《概率论与数理统计》强化训练题一

一、是非题(填“对”或“错”)

1. 对任意两个事件A与B，都有$P(A-B)=P(A)-P(B)$. (　　)

2. 随机变量只有连续和离散两种类型. (　　)

3. 如果$X_1,\cdots,X_n$是来自于服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的总体X的简单随机样本，那么样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2是独立的. (　　)

4. 把一枚均匀硬币扔n次，以n_A记正面出现的次数，那么$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_A}{n}=\dfrac{1}{2}$. (　　)

5. 置信水平不能惟一确定单正态总体均值的置信区间长度. (　　)

二、填空题

6. 设事件A与事件B独立，且事件“A发生而B不发生”与事件“B发生而A不发生”的概率均为$\dfrac{1}{4}$，则事件A发生的概率为________.

7. 把一粒骰子独立掷n次，那么事件“出现点数不小于2”的概率为________；事件“出现最小点数为2”的概率为________.

8. 已知$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，则$P(B)=$________.

9. 设随机变量X与Y相互独立，且都服从正态分布$N(0,\dfrac{1}{2})$，那么$E|X-Y|=$____.

三、单项选择题

10. 对任意两个互不相容的事件A和B，结论一定成立的是(　　)

　　A. $\overline{A}$与$\overline{B}$互不相容　　B. $\overline{A}$与$\overline{B}$相容

　　C. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　D. $P(AB)=P(A)P(B)$

11. 要使函数$f(x)=\cos x$是随机变量X的密度函数，则x的取值区间必须是(　　)

　　A. $[-\dfrac{\pi}{2},0]$　　B. $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$　　C. $[0,\pi]$　　D. $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$

12. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 但不一定独立. 那么结论一定正确的是(　　)

A. $X+Y$ 服从正态分布　　B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　D. $\dfrac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布

13. 如果总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 已知, σ^2 未知, X_1,X_2,X_3 是取自总体的一个样本, 那么不是统计量的是(　　)

A. $\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$　　B. $X_1+X_2+\mu$

C. $\max\{X_1,X_2,X_3\}$　　D. $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_1+X_2+X_3)$

14. 设随机变量 X 与 Y 独立, 且分别服从分布 $N(0,1)$ 与 $N(1,1)$, 则正确的是(　　)

A. $P(X+Y\le 0)=\dfrac{1}{2}$　　B. $P(X+Y\le 1)=\dfrac{1}{2}$

C. $P(X-Y\le 0)=\dfrac{1}{2}$　　D. $P(X-Y\le 1)=\dfrac{1}{2}$

四、计算题

15. 设对某种疾病作诊断时, 患有该种疾病而能诊断出患该疾病的概率为 0.95, 而不患该疾病却被误诊为患该疾病的概率为 0.05. 这类疾病在整个地区的发生概率为 0.005. 计算

(1) 随机检查一个该地区的人被诊断为患有该疾病的概率;

(2) 被诊断为患有该疾病而确实是患病的概率.

16. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ A(x+1)^2, & -1<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

(1) 确定参数 A 的值;

(2) 写出 X 的分布函数;

(3) 计算概率 $P(X>1)$.

17. 设简单样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 来自母体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, 其中 μ 为未知参数. 为得到 μ 的一个置信度为 0.99 而长度不超过 0.2 的置信区间, 则样本容量至少要为多大? (附注: $u_{0.01}=2.33$, $u_{0.005}=2.58$)

18. 两名枪手轮流射击一目标, 射中目标则停止射击. 设第一位枪手的命中率为 p_1, 而第二位的命中率为 p_2. 停止射击时所进行的射击总次数记为 Z, 此时第一位和第二位枪手的射击次数分别记为 X 和 Y 次.

(1) 试以所定义的随机变量表示事件: "第一位枪手击中目标"; "第二位枪手击中目标";

(2) 求 Z, X, Y 各自的分布律;

(3) 要使目标是由第二位枪手射中的概率较大, 则命中率 p_1 和 p_2 应该满足什么条件?

(4) 计算射击停止时第一位射手的射击次数 X 的数学期望 EX.

五、证明题

19. 设随机变量 X 和 Y 独立, 且服从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布. 证明 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z\le 1,\\ 2-z, & 1<z\le 2,\\ 0, & z\le 0 \text{ or } z>2. \end{cases}$$

20. 设母体 X 服从参数为 (N,p) 的二项分布, 其中 N,p 均是未知参数. 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自母体的简单随机样本, 证明 N,p 的矩估计分别为 $\hat{N}=\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X}-B_2}$ 和

$\hat{p}=1-\frac{B_2}{\bar{X}}$，这里 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2-\bar{X}^2$ 是二阶样本中心矩.