

第六章 鸽巢原理

王冰

上海大学计算机学院

6.1 鸽巢原理的形式

鸽巢原理，也叫“**抽屉原理**”，解决了“**存在性**”问题。简单形式如下：

定理 6.1.1 如果把 $n+1$ 个鸽子放入 n 个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中有两个或更多的鸽子。

例 (1) 在**13**个人中至少有两个人在同一个月过生日。
(2) **10**双鞋中，任意取**11**只，至少有**2**只鞋是原配的一双。

6.1 鸽巢原理：利用化分集合来构造“鸽巢”

例 从1到 $2n$ 的正整数中任取 $n+1$ 个，则这 $n+1$ 个数中至少有一对数，其中一个是另一个的倍数。

证： 设这 $n+1$ 个数是 a_1, a_2, \dots, a_{n+1}

对此序列中的每一个数去掉一切2的因子，直至剩下一个奇数为止。例如， $68 = 2 \times 2 \times 17$ ，则去掉 2×2 ，只留下17。那么我们会得到一个由奇数组成的序列 b_1, b_2, \dots, b_{n+1} 。1到 $2n$ 之间只有 n 个奇数，故序列 $\{b_1, b_2, \dots, b_{n+1}\}$ 中至少有两个是相同的。设 $b_i = b_j = b$ ，则 $a_i = 2^p b$ ， $a_j = 2^q b$ ， $\frac{a_j}{a_i} = 2^{q-p}$ 。显然，其中一个是另一个的倍数。

可以看出，应用鸽巢原理可以巧妙的解决看似复杂的问题，其关键是如何去构造问题中的“鸽子”和“鸽巢”。

6.1 鸽巢原理

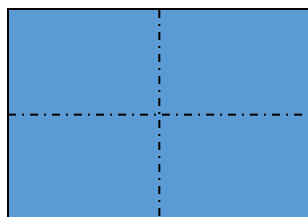
例 设 x, y, z 是三个任意的整数，则 $x+y, x+z$ 及 $y+z$ 中至少有一个偶数。

证明：设有 B_1, B_2 两个盒子分别放奇数和偶数。则三个数 x, y, z 至少有两个同处一个盒子，即具有相同的奇偶性。不妨设 x, y 放入同一个盒子，则 $x+y$ 为偶数。
同理， $x-y, x-z, y-z$ 至少也有一个偶数。

6.1 鸽巢原理:利用划分图形构造“鸽巢”

例：边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形中任取5点，则至少有两个点的距离不超过1.

证：划分4个全等的小正方形，5个点放入四个正方形中，至少有一个正方形内不少于2个点。小正方形上点对之间的距离最大为1.



6.1 鸽巢原理

例 设 a_1, a_2, \dots, a_m 是正整数序列, 则至少存在一个 k 和 $l, 1 \leq k \leq l \leq m$, 使得和 $a_k + \dots + a_l$ 是 m 的倍数。

证明: 设 $S_h = \sum_{i=1}^h a_i, S_h \equiv r_h \pmod{m}, 0 \leq r_h \leq m-1.$
 $h = 1, 2, \dots, m.$

若存在 $l, S_l \equiv 0 \pmod{m}$, 则命题成立.

否则, $1 \leq r_h \leq m-1.$ 对所有 $h = 1, 2, \dots, m.$

由鸽巢原理, 故存在 $r_{k-1} = r_l$, 即 $S_{k-1} \equiv S_l.$

不妨设 $l > k-1.$ 则

$$S_l - S_{k-1} = a_k + a_{k+1} + \dots + a_l \equiv 0 \pmod{m}$$

6.1 鸽巢原理

例 设 a_1, a_2, \dots, a_{100} 是由1和2组成的序列, 已知从其任一数开始的顺序10个数的和不超16. 即

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+9} \leq 16, \quad 1 \leq i \leq 91$$

则至少存在一对 h 和 k , $k > h$, 使得 $a_{h+1} + \dots + a_k = 39$

证明: 设 $S_h = \sum_{i=1}^h a_i$, $h = 1, 2, \dots, 100$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_1 < S_2 < \dots < S_{100}, \text{ 且 } S_{100} &= (a_1 + \dots + a_{10}) \\ &+ (a_{11} + \dots + a_{20}) + \dots + (a_{91} + \dots + a_{100}) \end{aligned}$$

6.1 鸽巢原理

根据假定有 $S_{100} \leq 10 \times 16 = 160$

作序列 $S_1, S_2, \dots, S_{100}, S_1 + 39, \dots, S_{100} + 39$.

共200项. 其中最大项 $S_{100} + 39 \leq 160 + 39$

由鸽巢原理, 必有两项相等.

而且必是前段中某项与后段中某项相等. 设

$$S_k = S_h + 39, \quad k > h \quad S_k - S_h = 39$$

即 $a_{h+1} + \dots + a_k = 39$

例 一名象棋大师有11周时间准备一场锦标赛，她决定每天至少下一盘棋，为了不能太累一周中下棋的次数不能多于12盘。证明：她一定在此期间的连续若干天中恰好下棋21盘。

分析： 1、题干提供的信息：一共11周

2、约束条件：

- 每周最多下12盘棋
- 每天至少下1盘棋

3、目标：连续若干天共下棋21盘

4、解题途径：构造下棋盘数的部分

证明： 令 b_1, b_2, \dots, b_{77} 分别为这11周中他每天下棋的次数，并作部分和

$$a_1 = b_1,$$

$$a_2 = b_1 + b_2,$$

$\dots,$

$$a_{77} = b_1 + b_2 + \dots + b_{77}.$$

根据题意，有 $b_i \geq 1 (1 \leq i \leq 77)$ ，且 $b_i + b_{i+1} + \dots + b_{i+6} \leq 12 (1 \leq i \leq 71)$ ，

所以有： $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$ (2.1.1)

构造数列： $\{a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21\}$ ，

它们都在1与 $132 + 21 = 153$ 之间，共有154项，由鸽舍定理知，其中必有两项相等。

由 a_1, a_2, \dots, a_{77} 这77项互不相等, 从而 $a_1+21, a_2+21, \dots, a_{77}+21$ 这77项也互不相等, 所以一定存在 $1 \leq i < j \leq 77$, 使得 $a_j = a_i + 21$.

因此,
$$\begin{aligned} 21 &= a_j - a_i \\ &= (b_1 + b_2 + \dots + b_i + b_{i+1} + \dots + b_j) - (b_1 + b_2 + \dots + b_i) \\ &= b_{i+1} + b_{i+2} + \dots + b_j. \end{aligned}$$
这说明从第 $i+1$ 天到第 j 天这连续 $j-i$ 天中, 她刚好下了21盘棋。

例 设 a_1, a_2, \dots, a_m 满足条件:

$$(1) \ a_i \geq 1, \ i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(2) \ a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+n} \leq p, \ i = 0, 1, 2, \dots, n(m-1)$$

的正整数序列。若要一定存在正整数 $h, k, h \leq k$, 使得 $a_h + a_{h+1} + \dots + a_k = q$, 试推出 m, n, p, q 应满足的关系式。

6.1 一般的鸽巢原理

定理 6.1.2 设 a_1, a_2, \dots, a_n 都是正整数. 如果把 $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n + 1$ 个鸽子住入 n 个鸽巢, 那么或者第一个鸽巢至少住入 a_1 个鸽子, 或者第二个鸽巢至少住入 a_2 个鸽子, …… , 或者第 n 个鸽巢至少住入 a_n 个鸽子。

证明 (反证法) 设将 $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n + 1$ 个鸽子住入 n 个鸽巢中. 如果对于每个 $i = 1, 2, \dots, n$, 第 i 个鸽巢都不能住入 a_i 个或更多的鸽子, 那么所有鸽巢中的鸽子的总数不超过

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_n - 1) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n$$

比原鸽子数少1.

因此, 必存在某个 i , 使得第 i 个鸽巢至少含有 a_i 个鸽子.

6.1 鸽巢原理

在定理6.1.2中, 如果令 $a_i = 2 (i=1,2,\dots,n)$, 就是定理6.1.1
如果 $a_i = m (i=1,2,\dots,n)$, 则变成了:

推论 1 若把 $n(m-1)+1$ 个鸽子住入 n 个鸽巢, 那么至少有一个鸽巢中有 m 个鸽子住入.

推论 2 若将 m 个鸽子放入 n 个鸽巢中, 则至少有一个鸽巢中有不少于 $\left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil + 1$ 只鸽子.

推论 3 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个整数, 而且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > r - 1$
则 a_1, a_2, \dots, a_n 中至少有一个数不小于 r .

例 将集合 $\{1,2,\dots,16\}$ 任意拆分成3部分, 则其中必有一个部分, 有 x,y,z ,满足 $x+y = z$.

证明: 设 A_1,A_2,A_3 是这样的集合,

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = N, A_i \cap A_j = \emptyset$$

根据鸽舍原理, 一定存在某个 A_i , 使得 A_i 元素的个数不小于 $[\frac{16-1}{3}]+1 = 6$

不妨设 $A_1=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$, 并假定 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$.

令 $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_1$, $b_3 = a_4 - a_1$,
 $b_4 = a_5 - a_1$, $b_5 = a_6 - a_1$

则 $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_5 < 16$.

若存在某个 b_i 属于 A_1 , 则结论成立。

否则, 若 b_i 不属于 A_1 , 则 $b_i \in A_2$ 或者 A_3 . 不妨设 A_2 包含 b_i 中的 $[\frac{5-1}{2}]+1=3$, 设 $A_2 = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, 且 $b_1 < b_2 < b_3 < 16$.

继续构造, 令 $c_1 = b_2 - b_1$, $c_2 = b_3 - b_2$, 则 $0 < c_1 < c_2 < 16$. 若存在某个 c_i 属于 A_2 , 则 A_2 为要找的部分。

否则, c_1, c_2 都不属于 A_2 , 且 c_1, c_2 都不属于 A_1 , 则 c_1, c_2 属于 A_3 , 且 $c_1 - c_2$ 属于 A_3 , 否则 $c_1 - c_2$ 不属于 N , 矛盾。

- 则 $1 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_5 < 16$
- 若存在某个 $b_i \in A_1$, 则结论成立。
- 否则若 b_i 都不属于 A_1 , 则 $b_i \in A_2$ 或者 A_3
- 根据鸽巢原理, 设 A_2 至少包含 $[(5-1)/2]+1=3$ 个元素, 设为 b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}
- 令 $A_2 = \{b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \dots\}$ $c_1 = b_{i2} - b_{i1}$ 再 $c_2 = b_{i3} - b_{i1}$ $1 < c_1 < c_2 < 16$
 令 $c_i \in A_2$, 且
- 若存在 $c_1, c_2 \notin A_2$, 则得证 $c_1, c_2 \in A_3$
- 否则如果 $c_2 - c_1 \notin \bigcup_{i=1}^3 A_3$ 则一定
- 否则, $1 < c_2 - c_1 < 16$, 矛盾。

6.1 鸽巢原理

定理6.1.3 (Erdos-Szekeres, 1935)

试证：有 $mn+1$ 不同实数构成的数列： $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ ，中必有一个 $(m+1)$ 项的递增子序列或 $(n+1)$ 的递减子序列。

证 1 l_i : 以 a_i 为首选取最长的递增子序列，设其长度为 l_i ，从而得序列

$$L = \{ l_1, l_2, \dots, l_{mn+1} \}.$$

若存在 $l_k \geq m+1$ ，则结论成立。

6.1 鸽巢原理

否则所有的 $l_i \in [1, m]$, 其中必有 $\lceil \frac{m+1-1}{m} \rceil + 1 = n+1$ 个相等, 于是设

$$l_{i_1} = l_{i_2} = \cdots = l_{i_n} = l_{i_{n+1}}$$

不妨设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$,
应有 $a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_{n+1}}$,

即有一长度为 $n+1$ 的减子列.

6.1 鸽巢原理

证 2 (反证法) 从 a_i 向后取最长递增子列及递减子列, 设其长度分别为 I_i , D_i .

假定没有 $(m+1)$ 项的递增子列和 $(n+1)$ 项的递减子列,
若对任意 i , 都有 $I_i \in [1, m]$, $D_i \in [1, n]$,
 $(I_1, D_1), (I_2, D_2), \dots, (I_{mn+1}, D_{mn+1})$ 中至多 mn 种对相异.

根据鸽舍原理, 一定存在 $(I_j, D_j) = (I_k, D_k)$.

但是 若 $a_j < a_k$, 则 $I_j > I_k$, 与 $(I_j, D_j) = (I_k, D_k)$ 矛盾;
若 $a_j > a_k$, 则 $D_j > D_k$, 矛盾.

例 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $(m+1)$ 行和 $m\binom{m+1}{2} + 1$ 列的矩阵, A 上任意分布 m 个不同的实数。

试证: 至少存在不同的两行和相异的两列, 使得它们交汇点的4个实数相等, 即有 i_1, i_2, i_3, i_4 , 使得 $a_{i_1 j_1} = a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_1} = a_{i_2 j_2}$

6.1 鸽巢原理

例 一个抽屉里有20件衬衫，其中4件蓝色，7件灰色，9件红色.从中随意取出至少多少件，才能保证有4件是同色的？保证5，6，7，8，9件同色呢？

解：由鸽巢原理： n 个鸽巢， $kn+1$ 只鸽子，则至少存在一个鸽巢，使得该鸽巢中至少有 $k+1$ 只鸽子。

(1) 这时 $n=3$ ， $k+1=4$ ，所以 $k=3$ ，于是

$$kn+1 = 10$$

即随意抽取10件能保证有4件是同色的。

(2) 这时不能直接用鸽巢原理。考虑一种最坏的情形，在所抽取的衬衫中有4件是蓝的。

这时 $n=2$ ， $k+1=5$ ，所以 $k=4$ ，于是应抽取

$$4+kn+1 = 13$$

即随意抽取13件能保证有5件是同色的。

(3) 同样假设在所抽取的衬衫中有4件是蓝的。

这时 $n=2$ ， $k+1=6$ ，所以 $k=5$ ，于是应抽取

$$4+kn+1 = 15$$

即随意抽取15件能保证有6件是同色的。

同理可证，随意抽取17，19，20件能保证有7，8，9件是同色的。

6.2 Ramsey数

6.2.1 Ramsey问题与Ramsey数

1928年, 年仅24岁的英国杰出数学家Ramsey发表了著名论文《论形式逻辑中的一个问题》, 他在这篇论文中, 提出并证明了关于集合论的一个重大研究成果, 现称为Ramsey定理. 尽管两年后他不幸去世, 但是他开拓的这一新领域至今仍十分活跃, 而且近年来在科技领域获得了成功的应用

Ramsey问题可以看成是鸽巢原理的推广.

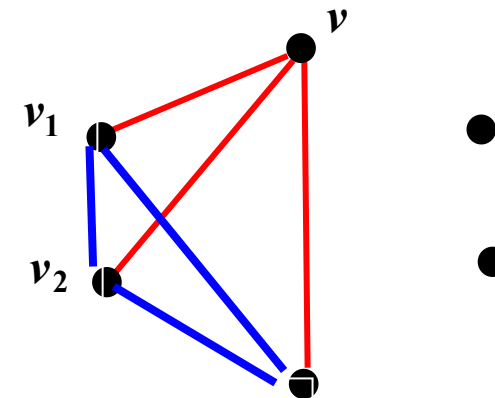
Ramsey数

提法一 6 个人中至少存在 3 人相互认识或者相互不认识 .(美国数学月刊)

- 每个人用一个顶点表示，若两个人互相认识，则对相应的两个顶点之间的边着红色，若两个人互相不认识，则对相应的两个顶点之间的边着蓝色。这样问题就转化为：

Ramsey数

提法二 给定一个6个顶点的完全图 K_6 ，用红、蓝两色对其边任意着色，那么或者存在一个红色边三角形，或者存在一个蓝色边三角形。



证： 选定 K_6 的一个顶点 v ，顶点 v 有5条边，由鸽巢原理知，至少有

$$\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$$

条同色边，设为红色。设这三条边的另一个端点分别为 v_1, v_2, v_3 。若 v_1, v_2, v_3 之间有一条红色边，则已得到一个红色边三角形，否则，则得到一个蓝色边三角形。

6.2 Ramsey数问题

- **命题 1** 对6个顶点的完全图任意进行红、蓝两边着色，都至少存在两个同色的三角形.
- **命题 2** 对10个顶点的完全图 K_{10} 任意进行红、蓝两边着色，都或者存在一个红色 K_4 ，或者存在一个蓝色 K_3 .
- **命题 3** 对9个顶点的完全图 K_9 任意进行红、蓝两边着色，都或者存在一个红色 K_4 ，或者存在一个蓝色 K_3 .

6.2 Ramsey数问题

对上面的几个命题进行归纳，可以得出如下定义：

- **定义** 对于任意给定的两个正整数 p 和 q ，如果存在最小的正整数 $r(p,q)$ 使得当 $N \geq r(p,q)$ 时，对 K_N 任意进行红、蓝两边着色， K_N 中均有红色 K_p ，或蓝色 K_q ，则 $r(p,q)$ 称为Ramsey数.

定理 6.2.1 对任意正整数 p, q ，有

- (1) $r(p,q) = r(q,p)$;
- (2) $r(1,q) = r(p,1) = 1$;
- (3) $r(p,2) = p, r(2,q) = q$.

6.2 Ramsey数问题

定理 6.2.2 对任意正整数 $p \geq 3$, $q \geq 3$, 有
$$r(p, q) \leq r(p-1, q) + r(p, q-1).$$

证: 令 $N = r(p-1, q) + r(p, q-1)$,
对 K_N 进行任意红、蓝两边着色. 设 x 是 K_N 的一个顶点, 在 K_N 中与 x 相关联的边共有 $r(p-1, q) + r(p, q-1) - 1$ 条, 这些边要么为红色, 要么为蓝色.

由鸽巢原理知, 与 x 相关联的这些边中, 要么至少有 $r(p-1, q)$ 条红色的边, 要么有至少 $r(p, q-1)$ 条蓝色的边.

6.2 Ramsey数问题

(1) 这些边中有 $r(p-1, q)$ 条红边. 在以这些红边相关联的 $r(p-1, q)$ 个顶点构成的完全图 $K_{r(p-1, q)}$ 中, 必有一红色 K_{p-1} 或蓝色 K_q . 若有红色 K_{p-1} , 则它加上顶点 x 以及 x 与 K_{p-1} 之间的红边, 即构成一个红色 K_p ; 否则, 就有一个蓝色 K_q .

(2) 这些边中有 $r(p, q-1)$ 条蓝边. 在以这些蓝边与 x 相关联的 $r(p, q-1)$ 个顶点构成的完全图 $K_{r(p, q-1)}$ 中, 必有一个红色 K_p 或一个蓝色 K_{q-1} . 若有蓝色 K_{q-1} , 则它加上顶点 x 以及 x 与 K_{q-1} 之间的蓝边, 即构成一个蓝色 K_q ; 否则, 就有一个红色 K_p .

• 综合 (1)、(2), 知 $r(p, q) \leq N$.

Ramsey数

定理 4 对任意正整数 $a \geq 2, b \geq 2$, 有

$$R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} = \frac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!}$$

证: 对 $a+b$ 用归纳法。

当 $a+b=4$ 时, 定理显然成立。

假设对一切满足 $4 \leq a+b < m+n$ 的 a, b , 定理成立,
那么有

Ramsey数

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$$

$$\leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

这就归纳地证明了定理。

Ramsey数的推广

- 设 a_1, a_2, \dots, a_k 为正整数, 对 N 个顶点的完全图 K_N 中的边用 c_1, c_2, \dots, c_k k 种颜色进行着色, 则 K_N 中或有 c_1 颜色的 K_{a_1} , 或有 c_2 颜色的 K_{a_2}, \dots , 或有 c_k 颜色的 K_{a_k} , 满足上述性质的 N 的最小值记为 $R(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 。

Ramsey数的推广

定理5 对任意正整数 a_1, a_2, \dots, a_k , 有

$$R(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq R(a_1, R(a_2, \dots, a_k))$$

证: 设 $N = R(a_1, R(a_2, \dots, a_k))$, 对 K_N 中的边用 c_1, \dots, c_k 染色, 并将 c_1 看作是红色, 将 c_2, \dots, c_k 看作是蓝色, 则或有一个红色 K_{a_1} , 或者有蓝色的 $K_{R(a_2, \dots, a_k)}$, 在蓝色的 $K_{R(a_2, \dots, a_k)}$ 中, 其边是用 c_2, \dots, c_k 染色的, 故 $K_{R(a_2, \dots, a_k)}$ 中或有色 c_2 的 K_{a_2} , \dots , 或有色 c_k 的 K_{a_k} 。