上海大学 2018 ～ 2019 学年冬季学期试卷A卷

成绩	

课程名: 概率论与数理统计B **课程号:** 01014017 **学分:** 5

应试人声明:

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人__________ 应试人学号__________ 应试人所在院系__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分	20	10	10	10	15	15	10	10

一 、(20分) 填空题(每格2分)

1. 袋中有黑球和白球各2个. 现每次从袋中任取一个球, 有放回地取两次, 则抽到是黑白球各一个的概率等于 $\underline{C_2^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$; 若是无放回地取两次, 则抽到黑白球各一个的概率则是 $\underline{\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3}}$.
2. 设X服从泊松分布, 并已知$P\{X=0\}=\frac{1}{2}$. 则对于$k=0,1,2,\cdots$, $P\{X=k\}=\underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln 2)^k}{k!}}$; $\mathrm{E}\,(X)=\underline{\ln 2}$.
3. 设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$, 则X的边缘分布函数为$F_X(x)=\underline{F(x,+\infty)}$; 条件概率$P\{Y\le y|X\le x\}=\underline{\frac{F(x,y)}{F(x,+\infty)}}$.
4. 二维正态随机向量$(X,Y)\sim N(1,2,4,9,-0.5)$, 则$\mathrm{D}\,(1-2X)=\underline{16}$, $\mathrm{Cov}\,(3X,-Y)=\underline{9}$.
5. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一组样本, $\overline{X}$和S^2为样本均值和样本方差. 则$\mathrm{E}\,(S^2)=\underline{\sigma^2}$; $\mathrm{E}\left(\overline{X}S^2\right)=\underline{\mu\sigma^2}$

二 、(10分) 判别题(请在每个问题后的括号中填入✓或✗. 每小题2分)

1. 设A, B为两个事件, 则有$P(A-B)=P(A)-P(B)$. (✗)
2. 记随机变量X的分布函数为$F(x)$, 则$P\{X=c\}=F(c)-F(c-0)$. (✓)

3. X和Y相互独立, 且均服从正态分布, 那么(X,Y)将服从二维正态分布. (✓)
4. 如果$\mathrm{D}\,(X+Y)=\mathrm{D}\,(X)+\mathrm{D}\,(Y)$, 则$X$与$Y$互不相关. (✓)
5. 对于一个未知参数θ, 其估计量的方差越小越有效. (✗)

三 、(10分) 选择题(请在每个问题后的括号中填入A, B, C或D. 每小题2分)

1. A, B, C为三个事件, 那么事件$AB\cup AC\cup BC$表示这三个事件 (B)

   (A) 至少有一个不发生 (B) 至多有一个不发生

   (C) 三个都发生 (D) 恰好有两个发生
2. 设$X\sim b(100,0.01)$, 则与X的分布最相似的分布是(A)

   (A) $\pi(1)$ (B) $b(10,0.1)$ (C) $U(0,100)$ (D) $N(0,1)$
3. 设X_1, X_2, $\cdots$, X_n独立同分布, 其分布函数均为$1-\exp\{-x\}$, $x>0$. 那么当$x>0$时, $\min\limits_{1\le i\le n}X_i$的分布函数为 (C)

   (A) $(1-\exp\{-x\})^n$ (B) $(1-\exp\{-x\})^{\frac{1}{n}}$

   (C) $1-\exp\{-nx\}$ (D) $n\exp\{-nx\}$
4. X与Y互不相关, 且具有相同的方差. 则对于不全为零的常数a和b, $aX+bY$与$bX+aY$的相关系数等于 (D).

   (A) $\frac{ab}{a^2+b^2}$ (B) $\frac{a^2}{a^2+b^2}$ (C) $\frac{b^2}{a^2+b^2}$ (D) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$
5. 设X, Y独立同分布于$N(\mu,\sigma^2)$, 下列随机变量中哪一个服从$\chi^2(1)$ (B).

   (A) $\frac{1}{\sigma^2}X^2$ (B) $\frac{1}{2\sigma^2}(X-Y)^2$ (C) $\frac{1}{2\sigma^2}(X+Y)^2$ (D) $\frac{1}{\sigma^2}XY$

四、(10分) 有同样规格的产品六箱, 其中三箱是甲厂生产的, 次品率为$\frac{1}{20}$; 两箱是乙厂生产的, 次品率为$\frac{1}{15}$; 一箱是丙厂生产的, 次品率为$\frac{1}{10}$. 现从六箱中任选一箱, 并从中随机取一件产品,

1. (6分) 求取到的那件是次品的概率;
2. (4分) 如果取到的那件是次品, 问它由哪家厂生产的概率最大.

解1: 记A为取到的一件是次品; B_1, B_2, B_3分别表示该产品由甲厂, 乙厂, 或丙厂生产.

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=0}^{3} P(B_i)P(A|B_i) && (2分) \\ &= \frac{3}{6}\times\frac{1}{20}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{10} && (1+1+1分) \\ &= \frac{23}{360} && (1分) \end{aligned}$$

解2:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} \qquad (1分)$$

$$P(B_1|A) = \frac{9}{23} \qquad (1分)$$

$$P(B_2|A) = \frac{8}{23} \qquad (1分)$$

$$P(B_3|A) = \frac{6}{23} \qquad (1分)$$

该次品源自甲厂的概率最大.

五、(15分) 已知连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ a + \frac{1}{2}x, & -1 \le x < 0 \\ b + cx^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

求:

1. (5分) 常数a, b, c的值;
2. (5分) X的概率密度函数$f(x)$;
3. (5分) $P\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\}$.

解1: 根据连续型随机变量分布函数的连续性,

$$\begin{cases} a - \frac{1}{2} &= 0 \\ a &= b \\ b + c &= 1 \end{cases} \qquad (2分)$$

得$a = b = c = \frac{1}{2}$. (1+1+1分)

解2:

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) && (2分) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases} && (1+1+1分) \end{aligned}$$

解3:

$$\begin{aligned} P\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\} &= F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2}) && (2分) \\ &= \frac{5}{8} - \frac{1}{4} && (2分) \\ &= \frac{3}{8} && (1分) \end{aligned}$$

六、(15分) 设(X,Y)的联合分布律为:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0	0.2	0.2
1	0.3	0.2	0.1

1. (5分) 求X与Y中至少有一个大于0的概率;
2. (5分) 求$X=1$时, Y的条件分布律;
3. (5分) 写出$Z=X+Y$的分布律.

解1:

$$
\begin{aligned}
P(\{X>0\}\cup\{Y>0\}) =& P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=0\}+ \\
=& P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=1\} && (2分) \\
=& 0.3+0.2+0.1+0.2 && (2分) \\
=& 0.8 && (1分)
\end{aligned}
$$

解2:

$$P\{Y=j|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=j\}}{P\{X=1\}},\ j=-1,0,1 \qquad (1分)$$

$$P\{X=1\}=0.3+0.2+0.1=0.6 \qquad (1分)$$

$$P\{Y=-1|X=1\}=\frac{0.3}{0.6}=\frac{1}{2} \qquad (1分)$$

$$P\{Y=0|X=1\}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3} \qquad (1分)$$

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{0.1}{0.6}=\frac{1}{6} \qquad (1分)$$

解3:

$X+Y$	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.5	0.2	0.1

(上表中$X+Y$的取值范围1分; 每个概率各1分)

七、(10分) 设样本$X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$取自$[0,\theta]$上的均匀总体, 求:

1. (5分) θ的矩估计量;
2. (5分) θ的最大似然估计量.

解1:

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\theta}{2} \qquad (2分)$$

$$\overline{X}=\frac{\hat{\theta}_M}{2} \qquad (2分)$$

$$\hat{\theta}_M=2\overline{X} \qquad (1分)$$

解2:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \qquad (2分)$$

$$=\begin{cases} 0, & \theta<x_{(n)} \\ \frac{1}{\theta^n}, & \theta \geq x_{(n)} \end{cases} \qquad (2分)$$

$$\hat{\theta}_L=X_{(n)} \qquad (1分)$$

八、(10分) 在每包食品中食品添加剂含量有一定的波动(假设服从正态分布). 根据规定整批食品中添加剂含量的均值不得超过1mg/kg. 现从该批食品中随机抽取25袋, 测得添加剂的平均含量$\overline{x} = 1.08$mg/kg, 样本标准差$s = 0.23$mg/kg.

1. (5分) 在$\alpha = 0.05$显著性水平下, 能否认为这批食品添加剂含量的均值超标?
2. (5分) 求该批食品添加剂含量方差的90%的区间估计.

解1: $H_0: \mu \leq 1 \qquad H_1: \mu > 1$ (1分)

$$T = \frac{\overline{x}-1}{s}\sqrt{n} \quad (1分)$$

$$= \frac{1.08-1}{0.23} \times 5 = 1.7391 \quad (1分)$$

$$> t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(24) = 1.7109 \quad (1分)$$

拒绝H_0, 即在该组样本观测值下总体均值显著超标. (1分)

解2:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \quad (1分)$$

$$= \left[\frac{24 \times 0.23^2}{36.4150}, \frac{24 \times 0.23^2}{13.8484}\right] \quad (1+1分)$$

$$= [0.0349,\ 0.0917] \quad (1+1分)$$

(注: 若计算结果是σ的90%区间估计: [0.1867, 0.3028], 则扣1分.)

χ^2-分布和t-分布分位点表

α	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025
$\chi^2_\alpha(24)$	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641
$\chi^2_\alpha(25)$	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465
$\chi^2_\alpha(26)$	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232
$t_\alpha(24)$	−2.0639	−1.7109	−1.3178	1.3178	1.7109	2.0639
$t_\alpha(25)$	−2.0595	−1.7081	−1.3163	1.3163	1.7081	2.0595
$t_\alpha(26)$	−2.0555	−1.7056	−1.3150	1.3150	1.7056	2.0555