离散数学 二

成绩	

上海大学 2013～2014 学年 春 季学期试卷 A

课程名：离散数学（二）课程号：08305004 学分：4（闭卷）

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

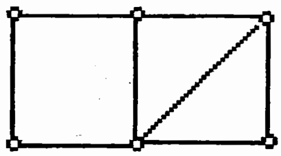
应试人 __________ 应试人学号 __________ 应试人所在院系 __________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

得分	

一、选择（10 分，每小题 2 分）

1、如右图所示，它的 $k(G), \lambda(G), \delta(G)$ 分别为（　　）。



A. 1、2、2　　B. 1、1、2

C. 2、1、2　　D. 2、2、2

2、设 $G=<V,E>$，$G'=<V',E'>$ 是两个图，若 G' 是 G 的生成子图，下列说法正确的是（　　）。

A. $V=V'$ 且 $E=E'$　　B. $V=V'$ 且 $E\subseteq E'$

C. $V\subseteq V'$ 且 $E=E'$　　D. $V\subseteq V'$ 且 $E\subseteq E'$

3、设 n 阶无向简单连通图 G 中有 m 条边，则 m 的范围是（　　）。

A. $n\le m\le n(n+1)$　　B. $n-1\le m\le n(n-1)/2$

C. $2n\le m\le n(n-1)$　　D. $n-1\le m\le n(n+1)/2$

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

4、下列群中是有限循环群的为（　　）。

A. $<Z_n, \oplus>$　（$\oplus$ 表示模 n 加法运算）

B. $<Z, +>$

C. Klein 四元群

D. $<P(A), \cap>$（其中 A 为非空有限集合）

5、在自然数集 N 上，满足结合律的运算是（　　）。

A. $a * b = a - b$　　B. $a * b = a + 2b$

C. $a * b = \max(a, b)$　　D. $a * b = |a - b|$

得分	

二、判断是非，正确的打“√”，错误的“×”（10 分，每小题 2 分）

1、有割点的连通图不可能是汉密尔顿图。（　　）

2、若无向图 G 中是连通的且无奇度顶点，则 G 为欧拉图，

但逆命题不成立。（　　）

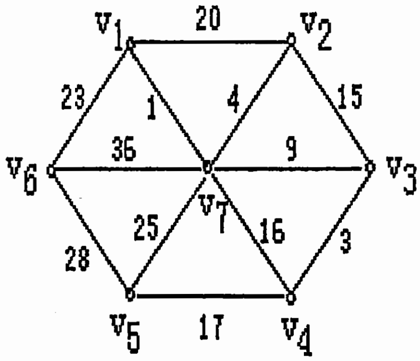
3、n 阶零图（含平凡图）都是二部图。（　　）

4、设有限群$<G, *>$，则$\forall a \in G$，$|a|$是$|G|$的因子。（　　）

5、设集合 A={1,2,⋯,10}，运算 x*y=min(x,y)，则<A, *>不是独异点。（　　）

三、如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1,v_2,\ldots,v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间能够通信而且总造价最小。（ 10 分）

得分	



解：

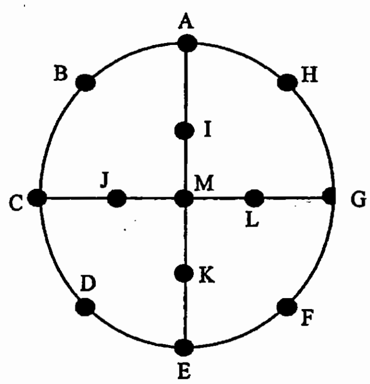
（7 分）

树权 W(T)=23+1+4+9+3+17=57 即为总造价。（3 分）

四、判别下图 G 是否为汉密尔顿图，若是，请给出回路；若否，请说明理由。（10 分）

得分	

解：



五、一个连通平面图 G 的度数列是：2, 3, 2, 4, 1, 2, 2，试求出 G 的面数和其对偶图边数和面数。（10 分）

得分	

解：

六、设置换 $S=(1\ 2\ 4\ 5)$ ，$T=(1\ 2\ 5\ 3)$，求 S^2，ST，TS，S^{-1}，T^{-1}。（ 10 分）

得分	

解：

七、设f为由代数系统$<A,*>$到代数系统$<B,\circ>$的一个同态映射。（10 分）

得分	

(1)如果$<A,*>$是半群，那么同态像$<f(A),\circ>$也是半群；

(2)如果$<A,*>$是独异点，那么同态像$<f(A),\circ>$也是独异点；

(3)如果$<A,*>$是群，那么同态像$<f(A),\circ>$也是群。

证明：

八、（ 10 分，每小题 2 分）如下图所示。

得分	

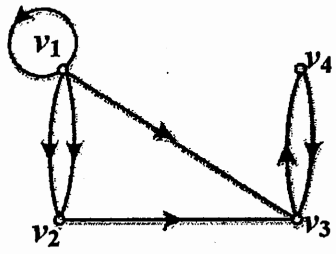
(1) v_1 到 v_4 长为 3 的通路共有多少条？

(2) 长为 4 的回路共有多少条？

(3) 长度小于等于 4 的回路共有多少条？

(4) 求出该图的可达矩阵 P;

(5) 该图是否是强连通的。



解：

九、写出群<Z_{42}, $\oplus$>的所有生成元和子群，并画出子群格。（10 分）。

得分	

解：

得分	

十、(10分)设 $C=\{a \mid a\in G \wedge \forall x\in G \wedge ax=xa\}$,

证明: C 是 G 的子群。

证明:

上海大学 2013～2014 学年 春 季学期试卷 A

成绩	

课程名：离散数学（二）课程号：08305004 学分：4 （闭卷）

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

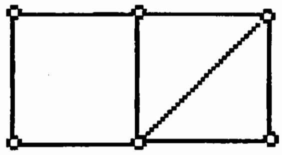
应试人 ____________ 应试人学号 ____________ 应试人所在院系 ____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一、选择（10 分，每小题 2 分）

得分	

1、如右图所示，它的 $k(G), \lambda(G), \delta(G)$ 分别为（ D ）。



A. 1、2、2　　B. 1、1、2

C. 2、1、2　　D. 2、2、2

2、设 $G=<V,E>$，$G'=<V',E'>$ 是两个图，若 G' 是 G 的生成子图，下列说法正确的是（ B ）。

A. $V=V'$ 且 $E=E'$　　B. $V=V'$ 且 $E\subseteq E'$

C. $V\subseteq V'$ 且 $E=E'$　　D. $V\subseteq V'$ 且 $E\subseteq E'$

3、设 n 阶无向简单连通图 G 中有 m 条边，则 m 的范围是（ B ）。

A. $n\le m\le n(n+1)$　　B. $n-1\le m\le n(n-1)/2$

C. $2n\le m\le n(n-1)$　　D. $n-1\le m\le n(n+1)/2$

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

4、下列群中是有限循环群的为（ A ）。

A. $<Z_n, \oplus>$ （$\oplus$ 表示模 n 加法运算）

B. $<Z, +>$

C. Klein 四元群

D. $<P(A), \cap>$（其中 A 为非空有限集合）

5、在自然数集 N 上，满足结合律的运算是（ C ）。

A. $a * b = a - b$　　B. $a * b = a + 2b$

C. $a * b = \max(a, b)$　　D. $a * b = |a - b|$

得分	

二、判断是非，正确的打“√”，错误的“×”（10 分，每小题 2 分）

1、有割点的连通图不可能是汉密尔顿图。 （ √ ）

2、若无向图 G 中是连通的且无奇度顶点，则 G 为欧拉图，但逆命题不成立。 （ × ）

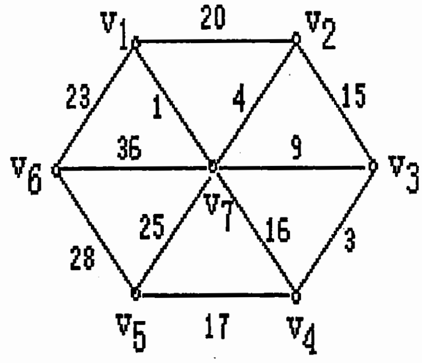
3、n 阶零图（含平凡图）都是二部图。 （ √ ）

4、设有限群 $<G, *>$，则 $\forall a \in G$，$|a|$ 是 $|G|$ 的因子。 （ √ ）

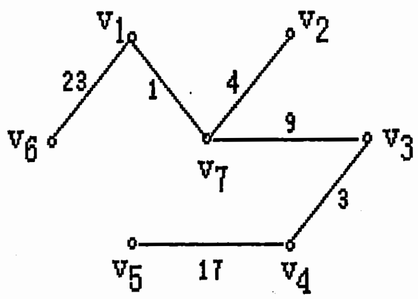
5、设集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，运算 $x*y=\min(x,y)$，则 $<A, *>$ 不是独异点。（ × ）

三、如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \ldots, v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间能够通信而且总造价最小。（ 10 分）

得分	



解：

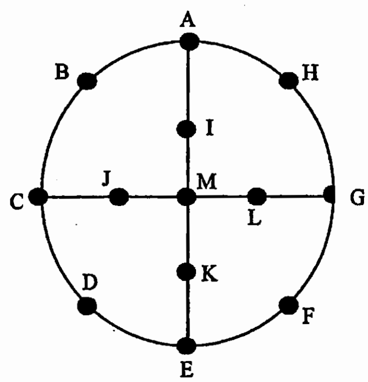


（7 分）

树权 W(T)=23+1+4+9+3+17=57 即为总造价。（3 分）

四、判别下图 G 是否为汉密尔顿图，若是，请给出回路；若否，请说明理由。（10 分）

得分	



解：该图不是汉密尔顿图。（4 分）

因为若令 $S=\{A,C,E,G,M\}$，

则连通分支数 $p(G\text{-}S)=8$，$|S|=5$

$p(G\text{-}S) \geq |S|$　不满足定理.

所以该图不是汉密尔顿图。（6 分）

五、一个连通平面图 G 的度数列是：2, 3, 2, 4, 1, 2, 2，

试求出 G 的面数和其对偶图边数和面数。（10 分）

得分	

解：由连通平面图 G 的度数列知，顶点数 $n=7$；（2 分）

由握手定理知，边数 $m=(2+3+2+4+1+2+2)/2=8$；（3 分）

由欧拉公式：面数 $r=2-n+m=3$；（3 分）

其对偶图边数和面数分别为 8 和 7。（2 分）

六、设置换 $S=(1\ 2\ 4\ 5)$ ，$T=(1\ 2\ 5\ 3)$，

求 S^2，ST，TS，S^{-1}，T^{-1}。（ 10 分）

得分	

解：$S^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$，$ST=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$，$TS=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{pmatrix}$

$S^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&2&4\end{pmatrix}$，$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}$

或

$S^2=(1\ 4)(2\ 5)$ ，　$ST=(1\ 5\ 2\ 4)$，　$TS=(1\ 4\ 5\ 3\ 2)$

$S^{-1}=(1\ 5\ 4\ 2)$ ，　$T^{-1}=(1\ 3\ 5\ 2)$

七、设 f 为由代数系统 $<A,*>$ 到代数系统 $<B,\circ>$ 的一个同态映射。（10 分）

(1)如果 $<A,*>$ 是半群，那么同态像 $<f(A),\circ>$ 也是半群；

(2)如果 $<A,*>$ 是独异点，那么同态像 $<f(A),\circ>$ 也是独异点；

(3)如果 $<A,*>$ 是群，那么同态像 $<f(A),\circ>$ 也是群。

得分	

证明：(1) $\forall x,y,z\in f(A)$，则 $\exists\, a,b,c\in A$，使得

$$f(a)=x,\quad f(b)=y,\quad f(c)=z,$$

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z &= (f(a)\circ f(b))\circ f(c)=f(a*b)\circ f(c)\\ &= f((a*b)*c)=f(a*(b*c))\\ &= f(a)\circ f(b*c)=f(a)\circ(f(b)\circ f(c))\\ &= x\circ(y\circ z)\end{aligned}$$

所以，$<f(A),\circ>$ 也是半群；（3 分）

(2)因 $<A,*>$ 是独异点，设 $e\in A$ 为单位元，

$\forall x\in f(A)$，则 $\exists\, a\in A$，使得 $f(a)=x$，

$$f(e)\circ f(a)=f(e*a)=f(a),\qquad f(a)\circ f(e)=f(a*e)=f(a)$$

所以，$f(e)$ 是 $<f(A),\circ>$ 的单位元，$<f(A),\circ>$ 也是独异点；（3 分）

(3) $\forall x\in f(A)$，则 $\exists\, a\in A$，使得 $f(a)=x$，因 $<A,*>$ 是群，

设 a 的逆元为 a^{-1}，

$$f(e)=f(a*a^{-1})=f(a)\circ f(a^{-1}),\qquad f(e)=f(a^{-1}*a)=f(a^{-1})\circ f(a)$$

即 $f(a)$ 的逆元为 $f(a^{-1})$，从而 x 有逆元，所以 $<f(A),\circ>$ 也是群。（4 分）

八、（ 10分，每小题 2 分）如下图所示。

得分	

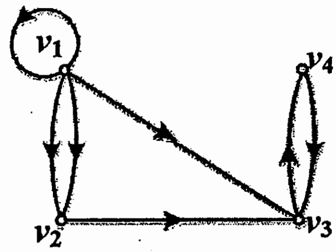
(1) v_1 到 v_4 长为 3 的通路共有多少条?

(2) 长为 4 的回路共有多少条?

(3) 长度小于等于 4 的回路共有多少条?

(4) 求出该图的可达矩阵 P;

(5) 该图是否是强连通的。



解：求得图的邻接矩阵 A 如下

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&2&6&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

（1） v_1 到 v_4 长为 3 的通路有 3 条；

（2） 长为 4 的回路共有 3 条；

（3） 长度小于等于 4 的回路共有 8 条；

（4） 可达矩阵为 $P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$。

（5） 不是强连通的。

九、写出群<Z_{42}，⊕>的所有生成元和子群，并画出子群格。（10 分）。

得分	

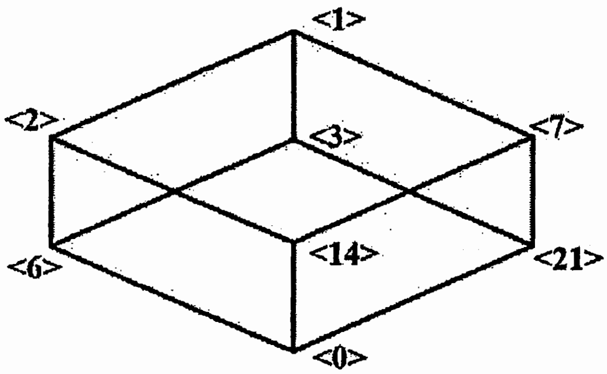
解：生成元：1，5，11，13，17，19，23，25，29，31

37，41 (全对 3 分，错 3 个扣 1 分)

子群：<0>，<1>，<2>，<3>，<6>，<7>，<14>，<21>

(全对 3 分，错 2 个扣 1 分)

子群格：



(全对 4 分，错 1 边扣 1 分)

十、（10分）设 $C=\{a \mid a\in G \wedge \forall x\in G \wedge ax=xa\}$，

证明：C 是 G 的子群。

得分	

证明：显然 e 与任意元素可交换，则 $e\in C$，C 是 G 的非空子集。（2 分）

任取 $a, b\in C$，只需证明 ab^{-1} 与 G 中所有的元素都可交换。

$\forall x\in G$，有 $(ab^{-1})x = ab^{-1}x = ab^{-1}(x^{-1})^{-1} = a(x^{-1}b)^{-1} = a(bx^{-1})^{-1}$

$$= a(xb^{-1}) = (ax)b^{-1} = (xa)b^{-1} = x(ab^{-1})$$

从而 $ab^{-1}\in C$，由判定定理可知 $C\leqslant G$.（8 分）

上海大学 2006~2007 学年秋季学期试卷(A 卷)

成绩	

课程名： 离散数学(二)　　**课程号：** 08305004　　**学分：** 4　(闭卷)

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人： ________　**应试人学号：** ________　**应试人所在院系：** ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

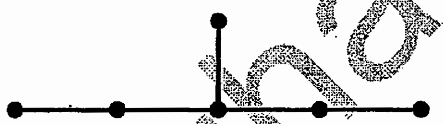
一、(10 分)画出结点数 $n=6$ 的所有不同构的无向树。

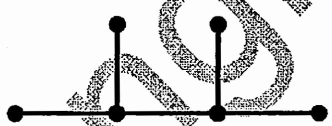
得分	

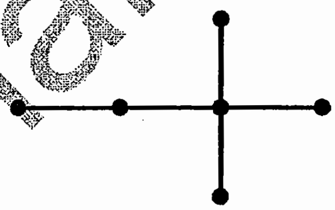
解：共有六种情况。

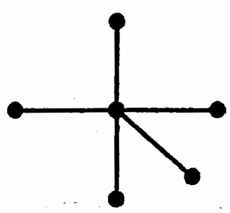
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

得分	

二、(10 分)设 $\langle G,*\rangle$ 是群，$H=\{a \mid a\in G\wedge(\forall x)(x\in G\to a*x=x*a)\}$，

证明：$\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群。

证法一：设 e 是群 $\langle G,*\rangle$ 中的幺元，$x\in G$。

(1) 因为 $e*x=x=x*e$，所以 $e\in H$，H 是 G 的非空子集。

(2) 对于任意的 $a\in H\subseteq G$，则有其逆元 $a^{-1}\in G$。$a^{-1}*x=a^{-1}*x*(a*a^{-1})$

$=a^{-1}*(x*a)*a^{-1}\overset{a\in H}{=}a^{-1}*(a*x)*a^{-1}=(a^{-1}*a)*x*a^{-1}=x*a^{-1}$，即 $a^{-1}\in H$。

所以，对于任意的 $a,b\in H\subseteq G$，有 $b^{-1}\in H\subseteq G$。

$(a*b^{-1})*x=a*(b^{-1}*x)\overset{b^{-1}\in H}{=}a*(x*b^{-1})=(a*x)*b^{-1}\overset{a\in H}{=}(x*a)*b^{-1}=x*(a*b^{-1})$

即 $a*b^{-1}\in H$。

根据定理 5-4.8，$\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群。

证法二：设 e 是群 $\langle G,*\rangle$ 中的幺元。

(1) 因为 $e*x=x=x*e$，所以 $e\in H$，H 是 G 的非空子集。

(2) 对于任意的 $a,b,c\in H\subseteq G$，$(a*b)*c\overset{*\text{在}G\text{上可结合}}{=}a*(b*c)$，所以 $*$ 在 H 上可结合。

(3) 对于任意的 $a,b\in H\subseteq G$，对于任意的 $x\in G$，$(a*b)*x=a*(b*x)\overset{b\in H}{=}a*(x*b)$

$=(a*x)*b\overset{a\in H}{=}(x*a)*b=x*(a*b)$，所以 $a*b\in H$，即 $*$ 在 H 上封闭。

(4) 对于任意的 $a\in H\subseteq G$，则有其逆元 $a^{-1}\in G$。$a^{-1}*x=a^{-1}*x*(a*a^{-1})$

$=a^{-1}*(x*a)*a^{-1}\overset{a\in H}{=}a^{-1}*(a*x)*a^{-1}=(a^{-1}*a)*x*a^{-1}=x*a^{-1}$，即 $a^{-1}\in H$。

所以 a^{-1} 也是 H 中 a 的逆元。

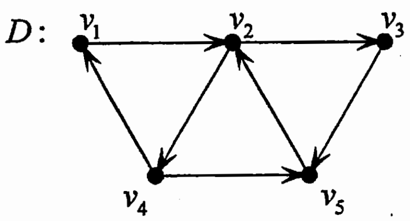
综合以上四点，$\langle H,*\rangle$ 是群，也是 $\langle G,*\rangle$ 的子群。

得分	

三、(10 分)对有向图$D=(V,A)$，通过邻接矩阵M解下列问题：

(1) 从v_4到v_5长度为 4 的路有几条？

(2) D中长度为 3 的回路有几条？



解：

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&0&0&2\\0&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix},\quad M^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&3&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&2&2&0\\1&0&0&0&2\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}0&3&0&0&0\\0&0&3&3&0\\1&0&0&0&2\\2&0&0&0&4\\0&3&0&0&0\end{bmatrix}。$$

所以，(1)从v_4到v_5长度为 4 的路有 4 条。它们是：$v_4\to v_1\to v_2\to v_3\to v_5$，

$v_4\to v_1\to v_2\to v_4\to v_5$，$v_4\to v_5\to v_2\to v_3\to v_5$，$v_4\to v_5\to v_2\to v_4\to v_5$。

(2)D中长度为 3 的回路有 3 条。它们是：$v_1\to v_2\to v_4\to v_1$，

$v_2\to v_4\to v_5\to v_2$，$v_2\to v_3\to v_5\to v_2$。

得分	

四、(10 分)证明：$\langle G,\times\rangle$ 是循环群。其中：$G=\{1,-1,i,-i\}$，$i\times i=-1$，

$\times$ 是普通乘法。

证法一：由于 $\times$ 是普通乘法，具有可结合性，且 $1\in G$，所以 1 是 G 中的幺元。

又因为 $i=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$；$-i=-i$，$(-i)^2=-1$，$(-i)^3=i$，$(-i)^4=1$；

所以 G 中元素可以由元素 i (或 $-i$)作为生成元进行生成，运算 $\times$ 在 G 上具有封闭性。

同时，$(-1)\times(-1)=1$，$i\times(-i)=(-i)\times i=1$，每个元素都有逆元。

所以 $\langle G,\times\rangle$ 是循环群。

证法二：构建 $\langle G,\times\rangle$ 的运算表如下：

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

由运算表可知：

(1) 运算表中的每个元素都属于 G，则运算 $\times$ 在 G 上封闭。

(2) 运算表中 1 是 G 中的幺元。

(3) 运算表中 1 是 1 的逆元；-1 是 -1 的逆元；i 和 $-i$ 互为逆元。

由于 $\times$ 是普通乘法，具有可结合性，所以 $\langle G,\times\rangle$ 是群。

又因为 $i=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$；$-i=-i$，$(-i)^2=-1$，$(-i)^3=i$，$(-i)^4=1$；

所以 $\langle G,\times\rangle$ 是以元素 i (或 $-i$)为生成元的循环群。

得分	

五、(10 分)证明：若图中恰有 2 个奇数度结点，则这两个结点连通。

证：假设 x, y 是图中恰有的 2 个奇数度结点。

若 x, y 不连通，则 x, y 必然分别处于不同的两个连通分支 $\omega(x)$ 和 $\omega(y)$ 中。

由于任何连通分支只存在偶数个奇数度结点，

所以，在连通分支 $\omega(x)$ 中，除结点 x 以外必然存在其他的奇数度结点；在连通分支 $\omega(y)$ 中，除结点 y 以外必然存在其他的奇数度结点。

这与 x, y 是图中仅有的 2 个奇数度结点相矛盾。

所以，x, y 处于同一连通分支，则这两个结点连通。

得分	

六、(10 分)设$\langle H,*\rangle$是$\langle G,*\rangle$的子群，对于任意的$a\in G$，证明：

(1) $a\in H \Rightarrow aH=H$。

(2) $a\notin H \Rightarrow aH\cap H=\Phi$。

证：(1) 设$x\in H \overset{a\in H\wedge H是G的子群}{\Rightarrow} x\in H\wedge a^{-1}\in H \Rightarrow a^{-1}*x\in H \Rightarrow (\exists h)(h\in H\wedge h=a^{-1}*x)$

$\Rightarrow x=e*x=a*a^{-1}*x=a*h\in aH$。鉴于$x$是任意去取的，所以$H\subseteq aH$。

设$y\in aH \Rightarrow (\exists g)(g\in H\wedge y=a*g) \overset{a\in H\wedge H是G的子群}{\Rightarrow} y\in H$。

鉴于y是任意去取的，所以$aH\subseteq H$。由此，$H=Ha$。

或者：设$a\in H \overset{H是G的子群}{\Rightarrow} a^{-1}\in H \Rightarrow a^{-1}*e\in H \overset{Lagrange定理}{\Rightarrow} \langle a,e\rangle\in R \Rightarrow [a]_R=[e]_R$

$\overset{a\in G}{\Rightarrow} aH=eH=H$。

证：(2) 反证法：若$aH\cap H\neq\Phi \Rightarrow (\exists h_1)(\exists h_2)(h_1,h_2\in H\wedge a*h_1=h_2)$

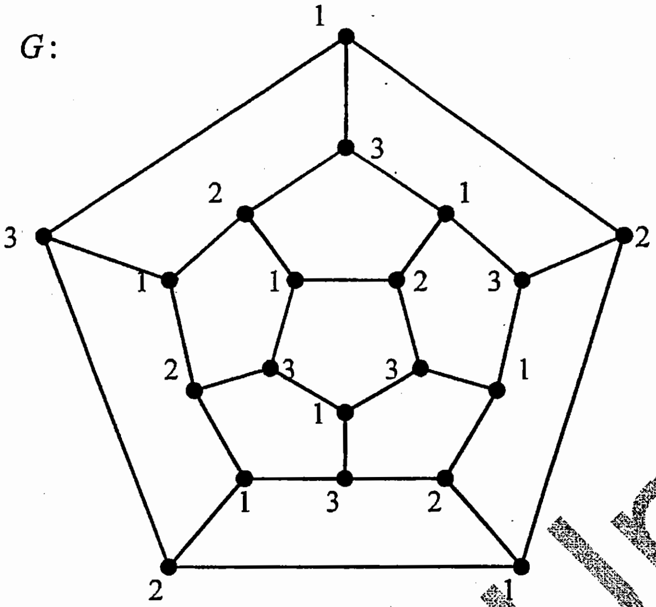
$\overset{h_1\in H\wedge H是群}{\Rightarrow} (\exists h_1^{-1})(h_1^{-1}\in H\wedge a*h_1*h_1^{-1}=h_2*h_1^{-1}) \Rightarrow a=h_2*h_1^{-1}\in H$，与$a\notin H$矛盾。

所以$aH\cap H=\Phi$。

七、(10 分)用数字表示颜色编号，对图 $G=(V,E)$ 中的结点着色，

并求出其色数 $\chi(G)$。

得分	



解：如图所示，用 3 种颜色能正常着色，但因含奇数回路则 $\chi(G)>2$，所以 $\chi(G)=3$。

八、(10 分)证明 f 是 $\langle Z_+,+\rangle$ 到 $\langle A,\times\rangle$ 的满同态映射。其中，Z_+ 是正整数集，$A=\{-1,1\}$，$+$、$\times$ 分别是普通加法和普通乘法，$f(x)=\begin{cases}1\text{，当}x\text{为偶数时}\\-1\text{，当}x\text{为奇数时}\end{cases}$。

得分	

证：对于任意的 $a,b\in Z_+$，根据 $f(x)$ 的定义构造运算表如下：

	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$a+b$	$f(a+b)$	$f(a)\times f(b)$
状态一	偶数	偶数	1	1	偶数	1	1
状态二	偶数	奇数	1	−1	奇数	−1	−1
状态三	奇数	偶数	−1	1	奇数	−1	−1
状态四	奇数	奇数	−1	−1	偶数	1	1

所以在各种真值指派下，$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ 成立，f 是 $\langle Z_+,+\rangle$ 到 $\langle A,\times\rangle$ 的同态。

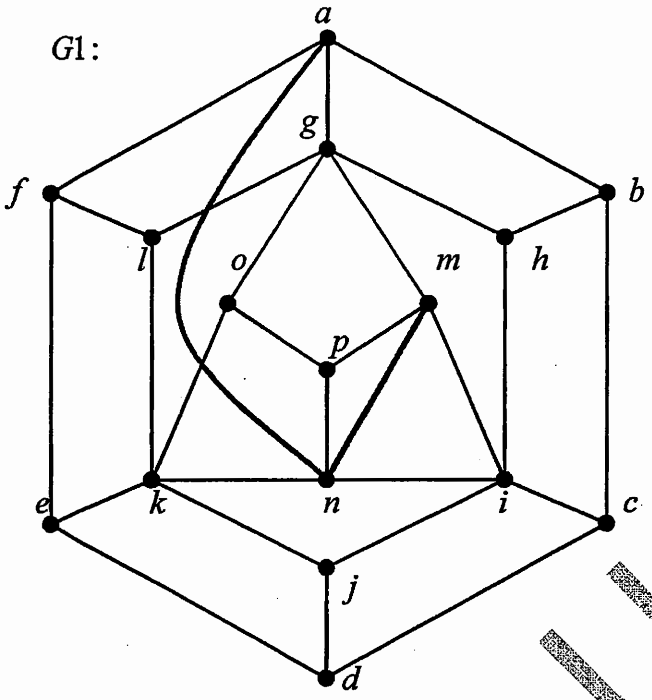
又因为 $f(x)$ 的定义，满足 $(\forall y)\big(y\in A\rightarrow(\exists x)(x\in Z_+\wedge y=f(x))\big)$，

所以 f 是 $\langle Z_+,+\rangle$ 到 $\langle A,\times\rangle$ 的满同态。

九、(10 分)证明图 $G1=(V,E)$ 不是 *Hamilton* 图。问：最少添加几条边可以使图 $G1$ 成为 *Hamilton* 图，并在 $G1$ 上添上这些边，在 $G2$ 上标出 *Hamilton* 回路。

得分	

G1:



证：设构造非空结点集

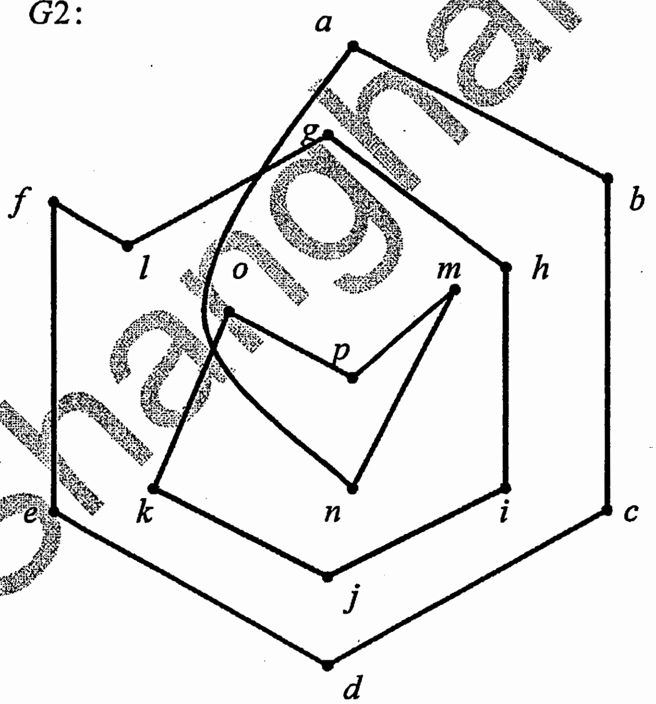
$S=\{b,d,f,g,i,k,p\}$，

则 $|S|=7$。

在图 $G1$ 中删除 S 的结点，得到由 $\{a,c,e,h,j,l,m,n,o\}$ 构成的 $V_{G1}-S$ 生成子图，且其连通分支数 $\omega(V_{G1}-S)=9$。

由于 $\omega(V_{G1}-S)>|S|$，根据定理 7-4.3，图 $G1$ 不是 *Hamilton* 图。

G2:



解：至少添加两条边 mn 和 na，可以使图 $G1$ 成为 *Hamilton* 图。其具体回路为：$a\to b\to c\to d\to e\to f\to l\to g\to h\to i\to j\to k\to o\to p\to m\to n\to a$。

十、(10 分) 设$\langle G,*\rangle$是群，对于任意的$a,b\in G$，证明：$a*b$与$b*a$同阶。

得分	

证：设群$\langle G,*\rangle$中的幺元为e，并设群$\langle G,*\rangle$中元素$a*b$的阶为q，

则$(a*b)^q=e$，且q是使$(a*b)^q=e$的最小正整数。

因为$(a*b)^q=e$，则$a*b$的逆元$(a*b)^{-1}=(a*b)^{q-1}$。

又因为对于任意的$a,b\in G$(G是群)，有$(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$，所以$(a*b)^{q-1}=b^{-1}*a^{-1}$。

另外，对于任意的$a,b\in G$(G是群)，

有$(b*a)^q=b*(a*b)^{q-1}*a=b*(b^{-1}*a^{-1})*a=(b*b^{-1})*(a^{-1}*a)=e*e=e$。

假设群$\langle G,*\rangle$中元素$b*a$的阶为m，且$m<q$，有$(b*a)^m=e$，即$b*a$的逆元$(b*a)^{-1}=(b*a)^{m-1}=a^{-1}*b^{-1}$。

则$(a*b)^m=a*(b*a)^{m-1}*b=a*(a^{-1}*b^{-1})*b=(a*a^{-1})*(b^{-1}*b)=e*e=e$，

由于元素$a*b$的阶为q，所以$m\geq q$。这与假设$m<q$矛盾。

综上所述，元素$a*b$和元素$b*a$具有相同阶。

上海大学 2006~2007 学年秋季学期试卷(B 卷)

成绩	

课程名： 离散数学(二)　**课程号：** 08305004　**学分：** 4　(闭卷)

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人： ____________　**应试人学号：** ____________　**应试人所在院系：** ____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一、(10 分)画出结点数 $n \le 5$ 的所有不同构的无向树。

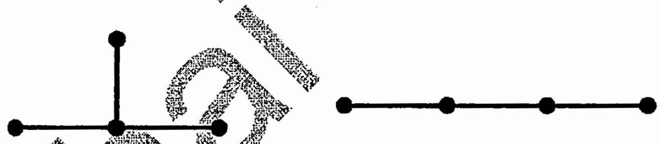
得分	

解：当 $n=1$ 时，

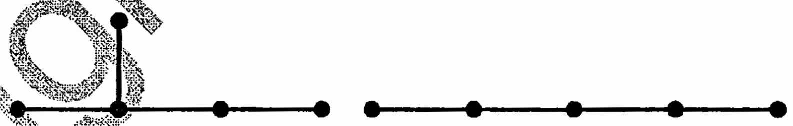
当 $n=2$ 时，

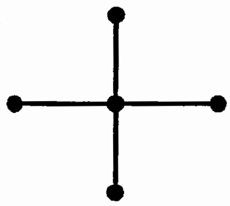
当 $n=3$ 时，

当 $n=4$ 时，



当 $n=5$ 时，





二、(10 分)设$\langle G,*\rangle$是群，$H=\{a \mid a\in G\wedge(\forall x)(\forall y)(x,y\in G\wedge a*x=a*y\rightarrow x=y)\}$，

证明：$\langle H,*\rangle$是$\langle G,*\rangle$的子群。

得分	

证法二：设e是群$\langle G,*\rangle$中的幺元。

(1) 因为$e*x=e*y\Rightarrow x=y$，所以$e\in H$，H是G的非空子集。

(2) 对于任意的$a,b,c\in H\subseteq G$，$(a*b)*c\overset{*在G上可结合}{=}a*(b*c)$，所以$*$在$H$上可结合。

(3) 对于任意的$a,b\in H\subseteq G$，对于任意的$x,y\in G$，有

$(a*b)*x=(a*b)*y\Rightarrow a*(b*x)=a*(b*y)\overset{b\in H}{\Rightarrow}a*x=a*y\overset{a\in H}{\Rightarrow}x=y$，

所以$a*b\in H$，即$*$在H上封闭。

(4) 对于任意的$a\in H\subseteq G$，则有其逆元$a^{-1}\in G$。有$a^{-1}*x=a^{-1}*y$

$\Rightarrow a*(a^{-1}*x)=a*(a^{-1}*y)\Rightarrow(a*a^{-1})*x=(a*a^{-1})*y\Rightarrow e*x=e*y\Rightarrow x=y$，

即$a^{-1}\in H$。所以a^{-1}也是H中a的逆元。

综合以上四点，$\langle H,*\rangle$是群，也是$\langle G,*\rangle$的子群。

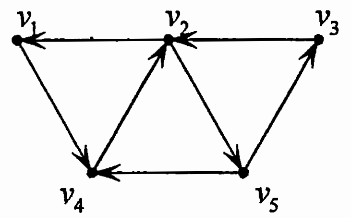
三、(10 分) 有向图 $D=(V,A)$，通过邻接矩阵 M 解下列问题：

得分

(1) 从 v_5 到 v_4 长度为 4 的路有几条？

(2) D 中长度为 3 的回路有几条？

D:



解：

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix},$$

$$M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&2&0\\1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1\\0&2&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&3&0&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&1&2&0\\2&0&0&0&2\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}0&0&1&2&0\\3&0&0&0&3\\0&3&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&2&4&0\end{bmatrix}。$$

所以，(1)从 v_5 到 v_4 长度为 4 的路有 4 条。它们是：$v_5\to v_4\to v_2\to v_1\to v_4$，

$v_5\to v_4\to v_2\to v_5\to v_4$，$v_5\to v_3\to v_2\to v_1\to v_4$，$v_5\to v_3\to v_2\to v_5\to v_4$。

(2) D 中长度为 3 的回路有 3 条。它们是：$v_1\to v_4\to v_2\to v_1$，

$v_2\to v_5\to v_4\to v_2$，$v_2\to v_5\to v_3\to v_2$。

四、(10 分)构造五阶群，并验证其为循环群和 *Abel* 群。

得分	

解：设集合 $G=\{e,a,b,c,d\}$，构建五阶群 $\langle G,*\rangle$ 的运算表如下：

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

证：由运算表可知：

(1) 运算表中的每个元素都属于 G，则运算 $*$ 在 G 上封闭。

(2) 运算表中 e 是 G 中的幺元。

(3) 运算表中 e 是 e 的逆元；a 和 d 互为逆元；b 和 c 互为逆元。

对于任意的 $x,y,z\in G$，$(x*y)*z=x*(y*z)$ 成立，满足可结合性。所以 $\langle G,*\rangle$ 是群。

又因为 $a=a$，$a^2=b$，$a^3=c$，$a^4=d$，$a^5=e$；

$b=b$，$b^2=d$，$b^3=a$，$b^4=c$，$b^5=e$；

$c=c$，$c^2=a$，$c^3=d$，$c^4=b$，$c^5=e$；

$d=d$，$d^2=c$，$d^3=b$，$d^4=a$，$d^5=e$。

所以 $\langle G,*\rangle$ 是以元素 a (或 b,c,d)为生成元的循环群。

由运算表可知运算表关于主对角线对称，运算 $*$ 在 G 上可交换，所以 $\langle G,*\rangle$ 是 *Abel* 群。

(或者运用循环群必是 *Abel* 群的性质)

得分	

五、(10 分)证明：若图 $G=(V,E)$ 中恰有 2 个奇数度结点，且连接这两个结点得到的新图 G^* 是连通图，则图 G 也是连通图。

证：假设 x,y 是图 G 中恰有的 2 个奇数度结点。

已知性质：任何连通分支只存在偶数个奇数度结点。

若图 G 不是连通图，则有两种情况：

一种情况，x,y 在同一连通分支中，图 G 还有其他连通分支，则连接 x,y 两个结点并不能使得到的新图 G^* 是连通图，这与已知条件矛盾。

另一种情况，x,y 分别处于不同的两个连通分支 $\omega(x)$ 和 $\omega(y)$ 中。根据性质：在连通分支 $\omega(x)$ 中，除结点 x 以外必然存在其他的奇数度结点；在连通分支 $\omega(y)$ 中，除结点 y 以外必然存在其他的奇数度结点。这与 x,y 是图 G 中仅有的 2 个奇数度结点相矛盾。

所以，图 G 是连通图。

得分	

六、(10 分)设 $\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群，对于任意的 $a\in G$，证明：

(1) $aH=H\Rightarrow a\in H$。

(2) $aH\cap H=\Phi\Rightarrow a\notin H$。

证：(1) $\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群 $\overset{H=aH}{\Rightarrow}$ $\langle aH,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群 $\Rightarrow e\in aH$

$\Rightarrow(\exists h)(h\in H\wedge e=a*h)\Rightarrow(\exists h^{-1})(h^{-1}\in H\wedge h^{-1}=e*h^{-1}=a*h*h^{-1}=a*e=a)$

$\Rightarrow a\in H$

证：(2) 因为 $aH\cap H=\Phi\Rightarrow(\forall h_1)(\forall h_2)(h_1,h_2\in H\wedge a*h_1\neq h_2)$

$\overset{h_1\in H\wedge H\text{是群}}{\Rightarrow}(\exists h_1^{-1})(h_1^{-1}\in H\wedge a*h_1*h_1^{-1}\neq h_2*h_1^{-1})\Rightarrow a\neq h_2*h_1^{-1}\in H\Rightarrow a\notin H$

得分	

七、(10 分)任何一个简单的连通平面图$G=(V,E)$，$|V|=n$，$|E|=m$，

证明：如果每个面都是由四条及四条以上的边围成，则$m\le 2n-4$。

证：设简单的连通平面图G的面数为r。

因为每个面都是由四条及四条以上的边围成，即每个面的次数不小于 4，

则由各面次数之和为$2m$，得$2m\ge 4r$，即$r\le\frac{m}{2}$。

将之代入欧拉公式：$2=n-m+r\le n-m+\frac{m}{2}=n-\frac{m}{2}$，则$4\le 2n-m$，

即$m\le 2n-4$。

得分	

八、(10 分)设$\langle G,*\rangle$是群，$a\in G$，定义映射$f:G\to G$，对于任意的$x\in G$，有$f(x)=a^{-1}*x*a$，证明：f是一个从G到G的自同构。

证：对于任意的$x,y\in G$，则$x\neq y \overset{a\in G\wedge G是群}{\Rightarrow} a^{-1}*x*a\neq a^{-1}*y*a\Rightarrow f(x)\neq f(y)$，

所以f是G到G的入射。

对于任意的$y\in G \overset{a\in G\wedge G是群}{\Rightarrow} a*y*a^{-1}\in G \overset{设x=a*y*a^{-1}}{\Rightarrow} x\in G$

$\Rightarrow f(x)=a^{-1}*x*a=a^{-1}*(a*y*a^{-1})*a=(a^{-1}*a)*y*(a^{-1}*a)=e*y*e=y$，

所以f是G到G的满射。

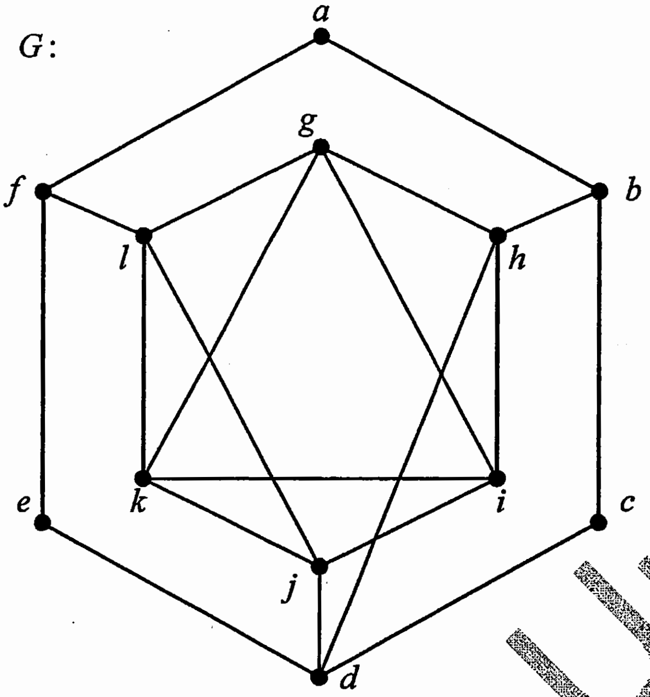
对于任意的$x,y\in G$，有$f(x*y)=a^{-1}*(x*y)*a=a^{-1}*x*(a*a^{-1})*y*a$

$=(a^{-1}*x*a)*(a^{-1}*y*a)=f(x)*f(y)$

所以f是G到G的自同构。

九、(10 分)证明图 $G=(V,E)$ 不是 *Euler* 图。问：最少添加几条边可以使图 G 成为 *Euler* 图，并写出具体 *Euler* 回路。

得分	



证：$deg(a)=2$，$deg(b)=3$，$deg(c)=2$，$deg(d)=4$，$deg(e)=2$，$deg(f)=3$，$deg(g)=4$，$deg(h)=4$，$deg(i)=4$，$deg(j)=4$，$deg(k)=4$，$deg(l)=4$。

根据 *Euler* 定理，由于 b,f 两个结点的度数为奇数，所以图 G 不存在 *Euler* 回路，不是 *Euler* 图。

解：至少添加一条边 bf，可以使图 G 成为 *Euler* 图。其具体回路为：$a \to b \to c \to d \to e \to f \to l \to g \to i \to k \to g \to h \to i \to j \to k \to l \to j \to d \to h \to b \to f \to a$。

十、(10 分) 设$\langle G,*\rangle$是群，对于任意的$a\in G$，证明：a与其逆元a^{-1}同阶。

得分	

证：设群$\langle G,*\rangle$中的幺元为e，并设群$\langle G,*\rangle$中元素a的阶为q，

则$a^q=e$，且q是使$a^q=e$的最小正整数。

对于a的逆元，$\left(a^{-1}\right)^q=a^{-q}=\left(a^q\right)^{-1}=e^{-1}=e$。

假设群$\langle G,*\rangle$中元素a的逆元a^{-1}的阶为m，且$m<q$，有$\left(a^{-1}\right)^m=e$。

则$(a)^m=\left(\left(a^{-1}\right)^{-1}\right)^m=\left(\left(a^{-1}\right)^m\right)^{-1}=e^{-1}=e$。

由于元素a的阶为q，所以$m\geq q$。这与假设$m<q$矛盾。

综上所述，元素a和其逆元a^{-1}具有相同阶。

上海大学 2007~2008 学年秋季学期试卷(A 卷)

成绩	

课程名： 离散数学(二)　**课程号：** 08305004　**学分：** 4　(闭卷)

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人： ________ **应试人学号：** ________ **应试人所在院系：** ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

得分	

一、(10 分) 设$\langle G,*\rangle$是群，$a\in G$，定义映射$f:G\to G$，对于任意的$x\in G$，有$f(x)=a^{-1}*x*a$，证明：f是一个从G到G的自同构。

证：首先证明f是G到G的双射。 (6 分)

对于任意的$x,y\in G$，则$x\neq y\overset{a\in G\wedge G\text{是群}}{\Rightarrow}a^{-1}*x*a\neq a^{-1}*y*a\Rightarrow f(x)\neq f(y)$，

所以f是G到G的入射。

对于任意的$y\in G\overset{a\in G\wedge G\text{是群}}{\Longrightarrow}a*y*a^{-1}\in G\overset{\text{设}x=a*y*a^{-1}}{\Rightarrow}x\in G$

$\Rightarrow f(x)=a^{-1}*x*a=a^{-1}*(a*y*a^{-1})*a=(a^{-1}*a)*y*(a^{-1}*a)=e*y*e=y$，

所以f是G到G的满射。

其次证明f是G到G的同态。 (4 分)

对于任意的$x,y\in G$，有$f(x*y)=a^{-1}*(x*y)*a=a^{-1}*x*(a*a^{-1})*y*a$

$=(a^{-1}*x*a)*(a^{-1}*y*a)=f(x)*f(y)$，则$f$是$G$到$G$的同态。

综上所述，f是G到G的自同构。

得分	

二、(10 分) 若图 G 是每一个面至少由 $k(k\geq 3)$ 条边围成的简单连通平面图，

则 $e\leq\dfrac{k(v-2)}{k-2}$。(其中，e、v 分别表示图 G 的边数和结点数)

证：设简单的连通平面图 G 的面数为 r。

因为每个面都是至少由 $k(k\geq 3)$ 条的边围成，即每个面的次数不小于 k，

则根据握手定理得：各面次数之和为 $2e$，得 $2e\geq kr$，即 $r\leq\dfrac{2e}{k}$。 (4 分)

将之代入欧拉公式：$2=v-e+r\leq v-e+\dfrac{2e}{k}=v-\dfrac{e}{k}(k-2)$， (4 分)

则 $2k\leq kv-e(k-2)$，即 $e\leq\dfrac{k(v-2)}{k-2}$。 (2 分)

得分	

三、(10 分) 设 $\langle G,*\rangle$ 是群，对于任意的 $a\in G$，证明：a 与其逆元 a^{-1} 同阶。

证法一：设群 $\langle G,*\rangle$ 中的幺元为 e，并设群 $\langle G,*\rangle$ 中元素 a 的阶为 q，

则 $a^q=e$，且 q 是使 $a^q=e$ 的最小正整数。

对于 a 的逆元，$(a^{-1})^q=a^{-q}=(a^q)^{-1}=e^{-1}=e$。 (4 分)

假设群 $\langle G,*\rangle$ 中元素 a 的逆元 a^{-1} 的阶为 m，且 $m<q$，有 $(a^{-1})^m=e$。

则 $(a)^m=\left((a^{-1})^{-1}\right)^m=\left((a^{-1})^m\right)^{-1}=e^{-1}=e$。

由于元素 a 的阶为 q，所以 $m\geq q$。这与假设 $m<q$ 矛盾。

综上所述，元素 a 和其逆元 a^{-1} 具有相同阶。 (6 分)

四、(10 分，每小题 5 分)

得分

(1) 证明：若图 G 是自对偶的，则 $e=2v-2$。(其中，e、v 分别表示图 G 的边数和结点数)

证：假设图 $G=\langle V,E\rangle$ 中面的个数为 r，且 $|V|=v$，$|E|=e$。

并假设其对偶图为 $G'=\langle V',E'\rangle$，$|V'|=v'$，$|E'|=e'$，则 $r=v'$。

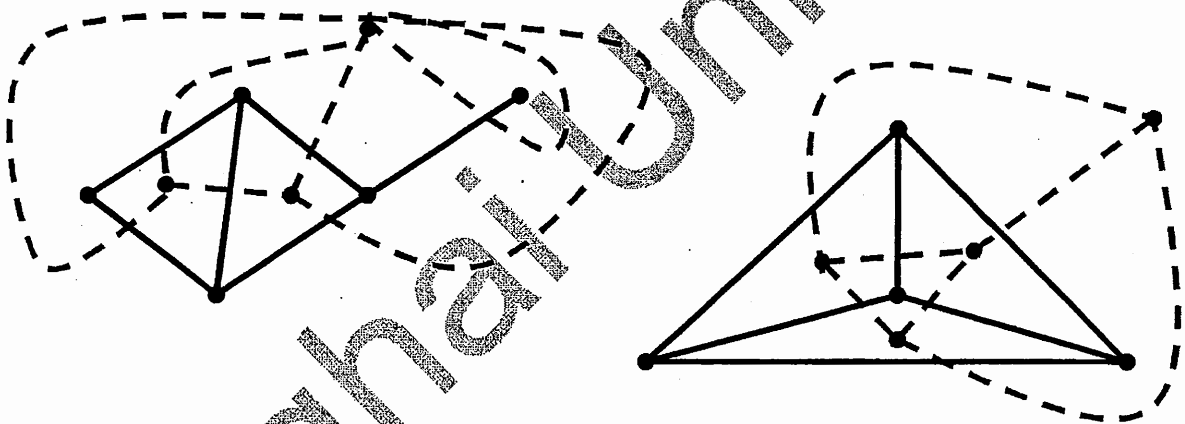
由于图 G 是自对偶图，所以图 G 是平面图。

由于图 G 是自对偶图，所以 $v=v'$，$e=e'$。 (2 分)

根据 *Euler* 定理，$v-e+r=2$。

则 $v-e+v=2\Rightarrow e=2v-2$。 (3 分)

(2) 请使用虚线段(●— — —●)在原图上画出下面两图的对偶图。



五、(10 分) 设 $\langle G,*\rangle$ 是群，证明：$\langle G,*\rangle$ 是 *Abel* 群当且仅当对于任意的 $a,b\in G$，有 $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$。

得分

证："$\Rightarrow$"(5 分)

因为群 $\langle G,*\rangle$ 是 *Abel* 群，所以对于任意的 $a,b\in G$，有 $a*b=b*a$。

则 $(a*b)*(a*b)\overset{*\text{可结合}}{=}a*(b*a)*b=a*(a*b)*b\overset{*\text{可结合}}{=}(a*a)*(b*b)$。

"$\Leftarrow$"(5 分)

在群$\langle G,*\rangle$中，对于任意的$a,b\in G$，有$(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

$$\overset{*\text{可结合}}{\Rightarrow} a*(b*a)*b=a*(a*b)*b$$

$$\underset{b^{-1}\text{存在}}{\overset{a^{-1}\text{存在}}{\Rightarrow}} a^{-1}*(a*(b*a)*b)*b^{-1}=a^{-1}*(a*(a*b)*b)*b^{-1}$$

$$\overset{*\text{可结合}}{\Rightarrow} (a^{-1}*a)*(b*a)*(b*b^{-1})=(a^{-1}*a)*(a*b)*(b*b^{-1})$$

$$\overset{e\text{存在}}{\Rightarrow} e*(b*a)*e=e*(a*b)*e\Rightarrow b*a=a*b$$

所以，群$\langle G,*\rangle$是$Abel$群。

六、(10 分) 设群$\langle G,*\rangle$，$H\subseteq G$，且$H\neq\varnothing$。试从子群的定义证明：对于任意的$a,b\in H$，有$a*b^{-1}\in H$，则$\langle H,*\rangle$是$\langle G,*\rangle$的子群。

得分	

证：设e为群$\langle G,*\rangle$中的幺元。

(1) 对于任意的$a\in H\subseteq G$，有$a*a^{-1}=e\in H$；且$e*a=a=a*e$，

所以，e也是$\langle H,*\rangle$上的幺元。

(2) 对于任意的$e,a\in H$，有$e*a^{-1}=a^{-1}\in H$，则$\langle H,*\rangle$上每个元素都有逆元。

(3) 对于任意的$a,b,c\in H\subseteq G$，有$(a*b)*c=a*(b*c)$，则$\langle H,*\rangle$可结合。

(4) 对于任意的$a,b\in H$，有$b^{-1}\in H$，则$a*b=a*(b^{-1})^{-1}\in H$，

所以，$\langle H,*\rangle$满足封闭性。

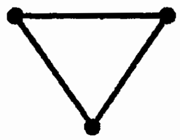
综合上述描述，$\langle H,*\rangle$是群，也是$\langle G,*\rangle$的子群。

七、(10 分) 请通过构造图的方式说明 *Euler* 图和 *Hamilton* 图之间没有关系。
(要求构造的简单无向图不超过五个结点，而且图中无一度结点)

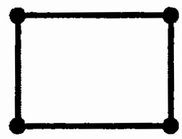
得分	

解：*Euler* 图是指图中存在一条回路，经过图中每条边一次且仅一次。
Hamilton 图是指图中存在一条回路，经过图中的每个结点一次且仅一次。 (2 分)

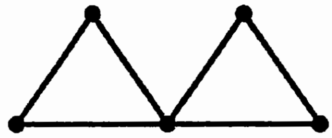
1．存在一张图，它既是 *Euler* 图，也是 *Hamilton* 图。例如： (2 分)



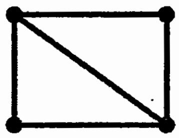
或



2．存在一张图，它是 *Euler* 图，但不是 *Hamilton* 图。例如： (2 分)



3．存在一张图，它不是 *Euler* 图，但是 *Hamilton* 图。例如： (2 分)



4．存在一张图，它不是 *Euler* 图，也不是 *Hamilton* 图。例如： (2 分)

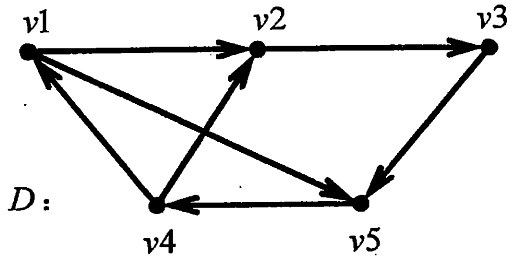
综合上述描述，*Euler* 图和 *Hamilton* 图之间没有关系。

得分	

八、(10 分) 对有向图 $D=(V,A)$ 求解下列问题：

(1) 写出邻接矩阵 M；

(2) D 中长度为 3 的不同的路有几条？其中不同的回路有几条？(并请罗列说明)



解：(1)

$$\text{邻接矩阵}M=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}。\quad (3\text{ 分})$$

解：(2)

$$M^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&1&0&1\\1&1&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^3=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}。\quad (3\text{ 分})$$

则 D 中长度为 3 的不同的路有 10 条，其中有 1 条不同的回路。 (4 分)

它们是：$v1\to v5\to v4\to v1$ (也是回路)；$v1\to v5\to v4\to v2$；

$v1\to v2\to v3\to v5$；$v2\to v3\to v5\to v4$；$v3\to v5\to v4\to v1$；

$v3\to v5\to v4\to v2$；$v4\to v1\to v2\to v3$；$v4\to v2\to v3\to v5$；

$v5\to v4\to v1\to v2$；$v5\to v4\to v2\to v3$。

九、(10 分) 设群 $\langle G,*\rangle$，$G=\{0^o,60^o,120^o,180^o,240^o,300^o\}$，对于任意的 $a,b\in G$，有

$$a*b=\begin{cases} a+b & a+b<360^o \\ a+b-360^o & a+b\geq 360^o \end{cases}$$

。试：(1)写出此群的运算表(3 分)；(2)求 G 中各元素的阶(3 分)；(3)找出其二阶子群在 $\langle G,*\rangle$ 上的全部左陪集(4 分)。

(+、−为普通加、减法)

得分	

解：(1) 群 $\langle G,*\rangle$ 的运算表为： (3 分)

$*$	0^o	60^o	120^o	180^o	240^o	300^o
0^o	0^o	60^o	120^o	180^o	240^o	300^o
60^o	60^o	120^o	180^o	240^o	300^o	0^o
120^o	120^o	180^o	240^o	300^o	0^o	60^o
180^o	180^o	240^o	300^o	0^o	60^o	120^o
240^o	240^o	300^o	0^o	60^o	120^o	180^o
300^o	300^o	0^o	60^o	120^o	180^o	240^o

(2) 0^o 的阶为 1；60^o 的阶为 6；120^o 的阶为 3；180^o 的阶为 2；240^o 的阶为 3；

300^o 的阶为 6。 (3 分)

(3) 因为群 $\langle G,*\rangle$ 的二阶子群为 $\langle\{0^o,180^o\},*\rangle$。 (2 分)

所以其所有左陪集为：$\{0^o,180^o\}$、$\{60^o,240^o\}$ 和 $\{120^o,300^o\}$。 (2 分)

$0^o\{0^o,180^o\}=180^o\{0^o,180^o\}=\{0^o,180^o\}$；

$60^o\{0^o,180^o\}=240^o\{0^o,180^o\}=\{60^o,240^o\}$；

$120^o\{0^o,180^o\}=300^o\{0^o,180^o\}=\{120^o,300^o\}$。