概率论与数理统计第21讲

本讲义可在网址
http://math.shekou.com
下载

§6.3 置信区间

点估计仅仅是未知参数的一个近似值, 它没有给出这个近似值的误差范围.

若能给出一个估计区间, 让我们能较大把握地(其程度可用概率来度量之)相信未知参数的真值被含在这个区间内, 这样的估计显然更有实用价值.

本节将引入的另一类估计即为**区间估计**, 在区间估计理论中, 被广泛接受的一种观点是**置信区间**, 它是奈曼(Neymann)于1934年提出的.

一, 置信区间的概念

定义1 设θ为总体分布的未知参数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$是取知总体X的一个样本, 对给定的数$1-\alpha(0<\alpha<1)$, 若存在统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n),\quad \overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n).$$

使得
$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha. \tag{3.1}$$

则称随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$为$\theta$的$1-\alpha$**双侧置信区间**, 称$1-\alpha$为**置信度**, 又分别称$\underline{\theta}$与$\overline{\theta}$为$\theta$的**双侧置信下限**与**双侧置信上限**.

注: ①置信度$1-\alpha$的含义: 在随机抽样中, 若重复抽样多次, 得到样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$的多个样本值$x_1, x_2, \ldots, x_n$, 对应每个样本值都确定了一个置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, 每个这样的区间要么包含了$\theta$的真值, 要么不包含$\theta$的真值. 根据大数定理, 这些区间中包含真值的频率接近置信度$1-\alpha$.

②置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$也是对未知参数$\theta$的一种估计, 区间的长度意味着误差, 故区间估计与点估计是互补的两种参数估计

③置信度与估计精度是一对矛盾. 置信度 $1-\alpha$越大, 置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$包含$\theta$的概率就越大, 但区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$的长度就越大, 对未知参数$\theta$的估计精度就越差. 反之, 对参数$\theta$的估计精度越高, 置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$长度就越小, $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$包含$\theta$的真值的概率就越低, 置信度$1-\alpha$越小. **一般准则**是: 在保证置信度的条件下尽可能提高估计精度.

例 1 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 为已知, μ为未知, 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自 X 的样本，求μ的置信水平为 $1-\alpha$的置信区间.

解 我们知道 $\bar{X}$ 是μ的无偏估计．且有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

按标准正态分布的双侧α分位数的定义，有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha.$$

式子 $$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha.$$

中的事件

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2}\Leftrightarrow|\mu-\bar{X}|<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<\mu-\bar{X}<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$$

$$\Leftrightarrow\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$$

由 $$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha.$$

得 $$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

我们得到了μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) \qquad (3.2)$$

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) \qquad (3.2)$$

这样的置信区间常写成 $\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$

如果取 α=0.05, 即 $1-\alpha$=0.95, 又若 $\sigma=1$, n=16, 查表得 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$.

于是我们得到一个置信水平为0.95的置信区间

$$\left(\bar{X}\pm\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96\right),\text{即}(\bar{X}\pm 0.49). \qquad (3.3)$$

$$\left(\bar{X} \pm \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96\right), \text{即} (\bar{X} \pm 0.49). \qquad (3.3)$$

再者, 若由一个样本值算得样本均值的观察值 $\bar{x}$=5.20, 则我们得到一个置信水平为0.95的置信区间

$$(5.20 \pm 0.49), \text{即} (4.71, 5.69)$$

注意, 这已经不是随机区间了. 但我们仍称它为置信水平为0.95的置信区间, 是指的这个区间包含μ的可信程度为95%.

例2 设总体$X\sim N(\mu,8)$, μ为未知参数, $X_1,\ldots,X_{36}$是取自总体X的简单随机样本, 如果以区间$(\bar{X}-1, \bar{X}+1)$作为μ的置信区间, 那么置信度是多少?

解

$$\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)=N(\mu,8/36)=N(\mu,2/9).$$

$$P\{\bar{X}-1<\mu<\bar{X}+1\}=P\{|\bar{X}-\mu|<1\}$$

$$=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{2}/3}\right|<\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}=2\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)-1=$$

$$=0.966=1-\alpha$$

二, 寻求置信区间的方法

寻求置信区间的基本思想: 在点估计的基础上, 构造合适的含样本及待估参数的函数U, 且已知U的分布. 再针对给定的置信度导出置信区间.

一般步骤:

(1) 选取未知参数θ的某个较优估计量$\hat{\theta}$;

(2) 围绕$\hat{\theta}$构造一个依赖于样本与参数θ的函数 $U=U(X_1,X_2,\ldots,X_n,\theta)$;

(3) 对给定的置信水平 $1-\alpha$, 确定λ_1和λ_2, 使

$$P\{\lambda_1 \le U \le \lambda_2\}=1-\alpha \qquad (3.4)$$

通常可选取满足$P\{U\le\lambda_1\}=P\{U\ge\lambda_2\}=\frac{\alpha}{2}$的$\lambda_1$和$\lambda_2$, 在常用分布下, 这可由查表得到.

(4) 对不等式$\lambda_1 \le U \le \lambda_2$作恒等变形后化为

$$P\{\ \theta \le \theta \le \overline{\theta}\ \}=1-\alpha, \qquad (3.5)$$

则$(\ \theta,\ \overline{\theta}\ )$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间.

三, (0-1)分布参数的置信区间

考虑(0-1)分布情形, 设其总体X的分布率为 $P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p, (0<p<1)$, 现求$p$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

已知(0-1)分布的均值和方差分别为

$$E(X)=p, D(X)=p(1-p),$$

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的一个样本, 当n充分大时, 样本均值 $\overline{X}$可作为p的点估计, 且近似有

$$\overline{X}\sim N(p, p(1-p)/n)$$

$\bar{X} \sim N(p, p(1-p)/n)$

给定置信度$1-\alpha$, 则有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| < u_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha,$$

经不等式变形得 $P\{ap^2+bp+c<0\} \approx 1-\alpha,$

其中

$$a = n+(u_{\alpha/2})^2, b = -2n\bar{X}-(u_{\alpha/2})^2, c = n(\bar{X})^2 \qquad (3.7)$$

经不等式变形得 $P\{ap^2+bp+c<0\}\approx 1-\alpha$,
其中

$$a=n+(u_{\alpha/2})^2, b=-2n\bar{X}-(u_{\alpha/2})^2, c=n(\bar{X})^2 \quad (3.7)$$

解式中不等式得 $P\{p_1<p<p_2\}=1-\alpha$,
其中

$$p_1=\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right), p_2=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right) \quad (3.8)$$

(p_1,p_2)就是p的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

四, 单侧置信区间

前面讨论的置信区间$(\theta, \bar{\theta})$称为双侧置信区间, 但在有些实际问题中只要考虑选取满足$P\{u\le\lambda_1\}=\alpha$或$P\{u\ge\lambda_2\}=\alpha$的$\lambda_1$或$\lambda_2$, 对不等式作恒等变形后化为

$$P\{\underline{\theta}\le\theta\}=1-\alpha\text{或}P\{\theta\le\bar{\theta}\}=1-\alpha \quad (3.9)$$

从而得到形如$(\underline{\theta}, +\infty)$或$(-\infty, \bar{\theta}\}$的置信区间.

例如, 对产品设备, 电子元件等来说, 我们关心的是平均寿命的置信下限, 而在讨论产品的废品率时, 我们感兴趣的是其置信上限. 于是我们引入单侧置信区间.

定义2 设θ为总体分布的未知参数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体X的一个样本, 对给定的数$1-\alpha(0<\alpha<1)$, 若存在统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n),$$

满足 $$P\{\underline{\theta}<\theta\}=1-\alpha.$$

则称$(\underline{\theta}, +\infty)$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的**单侧置信区间**, 称$\underline{\theta}$为$\theta$的**单侧置信下限**;

若存在统计量

$$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n),$$

满足 $$P\{\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha.$$

则称 $(-\infty,\overline{\theta})$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**, 称 $\overline{\theta}$ 为 θ 的**单侧置信上限**.

例5 从一批灯泡中随机地抽取5只作寿命试验, 其寿命如下(单位:h)

1050 1100 1120 1250 1280

已知这批灯泡寿命$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求平均寿命μ的置信度为95%的单侧置信下限.

解 因为

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

对于给定置信度$1-\alpha$, 有

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即

$$P\left\{\mu>\bar{X}-t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

可得μ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限为

$$\bar{X}-t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

$$\bar{X}-t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

由所得数据计算, 有

$\bar{x}=1160$, $s=99.75$, $n=5$, $\alpha=0.05$

查表得$t_{0.05}(4)=2.14$, 从而平均寿命μ的置信度为95%的置信下限为

$$\bar{x}-t_{\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=1064.56$$

也就是说,该灯泡的平均寿命至少在1064.56h以上, 可靠程度为95%.

§6.5 正态总体的置信区间

与其他总体相比, 正态总体参数的置信区间是最完善的, 应用也最广泛. 在构造正态总体参数的置信区间的过程中, t分布, χ^2分布, F分布以及标准正态分布$N(0,1)$扮演了重要角色.

本节介绍正态总体的置信区间, 讨论下列情形:

1. 单正态总体均值(方差已知)的置信区间;

2, 单正态总体均值(方差未知)的置信区间;

3, 单正态总体方差的置信区间;

4, 双正态总体均值差(方差已知)的置信区间;

5. 双正态总体均值差(方差未知)的置信区间;

6. 双正态总体方差比的置信区间.

一, 单正态总体均值的置信区间(1)

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中σ^2已知, 而μ为未知参数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体X的一个样本.

对给定的置信水平$1-\alpha$, 由上节例1已经得到μ的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) \qquad (4.1)$$

例1 某旅行社为调查当地旅游者的平均消费额, 随机访问了100名旅游者, 得知平均消费额 $\bar{x}=80$元. 根据经验, 已知旅游者消费服从正态分布, 且标准差$\sigma=12$元, 求该地旅游者平均消费额μ的置信度为95%的置信区间.

解 由$1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$, $\alpha/2=0.025$.

查表得$u_{0.025}=1.96$, 将数据$n=100$, $\bar{x}=80$, $\sigma=12$, 代入(4.1)式, 算出对应的置信区间为 $(77.6, 82.4)$.

例2 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ未知, $\sigma^2=4$. $X_1,\ldots,X_n$为其样本.

(1) 当$n=16$时, 试求置信度分别为0.9及0.95的μ置信区间的长度.

(2) n多大方能使μ的90%置信区间的长度不超过1?

(3) n多大方能使μ的95%置信区间的长度不超过1?

解 (1) 记μ的置信区间长度为Δ, 则

$$\Delta=\left(\bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

于是当$1-\alpha=90\%$时

$$\Delta=2\times1.65\times\frac{2}{\sqrt{16}}=1.65$$

当$1-\alpha=95\%$时

$$\Delta=2\times1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}=1.96$$

(2) 欲使$\Delta\le 1$，即$2u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 1$，必须

$n\ge(2\sigma u_{\alpha/2})^2$，于是，当 $1-\alpha=90\%$时，

$n\ge(2\times 2\times 1.65)^2$，即 $n\ge 44$.

也就是说，样本容量至少为 44 时，μ的 90%置信区间的长度不超过 1.

(3) 当 $1-\alpha=90\%$时，类似可得 $n\ge 62$.

二, 单正态总体的置信区间(2)

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ,σ^2未知,

$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体X的一个样本.

此时可用σ^2的无偏估计S^2代替σ^2, 构造统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

对给定的置信水平$1-\alpha$, 由

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即

$$P\left\{\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

因此, 均值μ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \tag{4.2}$$

例3 某旅行社随机访问了25名旅游者, 得知平均消费额 $\bar{x}=80$元, 子样标准差$s=12$元, 已知旅游者消费额服从正态分布, 求旅游者平均消费额μ的95%置信区间.

解 对于给定的置信度

95%($\alpha=0.05$), $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(24)=2.0639$,
将 $\bar{x}=80$, $s=12$, $n=25$, $t_{0.025}(24)=2.0639$代入(4.2)式得μ的置信度为95%的置信区间为(75.09, 84.95).

例4 有一大批糖果. 现从中随机取16袋, 称得重量(以克计)如下:

506 508 499 503 504 510 497 512

514 505 493 496 506 502 509 496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布, 试求总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间.

解 $1-\alpha=0.95$, $\alpha/2=0.025$, $n-1=15$,

$t_{0.025}(15)=2.1315$,

由给出数据算得 $\bar{x}=503.75$, $s=6.2022$. 可得均值μ的一个置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(502.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right),$$

即 $(500.4,\ 507.1)$.

三, 单正态总体方差的置信区间

上面给出了总体均值μ的区间估计, 在实际问题中要考虑精度或稳定性时, 需要对正态总体的方差σ^2进行区间估计.

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ,σ^2未知, $X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体X的样本. 求方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间. σ^2的无偏估计为S^2, 而且有

$$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1),$$

对给定的置信水平$1-\alpha$, 由

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

得

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是方差σ^2的$1-\alpha$置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) \qquad (4.3)$$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) \qquad (4.3)$$

而标准差σ的$1-\alpha$置信区间

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right) \qquad (4.4)$$

例5 为考察某大学成年男性的胆固醇水平, 现抽取了样本容量为25的一样本, 并测得样本均值 $\bar{x}=186$, 样本标准差$s=12$, 假定所论胆固醇水平$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ与σ^2均未知. 试分别求出μ及σ的90%置信区间.

解 μ的 $1-\alpha$置信区间为$\left(\bar{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$;

$\bar{x}=186$, $s=12$, $n=25$, $\alpha=0.1$，查表得

$t_{0.1/2}(25-1)=1.7109$，于是

$$t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=1.7109\times\frac{12}{\sqrt{25}}=4.106,$$

从而μ的 90%置信区间为(186 ± 4.106)，即 $(181.89, 190.11)$.

σ的 $1-\alpha$置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$ 查表得

$$\chi^2_{0.1/2}(25-1)=36.42,\chi^2_{1-0.1/2}(25-1)=13.85$$

于是置信下限为$\sqrt{\dfrac{24\times 12^2}{36.42}}=9.74$，置信上限为$\sqrt{\dfrac{24\times 12^2}{13.85}}=15.80$，答案$(9.74,15.80)$.

四, 双正态总体均值差的置信区间(1)

在实际问题中, 往往需要知道两个正态总体均值之间或方差之间是否有差异, 从而要研究两个正态总体的均值差或者方差比的置信区间.

设$\bar{X}$是总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的容量为 n_1 的样本均值，$\bar{Y}$是总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的容量为n_2的样本均值，且两总体相互独立，其中σ_1^2,σ_2^2已知.

因$\bar{X}$与$\bar{Y}$分别是μ_1与μ_2的无偏估计，且

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1),$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$$

对给定的置信水平$1-\alpha$, 由

$$P\left\{\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right| < u_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha,$$

可导出$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \tag{4.5}$$

例6 1986年在某地区分行业调查职工平均工资情况: 已知体育, 卫生, 社会福利事业职工工资X(单位: 元)$\sim N(\mu_1, 218^2)$; 文教, 艺术, 广播事业职工工资Y(单位: 元)$\sim N(\mu_2, 227^2)$, 从总体X中调查25人, 平均工资1286元, 从总体Y中调查30人, 平均工资1272元, 求这两大类行业职工平均工资之差的99%的置信区间.

解 由于$1-\alpha=0.99$, 故$\alpha=0.01$, 查表得 $u_{0.005}=2.576$, 又$n_1=25$, $n_2=30$, $\sigma_1^2=218^2$, $\sigma_2^2=227^2$, $\bar{x}=1286$, $\bar{y}=1272$, 于是, 由公式(4.5)算出$\mu_1-\mu_2$的置信概率为99%的置信区间为

$$[-140.96,\ 168.96]$$

五, 双正态总体均值差的置信区间(2)

设 $\bar{X}$是总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的容量为n_1的样本均值, $\bar{Y}$是总体$N(\mu_2,\sigma^2)$的容量为n_2的样本均值, 且两总体相互独立, 其中μ_1,μ_2及σ未知. 从第五章第三节定理4知

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

其中 $S_w^2=\dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-2}S_1^2+\dfrac{n_2-1}{n_1+n_2-2}S_2^2.$

对给定置信水平$1-\alpha$, 由

$$P\{|T|<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=1-\alpha,$$

可导出$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$$

$$\left.(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

例7 A,B两个地区种植同一型号的小麦. 现抽取了19块面积相同的麦田, 其中9块属于地区A, 另外10块属于地区B, 测得它们的小麦产量(以kg计)分别如下:

地区A:100, 105, 110, 125, 110, 98, 105, 116, 112;

地区B: 101, 100, 105, 115, 111, 107, 106, 121, 102, 92.

设地区A的小麦产量$X \sim N(\mu_1,\sigma^2)$, 地区B的小麦产量$Y \sim N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2均未知.

试求这两个地区的平均产量之差$\mu_1-\mu_2$的90%置信区间.

解 由题意知所求置信区间的两个端点为

$$(\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

由α=0.1, n_1=9, n_2=10查表得

$t_{0.1/2}(17)$=1.7396, 按已给数据计算得

$$\bar{x}=109, \bar{y}=106, s_1^2=\frac{550}{8}, s_2^2=\frac{606}{9}$$

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=68, s_w=8.246,$$

于是置信下限为

$$(109-106)-1.7396\times 8.246\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}=-3.59$$

置信上限为

$$(109-106)+1.7396\times 8.246\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}=9.59$$

故均值差$\mu_1-\mu_2$的90%置信区间为

$(-3.59, 9.59)$

六，双正态总体方差比的置信区间

设S_1^2是总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的容量为 n_1 的样本方差，S_2^2是总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的容量为n_2的样本方差，且两总体相互独立，其中$\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2$未知. S_1^2与S_2^2分别是σ_1^2与σ_2^2的无偏估计，从第五章第三节定理 4 知

$$F=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1),$$

对给定的置信水平 $1-\alpha$, 由

$$P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\frac{S_1^2}{S_2^2}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right\}$$

$$=1-\alpha$$

可导出方差比σ_1^2/σ_2^2的 $1-\alpha$置信区间为

$$\left(\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\frac{S_1^2}{S_2^2},\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

(4.7)

例 8 某钢铁公司的管理人员为比较新旧两个电炉的温度状况，他们抽取了新电炉的 31 个温度数据及旧电炉的 25 个温度数据，并计算得样本方差分别为$s_1^2=75$及$s_2^2=100$. 设新电炉的温度$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，旧电炉的温度$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 试求$\sigma_1^2/\sigma_2^2$的 95%置信区间.

解 σ_1^2/σ_2^2的 $1-\alpha$置信区间的 2 端点分别是

$$(F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1))^{-1}\frac{s_1^2}{s_2^2}\text{与}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

$\alpha=0.05$, $n_1=31$, $n_2=25$,

查表得

$F_{0.05/2}(30,24)=2.21$, $F_{0.05/2}(24,30)=2.14$.

于是置信下限和上限分别为

$$\frac{1}{2.21}\times\frac{75}{100}=0.34\text{和}2.14\times\frac{75}{100}=1.61,$$

所求置信区间为(0.34, 1.61).

在表6-4-1和表6-4-2中分别总结了有关单正态总体参数和双正态总体参数的置信区间, 以方便查用.

作业 习题6-4 第218页开始
第1,3,4,6题