第6章 图

计算机工程与科学学院 封卫兵

6.2 图的连通性

6.2.1 通路与回路

初级通路(回路)与简单通路(回路)

6.2.2 无向图的连通性与连通度

连通图、连通分支、短程线与距离

点割集、割点、边割集、割边(桥)、点连通度与边连通度

6.2.3 有向图的连通性及其分类

弱连通、单向连通、强连通

短程线与距离、可达性

6.2.1 通路与回路

通路与回路

定义6.13 给定图 $G=<V, E>$ (无向或有向), G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$. 若 $\forall i\ (1\le i\le l)$, $e_i=(v_{i-1}, v_i)$ (或 $e_i=<v_{i-1}, v_i>$), 则称 Γ为 v_0 到 v_l 的通路, v_0 和 v_l 分别为通路的起点和终点, l 为通路的长度. 又若 $v_0=v_l$, 则称 Γ 为回路.

若通路(回路)中所有边各异, 则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路)

6.2.1 通路与回路

通路与回路（续）

若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除 $v_0 = v_l$)各异, 则称为初级通路或路径(初级回路或圈). 长度为奇数的圈称作奇圈, 长度为偶数的圈称作偶圈 .

注:

1) 回路是通路的特殊情况;

2) 在有向图和无向图中, 长度为 1 的圈由环构成;

3) 在无向图中, 长度为 2 的圈由两条平行边构成;

6.2.1 通路与回路

注（续）：

4) 在无向简单图中，所有圈的长度 ≥ 3；

5) 在有向简单图中，所有圈的长度 ≥ 2；

6) 表示方法

① 按定义用顶点和边的交替序列, $\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

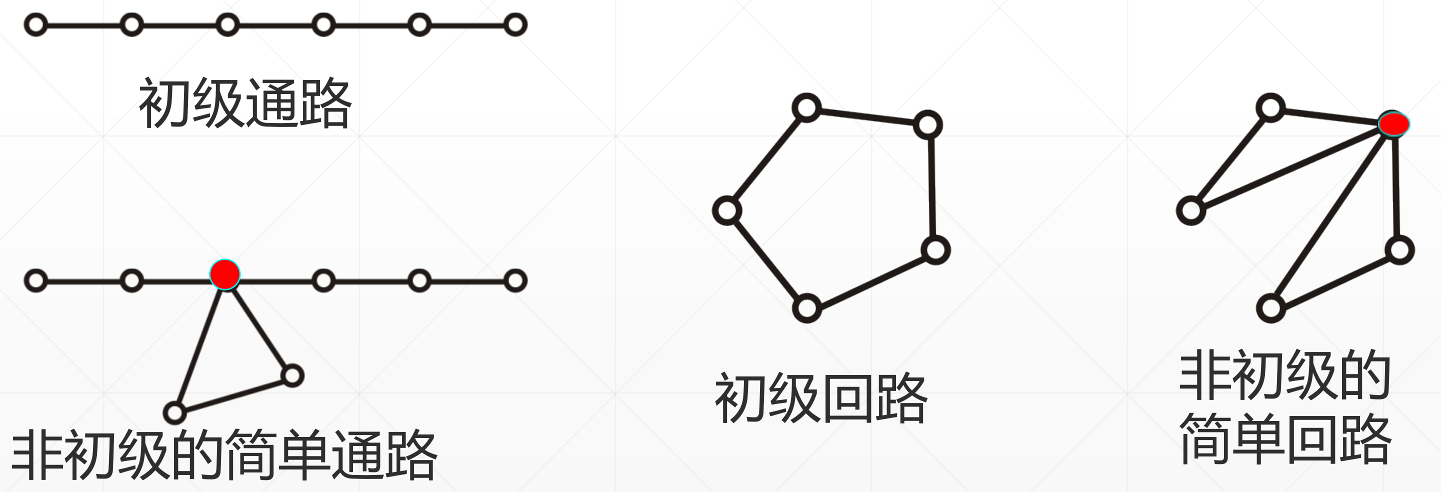
② 用边序列， $\Gamma = e_1e_2\ldots e_l$, 其中 e_i, e_{i+1}是相邻边，长度为 l

③ 简单图中, 用顶点序列, $\Gamma = v_0v_1\ldots v_l$，长度为 l

6.2.1 通路与回路

注（续）：

7) 初级通路(回路)是简单通路(回路), 但反之不真 .

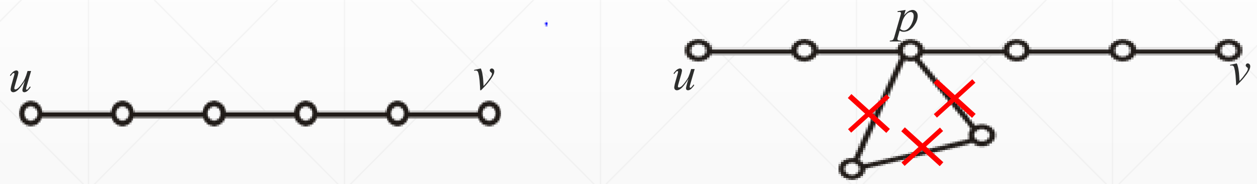


6.2.1 通路与回路

通路与回路（续）

定理6.3 在 n 阶图中，若从顶点 u 到 v $(u \neq v)$存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路 .

证明： 若通路中没有相同的顶点（即初级通路），长度必 $\leq\ n-1$. 若有相同的顶点，删去这两个顶点之间的这一段, 仍是 u 到 v 的通路. 重复进行，直到没有相同的顶点为止.



定理6.4 在 n 阶图中，若存在 v 到自身的简单回路，则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的初级回路 .

6.2.2 无向图的连通性与连通度

无向图的连通性与连通分支

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u,v \in V$

u 与 v 连通： 若 u 与 v 之间有通路 . 规定 u 与自身总是连通的.

连通图： 任意两点都连通的图．平凡图是连通图 .

连通关系 $R = \{\langle u, v \rangle \mid u, v \in V$ 且 u 与 v 连通$\}$. R是等价关系（证明?)

连通分支： V 关于 R 的等价类的导出子图 .

设 $V/R = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, G 的连通分支为 $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$.

连通分支数： 记为 $p(G) = k$.

注： G 是连通图 $\Leftrightarrow p(G) = 1$；若 $p(G) \geq 2$，则 G 一定是非连通图 .

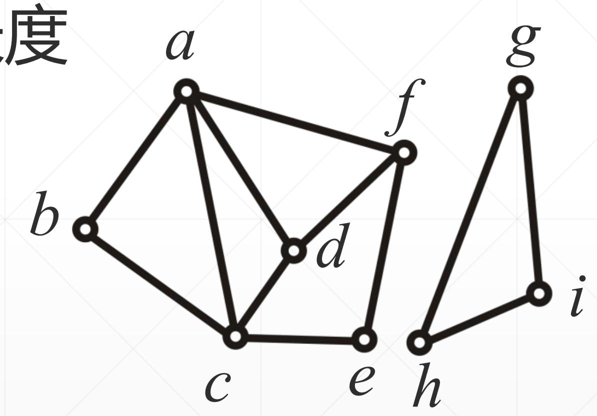
6.2.2 无向图的连通性与连通度

短程线与距离

***u* 与 *v* 之间的短程线：** u 与 v 之间长度最短的通路（设 u 与 v 连通）；

***u* 与 *v* 之间的距离 $d(u, v)$：** u 与 v 之间短程线的长度

若 u 与 v 不连通，规定 $d(u, v) = \infty$.



性质：

1) 非负性：$d(u, v) \geq 0$, 且 $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

2) 对称性：$d(u, v) = d(v, u)$

3) 三角不等式：$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

例： $d(a, e) = 2$ ，

$d(a,h) = \infty$ ，

6.2.2 无向图的连通性与连通度

点割集与边割集

设无向图 $G=<V, E>, v\in V, e\in E, V'\subseteq V, E'\subseteq E$. 记

$G-v$：从 G 中删除 v 及关联的边

$G-V'$：从 G 中删除 V' 中所有的顶点及关联的边

$G-e$：从 G 中删除 e

$G-E'$：从 G 中删除 E' 中所有边

删除结点后连通分支会增加？不变？减少？ 都可能！

删除边后呢？ 都可能？ 不可能减少

6.2.2 无向图的连通性与连通度

点割集与边割集（续）

定义6.15 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若 $p(G-V')>p(G)$ 且 $\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称 V' 为 G 的点割集.

若 $\{v\}$ 为点割集，则称 v 为割点.

设 $E'\subset E$，若 $p(G-E')>p(G)$ 且 $\forall E''\subset E'$，$p(G-E'')=p(G)$, 则称 E' 为 G 的边割集. 若$\{e\}$为边割集, 则称 e 为割边或桥 .

注： 1) K_n 无点割集，n 阶零图既无点割集，也无边割集；

2) 若 E' 为边割集，则 $p(G-E')=p(G)+1$;

3) 若 V'为点割集，则 $p(G-V')\geq p(G)+1$.

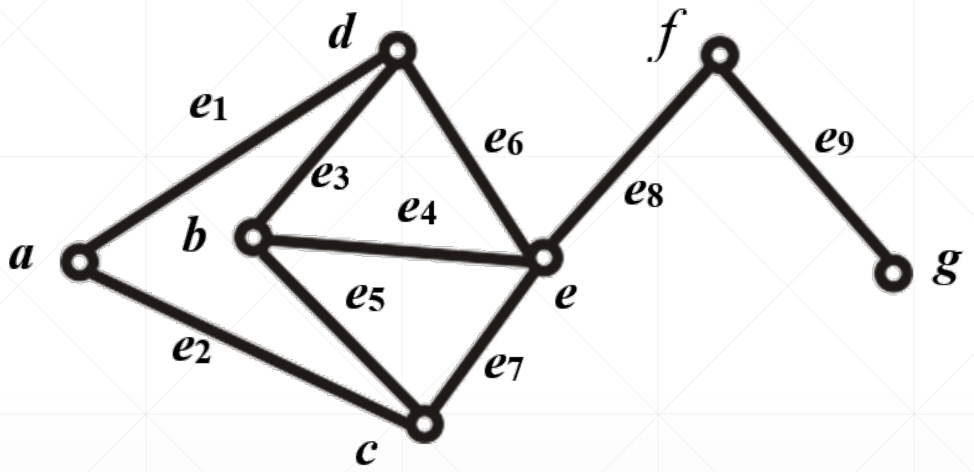
6.2.2 无向图的连通性与连通度

割点：e，f

点割集：$\{e\},\{f\},$

$\{b, e\}$? ✗ $\{b, c, d\}$? ✗

桥：e_8，e_9



边割集：$\{e_8\}$, $\{e_9\}$, $\{e_1, e_2\}$? ✓ $\{e_2, e_5, e_7\}$? ✓

$\{e_1, e_3, e_6\}$? ✓ $\{e_4, e_6, e_7, e_8\}$? ✗ $\{e_1, e_3, e_4, e_7\}$? ✓

任何一个点所关联的所有边构成边割集吗？ 若不包含桥，则是

6.2.2 无向图的连通性与连通度

例： 设 v 为无环无向图 G 中的一条割边的一个端点，

证明：v 为割点当且仅当 v 不是悬挂顶点 .

证明： 1) 证如果 v 为割点，则 v 不是悬挂顶点：

反证法：假设 v 是悬挂顶点，则从 G 中删除 v，只是将 v 及关联割边 e 从 G 中去掉了，因而 $p(G-v)=p(G)$，这与 v 为割点矛盾。

2) 证如果 v 不是悬挂顶点，则 v 为割点：

由于 v 不是 1 度顶点，所以 v 除与割边 e 关联外，还必须与另外一些边关联，假设这些边为 $e_1, \ldots, e_r$，当从 G 中删除 v 时，则 $e, e_1, \ldots, e_r$ 也全部被删除，由于 e 是割边，所以 $p(G-v)>p(G)$，所以 v 为割点 .

6.2.2 无向图的连通性与连通度

点连通度与边连通度

定义6.16 设无向连通图 $G = <V, E>$,

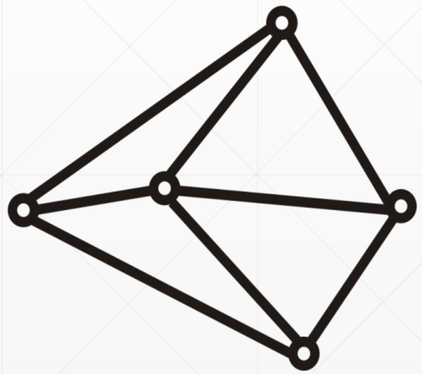
$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{是} G \text{的点割集或使} G - V' \text{成为平凡图}\}$$

称为 G 的点连通度.

$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{是} G \text{的边割集}\}$$

称为 G 的边连通度.

例: $\kappa(G) = 3$, $\lambda(G) = 3$.



6.2.2 无向图的连通性与连通度

点连通度与边连通度（续）

注： 1) 若 G 是平凡图，则 $\kappa(G)=0$，$\lambda(G)=0$；

2) 若 G 是完全图 K_n，则 $\kappa(G)=n-1$，$\lambda(G)=n-1$；

3) 若 G 中存在割点，则 $\kappa(G)=1$；若 G 中存在割边，则 $\lambda(G)=1$；

4) 规定非连通图的点连通度和边连通度均为 0 .

圈图 C_n $(n\geq 3)$ 的 $\kappa(G)=\lambda(G)=2$

轮图 W_n $(n\geq 4)$ 的 $\kappa(G)=\lambda(G)=3$

定理6.5 对任何无向图 G，有

$$\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G).$$

6.2.2 有向图的连通性及其分类

定义6.17 设有向图 $D=<V, E>$, $u, v \in V$,

u **可达** v：u 到 v 有通路. 规定 u 到自身总是可达的;

u **与** v **相互可达**：u 可达 v 且 v 可达 u;

D **弱连通**(连通)：略去各边的方向所得无向图为连通图;

D **单向连通**：$\forall u, v \in V$, u 可达 v 或 v 可达 u ;

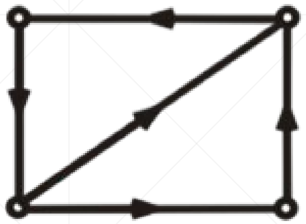
D **强连通**：$\forall u, v \in V$, u 与 v 相互可达;

D 是强连通的当且仅当 D 中存在经过所有顶点的回路;

D 是单向连通的当且仅当 D 中存在经过所有顶点的通路 .

6.2.2 有向图的连通性及其分类

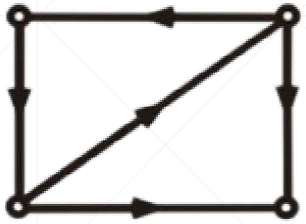
例：



强连通? ✓

单向连通?

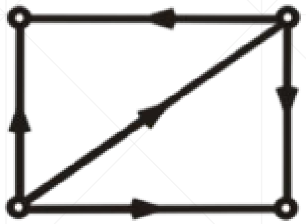
弱连通?



强连通?

单向连通? ✓

弱连通?



强连通?

单向连通?

弱连通? ✓

6.2.2 有向图的连通性及其分类

有向图中的短程线与距离

u 到 v 的短程线：u 到 v 长度最短的通路（设 u 可达 v）；

距离 $d<u, v>$：u 到 v 的短程线的长度；

若 u 不可达 v，规定 $d<u, v> = \infty$.

性质：

1) 非负性：$d<u, v> \geq 0$，且 $d<u, v> = 0 \Leftrightarrow u = v$;

2) 三角不等式：$d<u, v> + d<v, w> \geq d<u, w>$.

注： 没有对称性 $d<u, v> \neq d<v, u>$.

6.2.2 有向图的连通性及其分类

例： 设无向图 G 中只有两个奇度顶点 u 和 v，证明：u 与 v 必连通.

证明： 假设 u 与 v 不连通，即它们之间无通路，则 u 与 v 必处于 G 的不同连通分支中.

假设 u 在 G 的连通分支 G_1 中，v 在连通分支 G_2 中，由于 G 中只有两个奇度顶点，于是 G_1 和 G_2 均各有一个奇度顶点，这样 G_1 与 G_2 都与握手定理推论矛盾.

所以奇度顶点 u 与 v 必处于 G 的同一个连通分支中，即它们之间必有通路，也即u与v必连通。