第五节 条件概率

- 条件概率
- 乘法公式
- 小结 布置作业

一、条件概率

1. 条件概率的概念

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息(条件)下求事件的概率.

如在事件B发生的条件下求事件A发生的概率，将此概率记作$P(A|B)$.

一般地 $P(A|B) \neq P(A)$

例如，掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}，

B={掷出偶数点}, $P(A)$=1/6，$P(A|B)$=？

已知事件B发生，此时试验所有可能结果构成的集合就是B，

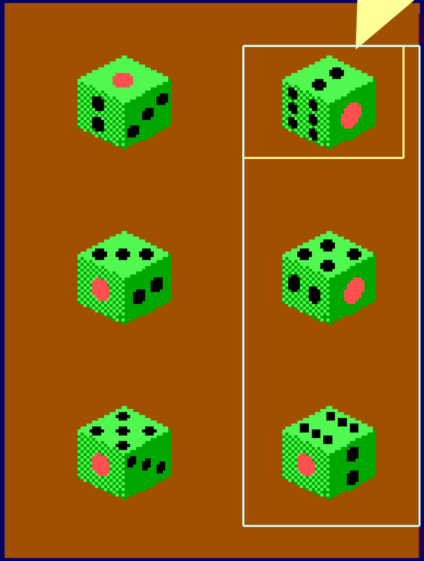
B中共有3个元素,它们的出现是等可能的,其中只有1个在集A中. 于是

$$P(A|B)= 1/3.$$

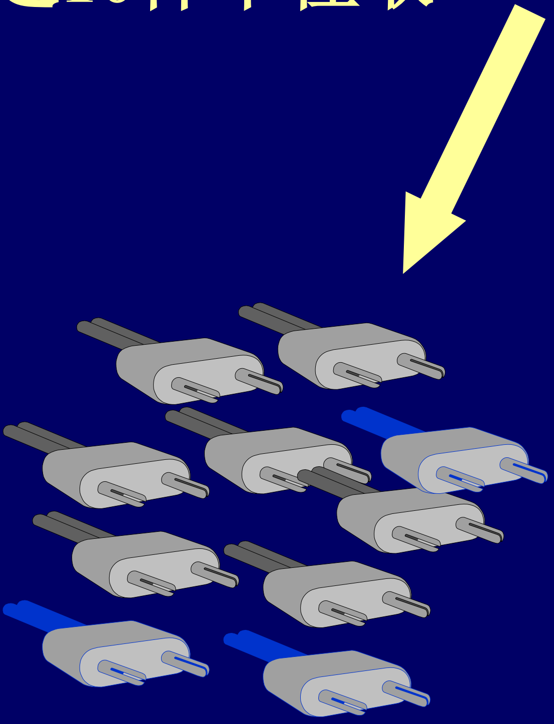
容易看到

$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

掷骰子



又如，10件产品中有7件正品，3件次品，7件正品中有3件一等品，4件二等品. 现从这10件中任取一件，记



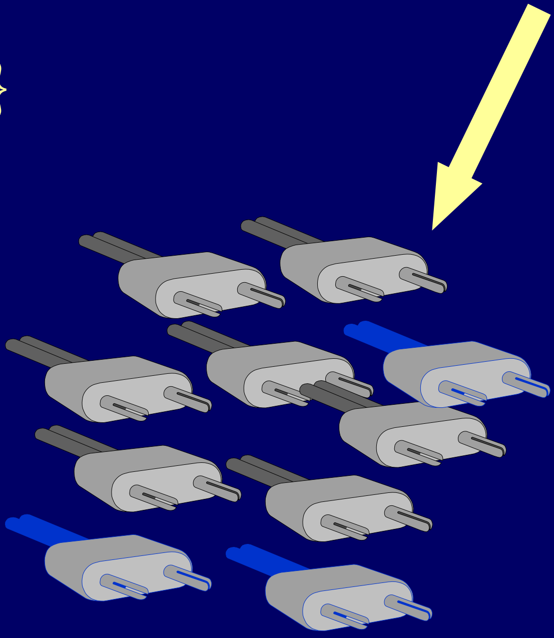
A={取到一等品}，B={取到正品}

则 $P(A)=3/10$，

$$P(A|B)=\frac{3}{7}=\frac{3/10}{7/10}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

A={取到一等品}，B={取到正品}

$P(A)=3/10$，　$P(A|B)=3/7$



本例中，计算$P(A)$时，依据的前提条件是10件产品中一等品的比例.

计算$P(A|B)$时，这个前提条件未变，只是加上“事件B已发生”这个新的条件.

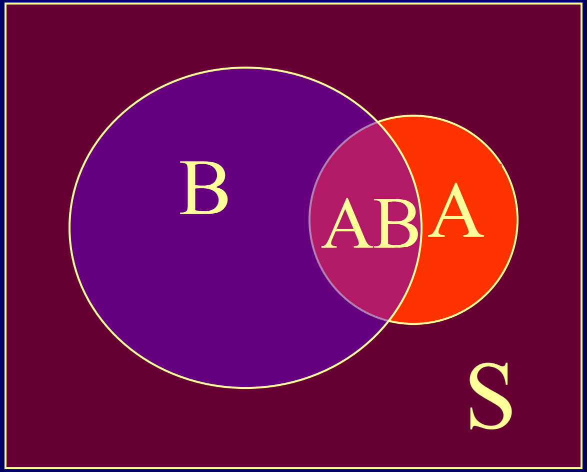
这好象给了我们一个“情报”，使我们得以在某个缩小了的范围内来考虑问题.

2. 条件概率的定义

设A、B是两个事件，且$P(B)>0$,则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1)$$

为在事件B发生的条件下,事件A的条件概率.



若事件B已发生，则为使A也发生，试验结果必须是既在 B 中又在A中的样本点，即此点必属于AB. 由于我们已经知道B已发生，故B变成了新的样本空间，于是 有(1).

3. 条件概率的性质(自行验证)

条件概率 $P(\bullet \mid A)$ 具备概率定义的三个条件：

(1) 非负性：对于任意的事件 B , $P(B \mid A) \geq 0$;

(2) 规范性：$P(S \mid A) = 1$;

(3) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \ldots$ 是两两互斥事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

所以在第二节中证明的性质对条件概率都成立 .

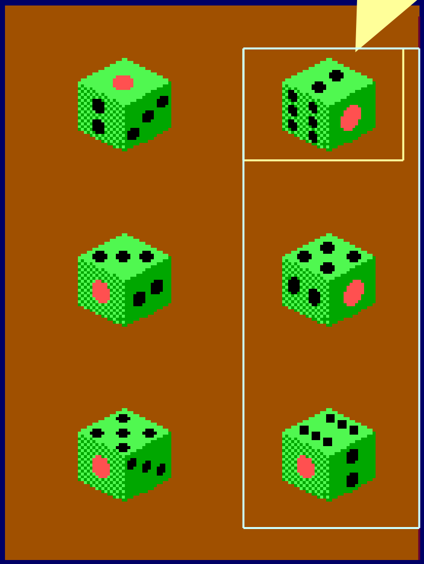
4. 条件概率的计算

1) 用定义计算:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\qquad P(B)>0$$

2)从加入条件后改变了的情况去算

掷骰子



例：A={掷出2 点},B={掷出偶数点}

$$P(A|B)=\frac{1}{3}$$

B发生后的缩减样本空间所含样本点总数

在缩减样本空间中A所含样本点个数

例1 掷两颗均匀骰子,已知第一颗掷出6点,问"掷出点数之和不小于10"的概率是多少?

解 设A={掷出点数之和不小于10}

B={第一颗掷出6点}

应用 定义

解法1 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

解法2 $$P(A|B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

在B发生后的缩减样本空间中计算

二、 乘法公式

由条件概率的定义： $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

即　若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$　(2)

将A、B的位置对调，有

(2)和(3)式都称为乘法公式，利用它们可计算两个事件同时发生的概率

而　$P(AB)=P(BA)$

故　$P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$　(3)

注意$P(AB)$与$P(A \mid B)$的区别！

请看下面的例子

例2 甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中 300 件是乙厂生产的. 而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

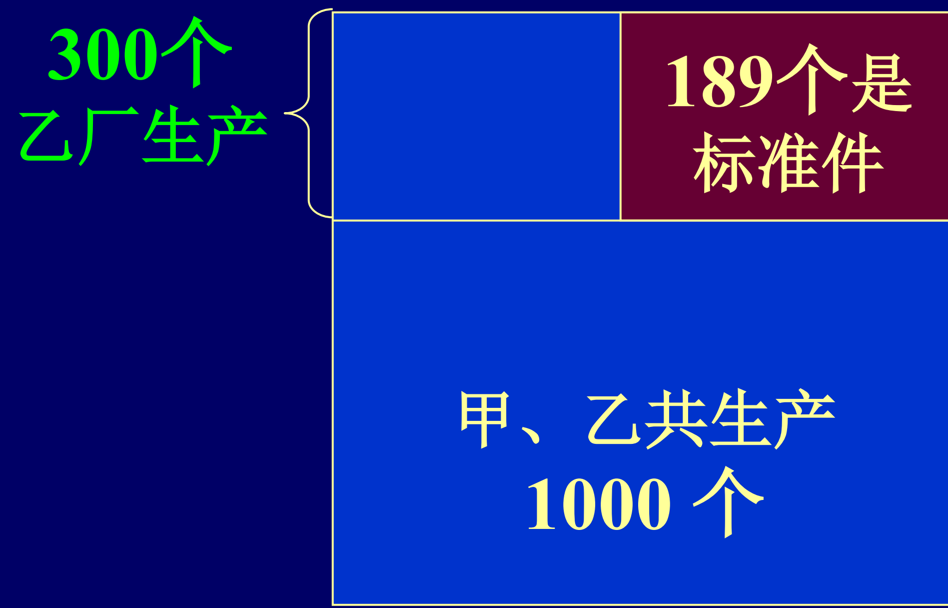
设B={零件是乙厂生产}，A={是标准件}

所求为$P(AB)$.

设B={零件是乙厂生产}

A={是标准件}

所求为$P(AB)$.



若改为“发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少?”

求的是 $P(A|B)$.

B发生,
在$P(AB)$中作为结果;
在$P(A|B)$中作为条件.

例3 设某种动物由出生算起活到20年以上的概率为0.8，活到25年以上的概率为0.4. 问现年20岁的这种动物，它能活到25岁以上的概率是多少？

解 设A={能活20年以上}，B={能活25年以上}

所求为 $P(B|A)$.

依题意， $P(A)=0.8$, $P(B)=0.4$

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$

条件概率$P(A|B)$与$P(A)$的区别

每一个随机试验都是在一定条件下进行的，设A是随机试验的一个事件，则$P(A)$是在该试验条件下事件A发生的可能性大小.

而条件概率 $P(A|B)$ 是在原条件下又添加 “B发生” 这个条件时A发生的可能性大小，即 $P(A|B)$仍是概率.

$P(A)$ 与 $P(A|B)$ 的区别在于两者发生的条件不同,它们是两个不同的概念,在数值上一般也不同.

乘法定理可以推广到多个事件的积事件的情况.

设 A、B、C 为三个事件,且 $P(AB)>0$,则

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A).$$

一般地,设有 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$,$n \geq 2$,并且 $P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$,则由条件概率的定义,可得

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n-1})P(A_{n-1}\mid A_1A_2\ldots A_{n-2})\ldots$$
$$\cdot P(A_3\mid A_1A_2)P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

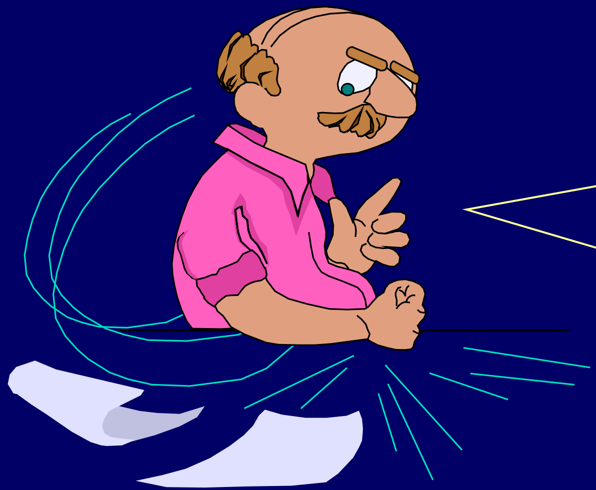
一场精彩的足球赛将要举行, 5个球迷好不容易才搞到一张入场券.大家都想去,只好用抽签的方法来解决.

入场券

5张同样的卡片,只有一张上写有“入场券”,其余的什么也没写. 将它们放在一起,洗匀,让5个人依次抽取.

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大.”

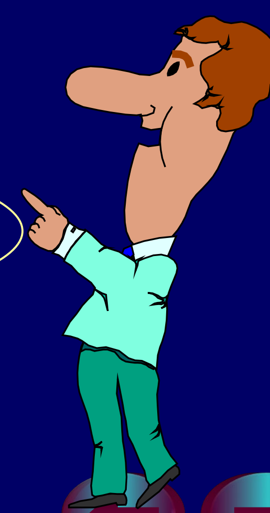
后抽比先抽的确实吃亏吗?



“大家不必争先恐后，你们一个一个按次序来，谁抽到‘入场券’的机会都一样大.”

到底谁说的对呢？让我们用概率论的知识来计算一下,每个人抽到“入场券”的概率到底有多大?

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大。”



我们用A_i表示“第i个人抽到入场券”

$i=1,2,3,4,5.$

则 $\overline{A_i}$表示“第i个人未抽到入场券”

显然，$P(A_1)=1/5$，$P(\overline{A_1})=4/5$

也就是说，

第1个人抽到入场券的概率是1/5.

由于 $A_2 = \overline{A}_1 A_2$

因为若第2个人抽到了入场券，第1个人肯定没抽到.

由乘法公式

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)$$

也就是要想第2个人抽到入场券，必须第1个人未抽到，计算得:

$$P(A_2) = (4/5)(1/4) = 1/5$$

同理，第3个人要抽到“入场券”，必须第1、第2个人都没有抽到. 因此

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=(4/5)(3/4)(1/3)=1/5$$

继续做下去就会发现, 每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.

这就是有关抽签顺序问题的正确解答.

也就是说,

抽签不必争先恐后.

例4 设袋中有5个红球,3个黑球,2个白球,试按(1)有放回抽样;(2)不放回抽样两种方式摸球三次每次摸得一球,求第三次才摸得白球的概率.

解 设 $A=\{$第一次未摸得白球$\}$,

$B=\{$第二次未摸得白球$\}$,

$C=\{$第三次摸得白球$\}$.

则事件"第三次才摸得白球"可表示为 $\bar{A}\bar{B}C$.

(1)有放回抽样

$$P(A)=\frac{8}{10},\ P(B\mid A)=\frac{8}{10},\ P(C\mid AB)=\frac{2}{10},$$

$$P(ABC) = P(C \mid AB)P(B \mid A)P(A)$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{16}{125}.$$

(2)无放回抽样

$$P(A) = \frac{8}{10},\ P(B \mid A) = \frac{7}{9},\ P(C \mid AB) = \frac{2}{8},$$

$$P(ABC) = P(C \mid AB)P(B \mid A)P(A)$$

$$= \frac{2}{8} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{10} = \frac{7}{45}.$$

例6 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为$\frac{1}{2}$，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率是$\frac{7}{10}$，若前两次未打破，第三次落下打破的概率是$\frac{9}{10}$，试求透镜落下三次未打破的概率。

解 设 $A_i = \{$透镜第 i 次落下打破$\}, i = 1,2,3$，

$B = \{$透镜落下三次未打破$\}$，则 $B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

$$P(B) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(\overline{A_3} \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{7}{10}\right)\left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{3}{200}.$$

本题也可以先求 $P(\overline{B})$,再由 $P(B)=1-P(\overline{B})$ 求得 $P(B)$.

由于 $\overline{B}=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 并且 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 为两两不相容事件,故有

$$\begin{aligned}P(\overline{B})&=P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=\frac{1}{2}+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{197}{200}.\end{aligned}$$

所以 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{197}{200}=\dfrac{3}{200}$.

三、 小结

这一讲，我们介绍了条件概率的概念，给出了计算两个或多个事件同时发生的概率的乘法公式，它在计算概率时经常使用，需要牢固掌握.