

第一章 习题课

- 主要内容
- 例题选讲

一、概率的定义

概率的公理化定义 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$, 称之为事件 A 的概率, 如果它满足下列三个条件:

(1) $P(A) \geq 0$; (非负性)

(2) $P(S) = 1$; (规范性)

(3) 对于两两互斥事件 A_1, A_2, \dots , 有

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

(可列可加性)



二、概率的性质

性质1 $P(\emptyset) = 0$.

性质2 设有限个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则
$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

性质3 对于任何事件 A , 有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质4 设 A, B 为两事件, 且 $A \supset B$, 则
$$P(A - B) = P(A) - P(B) \text{ 并且 } P(A) \geq P(B).$$



性质 5 对于任一事件 A , 都有 $P(A) \leq 1$.

性质 6 设 A, B 为任意两个事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\ & - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \end{aligned}$$



三、古典概型

若随机试验满足下述两个条件：

- (1) 它的样本空间只有有限多个样本点；
- (2) 每个样本点出现的可能性相同。

称这种试验为等可能随机试验或古典概型。

古典概型中事件 A 的概率的计算公式：

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中的基本事件总数}}$$



四、条件概率

1. 条件概率的定义

设 A 、 B 是两个事件，且 $P(B) > 0$ ，则称

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下,事件 A 的条件概率.



2. 条件概率的计算

1) 用定义计算:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

2) 从加入条件后改变了的情况去算



五、 乘法公式

若 $P(B) > 0$, 则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$

若 $P(A) > 0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$



六、 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S , B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则对样本空间中的任一事件 A , 恒有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$



七、 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S , A_1, A_2, \dots, A_n 为样本空间的一个划分, B 为 S 中的任一事件, 且 $P(B) > 0$, 则有

$$P(A_i | B) = P(A_i)P(B | A_i) / \sum_{j=1}^n P(A_j)P(B | A_j)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$



例1 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用A、B、C的运算关系表示下列事件：

A_1 ：“至少有一人命中目标”： $A \cup B \cup C$

A_2 ：“恰有一人命中目标”： $\overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C}$

A_3 ：“恰有两人命中目标”： $AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$

A_4 ：“最多有一人命中目标”： $\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}$

A_5 ：“三人均命中目标”： ABC

A_6 ：“三人均未命中目标”： $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$



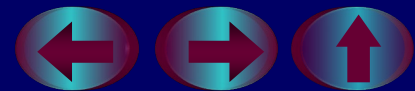
例2: 有三个子女的家庭, 设每个孩子是男是女的概率相等, 则至少有一个男孩的概率是多少?

解: 设A表示“至少有一个男孩”, 以H表示某个孩子是男孩, T表示某个孩子是女孩

$$N(S) = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$$

$$N(A) = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT\}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{7}{8}$$



例3 (摸球问题) 设合中有3个白球, 2个红球, 现从合中任抽2个球, 求取到一红一白的概率。

解: 设A表示“取到一红一白”

$$N(S) = C_5^2 \quad N(A) = C_3^1 C_2^1$$

$$\therefore P(A) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$$

一般地, 设合中有N个球, 其中有M个白球, 现从中任抽n个球, 则这n个球中恰有k个白球的概率是

$$p = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$



例4（分球问题）将3个球随机的放入3个盒子中去，
问：（1）每盒恰有一球的概率是多少？（2）空一盒的概率是多少？

解 设 A:每盒恰有一球, B:空一盒

$$N(S) = 3^3 \quad N(A) = 3! \quad P(A) = \frac{2}{9}$$

$$P(B) = 1 - P\{\text{空两盒}\} - P\{\text{全有球}\}$$

$$= 1 - \frac{3}{3^3} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$



一般地，把 n 个球随机地分配到 m 个盒子中去
($n \leq m$)，则每盒至多有一球的概率是：

$$p = \frac{P_m^n}{m^n}$$



例5 (分组问题) 30名学生中有3名运动员, 将这30名学生平均分成3组, 求: (1) 每组有一名运动员的概率; (2) 3名运动员集中在一个组的概率。

解 设A: 每组有一名运动员; B: 3名运动员集中在在一组

$$N(S) = C_{30}^{10} C_{20}^{10} C_{10}^{10} = \frac{30!}{10! 10! 10!}$$

$$P(A) = \frac{3! \frac{27!}{9! 9! 9!}}{N(S)} = \frac{50}{203} \quad P(B) = \frac{3 \times C_{27}^7 C_{20}^{10} C_{10}^{10}}{N(S)}$$



一般地，把 n 个球随机地分成 m 组 ($n > m$)，
要求第 i 组恰有 n_i 个球 ($i = 1, \cdots, m$)，共有分法：

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}$$

例6 (随机取数问题) 从1到200这200个自然数中任取一个；(1) 求取到的数能被6整除的概率；(2) 求取到的数能被8整除的概率；(3) 求取到的数既能被6整除也能被8整除的概率.

解: $N(S)=200$, $N(1)=[200/6]=33$,

$N(2)=[200/8]=25$ $N(3)=[200/24]=8$

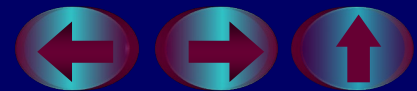
(1),(2),(3)的概率分别为: $33/200, 1/8, 1/25$



例7 某市有甲, 乙, 丙三种报纸, 订每种报纸的人数分别占全体市民人数的30%, 其中有10%的人同时定甲, 乙两种报纸. 没有人同时订甲乙或乙丙报纸. 求从该市任选一人, 他至少订有一种报纸的概率.

解 设A, B, C分别表示选到的人订了甲, 乙, 丙报

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= 30\% \times 3 - 10\% - 0 - 0 + 0 = 80\% \end{aligned}$$

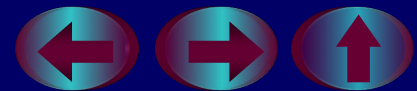


例8 在1~10这10个自然数中任取一数，求

- (1) 取到的数能被2或3整除的概率，
- (2) 取到的数即不能被2也不能被3整除的概率，
- (3) 取到的数能被2整除而不能被3整除的概率。

解 设 A —取到的数能被2整除；

B —取到的数能被3整除。



故 $P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad P(AB) = \frac{1}{10}$

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{7}{10}$$

$$(2) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{10}$$

$$(3) P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{2}{5}$$



例9 盒中有3个红球，2个白球，每次从袋中任取一只，观察其颜色后放回，并再放入一只与所取之球颜色相同的球，若从盒中连续取球4次，试求第1、2次取得白球、第3、4次取得红球的概率。

解 设 A_i 为第 i 次取球时取到白球，则

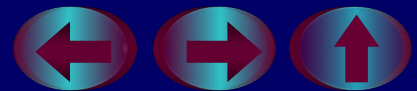
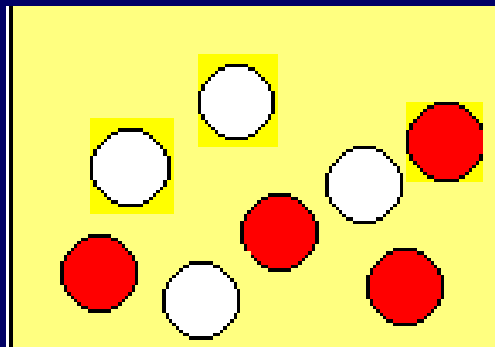
$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) P(\bar{A}_4 | A_1 A_2 \bar{A}_3)$$

$$P(A_1) = \frac{2}{5}$$

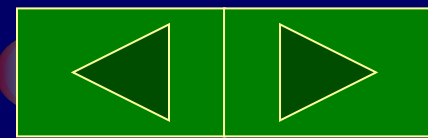
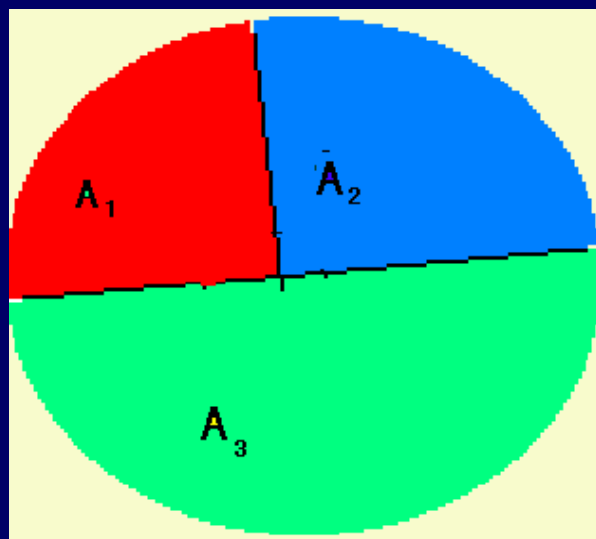
$$P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) = \frac{3}{7}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{3}{6}$$

$$P(\bar{A}_4 | A_1 A_2 \bar{A}_3) = \frac{4}{8}$$



例10 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为 $1/4$ 、 $1/4$ 、 $1/2$ ，且三家工厂的次品率分别为 2% 、 1% 、 3% ，试求市场上该品牌产品的次品率。



设： B ：买到一件次品

A_1 ：买到一件甲厂的产品

A_2 ：买到一件乙厂的产品

A_3 ：买到一件丙厂的产品

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

$$= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3)$$

$$= 0.02 \times \frac{1}{4} + 0.01 \times \frac{1}{4} + 0.03 \times \frac{1}{2} \approx 0.0225$$



例11 商店论箱出售玻璃杯, 每箱20只, 其中每箱含0, 1, 2只次品的概率分别为0.8, 0.1, 0.1, 某顾客选中一箱, 从中任选4只检查, 结果都是好的, 便买下了这一箱. 问这一箱含有一个次品的概率是多少?

解 设 A : 从一箱中任取4只检查, 结果都是好的.

B_0, B_1, B_2 分别表示事件每箱含0, 1, 2只次品

已知: $P(B_0)=0.8$, $P(B_1)=0.1$, $P(B_2)=0.1$

$$P(A|B_0)=1 \quad P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5} \quad P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

由 *Bayes* 公式:

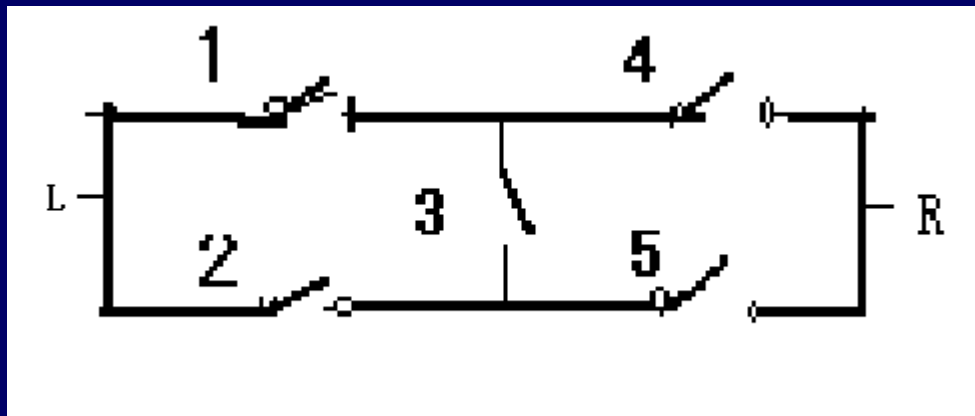
$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=0}^2 P(B_i)P(A|B_i)}$$

$$= \frac{0.1 \times \frac{4}{5}}{0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19}} \approx 0.0848$$



例12 在可靠性理论上的应用

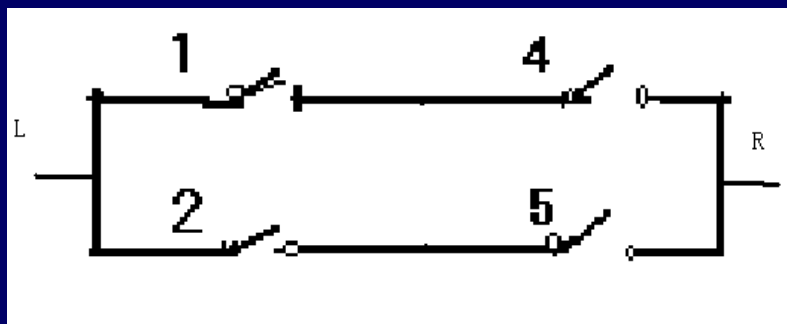
如图，1、2、3、4、5表示继电器触点，假设每个触点闭合的概率为 p ，且各继电器接点闭合与否相互独立，求 L 至 R 是通路的概率。



设 A 表示“ L 至 R 为通路”，

A_i 表示“第 i 个继电器通”， $i = 1, 2, \dots, 5$.

$$P(A | \bar{A}_3) = P(A_1 A_4 \cup A_2 A_5) = 2p^2 - p^4$$



$$P(A|A_3) = P\{(A_1 \cup A_2)(A_4 \cup A_5)\}$$

$$P(A|A_3) = P(A_1 \cup A_2)P(A_4 \cup A_5) = (2p - p^2)^2$$

由全概率公式

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|\bar{A}_3)P(\bar{A}_3) + P(A|A_3)P(A_3) \\ &= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5 \end{aligned}$$

