_i| = 2(2n-1)!$

$|A_1 \cap A_2| = 2^2(2n-2)!$ \dots $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 2^n n!$

$$\text{故夫妻不相邻排列数为 } N = (2n)! - 2 \binom{n}{1} (2n-1)! + 2^2 \binom{n}{2} (2n-2)! - \dots + (-1)^n 2^n n! = \sum_{h=0}^n 2^h \binom{n}{h} (2n-h)!$$

3.28 题 设 $p, q \in \mathbb{N}$, p 是奇数，现在有 pq 个珠子，着 q 种颜色，每种颜色有 p 个珠子。假定相同颜色的珠子无区别。试分别求满足以下条件的珠子的排列数。(1) 同颜色的珠子在一起；(2) 同颜色的珠子处于不同的块；(3) 同颜色的珠子最多在两个块。

解：同颜色的珠子在一起的排列数 $p!$

同颜色的珠子处于不同的块的排列数 $p!q^p$

同颜色的珠子最多在两个块的排列数 A_i 相当于第 i 个某色球处于不同块

$|A_1| = q(pq)!$ $|A_1 \cap A_2| = q^2(pq-1)!$ \dots $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p| = q^p(pq-p)!$

$$N = q(pq)! - q^2 \binom{p}{1} (pq-1)! + \dots + (-1)^p q^p (pq-p)! = \sum_{i=0}^p q^i \binom{p}{i} (pq-i)$$

3.29 题 将 r 个相同的球放进 n 个有标志的盒子里，无一空盒，求方案数。

解：先拿出 n 个球在每个盒子里放一个球，再将剩下的 $r-n$ 个球无限制地放入 n 个盒子中。

根据定理 1.3, $r-n$ 个球无限制地放到 n 个盒子中共有 $C(n+r-n-1, r-n) = C(r-1, r-n) = C(r-1, n-1)$ 种放法。

3.30 题 试证 $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+r-i-1}{r} = \binom{r-1}{n-1}$, $r, n \in \mathbb{N}$, $r > n$

解：设共有 $r-1$ 个不同的红球和 n 个不同的白球，从中取出 $n-1$ 个球。

等式左边每个累加项（不考虑符号）可化为： $C(n, i)C(n+r-1-i, n-1-i)$ 表示从这些球中取 i 个白球和 $n-1-i$ 个红球，表示至少取 i 个白球的组合数，即 $\beta(i)$ 。

等式右边表示只从 $r-1$ 个红球中取出 $n-1$ 个球的组合数，表示恰好取 0 个白球的组合数，即 $\alpha(0)$ 。

根据广义容斥定理 $\alpha(0) = \beta(0) - \beta(1) + \beta(2) - \dots + (-1)^{n-1} \beta(n-1)$ 。原式证毕。

3.32 题 $m, r, n \in \mathbb{N}$, 满足 $m \leq r \leq n$, 试证 $\binom{n-m}{n-r} = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{n-i}{r}$

证明: 从 n 个元素中取 k 个的组合, 总含有制定的 m 个元素的组合数为 $\binom{n-m}{k-m} = \binom{n-m}{n-k}$,

设这 m 个元素为 a_1, a_2, \dots, a_m , A_k 为不含 a_k 的组合 (子集), $i=1, \dots, m$.

$$|A_{K1} \cap A_{K2} \cap \dots \cap A_{Ki}| = \binom{n-i}{r} \quad \binom{n-m}{n-r} = \left| \bigcap_{i=1}^m A_i \right| = \binom{n}{r} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \cdot \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_i) \in \Phi(m, i)} (-1)^i \left| \bigcap_{j=1}^i A_{K_{k_j}} \right| \binom{r}{k}$$

3.33 题 求证 a) $D(n, r, k) = \binom{r}{k} D(n-k, r-k, 0)$

$$\begin{aligned} \text{证明: 右边} &= \frac{\binom{r}{k}}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! \frac{\binom{r-k}{0}}{(n-k-r+k)!} \sum_{i=0}^{r-k-0} (-1)^i \binom{r-k-0}{i} (n-0-i)! \\ &= \binom{r}{k} * \frac{1}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! = \text{左边} \end{aligned}$$

$$c) D(n, n, k) = n * D(n-1, n-1, k) + (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } & \frac{n!}{(n-k)!k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k)!}{(n-k-i)!i!} (n-k-i)! \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^i \frac{(n-k-1)!}{(n-k-i-1)!i!} (n-k-i-1)! + (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ & \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^i \frac{1}{i!} + (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ & \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^i \frac{1}{i!} + (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{得证。} \end{aligned}$$

$$d) \binom{k}{t} D(n, r, k) = \binom{r}{t} D(n-t, r-t, k-t)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } & \frac{\binom{k}{t} \binom{r}{k}}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! = \frac{\binom{r}{t} \binom{r-t}{k-t}}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! \\ & \frac{k!r!}{(k-t)!t!(r-k)!k!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! = \frac{r!(r-t)!}{(r-t)!t!(r-k)!(k-t)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! \\ & \frac{r!}{(k-t)!t!(r-k)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! = \frac{r!}{t!(r-k)!(k-t)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! \quad \text{反过程可证。} \end{aligned}$$

e) $D(n, r, k) = r * D(n-1, r-1, k) + D(n-1, r, k)$

证明:
$$\frac{\binom{r}{k}}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)!$$

$$= \frac{r * \binom{r-1}{k}}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-k-1} (-1)^i \binom{r-k-1}{i} (n-k-i-1)! + \frac{\binom{r}{k}}{(n-r-1)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i-1)!$$

$$\frac{r!}{(r-k)!k!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)! =$$

$$\frac{r * \frac{(r-1)!}{(r-1-k)!k!} \sum_{i=0}^{r-k-1} (-1)^i \binom{r-k-1}{i} (n-k-i-1)! + \frac{r!}{(r-k)!k!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i-1)!}{(n-r)!}$$

$$\sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \frac{(n-k-i)!}{(r-k-i)!i!} = \sum_{i=0}^{r-k-1} (-1)^i \frac{(n-k-i-1)!}{(r-k-i-1)!i!} + (n-r) \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \frac{(n-k-i-1)!}{(r-k-i)!i!}$$

当 $i=0$ 时, 各项左右相等, 对应当 $n=r-k-1$ 时候, 左右也相等。剩余左右当 $i=r-k$ 时候也相等, 得证。

3.35 题 令 $D_n(k)=D(n,n,k)$, 试证 (a) $D_n(k)=\binom{n}{k} D_{n-k}$

证明: $D_n(k) = D(n, n, k) = \frac{\binom{n}{k}}{(n-n)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)! = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)!$

$$D_{n-k} = \binom{n-k}{0} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)! = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)!$$

$$\therefore D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$$

(b) $\binom{n}{1} D_1 + \binom{n}{2} D_2 + \dots + \binom{n}{n} D_n = n!$

证明: 上面等式可变换为: $\binom{n}{n-1} D_1 + \binom{n}{n-2} D_2 + \dots + \binom{n}{0} D_n = n!$

考虑 n 元素的集合 $S=\{1,2,\dots,n\}$, 设 T 为 S 的排列全体, 则 $|T|=n!$ 。

设 A_i 是 S 中恰有 i 个在其自然位置的 n -排列全体, 则 $A_i \cap A_j = \emptyset$ $T = \bigcup_{i=0}^n A_i$ 所以, $|T| = \sum_{i=0}^n |A_i|$

而, $|A_i| = \binom{n}{i} D_{n-i}$ 因此, $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D_{n-i}$

(c) $(k+1) D_{n+1}(k+1) = (n+1) D_n(k)$

$$\text{证明: } D_{n+1}(k+1) = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{0!} \sum_{i=0}^{n+1-k-1} (-1)^i \binom{n+1-k-1}{i} (n+1-k-1-i)! = \binom{n+1}{k+1} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)!$$

$$(k+1) D_{n+1}(k+1) = (k+1) \binom{n+1}{k+1} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)! = (n+1) \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)! = (n+1) D_n(k)$$

3.37 题 试证: 对于素数 $p_1, i \geq 1, \phi(p^i) = p^i - p^{i-1}$

$$\text{证明: 根据 } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ 则 } \phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$n = p^i$$

$$\phi(p^i) = \phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^i \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^i - p^{i-1}$$

3.38 题 试证 (a) $\sum_{d|n} \phi(d) = n$

$$\text{证明: } \phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \quad \text{根据反演定理可得} \quad n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

3.42 题 一组人有 1990 个人, 每个人至少有 1327 个朋友, 试证其中四位, 使得彼此都是好朋友

解: 令外边的都与括号里的 1327 个是朋友, $1 \{1989\}$, 从里边不是外边人朋友的找出 $2 \{1988\} \dots 663 \{1327\}$

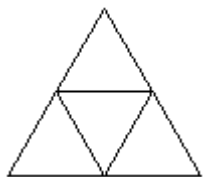
再从里边找人出来 $662, 1 \{ \{1\}, 1236 \}$ 直至 $663 \{ \{663\} 664 \}$

按上面的方法继续 $663 \{ \{663\} \{663\} 1 \}$

把里边的 1 拿出外边一个进去为 $662, 1 \{ \{1\} \{663\} \{663\} \}$

这样 1 与里边的都是朋友, 括号里前面括号的人与后边的都是朋友, 所以一定有四个人彼此是朋友。

3.43 题 在边长为 1 的等边三角形内任取 5 个点试证其中至少有两点, 期间距离小于 1/2。



证: 把边长为 1 的三角形分成四个边长为 1/2 的三角形, 如上图:

则这 5 点中必有两点落在 同一个小三角形中. 小三角形中任意两点间的距离都小于 1/2。

3.44 题 单位圆圆周上任意 $n+1$ 个不同的点至少存在两点其间距离不超过 $2 \sin \frac{\pi}{2}$ 。

证明: 把圆周等分成 n 段相等的弧, 每段弧所对的最大弦长为 $S = 2 \sin \frac{\pi}{2}$, 把 $n+1$ 个点放到这 n 个圆弧上,

根据鸽巢原理, 必有两个点在同一段弧上, 这两点的距离必小于等于 $2 \sin \frac{\pi}{2}$ 。

3.46 题 任给 5 个整数, 试证其中必存在 3 个数的和被 3 除尽。

证明: 所有整数可分为 3 类, $\text{mod} 3 = 0, \text{mod} 3 = 1, \text{mod} 3 = 2$, 分别标记为 A, B, C。

如果在这五个数中, 任何一类的个数大于等于 3, 那么在这个类中任取三个元素, 它们的和一定能被三整除。

如果没有任何一类的个数大于等于 3, 那么只能是 2, 2, 1 的组合。

如果 A 类元素只有一个, 那么 B 类, C 类各有 2 个元素。A, B, C 各类各取一个, 它们的和一定能被三整除。

如果 B 类元素只有一个, 那么 A 类, C 类各有 2 个元素。A, B, C 各类各取一个, 它们的和一定能被三整除。

如果 C 类元素只有一个, 那么 A 类, B 类各有 2 个元素。A, B, C 各类各取一个, 它们的和一定能被三整除。

3.45 题 边长为 1 的正方形内任取 9 点, 试证存在 3 个不同的点, 由此构成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$ 。

证明: 把正方形等分为 8 个三角形, 每个三角形的面积为 $\frac{1}{8}$, 产生以正方形中心的 8 条边,

把 9 个点放到 8 条边上, 根据鸽巢原理, 必有两个点在同一条边上, 所以可以得到一个三角形的面积小于 $\frac{1}{8}$ 。

3.47 题 A 是 $n+1$ 个数的集合, 试证其中必存在两个数, 它们的差被 n 除尽。

证明: 构造一个序列 $S_1 = a_2 - a_1, S_2 = a_3 - a_1, \dots, S_n = a_{n+1} - a_1, S_i \neq S_j \quad (i \neq j)$,

有两种可能 (1) 若有一个 $S_m \quad (1 \leq m \leq n)$ 是 n 的倍数, 则定理得证。

(2) 设在序列中没有任何一个元素是 n 的倍数, 则 S_1, S_2, \dots, S_n

除 n 的余数为 $1, 2, 3, \dots, n-1$, 因为有 n 个数, 由鸽巢原理得, 必有两个数的余数是相同的,

不妨设 S_i, S_j 的余数相同, 则 $S_i = a_{i+1} - a_1 = bn + r \dots \dots \dots (1)$

$S_j = a_{j+1} - a_1 = cn + r \dots \dots \dots (2)$

两式相减的 $a_{i+1} - a_{j+1} = (b-c)n$ 原式得证。

3.48 题 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\} \quad k \geq 1, a_i$ 是正整数, $k=1, 2, 3, \dots, 2k+1$, 试证 A 的任意排列: $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{2k+1}}$

恒有 $\prod_{j=1}^{2k+1} (a_{i_j} - a_j)$ 为偶数。

证明: 根据鸽巢原理, $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}$ 这 $2k+1$ 个数中必有 $k+1$ 个数同为偶数或同为奇数,

不妨设这 $k+1$ 个数为 a_1, a_2, \dots, a_{k+1} , 且同为奇数, 则 $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}$ 中至多有 k 个偶数,

根据鸽巢原理, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k+1}}$ 中至少有一个是奇数, 奇数和奇数之差为偶数,

所以 $a_{i_j} - a_j$ 中必有一个是偶数, 同理, 有 $k+1$ 个数同为偶数时也成立, 所以原式 $\prod_{j=1}^{2k+1} (a_{i_j} - a_j)$ 为偶数. 得证。

3.49 题 A 是 $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 中任意 $n+1$ 个数, 试证明至少存在一对 $a, b \in A$, 使下面结果成立: $a|b$

解: 假设取出任意 $n+1$ 个数, 将它们每一个都拆成 2 的几次幂乘以一个奇数的形式;

那么一共能拆出 $n+1$ 个奇数 (每个数对应一个奇数)。

然而, 在上述 A 集合之中, $2n$ 个元素一共只有 n 个奇数。

所以根据鸽巢原理, 能够得出上述 $n+1$ 个奇数中至少有两个是相等的。

而这两个数必然一个能被另一个整除。—) 得证。

3.54 题 二维空间的 (x, y) 点的坐标 x 和 y 都是整数的点称为格点, 任意 5 个格点的集合 A, 试证 A 中至少存在两点, 它们的中点也是格点。

证明: 任意 5 个格点, 对于 x, y , 5 个整数中至少存在 3 个数为偶数或者为奇数

它们的中点就是两个点的对应数的和的一半,

1, 当存在三个偶数时, 则其中任意两个数的和的一半能被 2 整除, 余下的两个奇数的和也能被 2 整除, 即存在两个格点。

2, 当存在四或五个偶数时, 则四个偶数中任意取两个的数和是 2 的倍数, 即存在两个格点

反之存在奇数的情况也一样。

所以存在至少存在两点, 它们的中点也是格点。

3.55 题 令 A 为等差数列 1, 4, 7, 10, ..., 100 中任选 20 个不同的数, 试证其中至少存在两个数, 它们的和为 104.

证明: 在这 34 个数中, 除去 1 和 52, 余下的 4 和 100, 7 和 97, ..., 49 和 55, 它们的和为 104, 共 16 对, 从 A 中任取 20 个数, 除去 1 和 52, 从余下的 16 对数中取 18 个, 根据鸽巢原理, 其中至少存在一对数的和为 104

3.56 题 平面上 6 个点, 不存在 3 点共一条直线, 其中必存在 3 点构成一个三角形, 有一内角小于 30° 。

证明: 首先任意选三个点构成一个三角形, 把平面分成三角形内和三角形外两部分, 根据鸽巢原理, 剩下的三个至少有两个点在三角形内或三角形外, 假设至少两个点在三角形内, 由于没有三个点共线,

(1) 当有两个点在三角形内时, 一个三角形至少存在一个内角是锐角, 这两点把三角形的这个锐角内角分成三等分, 则至少有一个角是小于 30° 的, 即存在一个内角小于 30° 的三角形的

(2) 当有三个点在三角形内时, 由(1)知, 肯定存在一个内角小于 30° 的三角形的

同理在三角形外也有同样的结论。

3.57 题 n 是大于等于 3 的整数, 则下列数的集合: $\{2-1, 2^2-1, 2^3-1, \dots, 2^{n-1}-1\}$ 中存在一数被 n 除尽。

解: 我认为此题有争议, 当 $n=4$ 时, 数的集合是 $\{2-1, 2^2-1, 2^3-1\}$ 即: $\{1, 3, 7\}$ 都不能被 4 除尽。

3.61 题 n 各单位各派两名代表去出席一会议。2n 位代表围一圆桌坐下。试问:

(1) 各单位代表并排坐着的方案是多少? (2) 各单位的两人互不相邻的方案数又是多少?

解: (1) 方案数 $= (n-1)!2^n$

(2) 设第 i 个单位的代表相邻的方案数为 $A_i, i=1, 2, \dots, n$

$$\left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{I \in \mathcal{C}(n, k)} \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2n-2k-1)! 2^k$$

3.62 题 一书架有 m 层, 分别放置 m 类不同种类的书, 每层 n 册。先将书架上的图书全部取出清理。清理过程要求不打乱所有的类别。试问: (1) m 类书全不在各自原来层次上的方案数有多少?

(2) 每层的 n 本书都不在原来位置上的方案数等于多少?

(3) m 层书都不在原来层次, 每层 n 本书也不在原来位置上的方案数又有多少?

解(1): m 个对象的错排问题: $m! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^m \frac{1}{m!} \right) \times (n!)^m$

解(2): 如果某类书不在原来的层上, 则对该层的 n 本书全排列即可;

如果某类书在原来的层上, 则对 n 本书进行错排即可:

$$\sum_{k=0}^m C_m^k \times k! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{1}{k!} \right) \times (n!)^k \times \left(n! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \right)^{m-k}$$

解(3): $m! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^m \frac{1}{m!} \right) \times \left(n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \right)^m$

3.63 题 $m+1$ 行 $\begin{bmatrix} m+1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1$ 列的格子同 m 种颜色着色, 每格着一种颜色, 其中必有一个 4 角同色的矩形。

证: 每列有 (m+1) 行, 只有 m 种颜色, 故一列中必有两格同色。同色的 2 个格子的行号有 $\binom{m+1}{2}$ 种取法。

有 m 种色, 故有 $m \binom{m+1}{2}$ 种同色模式, 现有 $m \binom{m+1}{2} + 1$ 列, 必有两列的同色模式相同。

即由这两列的对应行上有 4 个格子同色, 正好是一个矩形的 4 个角上的格子。

3.64 题 两名教师分别对 6 名学生同时进行两门课程的面试（每名教师各管一门课程）每名学生每门面试的时间都是半个小时，共有多少不同的面试顺序？

解：先对第一门课的学生进行排列，然后再排第二门课的顺序，那么第二门课程的排序就将成为一个错排问题，对每一个第一门课的排列，都对应一系列的错排，即如下
第一门课的顺序有 $6!$ 种；
第二门课的顺序有（根据例 3-10，错排问题）： $D_6=6!((1/2!)-(1/3!)+(1/4!)-(1/5!)+(1/6!))=265$ ；
故总顺序有 $6! \times 265$ 种。

3.65 题： $X=\{0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ 从 X 中任意取 7 个元素，则其中必有两个元素之和等于 10。

解： $|X|=11$ ，分为 6 组 $\{0,10\}, \{1,9\}, \{2,8\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{5\}$ 。
从这 11 个数中去 7 个根据鸽巢原理必有一组取两个数且去两个数的组不能是 $\{5\}$ （因为 $\{5\}$ 只有一个元素），无论在其他五组中那个组里，取两个数它们的和都是 10，所以得证。

3.66 题 每边长为 3 的等边三角形内径取 10 个点，试证至少有一对点距离小于 1。

解：把边长为 3 的三角形分成 9 个边长为 1 的三角形，根据鸽巢原理， $((10-1)/9)+1=2$ 。则 10 个点中必有两点落在同一小三角形内，而小三角形中任意两点距离小于 1。证毕

3.68 题 n 项任务分给 r 个人，若 $n < \frac{r}{2}(r-1)$ ，则至少有两人任务数相同。

解：利用反证法，假设，没有两个人有相同的任务数。假设第一个人的任务数为 m_1 ，第二个人的任务数为 m_2 ，……，

第 r 个人的任务数为 m_r 。则有 $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$ ， $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_r$ 。

则有， $0+1+2+\dots+r-1 = \frac{r(r-1)}{2} \leq m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$ ，与假设 $n < \frac{r(r-1)}{2}$ 矛盾。则证毕。

3.69 题 试证 $(mn)!$ 被 $(m!)^n$ 整除。

证明：我认为本题肯定缺少已知的某个或几个条件。

例如，当 $m=2, n=1$ 时， $(mn)!=2!=2$ 右边， $(m!)^n=(2!)^2=4$

2 不能被 4 整除，命题错误。

3.70 题 从 $(0, 0)$ 点出发，每走一步任意到达左、右、上、下相邻格子点。试问 10 步后返回到原点，共有多少种不同的回路。

解：因为从 $(0,0)$ 点出发，又回到原点，那么可以知道在这一路径中向上走的步数和向下走的步数相等；向左走的步数和向右走的步数相等。

设横向走的步数为 m ，纵向走的步数为 n ，则 $m+n=10$ 。

由以上分析还可得知， m 和 n 都是偶数。

那么， m 的取值只能是 0, 2, 4, 6, 8, 10，而 n 的取值是 $10-m$ 。

当 m 为确定的某一数时，则回路构成的步的方案实际上也就是 m, n 构成的一个排列，

因为同一个方向走无区别，因此应去掉这种排列。例如， $m=0$ 时，回路个数为：
$$\frac{10!}{(\frac{m}{2})! (\frac{m}{2})! (\frac{n}{2})! (\frac{n}{2})!} = \frac{10!}{5!5!}$$

因此，将各种情况相加，得到的回路个数为：

$$\begin{aligned} & \frac{10!}{5!5!} + \frac{10!}{1!1!4!4!} + \frac{10!}{2!2!3!3!} + \frac{10!}{3!3!2!2!} + \frac{10!}{4!4!} + \frac{10!}{5!5!} \\ &= 2 \times \left(\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 4} \right) \\ &= 2 \times (36 \times 7 + 100 \times 63 + 400 \times 63) \\ &= 2 \times 31752 \\ &= 63504 \end{aligned}$$

3.73 题 4 位十进制数 $a b c d$, 试求 $a+b+c+d=31$ 的数的数目。

解: 因为 $a b c d$ 分别是 4 位数的十进制位数, 因此必有 $0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9, 0 \leq d \leq 9$

$$\text{设 } \varepsilon_1 = 9 - a, \varepsilon_2 = 9 - b, \varepsilon_3 = 9 - c, \varepsilon_4 = 9 - d$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 36 - (a + b + c + d) = 36 - 31 = 5$$

$$\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_3 \geq 0, \varepsilon_4 \geq 0$$

这个问题可以看作 4 取 5 允许重复组合的组合数。整数解得数目为 $\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{3} = 56$

上试中还得去掉 $a=0$ 时的情况。

当 $a=0$ 时, $b+c+d=31$ 由 b, c, d 的限制条件这是不可能的。因此, 满足条件的解得个数是 56 个。

3.75 题 已知 n 是正整数, $d_1 = 1, d_2, \dots, d_r = r$ 是 n 的除数, 即 $d_i | n, i = 1, 2, \dots, r$, 试证: $\sum_{d_i} \phi(d_i) = n$

证明: 利用 Mobius 反演定理, 有 $\phi(n) = n * \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|n} \mu(d) * \frac{n}{d}$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \phi(n) = g(n) \\ f\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{n}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow f(n) = n \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} \phi(d) = n$$

$$\text{即: } n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

3.76 题 试证欧拉函数有 $\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$

$$\text{解: } \phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \left\{1 - \sum_{i=1}^t (-1)^t \sum_{I \in C(k, t)} \left(\prod_{i \in I} p_i\right)^{-1}\right\} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

$$(\text{当 } n > 1, n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, n_1 = p_1 p_2 \cdots p_n)$$

$$(\text{当 } n = 1, \text{显然成立})$$

3.77 题 设 f 满足 $f(m, n) = f(m)f(n), g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 试证: $g(m, n) = g(m)g(n)$

证明: 因为若 m 不同的除数为 $d_1, d_2, \dots, d_s; n$ 的除数为 $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_t$, 则

$$g(m) = \sum_{i=1}^s f(d_i) \quad g(n) = \sum_{j=1}^t f(\bar{d}_j)$$

因为 m 和 n 互素, 则 mn 的不同除数为 $d_i \bar{d}_j, i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, t$, 共 st 个, 且 d_i 和 \bar{d}_j 互素,

$$g(mn) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t f(d_i \bar{d}_j) = \sum_{i=1}^s f(d_i) \sum_{j=1}^t f(\bar{d}_j) = g(m)g(n)$$

4.1, 若群 G 的元素 a 均可表示为某一个元素 x 的幂, 即 $a=x^m$, 则称这个群为循环群, 若群的元素交换律成立. 即 $a, b \in G$ 满足, $a \cdot b = b \cdot a$

证明: 循环群也是群, 所以群的定义不用再证, 只需证明对于任意 $a, b \in G, G$ 是循环群, 有 $a * b = b * a$ 成立,
因为循环群中的元素可写成 $a=x^m$ 形式, 所以等式左边 $x^m \times x^n = x^{m+n}$, 等式右边 $x^n \times x^m = x^{m+n}, \therefore a \cdot b = b \cdot a$,
即所有的循环群都是ABEL群。

4.2 若 x 是群 G 的一个元素, 存在一最小的正整数 m , 使 $x^m=e$, 则称 m 为 x 的阶, 试证: $C=\{e, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$ 是 G 的一个子群。

证明: x 是 G 的元素, G 满足封闭性所以, x^k 是 G 中的元素 $C \in G$

再证 C 是群: 1、 $x^i, x^j \in C, x^i \cdot x^j = x^{i+j}$

若 $i+j \leq m-1$, 则 $x^{i+j} \in C$ 若 $i+j > m$, 那么 $x^{i+j} = x^{m+k} = x^m \cdot x^k = x^k \in C$ 所以 C 满足封闭性。

2、存在单位元 e .

3、显然满足结合性。

4、存在逆元, 设 $x^a \cdot x^b = e = x^m$ $x^b = x^{m-a}$ $x^a \in C, (x^a)^{-1} = x^b = x^{m-a}$

4.3 设 G 是阶为 n 的有限群, 则 G 的所有元素的阶都不超过 n 。

证明: 因为 G 中每有元素都能生成一个与元素等阶的子群, 子群的阶当然不能超过群 G 的阶;
所以则 G 的所有元素的阶都不超过 n 。

4.4 若 G 是阶为 n 的循环群, 求群 G 的母元素的数目, 即 G 的元素可表示 a 的幂: a^1, a^2, \dots, a^n 的元素 a 的数目。

证明: 若一个群 G 的每一个元都是 G 的某一固定元 a 的乘方, 我们就把 G 叫做循环群;

我们也说, G 是由元 a 所生成的, 并且用符号 $G = \langle a \rangle$ 来表示。所以就有一个这样的 a , 即就有一个母元素。

4.5 试证循环群 G 的子集也是循环群

证明: 根据子群的定义, 循环群 G 的子群应满足循环群 G 所满足的所有运算。所以其子群页应该是循环群。

4.6 若 H 是 G 的子群, x 和 y 是 G 的元素, 试证 $xH \cap yH$ 或为空, 或为 $xH=yH$

证明: $\because x, y \notin G$ 若 $xH \cap yH \neq \Phi$ 可知: 存在 $g \in xH, g \in yH$

由 $g \in xH$, 知存在 $h_1 \in H$, 有 $g = xh_1$;

由 $g \in yH$, 知存在 $h_2 \in H$, 有 $g = yh_2$;

从而有 $xh_1 = yh_2 \Rightarrow x = y(h_2 h_1^{-1})$ -----式 1

任取 $z \in xH$, 则存在 $h \in H$, 有 $z = xh$ -----式 2

将-式 1 代入-式 2: $z = y(h_2 h_1^{-1})h = y(h_2 h_1^{-1}h)$ -----式 3

$\because H$ 是子群, 有 $h_1, h_2, h \in H$ 可推知, $h_2 h_1^{-1}h \in H$ 从而 $y(h_2 h_1^{-1}h) \in yH$.

再由式 3 知 $z \in yH$, 这样我们就可推知 $xH \subseteq yH$

同理可推得 $yH \subseteq xH$

综上知道 $yH = xH$

4.7 若 H 是 G 的子群, $|H|=k$, 试证: $|xH|=k$, 其中 $x \in G$

证明: $\because |H|=k$ 设 $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_n\}$ 同时对于 $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$

当 $i \neq j$ 时, 有 $ah_i \neq ah_j$ (否则, 若有 $ah_i = ah_j$, 由消去律得 $h_i = h_j$, 矛盾)

表明 $\{h_1, h_2, h_3, \dots, h_n\}$ 为 n 个不同元 而 aH 恰有这些元组成,

故 $|aH|=k, \therefore |aH|=|H|$

4.8 有限群 G 的阶为 n , H 是 G 的子群, 则 H 的阶必除尽 G 的阶。

证明: G 的阶 n 既是有限的, 子群 H 的阶 i , 子群 H 的陪集的个数叫做 H 在 G 里的指数,

指数为 j ; i, j 都是有限正整数。 G 的 n 个元被分成 j 个右陪集,

而且由一个子群与它的每一个右陪集之间都存在一个一一映射, 则每一个右陪集都有 i 个元,

所以 $n = i * j$ 。即 H 的阶必除尽 G 的阶。

4.9 G 是有限群, x 是 G 的元素, 则 x 的阶必除尽 G 的阶。

证明: x 生成一个子群, 子群的阶是 x 的阶, 由上题得 x 的阶必除尽 G 的阶。

4.10 若 x 和 y 在群 G 作用下属于同一等价类, 则 x 所属于的等价类 E_x, y 所属的等价类 E_y , 有 $|E_x| = |E_y|$

解: 因为 x 和 y 在群 G 作用下属于同一等价类,

所以 x 和 y 在群 G 作用下存在置换 P_1 使 x 和 y 互相转变, 即 $E_x = E_y = \{x, y\}$ 所以 $|E_x| = |E_y|$ 。

4.11 有一个 3×3 的正方形棋盘, 若用红, 蓝色对这 9 个格进行染色, 要求两个格着红色, 其余染蓝色, 问有多少种着色方案?

解: 置换群的格式如下:

$(1)^9$ 等价的置换有一个 $(1)^3(2)^3$ 等价的置换有四个

$(1)^1(4)^2$, 等价的置换有两个 $(1)^1(2)^4$, 等价的置换有一个

$$P(x) = \frac{1}{8} [(r+b)^9 + 4(r+b)^3(r^2+b^2)^3 + 2(r+b)(r^4+b^4)^2 + (r+b)(r^2+b^2)^4]$$

$$\text{求 } r^2 b^7 \text{ 系数为 } M = 1/8 [C(9,2) + 4[C(3,1)C(3,3) + C(3,3)C(3,2)] + C(4,3)] = 8$$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4.12 试用贝思塞特引理解决 n 个人围一圆桌坐下的方案问题

解：n 个人沿圆桌坐下问题可以看做是 n 个人涂色问题

置换群有三种：

- 1, 不动置换有一个
- 2, 绕中心旋转置换有 (n-1) 个
- 3, 沿中线翻转的置换有 n 个 (若为偶数为 n/2 个)

所以置换群的总个数是 2n 个，又因为 n 种颜色对 n 个人着色方案为 n! 种

所以坐下问题的总方案为 $n!/2n = (n-1)!/2$ (N>=3)，当 n<3 时方案为 1 种。

4.13 对正六角形的 6 个顶点用 5 种颜色进行涂色，试问有多少种不同的方案

解：置换群有如下几种情况

- 1, 绕中心的不动置换其格式为 (1)⁶
- 2, 绕 o 点旋转 ±60° 的置换群有 2 个格式为 2(6)¹
- 3, 绕 o 点旋转 ±120° 的置换群的格式为 2(3)²
- 4, 绕 o 点旋转 ±180° 的格式为 1(2)³
- 5, 绕 xx' 的对称置换群格式为 3(1)²(2)²
- 6, 绕 yy' 的对称置换群格式为 3(2)³

$$\text{所以不同的方案数为 } m = \frac{1}{12} (5^6 + 2*5 + 2*5*5 + 5*5*5 + 3*5^4 + 3*5^3) = 1505$$

4.14 一个正 6 面体的 6 个面用 g, r, b, y 四种颜色涂染，求其中两个面用色 g，两个面用色 y，其余一面用 b，一面用 r 的方案数。

解：由题意知，应该用母函数形式的 Polya 具体计数定理解决。使正 6 面体重合的运动如下所示：

- 1, 不动置换：(1)(2)(3)(4)(5)(6)，格式 (1)⁶，只有 1 个。
 - 2, 绕 xx' 旋转 ±90° 对应的置换分别为：(1)(2 5 4 3)(6)，(1)(2 3 4 5)(6)，格式 (1)²(4)¹，共轭类 6 个。(因为有 3 个对面，所以有 6 个，以下类同)
 - 3, 绕 xx' 旋转 180° 对应的置换为：(1)(2 4)(3 5)(6)，格式 (1)²(2)²，共轭类 3 个。
 - 4, 绕 yy' 旋转 180° 对应的置换为：(1 6)(3 4)(2 5)，格式 (2)³，共轭类 6 个。
 - 5, 绕 zz' 旋转 ±120° 对应的置换分别为：(1 2 5)(3 6 4)，(1 5 2)(3 4 6)，格式 (3)²，共轭类 8 个。
- 所以置换群 |G| = 24,

由母函数形式的 Polya 具体计数定理可得：

$$L = \frac{1}{24} [(g+r+b+y)^6 + 6(g+r+b+y)^2(g^4+r^4+b^4+y^4) + 3(g+r+b+y)^2(g^2+r^2+b^2+y^2)^2 + 6(g^2+r^2+b^2+y^2)^3 + 8(g^3+r^3+b^3+y^3)^2]$$

但是只需要求出 g^2y^2rb 的系数 L' 即可，既只需要上式中的(1)(3)两项，

$$L' = C_2^6 C_2^4 C_1^2 C_1^1 + 3 C_1^2 C_1^1 C_1^2 C_1^1 = 192$$

$$\text{故方案数为: } \frac{192}{24} = 8.$$

4.15 对一个正 6 面体的 8 个顶点，用 y 和 r 两种颜色染色，使其中有 5 个顶点用色 y，其余 3 个顶点用色 r，求其方案数。

解：由题意知，应该用母函数形式的 Polya 具体计数定理解决。

使正 6 面体重合的运动，有以下几种情况：

- 1, 不动置换：(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)，格式 (1)⁸
- 2, 绕 xx' 旋转 ±90° 对应的置换分别为：(1 2 3 4)(5 6 7 8)，(1 4 3 2)(5 8 7 6)，格式 (4)²，共轭类 6 个。
- 3, 绕 xx' 旋转 180° 对应的置换为：(1 3)(2 4)(5 7)(6 8)，格式 (2)⁴ 共轭类 3 个。
- 4, 绕 yy' 旋转 180° 对应的置换为 (1 7)(2 6)(3 5)(4 8)，格式 (2)⁴，共轭类 6 个。
- 5, 绕 zz' 旋转 ±120° 对应的置换分别为：(1 3 6)(4 7 5)(2)(8)，(1 6 3)，(4 5 7)(2)(8)，格式 (3)²(1)²，共轭类 8 个。

由母函数形式的 Polya 具体计数定理可得：

$$L = 1/24 [(y+r)^8 + 6(y^4+r^4)^2 + 3(y^2+r^2)^4 + 6(y^2+r^2)^4 + 8(y^3+r^3)^2(y+r)^2]$$

但是只需要求出 y^5r^3 的系数 L' 即可，只需上式中的(1)(5)两项。

$$L' = C_5^8 + 8 C_1^2 C_1^1 = 72 \quad \text{故方案数为: } \frac{72}{24} = 3.$$

4.16 用 b, r, g 三种颜色的的 5 个珠子镶成的圆环共有几种不同的方案数。

解：由题意知，应该用 Polya 计数定理解决。

1, 不动置换：(v1)(v2)(v3)(v4)(v5), 循环节数 5。

2, 关于中心旋转 $\pm 72^\circ$ 对应的置换分别为：(v1 v2 v3 v4 v5), (v1 v5 v4 v3 v2) 共轭类 2 个，循环节数 1。

3, 关于中心旋转 $\pm 144^\circ$ 对应的置换分别为：(v1 v3 v5 v2 v4), (v1 v4 v2 v5 v3) 共轭类 2 个，循环节数 1。

4, 关于 xx' 对折，对应的置换为：(v1 v4)(v2 v3)(v5) 共轭类 5 个，循环节数 3。

所以置换群 $|G| = 10$,

由 Polya 计数定理可得：
$$L = \frac{1}{10} (3^5 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^1 + 5 \times 3^3) = 39$$
 即为所求方案数。

4.17 一个圆圈上有 n 个珠子,用 n 种颜色对这 n 个珠子着色,要求颜色数目不少于 n 的方案数是多少?

解：转换群包含以下三种格式：不动置换：个数 1 个

绕圆中心旋转置换：个数 n-1 个。(每次旋转 $360/n$ 度，直到旋转 (n-1) 个 $360/n$ 度)

沿对称的中线旋转置换：个数为 n 个。(n 为奇数时，有 n 个顶点对应 n 个中线。

n 为偶数时，由顶点构成的中线为 n/2 个，非顶点构成的中线为 n/2 个，总数为 n 个)

置换群的阶数为 $|G| = 1 + (n-1) + n = 2n$

问题相当于 n 种颜色对这 n 个珠子进行着色，总方案数为 n! 个

所求方案数
$$L = \frac{1}{2n} * n! = \frac{1}{2} * (n-1)! \quad (n \geq 3)$$

当 n=1,2 时，方案数为 1。

4.18 若以给两个 r 色球，量个 b 色的球，用它装在正六面体的顶点，试问有多少种不同的方案。

解：由题意知，应该用母函数形式的 Polya 具体计数定理解决。(见课本 333 页，例 4.15)

使正 6 面体重合的运动如下所示：

1, 不动置换：(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)，格式 $(1)^8$ ，只有 1 个。

2, 绕 xx' 旋转 $\pm 90^\circ$ 对应的置换分别为 (1 2 3 4)(5 6 7 8)(4 3 2 1)(8 7 6 5)，格式 $(4)^2$ ，共轭类 6 个。(因为 3 个对面，所以有 6 个，以下类同)

3, 绕 xx' 旋转 180° 对应的置换为：(1 3)(2 4)(5 7)(6 8)，格式 $(2)^4$ ，共轭类 3 个。

4, 绕 yy' 旋转 180° 对应的置换为：(1 7)(2 6)(3 5)(4 8)，格式 $(2)^4$ ，共轭类 6 个。

5, 绕 zz' 旋转 $\pm 120^\circ$ 对应的置换分别为：(1 3 6)(4 7 5)(8)(2)，(6 3 4)(5 7 4)(2)(8)，格式 $(3)^2(1)^2$ ，共轭类 8 个。

所以置换群阶数 $|G| = 24$ 。问题相当于两个 r 色的球，两个 b 色的球，四个 w 色的球对正六面体的八个顶点着色。

由母函数形式的 Polya 具体计数定理可得：

$$P = \frac{1}{24} [(b+r+w)^8 + 6(b^4 + r^4 + w^4)^2 + 9(b^2 + r^2 + w^2)^4 + 8(b+r+w)^2(b^3 + r^3 + w^3)^2]$$

但是只需要求出 $b^2 r^2 w^4$ 的系数 L 即可，既只需要上式中的(1)(3)两项，

$$L = \frac{1}{24} [C_2^8 C_2^6 + 9 C_1^4 C_1^3] = \frac{1}{24} * (420 + 108) = \frac{1}{24} * 528 = 22 \text{ 个} \quad \text{求解完毕。}$$

4.19 S_5 群中不同格式及其个数

解：5 的拆分有：00005, 00014, 00023, 00113, 00122, 01112, 11111 共七种，则

(5)1 共轭类有 $5!/5 = 24$ 个置换；

(1)1(4)1 共轭类有 $5!/4 = 30$ 个置换；

(2)1(3)1 共轭类有 $5!/(2 \cdot 3) = 20$ 个置换；

(1)2(3)1 共轭类有 $5!/(2! \cdot 3) = 20$ 个置换；

(1)1(2)2 共轭类有 $5!/(2! \cdot 2) = 15$ 个置换；

(1)3(2)1 共轭类有 $5!/(3! \cdot 2) = 10$ 个置换；

(1)5 共轭类有 $5!/5! = 1$ 个置换；

所以，共有不同格式 7 种，其总个数为 119。

4.21 在正四面体的每个面上都任意引一条高,有多少种方案。

解：问题相当于在 4 个面上用 3 种颜色着色，求方案数。使 4 个面重合的旋转群 G 的元素为：

(1)(2)(3)(4), (1)(234), (1)(432), (2)(134), (2)(431), (3)(124), (3)(421), (4)(123), (4)(321), (12)(34), (13)(24), (14)(23)

所以不同的方案数共有
$$\frac{1}{12} \times [3^4 + 8 \times 3^2 + 3 \times 3^2] = \frac{1}{12} \times [81 + 72 + 27] = 15$$

4.20 下图用两种颜色着色的问题，若考虑互换颜色使之一致的方案属同一类，问有多少不同的图象？

解：若考虑互换颜色使之一致的方案属同一类，讲义 4.4.3 例中 16 幅图像转换为 8 幅：

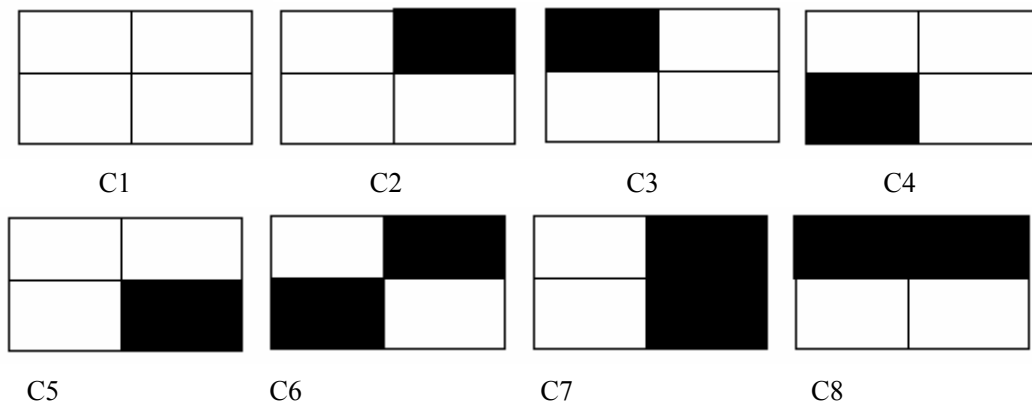
逆时针转 0° 为不动置换： $p_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$

逆时针转 90° ： $p_2=(1)(2\ 3\ 4\ 5)(6)(7\ 8)$

顺时针转 90° ： $p_3=(1)(5\ 4\ 3\ 2)(6)(8\ 7)$

转 180° ： $p_4=(1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$

$(8+2+2+4)/4=4$ (种方案)



4.22 一幅正方形的肖像与一个立方体的面一样大，6 副相同的肖像贴在立方体的 6 个面上有多少种贴法？

解：除了绕面心—面心轴旋转任何度数均不会产生不变的图象外，绕其他轴的旋转都相当于正六面体的面 4 着色。参照讲义 4.6 例 4.14 可得不同的方案数为 $M=[4^6+0\cdot 6\cdot 4^3+0\cdot 3\cdot 4^4+8\cdot 4^2+6\cdot 4^3]/24=192$

4.24 足球由正 5 边形与正 6 边形相嵌而成。(a)一个足球由多少块正 5 边形与正 6 边形组成？(b)把一个足球所有的正 6 边形都着以黑色，正 5 边形则着以其它各色，每个 5 边形的着色都不同，有多少种方案？

解：(a)5 边形面心与体心连一直线从另一 5 边形面心穿出。该直线为对称轴。

欠角= $360^\circ-(108^\circ+2\cdot 120^\circ)=12^\circ$; $720^\circ/12^\circ=60$ (个顶点); $60\cdot 3/2=90$ (条棱); $60/5=12$ (个 5 边形); $60\cdot 2/6=20$ (个 6 边形)

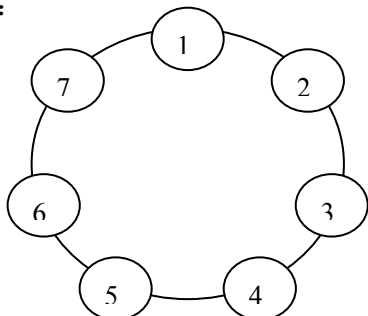
(b)一个顶点通过一个转动可与任一顶点重合，重合的方式只有 1 种，故转动群的阶为 60。

因为 5 边形着色均不同，所以除不变置换的任意旋转都不会产生不变图象，

12 个 5 边形着不同颜色共 12!种方案。所以共有 $12!/60=7983360$ 种方案。

4.27 一个项链由 7 颗珠子装饰成的，其中两颗珠子是红色的，3 颗是蓝色的，其余两颗是绿色的，问有多少种装饰方案？

解：



G: 1.单位元 $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$ 格式为 $(1)^7$,

2.顺时针转动一个格 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ 格式为 $(7)^1$, 顺时针转动两个格, 三个格.....六个格, 所得的置换的格式都为 $(7)^1$, 所以同格式的共轭类共有 6 个

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ \circlearrowleft \end{pmatrix}$ 不动, 其余对折, 得到置换 $(1)(2\ 7)(3\ 6)(4\ 5)$ 格式为 $(1)^1(2)^3$, 同理, 其余六个珠子分别不动, 又能得

到六个置换, 且所得的置换的格式都为 $(1)^1(2)^3$, 所以同格式的共轭类共有 7 个

$|G|=14$.

对应于 $g_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$, 用两红三蓝两绿镶嵌可有 $\binom{7}{2}*\binom{5}{3}=210$ 种方案, 在 g_0 的作用下变为自身,

对应于 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ 等 6 个 $(7)^1$ 格式的方案数为 0,

对应于 $(1)^1(2)^3$ 格式的方案数为 3!, 故 $N=\frac{1}{14}(210+7*3!)=18$ 种

4.23 凸多面体中与一个顶点相关的各面角之和与 2π 的差称为该顶点的欠角，证明凸多面体各顶点欠角之和为 4π 。

证：设 V , S , E 分别为顶点集，面集，边集。由欧拉定理 $V+S-E=2$ 。

设 a_{ij} 为与顶点 v_i 面 s_j 相关的面角， e_j 为 s_j 的边数，给定 s_j 则

$$\sum_{v_j \in V} a_{ij} = (e_j - 2)\pi$$

$$\sum_{v_j \in V} (2\pi - \sum_{s_j \in S} a_{ij}) = \sum_{v_j \in V} 2\pi - \sum_{v_j \in V} \sum_{s_j \in S} a_{ij} = 2V\pi - \sum_{v_j \in V} \sum_{s_j \in S} a_{ij} = 2V\pi - \sum_{s_j \in S} (e_j - 2)\pi = 2V\pi - \sum_{s_j \in S} e_j\pi + 2S\pi$$

$$= 2V\pi + 2S\pi - 2E\pi = 4\pi$$

所以欠角和为 4π 。

4.28 一个正八面体，用红蓝两色对 6 个顶点进行着色；用黄绿两种颜色对八个面进行染色，试求其中 4 个顶点为红色，两个顶点为蓝色，黄和绿的面各四面的方案数。

$$\text{解：} \frac{1}{24} \left(3 \times 3 \times \binom{4}{2} + 2 \times \binom{6}{4} + 6 \times 1 \times \binom{2}{1} + 6 \times \binom{3}{2} \times \binom{4}{2} \right) = 51$$