《概率论与数理统计》强化训练题三解答

一、是非题(填“对”或“错”)

1. 对;　　2. 错;　　3. 错;　　4. 错;　　5. 错.

二、填空题

1. $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{7}$;　　2. $1-\mathrm{e}^{-1}$; $\frac{1}{\mathrm{e}-1}$;　　3. $F(x,y)$; $F(x,+\infty)$;

4. $\frac{\sigma^2}{n}$; 1;　　5. $F(1,1)$; $\frac{1}{2\sigma^2}$.

三、单项选择题

1. B;　　2. C;　　3. C;　　4. D;　　5. A.

四、有一批数量非常大的产品, 次品率为 p. 现从中取出 n 件样品进行检验, 如果全部合格, 则这批产品被接收. 但检验过程可能会出差错: 一件次品被误认为是合格品的概率为 a, 而一件合格品被误认为是次品的概率为 b. 假设各件样品的检验是独立的.

1. 求这批产品被接收的概率;

2. 如果这批产品经检验被接收, 求这 n 件样品确实都是合格品的概率.

解: 1. 设 A 为“这批产品被接收”, B_i 为“n 件样品中有 i 件次品”. 样本空间的完备事件组为 $B_0\cup B_1\cup\cdots\cup B_n$. 并且

$$P(B_i)=C_n^i p^i(1-p)^{n-i},\quad P(A\mid B_i)=a^i(1-b)^{n-i},\quad i=0,1,\cdots,n.$$

于是

$$P(A)=\sum_{i=0}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(ap)^i[(1-b)(1-p)]^{n-i}=[ap+(1-b)(1-p)]^n.$$

2. 如果这批产品经检验被接收, 则这 n 件样品确实都是合格品的概率为

$$P(B_0 \mid A)=\frac{P(B_0)P(A \mid B_0)}{P(A)}=\left[\frac{(1-b)(1-p)}{ap+(1-b)(1-p)}\right]^n.$$

五、设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x,\ -\infty<x<+\infty.$$

试计算:

1. 常数 A 和 B;
2. X 的概率密度函数 $f(x)$;
3. $P\{|X|\le 1\}$;
4. $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解: 1. 根据分布函数的性质,

$$F(-\infty)=A-\frac{\pi}{2}B=0,\ F(+\infty)=A+\frac{\pi}{2}B=1,$$

得

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{\pi}.$$

2. X 的概率密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

3. $P\{|X|\le 1\}=F(1)-F(-1)=\frac{2}{\pi}\cdot\arctan 1=\frac{1}{2}$;

4. 根据分布函数的定义, Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}.$$

如果 $y\le 0$, 则 $F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=0$.

如果 $y>0$, 则 $F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\dfrac{2}{\pi}\arctan\sqrt{y}$,

此时

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)},$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

六、已知(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.2	0.3

求 X 与 Y 的相关系数.

解: 先计算 X 与 Y 的边缘分布律:

X	0	1
$p_{i.}$	0.4	0.6

Y	-1	0	1
$p_{.j}$	0.2	0.4	0.4

$E(X)=0.6,\ E(X^2)=0.6,\ D(X)=0.6-0.6^2=0.24,$

$E(Y)=0.2,\ E(Y^2)=0.6,\ D(Y)=0.6-0.2^2=0.56,$

$E(XY)=-0.1+0.3=0.2,\ Cov(X,Y)=0.2-0.6\times0.2=0.08,$

$$\rho_{XY}=\frac{0.08}{\sqrt{0.24\times0.56}}=0.2182.$$

七、本题是一保险公司关于投保人发生人身重大伤害事故的概率研究以及公司盈利的计算.

1. 该公司连续记录了 n 年的数据, 其中第 i 年有 N_i 人投保, 其中有 k_i 人发生了重大人身伤害事故. 求投保人每年发生重大人身伤害事故的概率 p 的极大似然估计(假设每个投保人每年是否发生重大人身伤害事故是相互独立的, 并具有相同的概率);

2. 如果该保险公司已知了从事某种危险职业人员每年发生重大人身伤害事故的概率为 $p=0.005$. 现有 5000 名此种职业的人员在年初参保, 每人交付 800 元的保费, 如果投保人在该年发生重大人身伤害事故, 可以获赔 10 万元. 利用中心极限定理计算保险公司该年在此项业务中盈利超过 1 百万元的概率.

解: 1. 第 i 年发生重大人身伤害事故的人数 $X_i \sim b(N_i, p)$, 于是 p 的似然函数和对数似然函数为:

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} P\{X_i=k_i\}=\prod_{i=1}^{n} C_{N_i}^{k_i} p^{k_i}(1-p)^{N_i-k_i}=\left(\prod_{i=1}^{n} C_{N_i}^{k_i}\right) p^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(N_i-k_i)},$$

记 $M=\sum\limits_{i=1}^{n} N_i$, $m=\sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, 它们分别表示 n 年投保人总数和发生重大人身伤害事故总人数. 于是

$$L(p)=\left(\prod_{i=1}^{n} C_{N_i}^{k_i}\right) p^{m}(1-p)^{M-m},$$

$$l(p)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n} C_{N_i}^{k_i}\right)+m\ln p+(M-m)\ln(1-p),$$

$$l'(p)=\frac{m}{p}-\frac{M-m}{1-p}=\frac{m-Mp}{p(1-p)},$$

令 $l'(p)=0$, 得 p 的极大似然估计值

$$\hat{p}=\frac{m}{M}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} N_i}.$$

2. 设 X 为该年发生重大人身伤害事故的人数，那么 $X \sim b(5\,000, 0.005)$, $E(X)=25$, $D(X)=24.875 \approx 25$. 根据中心极限定理，X 近似地服从 $N(25,25)$. 记 Y 是保险公司一年的盈利(单位：百万元)，则

$$Y = 10^{-6}(5\,000 \times 800 - 100\,000X) = 4 - 0.1X,$$

于是，盈利超过1百万元的概率为

$$P\{Y>1\} = P\{4-0.1X>1\} = P\{X<30\} \approx \Phi\left(\frac{30-25}{5}\right) = \Phi(1.0) \approx 0.84.$$

八、 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 现从该总体中随机抽取一组容量为16的样本，算得样本均值 $\overline{x}=5.3328$, 样本标准差 $s=0.9226$.

1. 求总体方差 σ^2 的置信度为0.95的区间估计;
2. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为该总体的期望超过5？

解： 1. 总体方差 σ^2 的置信度为0.95的区间估计为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = \left[\frac{15\times 0.9226^2}{27.4884}, \frac{15\times 0.9226^2}{6.2621}\right] = [0.4645, 2.0389].$$

2. 构造假设

$$H_0: \mu \le 5, \quad H_1: \mu > 5.$$

其拒绝域为

$$W = \left\{ x \,\middle|\, \frac{|\overline{x}-5|}{s}\sqrt{n} > t_\alpha(n-1) \right\} = \left\{ x \,\middle|\, \frac{|\overline{x}-5|}{s}\sqrt{n} > 1.7531 \right\}.$$

由于 $\dfrac{|\overline{x}-5|}{s}\sqrt{n} = \dfrac{|5.3328-5|}{0.9226}\sqrt{16} = 1.4429 < 1.7531$, 样本观察值 $x \notin W$, 因此接受 H_0, 即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，可以认为该总体的期望没有超过5.