上海大学 2013～2014 学年冬季学期试卷（A 卷）

成绩	

课程名：概率论与数理统计（A）课程号：01014016 学分：5

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号 ______________ 应试人所在院系 ______________

题号	一	二	三	四	五
得分	10	30	10	42	8

一、是非题 (2 分×5=10 分)

1、对任意两个事件 A 和 B，一定有 $A-\overline{B}=A\cup B$。（非）

2、对任意两个事件 A 和 B，若 $P(B)>0$，则一定有 $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$。（是）

3、二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布，X 与 Y 不相关时，X 与 Y 不一定独立。（非）

4、在对总体 X 做参数假设检验时，如果样本容量 n 保持不变，则不可能同时降低犯第一类和第二类错误的概率。（是）

5、如果总体 X 服从的分布函数含未知参数 θ，统计量 $\hat{\theta}$ 是其无偏估计，则对任意连续函数 h，统计量 $h(\hat{\theta})$ 一定也是 $h(\theta)$ 的无偏估计。（非）

二、填空题 (3 分×10=30 分)

6、设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.8$，则 $P(B|\overline{A})=\underline{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\dfrac{2}{3}}$。

7、甲乙丙三人同时向目标独立射击，命中率均为0.6，则至多有一人击中目标的概率为 $\underline{0.4^3+3\times0.4^2\times0.6=0.16}$。

8、从数字 1~9 中可重复地任取 n 次数字，则所取数字的乘积能被 10 整除的概率为 $\underline{1-\dfrac{8^n+5^n-4^n}{9^n}}$。

9、一袋中装有编号为 1 到 5 的 5 只球，一次随机抽取三球，记 X 为所取球的最小编号，则 $EX=\underline{1.5}$。

10、罐中有红球 6 只，黑球 4 只，从中同时随机抽取两球。已知其中一球为红球，则另一个球也是红球的概率为：$\underline{\dfrac{C_6^2}{C_6^2+C_6^1C_4^1}=\dfrac{5}{13}=0.3846}$。

11、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} a\cos x, & x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}) \\ 0, & x\notin(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$，则 $a=\underline{\dfrac{1}{2}}$。

12、设随机变量 X 与 Y 独立，且都服从参数为 1 的指数分布，则 $P(1<\min\{X,Y\}\le 2)=\underline{(P(X>1))^2-(P(X>2))^2=e^{-1}-e^{-2}}$。

13、设随机变量 $X\sim B(2,p)$，$Y\sim B(3,p)$，且 $P(X\ge 1)=\dfrac{16}{25}$，则 $P(Y\ge 1)=\underline{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=0.784}$。

14、如果总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 都是未知参数，总体的样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$ 和 S^2，样本容量为 n，则参数 σ 的双侧置信区间为 $\underline{(\sqrt{\dfrac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}S,\sqrt{\dfrac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}S)}$，设置信度为 $1-\alpha$。

15、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 都是未知参数，总体的样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$ 和 S^2，样本容量为 n，则假设检验问题

原假设 H_0：$\mu\ge\mu_0$；备选假设 H_1：$\mu<\mu_0$

的显著性水平为 α 的拒绝域为 $\underline{\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}<-t_\alpha(n-1)\}}$。

三、选择题 （共 2 分×5=10 分）

16、设$P(AB)=0$与，那么一定有**(D)**。

（A）A和B互不相容；（B）A和B独立；

（C）$P(A)=0$或$P(B)=0$；（D）$P(A-B)=P(A)$。

17、设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases},$$

则$P(X=1)$的概率为 **(C)** 。

（A）0；（B）$\frac{1}{2}$；（C）$\frac{1}{2}-e^{-1}$；（D）$1-e^{-1}$。

18、设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ和σ^2是未知参数。设X_1,X_2,X_3是来自该总体的简单样本，则下面关于均值μ的估计中，最有效的是 **(B)** 。

（A）$\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$；（B）$\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$；

（C）$\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3$；（D）$-\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+X_3$。

19、如果两个独立的随机变量X_1和X_2的分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$，那么$X=\max\{X_1,X_2\}$的分布函数是 **(A)** 。

（A）$F_1(x)F_2(x)$；（B）$(1-F_1(x))(1-F_1(x))$；

（C）$1-F_1(x)F_2(x)$；（D）$1-(1-F_1(x))(1-F_2(x))$。

20、对给定的某一种区间估计及一组样本观测值$x_1,x_2,\ldots,x_n$，结论正确的是 **(B)** 。

（A）置信度越大，则置信区间长度越短；（B）置信度越大，则置信区间长度越长；

（C）置信区间的长度与置信度无关；（D）以上结论都不一定成立。

四、计算题（共 42 分）

21、（本题 10 分）有两只盒子，第一个盒子中有 2 个白球和 4 个黑球，第二个盒子中有 4 个白球和 2 个黑球。现在掷一枚均匀硬币，如果是正面，就从第一个盒子中有返回地连续摸 3 个球，如果是反面，就从第二个盒子中有返回地连续模 3 个球。

（1）（+6 分）计算取到的三个球都是白球的概率；

（2）（+4 分）如果已知取到三个都是白球，计算掷出的硬币是正面的概率。

解（1）记A为事件："扔出硬币是正面"；B为事件："连续取到的三个球都是白球"。则

$P(A)=\frac{1}{2}$；（+1 分），$P(B|A)=\left(\frac{2}{6}\right)^3$，$P(B|\bar{A})=\left(\frac{4}{6}\right)^3$，（1+1 分）。所以

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{2}\times\frac{1+8}{27}=\frac{1}{6}$（2+1 分）

（2）$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{27}=\frac{1}{9}$。（2+2 分）

22、（本题 12 分）已知随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}a-|x|, & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

（1）（+2 分）确定常数a；

（2）（+6 分）计算分布函数$F(x)$；

（3）（+4 分）计算$Y=X^2+1$的概率密度函数。

解 （1）由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(a-|x|)dx=2a-1$，得$a=1$。（1+1 分）

（2）$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \int_{-1}^{x}(1-|t|)dt, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{x^2+2x+1}{2}, & -1\le x<0\\ \frac{-x^2+2x+1}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$。（2+4 分）

（3）对 $0<y<2$，

$$F_Y(y)=P(X^2\le y-1)=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}(1-|x|)dx=2\int_0^{\sqrt{y-1}}(1-|x|)dx=2\sqrt{y-1}-(y-1)\text{，}$$

因此，$f_Y(y)=F'(y)=\dfrac{1-\sqrt{y-1}}{\sqrt{y-1}}$；

$f_Y(y)=0$，其它。（3+1 分）

（注：直接利用随机变量函数的概率密度函数计算公式也可以）

23、（本题 10 分）设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	-1	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{6}$	a

（1）（+2 分）确定常数 a；

（2）（+3 分）计算 X 与 Y 的边缘分布律，并判断这两个随机变量是否独立；

（3）（+4 分）X 与 Y 的相关系数。

解（1）$a=1-(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3}$；（+2 分）

（2）X 的边际分布

X	1	2
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

（+1 分）

Y 的边际分布

Y	-1	0
	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$

；（+1 分）

经验证，X 与 Y 不独立。（+1 分）

（3）$EX=\frac{3}{2}$，$DX=\frac{1}{4}$；（+1 分）$EY=-\frac{5}{12}$，$DY=\frac{35}{144}\approx 0.24$；（+1 分）

$E(XY)=-\frac{7}{12}$（+1 分）；$\rho=\dfrac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DXDY}}=\dfrac{1}{\sqrt{35}}$。（1+1 分）

24、（本题 10 分）从某校一个班级的体检记录中随机抽取 25 名男生的身高数据，测得平均身高为 170 厘米，标准差为 12 厘米。如果假设该班级男生的身高 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中，μ 和 σ^2 均为未知参数。试求总体均值和标准差的置信度为 0.95 的置信区间。

（附分位数：$u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.65$；

$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，

$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，

$\chi^2_{0.975}(24)=12.401$，$\chi^2_{0.975}(25)=13.120$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$，$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$）

解 由于总体的方差未知，所以，均值的置信区间为

$$(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})\text{，（+3）}$$

代入计算得置信区间：$(165.06,174.94)$。（+2 分）

由于均值未知，标准差的置信区间为

$$(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}})\text{，（+3 分）}$$

代入计算得置信区间：$(9.37,16.69)$。（+2 分）

五、证明题（共 8 分）

25、设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

其中 $0<\theta<1$ 是未知参数。如果 $X_1,\ldots,X_n$ 是一个简单样本，而统计量 T 是样本值小于 1 的样本个数。

（1）（+3 分）证明：参数 θ 的矩估计为 $\frac{3}{2}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；

（2）（+5 分）证明：参数 θ 的最大似然估计为 $\frac{T}{n}$。

证（1）由 $EX=\int_0^1\theta x dx+\int_1^2(1-\theta)x dx=\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2}(1-\theta)=\bar{X}$；**（+2 分）**

因此，$\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\bar{X}$。**（+1 分）**

（2）似然函数：$L(\theta;X_1,\ldots,X_n)=\theta^T(1-\theta)^{n-T}$，**（+2 分）**

因此，$0=\frac{\partial}{\partial\theta}L(\theta;X_1,\ldots,X_n)=\frac{T}{\theta}-\frac{n-T}{1-\theta}$，**（+2 分）**解得：

此时 $\hat{\theta}=\frac{T}{n}$。**（+1 分）**