封卫兵，wbfeng@shu.edu.cn

- 本学期内容：第6章、第7章1节、第14章1-3节
- 作业10%，考勤10%，考试80%
- 作业：

  每节课后留一次作业，单双学号轮流交作业；
- 答疑地点：计算机楼1015室

第6章 图

计算机工程与科学学院　　封卫兵

第6章 图

6.1 图的基本概念

6.2 图的连通性

6.3 图的矩阵表示

6.4 几种特殊的图

6.1 图的基本概念

6.1.1 无向图与有向图

6.1.2 顶点的度数与握手定理

6.1.3 简单图、完全图、正则图、圈图、轮图、方体图

6.1.4 子图、补图

6.1.5 图的同构

6.1.1 无向图与有向图

无序对与无序积

无序对： 2 个元素构成的集合，记作 (a, b)

无序积： 设 A，B 为两个集合，$A \& B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

例： $A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2\}$

$A \& B = B \& A = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$

$A \& A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)\}$

$B \& B = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$

注： 当 $A \cap B = \varnothing$ 时，$|A \& B| = |A|\,|B|$，而 $|A \& A| = |A|(1+|A|)/2$.

6.1.1 无向图与有向图

多重集合

定义： 元素可以重复出现的集合．

重复度： 元素在多重集合中出现的次数．

例： $S = \{a, b, b, c, c, c\}$,

a 的重复度为 1

b 的重复度为 2

c 的重复度为 3

6.1.1 无向图与有向图

无向图

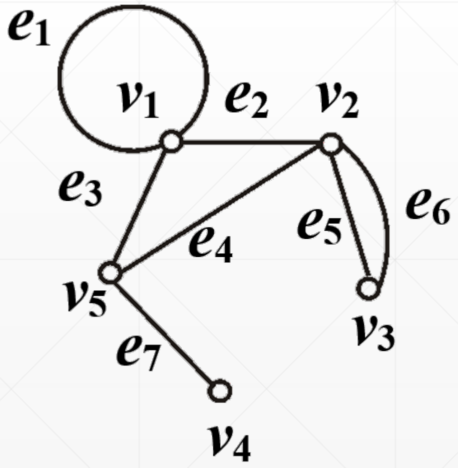
定义 无向图 $G = <V, E>$, 其中 $V \neq \varnothing$ 称为顶点集，其元素称为顶点或结点；E 是 $V \,\&\, V$ 的多重子集，称为边集，其元素称为无向边，简称边. 有时用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 V 和 E .

例： $G = <V, E>$ 如图所示,

其中$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3),$

$(v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$



6.1.1 无向图与有向图

有向图

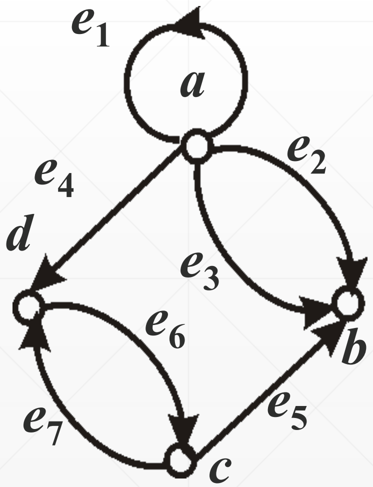
定义 有向图 $D=<V, E>$, 其中 $V\neq\varnothing$ 称为顶点集, 其元素称为顶点或结点；E 是 $V\times V$ 的多重子集，称为边集，其元素称为有向边，简称边. 有时用 $V(D)$ 和 $E(D)$ 分别表示 V 和 E .

例： $D=<V, E>$ 如图所示,

其中 $V=\{a, b, c, d\}$

$E=\{<a, a>, <a, b>, <a, b>, <a, d>,$

$<c, b>, <c, d>, <d, c>\}$.



6.1.1 无向图与有向图

注:

1) 在无向图中，(a, b) 是顶点 a 与 b 之间的线段，无方向；在有向图中，$<a, b>$ 是顶点 a 到 b 的有向线段，从 a 指到 b；

2) 无论在无向图还是有向图中，常用字母 e_k 表示边. 如 $e_k = (v_i, v_j)$，或 $e_k = <v_i, v_j>$；

3) 在定义中，用 G 表示无向图，D 表示有向图，但有时用 G 泛指一个图（无向的或有向的）. 可是 D 只能表示有向图；

6.1.1 无向图与有向图

注（续）：

4) **有限图：** V, E 都是有穷集合的图；

5) 若 G 的顶点集 V 的元素个数 $|V| = n$，则称 G 为 $\boldsymbol{n}$ **阶图**；

6) 若边集 $E = \varnothing$，则称 G 为**零图**；若此时 $|V| = n$，则称 G 为 $\boldsymbol{n}$ **阶零图**；特别是，若 $|V| = 1$，则称 G 为**平凡图**；其实，n 阶零图是具有 n 个顶点无边的图，平凡图是具有1个顶点无边的图.

6.1.1 无向图与有向图

注（续）：

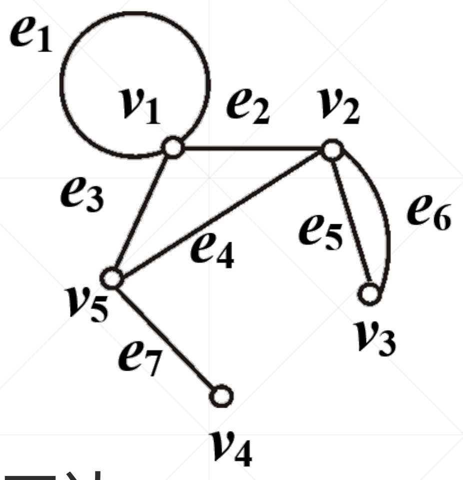
4) **有限图：**V, E 都是有穷集合的图；

5) 若 G 的顶点集 V 的元素个数 $|V|=n$，则称 G 为 $\boldsymbol{n}$ **阶图**；

6) 若边集 $E=\varnothing$，则称 G 为**零图**；若此时 $|V|=n$，则称 G 为 $\boldsymbol{n}$ **阶零图**；特别是，若 $|V|=1$，则称 G 为**平凡图**；其实，n 阶零图是具有 n 个顶点无边的图，平凡图是具有1个顶点无边的图.

6.1.1 无向图与有向图

顶点和边的关联与相邻



设无向图 $G=<V, E>$, $e_k=(v_i, v_j)\in E$:

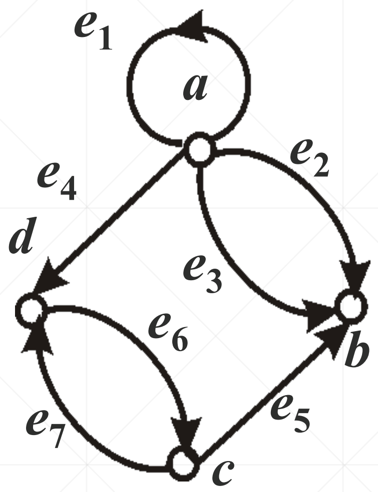
称 v_i, v_j 为 e_k 的端点, e_k 与 $v_i(v_j)$ 关联 . 若 $v_i=v_j$, 则称 e_k 为环. 无边关联的顶点称作孤立点 . 若 $v_i\neq v_j$, 则称 e_k 与 $v_i(v_j)$的关联次数为 1; 若 $v_i=v_j$, 则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 2 ; 若 v_i 不是边 e_k 的端点, 则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 0 .

设 $v_i, v_j\in V$, $e_k, e_l\in E$：若$(v_i,v_j)\in E$, 即 $e=(v_i,v_j)$，则称 v_i, v_j 相邻;

若e_k, e_l 至少有一个公共端点, 则称 e_k, e_l 相邻 .

6.1.1 无向图与有向图

顶点和边的关联与相邻（续）



设有向图 $D=<V, E>$, $e_k=<v_i, v_j>\in E$:

称 v_i, v_j 为 e_k 的端点, v_i 是 e_k 的始点, v_j 是 e_k 的终点, e_k 与 $v_i (v_j)$ 关联 .

又称 v_i 与 v_j 相邻, v_i 邻接到 v_j, v_j 邻接于 v_i. 若边 e_k 的终点是 e_l 的始点, 即 e_k 与 e_l 首尾相连, 则称 e_k 与 e_l 相邻 .

在无向图和有向图中, 若两个端点重合的边称为环. 无边关联的顶点称作孤立点. 无向图中， $e_{k_1}=(v_i, v_j)$, $e_{k_2}=(v_i, v_j)$, 称 e_{k_1} 和 e_{k_2} 是平行的;

有向图同理，但要注意方向。

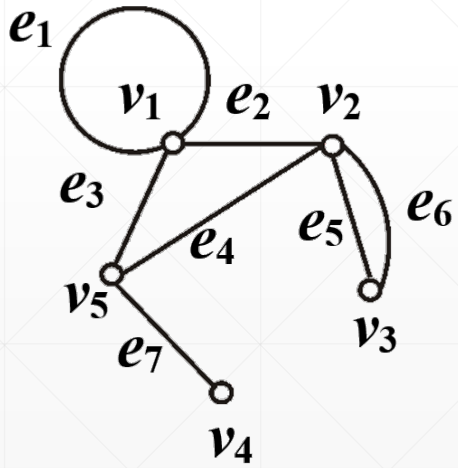
6.1.2 顶点的度数与握手定理

顶点的度数

设 $G = <V, E>$ 为无向图，$v \in V$，

v 的度数(度) $d(v)$：v 作为边的端点次数之和 （注意：环）

例： $d(v_5) = 3,\ d(v_2) = 4,\ d(v_1) = 4$，$e_1$ 是环



悬挂顶点：度数为 1 的顶点，v_4 是悬挂顶点；

悬挂边：与悬挂顶点关联的边，e_7 是悬挂边；

G 的最大度：$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$，$\Delta(G) = 4$；

G 的最小度：$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$，$\delta(G) = 1$.

6.1.2 顶点的度数与握手定理

顶点的度数（续）

设 $D = <V, E>$ 为有向图, $v \in V$,

v 的出度 $d^+(v)$： v 作为边的始点次数之和;

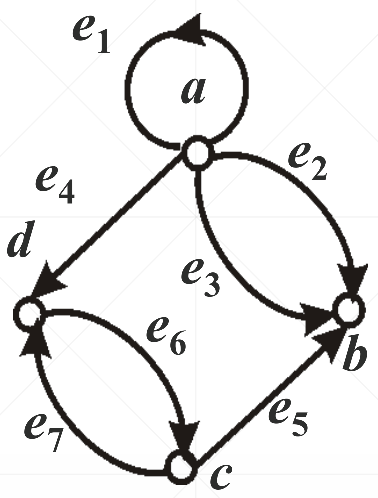
例： $d^+(a) = 4, d^+(b) = 0$

v 的入度 $d^-(v)$： v 作为边的终点次数之和;

$d^-(a) = 1, d^-(b) = 3$

v 的度数(度) $d(v)$： v 作为边的端点次数之和， $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

$\Delta^+(D) = 4, \delta^+(D) = 0, \Delta^-(D) = 3, \delta^-(D) = 1, \Delta(D) = 5, \delta(D) = 3,$



6.1.2 顶点的度数与握手定理

握手定理（欧拉定理）

定理6.1 任何图（无向图和有向图）的所有顶点度数之和都等于边数的 2 倍，即 $G=\langle V, E\rangle$， $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$， 边的条数 $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$$

证明： 图中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算各顶点度数之和时, 每条边均提供 2 度， m 条边共提供 $2m$ 度 .

6.1.2 顶点的度数与握手定理

握手定理（欧拉定理）（续）

推论 任何图（无向图和有向图）都有偶数个奇度顶点 .

证明： 设 $G=<V, E>$ 为任一图, $|E|=m$. 设

$$V_1=\{v \mid v \in V \wedge d(v)\text{为奇数}\}$$

$$V_2=\{v \mid v \in V \wedge d(v)\text{为偶数}\}$$

显然, $V_1 \cap V_2=\varnothing$, $V_1 \cup V_2=V$,

6.1.2 顶点的度数与握手定理

握手定理（欧拉定理）（续）

由握手定理知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于 $2m$, $\sum_{v\in V_2}d(v)$ 为偶数，所以 $\sum_{v\in V_1}d(v)$ 也为偶数 . 可是当 $v\in V_1$ 时，

时，$d(v)$ 为奇数，偶数个奇数之和才能为偶数，所以 $|V_1|$ 为偶数。

6.1.2 顶点的度数与握手定理

握手定理（欧拉定理）（续）

定理6.2 有向图所有顶点的入度之和等于出度之和等于边数 .

证明： 每条边恰好提供 1 个入度和 1 个出度，从而， m 条边恰好提供 m 个入度和 m 个出度.

6.1.2 顶点的度数与握手定理

图的度数列

设无向图 G 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

G 的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

如右图度数列：4, 4, 2, 1, 3

设有向图 D 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

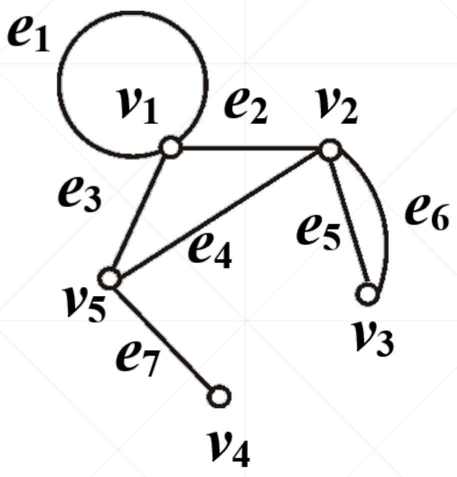
D 的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

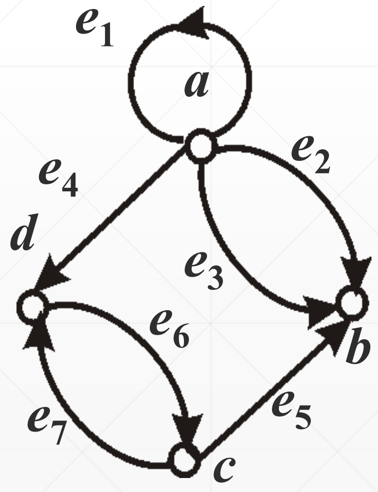
D 的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D 的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

如右图度数列：5, 3, 3, 3

出度列：4, 0, 2, 1　　入度列：1, 3, 1, 2



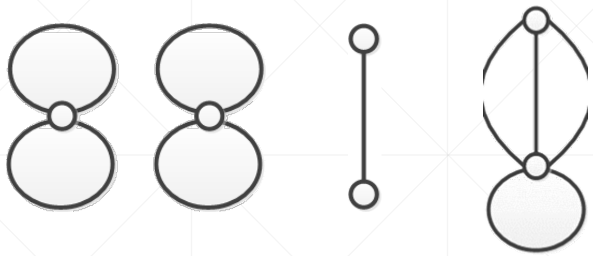


6.1.2 顶点的度数与握手定理

例：给出图的度数列，一定可以画图吗?

如：度数列为：1, 1, 3, 4, 4, 5

一定可以。



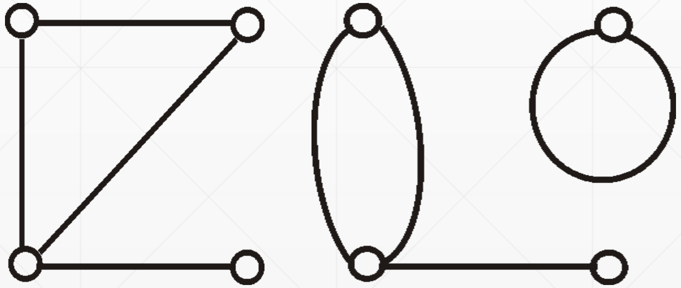
方法：对偶度数结点：画圈；对奇度数结点：相连，再画圈

例：下述2组数能成为无向图的度数列吗?

(1) 3,3,3,4;（2) 1,2,2,3

解： (1) 不可能. 有奇数个奇数.

(2) 能，且不唯一



6.1.2 顶点的度数与握手定理

例： 已知图 G 有 10 条边，4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均小于等于 2，问 G 至少有多少个顶点？

解： 设 G 有 n 个顶点. 由握手定理，

$$4 \times 3 + 2 \times (n - 4) \geq 2 \times 10$$

解得 $n \geq 8$

例： 已知 5 阶有向图的度数列和出度列分别为 3, 3, 2, 3, 3 和 1, 2, 1, 2, 1, 求它的入度列

解： 2, 1, 1, 1, 2

6.1.2 顶点的度数与握手定理

例： 证明不存在证具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体 .

证明： （反证法）假设存在这样的多面体，作无向图 $G = <V, E>$：

在每个面中任取一点，如果某两个面有公共棱，则连接这两个面上的点，这样：

$$V = \{ v \mid v \text{为多面体的面} \},$$

$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V \wedge u \text{与} v \text{有公共的棱} \wedge u \neq v\}.$$

根据假设, $|V|$ 为奇数且 $\forall v \in V$, $d(v)$为奇数 .

这与握手定理的推论矛盾 .

6.1.2 顶点的度数与握手定理

例：设 9 阶无向图的每个顶点的度数为 5 或 6，证明它至少有 5 个 6 度顶点或者至少有 6 个 5 度顶点 .

证明：**方法一**：讨论所有可能的情况 .

设有 a 个 6 度顶点和 b 个 5 度顶点. 因为任何图都有偶数个奇度顶点，所以 b 为偶数，$a+b=9$.

1) $b=0$, $a=9$;　　2) $b=2$, $a=7$;

3) $b=4$, $a=5$;　　4) $b=6$, $a=3$;

5) $b=8$, $a=1$

(1)~(3) 至少 5 个 6 度顶点, (4)和(5) 至少 6 个 5 度顶点 .

方法二：假设 $a<5$, 则 $b>9-5=4$. 由握手定理的推论, $b \geq 6$.

6.1.3 简单图、完全图、正则图、圈图、轮图、方体图

简单图

定义6.4 在无向图中, 关联同一对顶点的2条或2条以上的边,

称为平行边, 平行边的条数称为重数;

在有向图中, 具有相同始点和终点的2条或2条以上的边

称为有向平行边, 简称平行边, 平行边的条数称为重数;

多重图： 含平行边的图　　**简单图：** 既无平行边也无环的图

思考： 给度数列，一定可以画简单图吗？

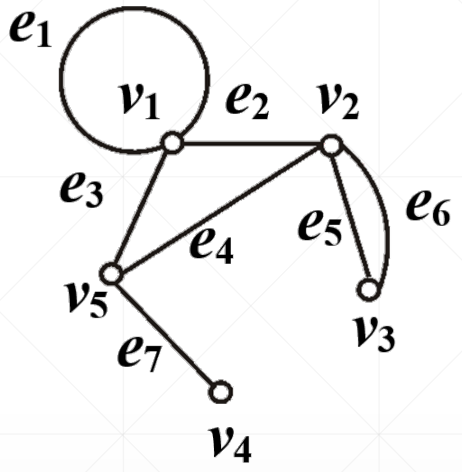
例： 度数列为 3, 3

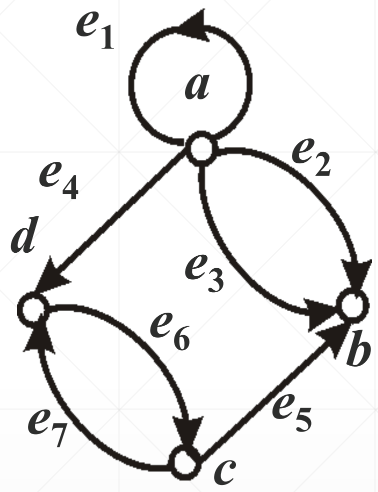
注： 1）无向简单图 $d(v) \le n-1$；

2）有向简单图 $d^+(v) \le n-1$，

$d^-(v) \le n-1$.

6.1.3 简单图、完全图、正则图、圈图、轮图、方体图





平行边：e_5和 e_6

重数： 2

是简单图？ ✗

平行边：e_2和 e_3 ✓ e_6和 e_7 ✗

重数： 2

是简单图？ ✗

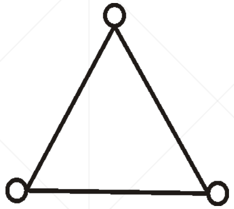
6.1.3 简单图、完全图、正则图、圈图、轮图、方体图

完全图与正则图

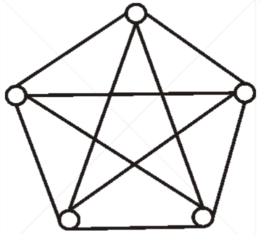
无向完全图：每对顶点之间都有一条边的无向简单图.

n 阶无向完全图记作 K_n，顶点数 n，

则边数 $m = n(n-1)/2$, $\Delta = \delta = n-1$



K_3

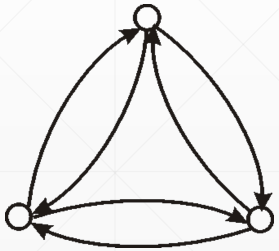


K_5

有向完全图：每对顶点之间均有两条方向相反的边的有向简单图.

顶点数 n, 则边数 $m = n(n-1)$,

$\Delta^+ = \delta^+ = \Delta^- = \delta^- = n-1$, $\Delta = \delta = 2(n-1)$



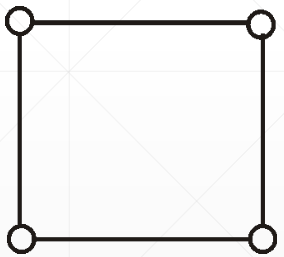
3阶有向完全图

6.1.3 简单图、完全图、正则图、圈图、轮图、方体图

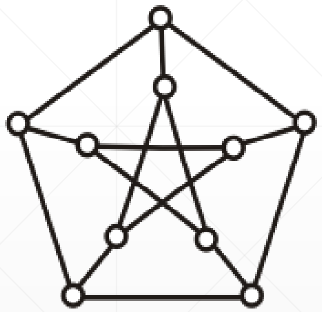
完全图与正则图（续）

k-正则图： 每个顶点的度数均为 k 的无向简单图，

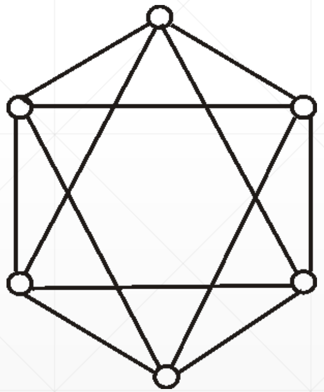
顶点数 n，则边数 $m = kn/2$.



2正则图



3正则图
彼得松图



4正则图

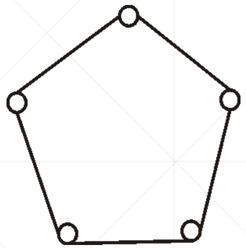
无向完全图与正则图的关系？ n 阶无向完全图 K_n 是 $n-1$-正则图 .

6.1.3 简单图、完全图、正则图、圈图、轮图、方体图

圈图与轮图

无向圈图： $C_n = <V, E>$，其中 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，

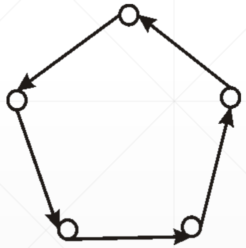
$E = \{(v_1,v_2), (v_2,v_3), \ldots, (v_{n-1},v_n), (v_n,v_1)\}$，　$n \geq 3$



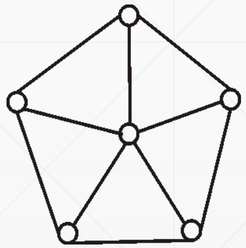
无向圈图是？ 简单图 ✓　　正则图 ✓ $k = 2$

有向圈图： $C_n = <V, E>$，其中 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，

$E = \{<v_1,v_2>, <v_2,v_3>, \ldots, <v_{n-1},v_n>, <v_n,v_1>\}$，　$n \geq 2$



轮图 W_n：无向圈图 C_{n-1} 内放一个顶点, 且与圈图的每个顶点之间恰有一条边, $n \geq 4$



什么样的轮图是正则图？　W_4

6.1.3 简单图、完全图、正则图、圈图、轮图、方体图

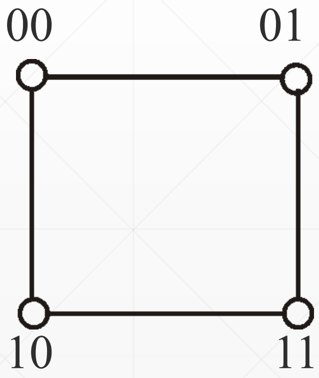
方体图

***n* 方体图：** $Q_n = <V, E>$ 是 2^n 阶无向简单图, 其中

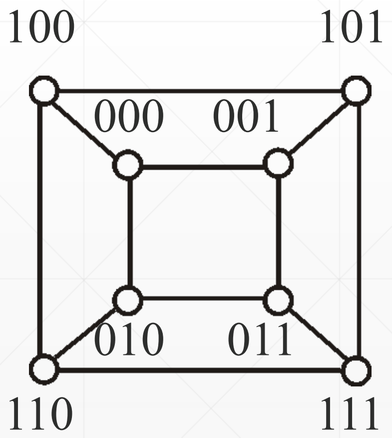
$$V = \{\, v \mid v = a_1a_2\ldots a_n,\ \underline{a_i = 0 \text{ 或 } 1},\ i=1,2,\ldots,n\}$$

$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V \wedge u \text{ 与 } v \text{ 恰好有一位数字不同}\}.$$

Q_1



Q_2



Q_3

6.1.4 子图、补图

子图

定义6.10 设 $G=<V, E>$, $G'=<V', E'>$ 是 2 个图(同为无向图或有向图).

若$V' \subseteq V$且 $E' \subseteq E$, 则称 G' 为 G 的子图, G 为 G' 的母图, 记作$G' \subseteq G$;

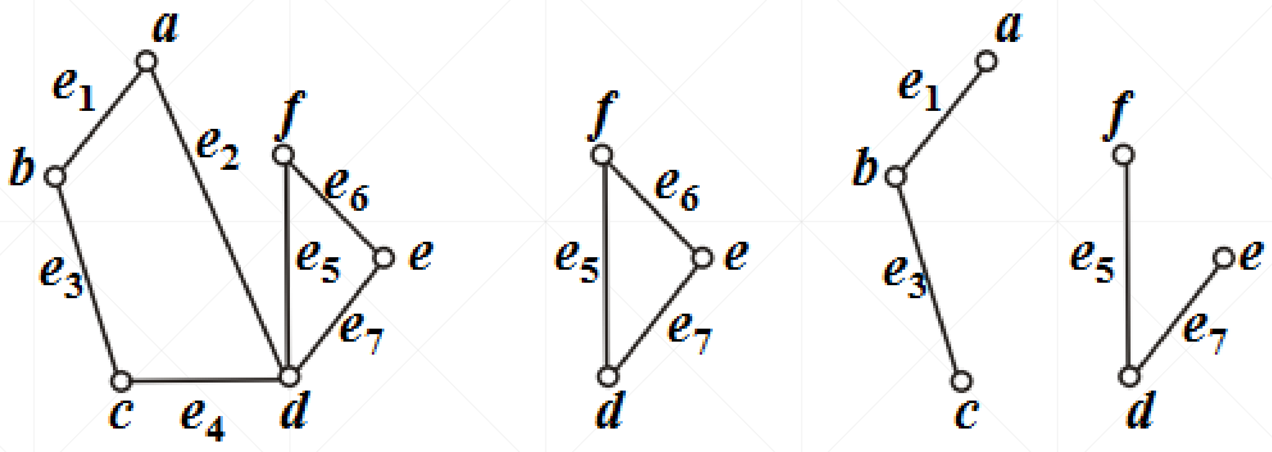
若$V' \subset V$或 $E' \subset E$, 称 G' 为 G 的真子图;

若$G' \subseteq G$ 且$V' = V$, 则称 G' 为 G 的生成子图;

设$V' \subseteq V$且$V' \neq \varnothing$, 以 V' 为顶点集, 以两端点都在 V' 中的所有边为边集的 G 的子图称作V'的导出子图, 记作 $G[V']$;

设$E' \subseteq E$ 且 $E' \neq \varnothing$, 以 E' 为边集, 以 E' 中边关联的所有顶点为顶点集的 G 的子图称作 E' 的导出子图, 记作 $G[E']$.

6.1.4 子图、补图



(1)　　(2)　　(3)

(1)的子图：(1),(2),(3)　真子图：(2),(3)　母图：(1)　生成子图：(1),(3)

$\{d,e,f\}$ 的导出子图：(2)　　$\{e_5, e_6, e_7\}$ 的导出子图：(2)

$\{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ 的导出子图：(3)

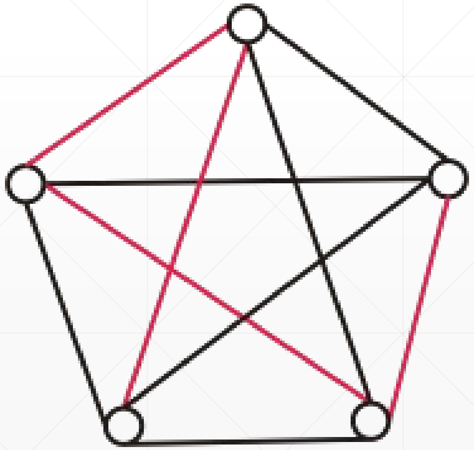
6.1.4 子图、补图

补图

定义6.11 设 $G=<V, E>$为 n 阶无向简单图, 记 $\overline{E} = V \& V - E$,

称 $\overline{G} = <V, \overline{E}>$ 为G的补图 .

设 $G=<V, E>$ 为 n 阶无向简单图, 以所有能使 G 成为完全图 K_n 的添加边组成的集合为边集的图，为 G 相对于 K_n 的补图，简称为 G 的补图 .



注： K_n 的补图为? n 阶零图

6.1.5 图的同构

同构

定义6.12 设 $G_1=<V_1, E_1>, G_2=<V_2, E_2>$为两个无向图（有向图），

若存在双射函数 $f: V_1\to V_2$，使得对于任意的 $v_i, v_j \in V_1$，

$(v_i, v_j)\in E_1$ $(<v_i, v_j>\in E_1)$ 当且仅当

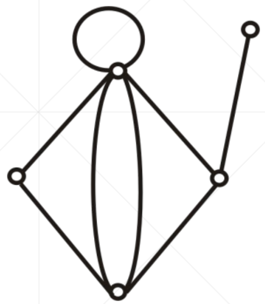
$$(f(v_i), f(v_j))\in E_2 \quad (<f(v_i), f(v_j)>\in E_2)$$

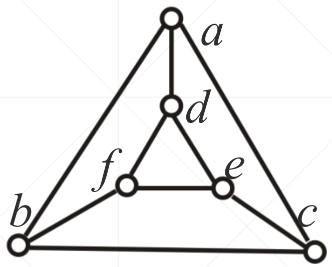
并且 (v_i, v_j) $(<v_i, v_j>)$ 与 $(f(v_i), f(v_j))$ $(<f(v_i), f(v_j)>)$ 的重数相同，

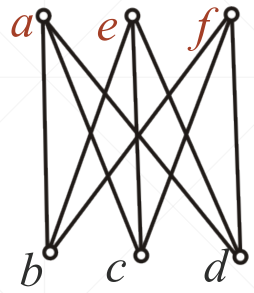
则称 G_1 与 G_2 是同构的，记作 $G_1\cong G_2$.

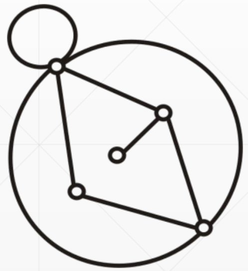
6.1.5 图的同构

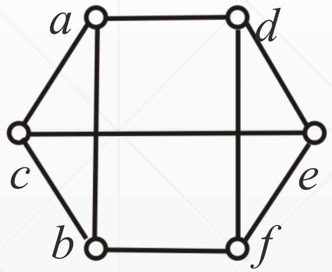
例：

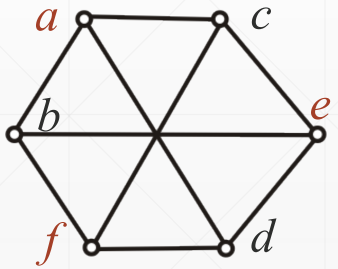












6.1.5 图的同构

例： 画出 4 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图．

解： 由已知条件得到 4 个条件：

总度数为 6, 分配给 4 个顶点， 最大度为 3，且奇度顶点数为偶数：

1）0 个奇度顶点，4 个偶度顶点：0, 2, 2, 2；

2）2 个奇度顶点，2 个偶度顶点：1, 1, 2, 2、1, 1, 4, 0、1, 3, 2, 0、3, 3, 0, 0

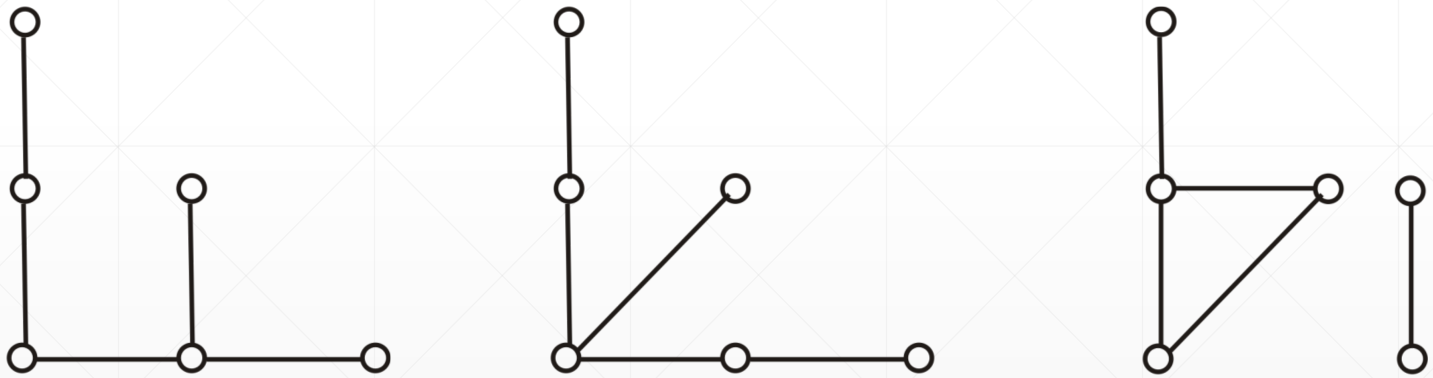
3）4 个奇度顶点，0 个偶度顶点：1, 1, 1, 3

画图：

0,2,2,2　　1,1,2,2　　1,1,1,3

6.1.5 图的同构

例： 画出 3 个以 1, 1, 1, 2, 2, 3 为度数列的非同构的无向简单图 .



研讨题

1）证明：在任何一个有 6 人的组里，存在3个人相互认识或者存在3个人相互不认识。

2）证明：无向简单图 G 有 n 个顶点，如果顶点数大于等于 2，则至少有 2 个顶点的度数相同。

3）画出一个 5 阶简单图 G 与它的补图 G' 同构。