第二节 样本空间 随机事件

- 样本空间
- 随机事件
- 事件间的关系与事件的运算
- 小结 布置作业

我们注意到

试验是在一定条件下进行的

试验有一个需要观察的目的

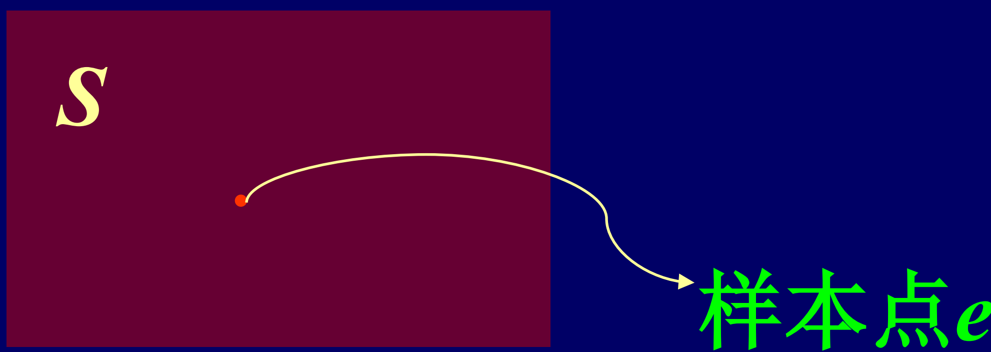
根据这个目的, 试验被观察到多个不同的结果.

试验的全部可能结果,是在试验前就明确的;或者虽不能确切知道试验的全部可能结果,但可知道它不超过某个范围.

一、样本空间

一个随机试验 E 的所有可能结果所组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**,记为 S.

样本空间中的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**.



现代集合论为表述随机试验提供了一个方便的工具.

例如,试验是将一枚硬币抛掷两次,观察正面H、反面T出现的情况:

则样本空间 $S=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

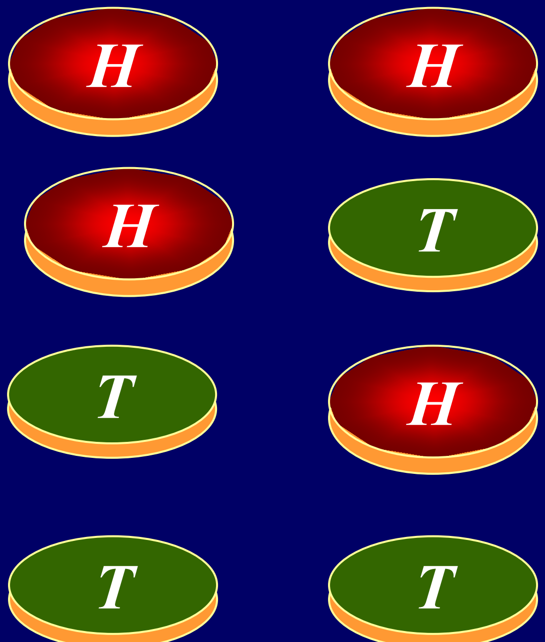
第1次 第2次

(*H*,*H*):

(*H*,*T*):

(*T*,*H*):

(*T*,*T*):



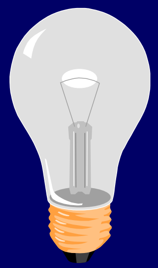
在每次试验中必有一个样本点出现且仅有一个样本点出现 .

若试验是将一枚硬币抛掷两次,观察正面出现的次数: 则样本空间

$$S = \{0,1,2\}$$

由以上两个例子可见,样本空间的元素是由试验的目的所确定的.

如果试验是测试某灯泡的寿命:



则样本点是一非负数，由于不能确知寿命的上界，所以可以认为任一非负实数都是一个可能结果，故样本空间

$$S = \{t : t \geq 0\}$$

调查城市居民（以户为单位）烟、酒的年支出，结果可以用（x，y）表示，x，y分别是烟、酒年支出的元数.

这时，样本空间由坐标平面第一象限内一定区域内一切点构成 .

也可以按某种标准把支出分为高、中、低三档. 这时，样本点有（高,高），（高,中），…，(低,低）等9种，样本空间就由这9个样本点构成 .

例1 写出下列随机试验的样本空间.

E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

S_1 : $\{H, T\}$

E_7 : 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 H 出现的次数.

S_2 : $\{0, 1, 2, 3\}$

E_3 : 记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数 .

S_3 : $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

例2 一个袋中装在 8 个大小完全相同的球, 其中有 4 个是白色的, 4 个是红色的 , 搅匀后从中任取一球, 求此随机试验的样本空间.

S : {白球, 红球}

请注意： 实际中,在进行随机试验时,我们往往会关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合.

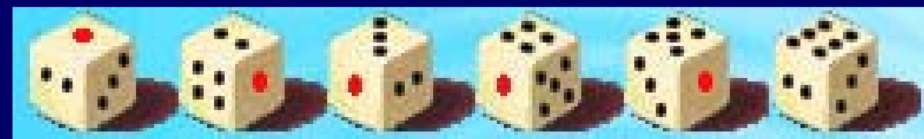
例如在测试某灯泡的寿命这一试验中,若规定灯泡的寿命 (小时) 小于500为次品, 那么我们关心灯泡的寿命 t 是否满足 $t \geq 500$. 或者说, 我们关心满足这一条件的样本点组成的一个集合 $\{t \mid t \geq 500\}$. 这就是一个随机事件

二、随机事件

试验E的样本空间S的子集称为E的**随机事件**.

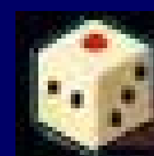
随机事件简称事件,常用 A, B, C 等表示.

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数．



样本空间为: $S=\{1,2,3,4,5,6\}.$

事件 A={掷出1点} $=\{1\}.$



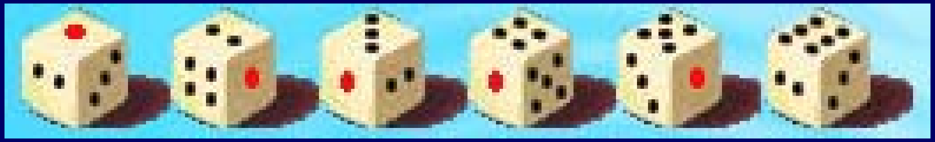
事件 B={掷出奇数点} $=\{1,3,5\}$

事件 C = {出现的点数大于4} $=\{5,6\}.$

基本事件: 由一个样本点组成的单点集.

(相对于观察目的不可再分解的事件)

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数 .



事件 A_i={掷出i点}, i =1,2,3,4,5,6

基本事件

事件 B={掷出奇数点}

当且仅当集合A中的一个样本点出现时,称事件A发生.

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数 .

样本空间为：$S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

事件 B={掷出奇数点}$= \{1,3,5\}$

B发生当且仅当B中的样本点1,3,5中的某一个出现.

两个特殊的事件：

必然事件

即在试验中必定发生的事件，常用S表示；

不可能事件

即在一次试验中不可能发生的事件，常用$\varnothing$表示 .

例如，在掷骰子试验中，“掷出点数小于7”是必然事件而“掷出点数8”则是不可能事件.

三、事件间的关系与事件的运算

设试验 E 的样本空间为 S , A、B、C、A_1、A_2 … 试验 E 的事件.

1.包含关系: 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A (或称事件 A 是事件 B 的子事件),记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

对于任何事件 A,都有 $S \supset A \supset \varnothing$.

相等关系　若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等(或称等价),记作 $A = B$.

2.和事件： 事件 A、B 至少有一个发生所构成的事件叫做事件 A 与事件 B 的和.记作 $A \cup B$.

类似地,称事件 A_1、A_2、…、A_n 中至少有一个发生的事件为事件 A_1、A_2、…、A_n 的和事件. 记之为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 简记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

称事件 A_1、A_2、…中至少有一个发生的事件为事件 A_1、A_2、… 的和事件. 记之为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots$,

简记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

3. 积事件：事件 A、B 同时发生所构成的事件叫做事件 A 与事件 B 的积事件.记作 $A \cap B$ 或 AB .

类似地，称事件 A_1、A_2、…、A_n 同时发生所构成的的事件为事件 A_1、A_2、…、A_n 的积事件. 记之为

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$，简记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

称事件 A_1、A_2、…、同时发生所构成的事件为事件 A_1、A_2、…的积事件.记之为 $A_1 \cap A_2 \cap \dots$，简记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

例如 $B=\{2,4\}, C=\{1,2,3,5\}$, 则 $B\cup C=\{1,2,3,4,5\}$,
则 $B\cap C=\{2\}$.

性质

(1) $A\subset A\cup B, B\subset A\cup B$;

$A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$;

(2) $A\cap(A\cup B)=A, B\cap(A\cup B)=B$;

(3) $A\cup A=A, A\cap A=A$;

(4)若 $B\supset A$,则 $AB=A, A\cup B=B$.

4.互斥事件: 若事件 A、B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 为互斥事件或互不相容事件. 基本事件是两两互不相容的.

当两事件互不相容时,可将 $A\cup B$ 记为 $A+B$.

5. 对立事件: 若事件 A 与事件 B 在一次试验中必有且只有其中之一发生,即 A、B 满足条件

$$A\cup B=S \text{ 且 } AB=\varnothing$$

则称事件 A 与事件 B 为互逆事件,或称事件 A、B 互为对立事件.事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

对立事件与互斥事件的关系：

对立一定互斥，但互斥不一定对立.

两事件A、B互斥：$AB=\varnothing$

即A与B不可能同时发生.

两事件A、B互逆或互为对立事件

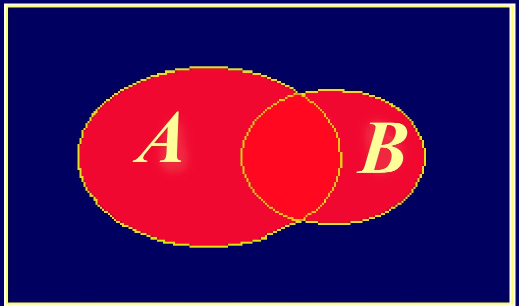
除要求A、B互斥($AB=\varnothing$)外，还要求

$$A\cup B=S$$

6. 差事件: 称事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A-B$.

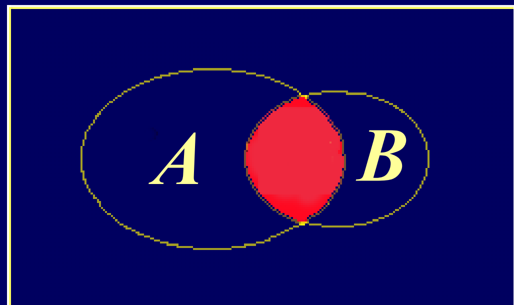
$$A-B=A\overline{B}=A-AB$$

以上事件之间的各种关系及运算可以用下列各种图示来直观地表示.

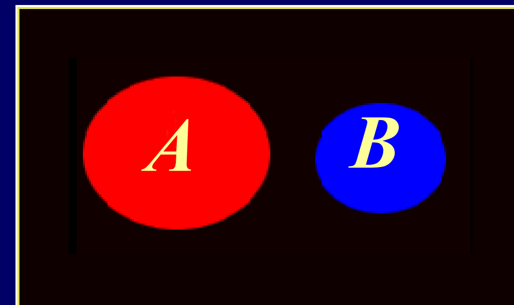


$A \cup B$

$A \subset B$



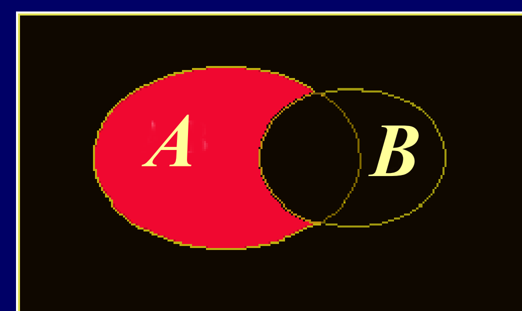
AB



$AB = \phi$

A、B 互斥

对立事件 $\overline{A}$



$A - B = A\overline{B}$

事件的运算满足的规律

(1)交换律: $A \cup B = B \cup A, AB = BA;$

(2)结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(AB)C = A(BC);$

(3)分配律: $(A \cup B)C = AC \cup BC,$

$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C);$

(4)德•摩根律(对偶律):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{(AB)} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

(5) $\overline{\overline{A}} = A$

(6) $A - B = A\overline{B} = A - AB$.

例3 按长度和直径两个指标检验某种圆柱形产品是否为合格品.若设 $A=\{长度合格\}$,$B=\{直径合格\}$,试用 A、B 的运算表示事件 $C=\{产品为合格品\}$, $D=\{产品为不合格品\}$.

解 产品为合格品必须是长度和直径两个指标合格,因此

$$C=AB$$

产品为不合格品是指长度和直径两个指标中至少有一个指标不合格,因此

$$D=\overline{A}\cup\overline{B} \text{ 或 } D=\overline{AB}.$$

练习1 设 A、B、C 为样本空间 S 中的三个随机事件,试用 A、B、C 的运算表示下列随机事件:

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生;

(2) A、B、C 都不发生;

(3) A、B、C 中恰好有一个发生;

(4) A、B、C 中至少有两个发生;

(5) A、B、C 中至少有一个发生;

(6) A、B、C 中恰好有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ (2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(3) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$

(4) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$ 或 $AB \cup AC \cup BC$

(5) $A \cup B \cup C$

(6) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

练习2 设某射手对一目标接连进行三次射击，记 $A_i = \{$第 i 次击中目标$\}$，$\overline{A}_i = \{$第 i 次未击中目标$\}$，$i = 1,2,3$，试用 A_i，$\overline{A}_i$，$i = 1,2,3$ 表示事件

(1) $B_j = \{$三次射击中恰好有 j 次击中目标$\}$，$j = 0,1,2,3$

(2) $C_k = \{$三次射击中至少有 k 次击中目标$\}$，$k = 0,1,2,3$

解 (1) $B_0 = \{$三次射击中恰好有0次击中目标$\}$

$$= \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

$$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$$

$$B_2 = A_1 A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 A_2 A_3$$

$$B_3 = A_1 A_2 A_3$$

(2) $C_0 = \{$三次射击中至少击中0次$\}$

$= \{$三次中恰好击中0 次或1次或2次或3次$\}$

$$= B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

$$C_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$C_2 = B_2 \cup B_3 = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$$

$$C_3 = B_3 = A_1A_2A_3$$

表 1-1-2 事件运算与集合运算对照表

记号	概率论	集合论
S	样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 的相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素

四、小结

- 样本空间和随机事件的定义
- 事件间的关系与事件的运算

五、布置作业

习题1-1（p6）：4、8、10

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是

事件的概率

那么要问：如何求得某事件的概率呢？下面几节就来回答这个问题.