2017 ~ 2018 学年冬季学期概率论与数理统计 B 试卷(A 卷)答案

一. 填空题: (每空格 3 分, 5 空格共 15 分)

1. 设事件 A，B 和 C 独立, 且 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，那么事件 $(A\bigcup B)-C$ 的概率为 __0.264__.

2. 甲乙两人独立抛掷一枚均匀硬币各两次, 则甲抛出的正面次数少于乙的概率为 __$\frac{5}{16}$__.

3. 如果随机变量 $X\sim N(-1,3)$，c,d 是常数, 在 $c\neq 0$ 时, 随机变量 $Y=cX+d$ 服从的分布为 __$N(d-c,3c^2)$__.

4. 设随机变量 $X\sim B(m,p)$，$Y\sim B(n,p)$ (二项分布), 且相互独立, 则 $Z=X+Y$ 服从的分布为 __$B(m+n,p)$__，$E(XY)=$ __mnp^2__.

二. 是非题: (每小题 2 分, 5 题共 10 分; 正确的填"对", 错误的填"错")

5. 对任意两个事件 A 与 B，一定有 $(A\bigcup B)-B\subset A$. (对)

6. 若随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则 $P\{X=x\}=f(x)$. (错)

7. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不独立. (错)

8. 如果总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，要提高参数 μ 估计的置信度, 同时又不降低估计的精度, 就一定要加大样本容量. (对)

9. 如果统计量 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{\theta}^2$ 也是 θ^2 的最大似然估计. (对)

三. 选择题: (每小题 2 分, 5 题共 10 分)

10. 对任意两个独立且发生概率均大于零的事件 A 和 B，不正确的是(B).

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 一定独立　　B. A 与 B 一定互不相容

C. A 与 $\overline{B}$ 一定独立　　D. $\overline{A}$ 与 B 一定独立

11. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$ 是随机变量 X 的概率密度, 则 $[a,b]$ 必须是(A).

A. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ B. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ C. $[0, \pi]$ D. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

12. 随机变量 $X \sim F(n, m)$，即服从 F 分布. 对 $0<\alpha<1$，不一定成立的是(C).

A. $\frac{1}{X} \sim F(m, n)$

B. $F_{0.5}(m, m)=F_{0.5}(n, n)$

C. $F_{\alpha}(m, n)+F_{1-\alpha}(n, m)=1$

D. $F_{\alpha}(m, n)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}$

13. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，但不一定独立. 那么结论一定正确的是(C).

A. $X+Y$ 服从正态分布

B. $X^{2}+Y^{2}$ 服从 χ^{2} 分布

C. X^{2} 和 Y^{2} 都服从 χ^{2} 分布

D. $\frac{X^{2}}{Y^{2}}$ 服从 F 分布

14. 设离散型随机变量 X 与 Y 独立，且都服从相同的分布律. 则一定成立的是(D).

A. $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$

B. $P\{X=Y\}=1$

C. $P\{X>Y\}=P\{X<Y\}=\frac{1}{2}$

D. $P\{X>Y\}=P\{X<Y\}$

四. 计算题: (5 题, 共 58 分)

15. (本题 10 分)两个盒子中各放了十只球，球的颜色都是一只红球九只黑球. 现在从第一个盒中随机取出两球放入第二个盒中，然后再从第二个盒中随机抽取两球.

(1) (5 分)第二次抽出的球是一红一黑的概率是多少?

(2) (5 分)如果第二次抽出的球是一红一黑，则第一次抽取的球也是一红一黑的概率是多大?

解: 记 A_i 为事件"第 i 次取到一红一黑".

(1) $P(A_1)=\frac{C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$，$P(\bar{A}_1)=\frac{4}{5}$，$P(A_2 \mid A_1)=\frac{C_2^1 C_{10}^1}{C_{12}^2}=\frac{10}{33}$，$P(A_2 \mid \bar{A}_1)=\frac{C_{11}^1}{C_{12}^2}=\frac{1}{6}$.

所求概率为

$$P(A_2)=P(A_2 \mid A_1) P(A_1)+P(A_2 \mid \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) \quad \text{------------(2 分)}$$

$$=\frac{10}{33} \times \frac{1}{5}+\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \quad \text{------------(2 分)}$$

$$=\frac{32}{165}. \quad \text{------------(1 分)}$$

(2) 所求概率为

$$P(A_1 \mid A_2)=\frac{P(A_2 \mid A_1)P(A_1)}{P(A_2)} \qquad \text{------------(2 分)}$$

$$=\frac{\frac{10}{33}\times\frac{1}{5}}{\frac{32}{165}} \qquad \text{------------(2 分)}$$

$$=\frac{5}{16}. \qquad \text{------------(1 分)}$$

16. (本题 12 分)设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(x+1)^2, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

(1)(2 分)确定常数 A 的值;

(2)(6 分)写出 X 的分布函数;

(3)(4 分)计算概率 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$.

解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 得 $A\int_{-1}^{1}(x+1)^2\mathrm{d}x=1$, ------------(1 分)

即 $\frac{A}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{1}=1$, 则 $A=\frac{3}{8}$. ------------(1 分)

(2) $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{3}{8}\int_{-1}^{x}(t+1)^2\mathrm{d}t, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{8}(x+1)^3, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases} \qquad \text{------------(2+2+2 分)}$$

(3) $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=1-P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{37}{64}$. ------------(4 分)

17. (本题 10 分)设某种元器件的寿命 $X\sim N(\mu,100^2)$. 现在随机抽取25件元器件, 测得其平均寿命为950小时. 该种元器件的寿命超过1000小时才认为是合格的. 由这些数据, 对元器件的质量可作何种判断? (显著性水平取为 $\alpha=0.05$)

(附注: $u_{0.05}=1.65$，$u_{0.025}=1.96$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.025}(24)=2.0639$)

解: 检验问题: 原假设H_0: $\mu \ge 1000$；备选假设$\mu < 1000$. ------------(3 分)

用$u-$检验法, 这里, $n=25$，$\sigma=100$，$\alpha=0.05$.

拒绝域为$\left\{\overline{x}\left|\dfrac{\overline{x}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\le -u_\alpha\right.\right\}=\left\{\overline{x}\left|\dfrac{\overline{x}-1000}{20}\le -1.65\right.\right\}$. ------------(4 分)

因为$\overline{x}=950$，所以$\dfrac{\overline{x}-1000}{20}=\dfrac{950-1000}{20}=-2.5<-1.65$, 即在拒绝域内. 因此拒绝原假设, 认为产品不合格. ------------(3 分)

18. (本题 16 分)设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy, & 0\le x\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) (3 分)确定常数c的值;

(2) (5 分)计算X的边际密度函数和数学期望;

(3) (4 分)计算$f_{Y|X}(y\,|\,x)$;

(4) (4 分)计算$P\{X+Y<1\}$的概率.

解: (1) 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 xy\mathrm{d}y=\dfrac{c}{8}$, ------------(2 分)

所以$c=8$; ------------(1 分)

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} 0, & x\notin(0,1), \\ \int_x^1 8xy\mathrm{d}y=4x(1-x^2), & x\in(0,1), \end{cases}$ -----------(3 分)

$E(X)=4\int_0^1 x^2(1-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{15}$. ------------(2 分)

(3) $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{2y}{1-x^2}, & 0<x<y<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ ------------(4 分)

(4) $P\{X+Y<1\}=\iint_{x+y<1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}8xy\mathrm{d}y$ ------------(2 分)

$=\dfrac{1}{6}$. ------------(2 分)

19. (本题10分)设总体X的分布律为$p_x(\theta)=\dfrac{\theta^x}{x!}\mathrm{e}^{-\theta},\quad x=0,1,2,\cdots$，其中$\theta$为未知参数，且$\theta>0$.

(1) (5 分)求参数θ的矩估计$\hat{\theta}_1$;

(2) (5 分)求参数θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2$.

解: (1) 因为$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}x\cdot\dfrac{\theta^x}{x!}\mathrm{e}^{-\theta}=\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{\theta^x}{(x-1)!}\mathrm{e}^{-\theta}=\theta$, ------------(4 分)

所以$\hat{\theta}_1=\bar{X}$. ------------(1 分)

(2)最大似然函数$L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^{x_i}}{x_i\,!}\mathrm{e}^{-\theta}=\mathrm{e}^{-n\theta}\dfrac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i\,!}$, ------------(2 分)

$$\ln L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=-n\theta+\ln\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i\,!),$$

由$\dfrac{\partial\ln L(\theta;x_1,\cdots,x_n)}{\partial\theta}=-n+\dfrac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=0$, ------------(2 分)

得$\theta_2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$. ------------(1 分)

五. 证明题: (1 题, 共 7 分)

20. (本题 7 分)如果X和Y是独立同分布的连续型随机变量，证明: $P\{X\le Y\}=\dfrac{1}{2}$. 并举例说明，对离散型随机变量，结论不正确.

证: 由于X和Y独立同分布，且是连续型随机变量，所以

$$P\{X\le Y\}=P\{X\ge Y\}=P\{X>Y\},$$ -----------------(2 分)

则由$P\{X\le Y\}+P\{X>Y\}=1$，即得结论. -----------------(2 分)

对离散型随机变量X和Y，如X和Y独立，且均服从二项分布$B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，此时可计算得: $P\{X\le Y\}=\dfrac{3}{4}$，所以上述结论不正确. -----------------(3 分)