

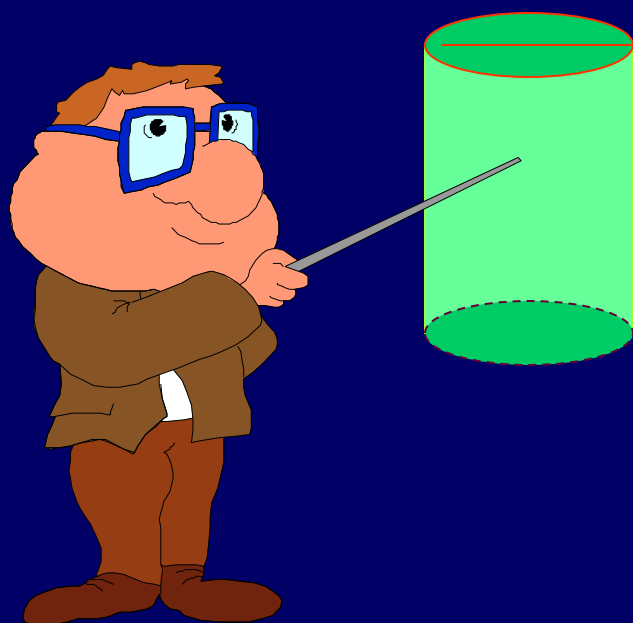
# 第五节 随机变量的函数的分布

- 问题的提出
- 离散型随机变量的函数的分布
- 连续型随机变量的函数的分布
- 小结 布置作业

# 一、问题的提出

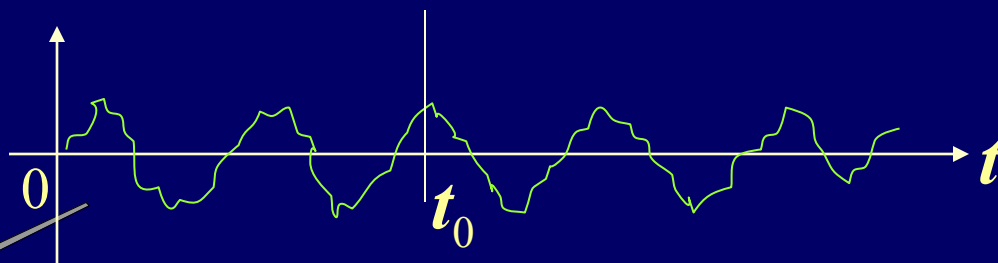
在实际中，人们常常对随机变量的函数更感兴趣.

比如，已知圆轴截面直径  $d$  的分布，

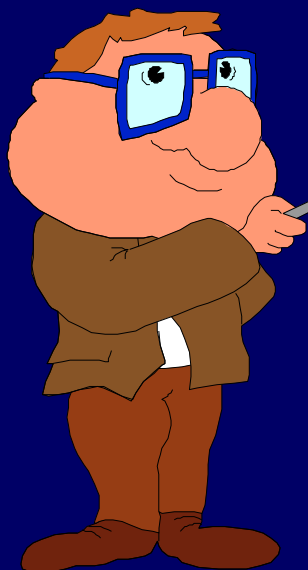


求截面面积  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  的分布.

在比如，已知  $t=t_0$  时刻噪声电压  $V$  的分布，



求功率  $W=V^2/R$  ( $R$  为电阻)  
的分布等.



设随机变量  $X$  的分布已知,  $Y=g(X)$  (设  $g$  是连续函数), 如何由  $X$  的分布求出  $Y$  的分布?

这个问题无论在实践中还是在理论上都是重要的.

下面进行讨论.



## 二、离散型随机变量函数的分布

例1 设  $X \sim \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{Bmatrix}$

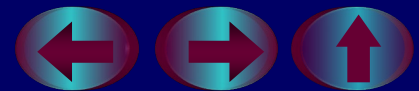
求  $Y = 2X + 3$  的概率函数.

解: 当  $X$  取值 1, 2, 5 时,

$Y$  取对应值 5, 7, 13,

而且  $X$  取某值与  $Y$  取其对应值是两个同时发生的事件, 两者具有相同的概率.

故  $Y \sim \begin{Bmatrix} 5 & 7 & 13 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{Bmatrix}$



一般地，若 $X$ 是离散型  $r.v$ ， $X$  的分布律为

$$X \sim \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{Bmatrix}$$

$$\text{则 } Y=g(X) \sim \begin{Bmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_n) \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{Bmatrix}$$

如果 $g(x_k)$  中有一些是相同的，把它们作适当并项即可.

如:  $X \sim \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{Bmatrix}$

则  $Y=X^2$  的分布律为:

$$Y \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{Bmatrix}$$

### 三、连续型随机变量函数的分布

例2 设  $X \sim f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求  $Y=2X+8$  的概率密度.

解 设  $Y$  的分布函数为  $F_Y(y)$ ,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P(2X+8 \leq y) \\ &= P\{X \leq \frac{y-8}{2}\} = F_X(\frac{y-8}{2}) \end{aligned}$$

于是  $Y$  的密度函数

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(\frac{y-8}{2}) \cdot \frac{1}{2}$$





$$f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

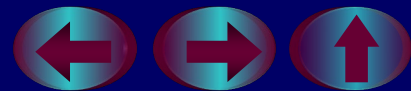
$$Y=2X+8$$

注意到  $0 < x < 4$  时,  $f_X(x) \neq 0$

即  $8 < y < 16$  时,  $f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \neq 0$

此时  $f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) = \frac{y-8}{16}$

故  $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$



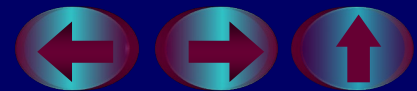
例3 设  $X$  具有概率密度  $f_X(x)$ , 求  $Y=X^2$  的概率密度.

解 设  $Y$  和  $X$  的分布函数分别为  $F_Y(y)$  和  $F_X(x)$ ,

注意到  $Y=X^2 \geq 0$ , 故当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ .

$$\begin{aligned}\text{当 } y > 0 \text{ 时, } F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\end{aligned}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$



求导可得

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

若  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$

则  $Y=X^2$  的概率密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$



从上述两例中可以看到，在求 $P(Y \leq y)$ 的过程中，关键的一步是设法从 $\{g(X) \leq y\}$ 中解出 $X$ ，从而得到与 $\{g(X) \leq y\}$ 等价的 $X$ 的不等式。

例如，用  $\{X \leq \frac{y-8}{2}\}$  代替  $\{2X+8 \leq y\}$

用  $\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$  代替  $\{X^2 \leq y\}$

这样做是为了利用已知的  $X$  的分布，从而求出相应的概率。

这是求 $r.v$ 的函数的分布的一种常用方法。



例4 设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2} & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{求 } Y = \sin X \text{ 的概率密度.}$$

$-1 \leq Y \leq 1$

解 注意到, 当  $0 < x < \pi$  时  $0 < y \leq 1$

故 当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ ,

当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$



例4 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2} & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求  $Y = \sin X$  的概率密度.

$$0 < X < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{2} < X < \pi$$

解 当  $0 < y < 1$  时,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y)$$

$$= P(0 < X \leq \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \leq X < \pi)$$



$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx$$

$$= \left( \frac{\arcsin y}{\pi} \right)^2 + 1 - \left( \frac{\pi - \arcsin y}{\pi} \right)^2$$

而  $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$

求导得:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



例5 已知随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 是严格单调的连续函数, 证明 $Y=F(X)$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.

$$0 \leq Y \leq 1$$

证明 设  $Y$  的分布函数是  $G(y)$ ,

由于  $0 \leq y \leq 1$

$$G(y) = P(Y \leq y)$$

于是 对  $y < 0$ ,  $G(y) = 0$ ; 对  $y > 1$ ,  $G(y) = 1$ ;

又由于 $X$ 的分布函数 $F$ 是严格递增的连续函数, 其反函数  $F^{-1}$  存在且严格递增.





$$\begin{aligned} \text{对 } 0 \leq y \leq 1, \quad G(y) &= P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) \\ &= P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

即  $Y$  的分布函数是

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

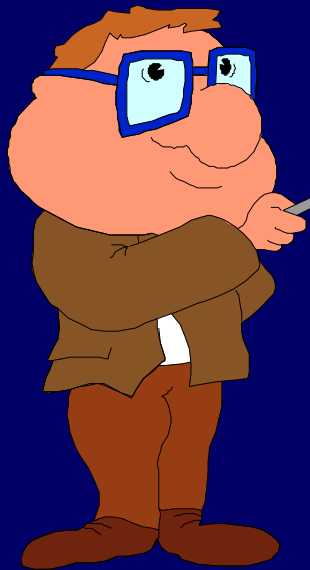
求导得  $Y$  的密度函数

$$g(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

可见,  $Y$  在  $[0,1]$  上服从的均匀分布.



下面给出一个定理，在满足定理条件时可直接用它求出随机变量函数的概率密度。



定理 设  $X$  是一个取值于区间  $[a, b]$ , 具有概率密度  $f(x)$  的连续型  $r.v.$ , 又设  $y=g(x)$  处处可导, 且对于任意  $x$ , 恒有  $g'(x) > 0$  或恒有  $g'(x) < 0$ , 则  $Y=g(X)$  是一个连续型  $r.v.$ , 它的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f[h(y)] \left| \frac{dh(y)}{dy} \right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中,  $\alpha = \min_{a \leq x \leq b} g(x)$ ,  $\beta = \max_{a \leq x \leq b} g(x)$ ,

$x=h(y)$  是  $y=g(x)$  的反函数.

此定理的  
证明与前  
面的解题  
思路类似



例7 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  服从正态分布, 证明  $Y = aX + b$  也服从正态分布.

解 随机变量  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$y = g(x) = ax + b \quad \text{解得 } x = h(y) = \frac{y-b}{a}$$

$$h'(y) = \frac{1}{a} \quad \text{所以 } Y = aX + b \text{ 的概率密度为}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < +\infty$$



即

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}} \quad -\infty < y < +\infty \end{aligned}$$

所以  $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$



## 四、小结

这一节我们介绍了随机变量函数的分布.

对于连续型随机变量, 在求  $Y = g(X)$  的分布时, 关键的一步是把事件  $\{g(X) \leq y\}$  转化为  $X$  在一定范围内取值的形式, 从而可以利用  $X$  的分布来求  $P\{g(X) \leq y\}$ .



## 练习题

一、 设随机变量  $X$  的分布律为:

$X$	-2	-1	0	1	3
$P$	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求  $Y=X^2$  的分布律

?

二、 设  $X \sim N(0, 1)$

(1) 求  $Y=e^X$  的概率密度

(2) 求  $Y=2X^2+1$  的概率密度。

?

(3) 求  $Y=|X|$  的概率密度。



三、设随机变量  $X$  在  $(0, 1)$  上服从均匀分布

(1) 求  $Y=e^X$  的分布密度

(2) 求  $Y=-2\ln X$  的概率密度。

?



一、 设随机变量  $X$  的分布律为:

$X$	-2	-1	0	1	3
$P$	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求  $Y=X^2$  的分布律

解:  $Y = X^2$  的所有可能取值为:  $Y = 0, 1, 4, 9$

$$P\{Y = 0\} = P\{X^2 = 0\} = P\{X = 0\} = 1/5$$

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P\{X^2 = 1\} = P\{X = 1 \text{ 或 } X = -1\} \\ &= P\{X = 1\} + P\{X = -1\} = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y = 4\} &= P\{X^2 = 4\} = P\{X = 2 \text{ 或 } X = -2\} \\ &= P\{X = 2\} + P\{X = -2\} = 1/5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P\{Y = 4\} &= P\{X^2 = 4\} = P\{X = 2 \text{ 或 } X = -2\} \\
 &= P\{X = 2\} + P\{X = -2\} = P\{X = -2\} = 1/5 \\
 P\{Y = 9\} &= P\{X^2 = 9\} = P\{X = 3 \text{ 或 } X = -3\} \\
 &= P\{X = 3\} + P\{X = -3\} = P\{X = 3\} = 11/30
 \end{aligned}$$

设随机变量  $Y$  的分布律为:

$Y$	0	1	4	9
$P$	1/5	7/30	1/5	11/30



## 五、布置作业

《概率统计》标准化作业（二）三、3；四、

