第一节 二维随机变量

- 二维随机变量的分布函数
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量
- 课堂练习
- 小结 布置作业

从本讲起，我们开始第三章的学习.

它是第二章内容的推广.

一维随机变量及其分布

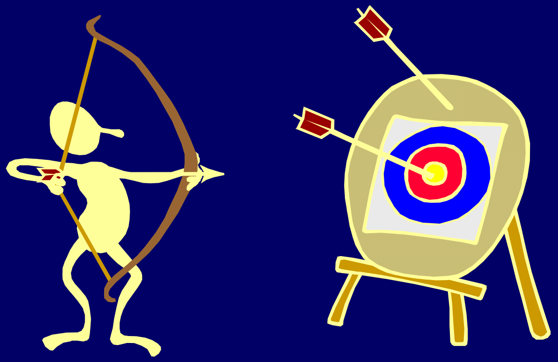
↓

多维随机变量及其分布

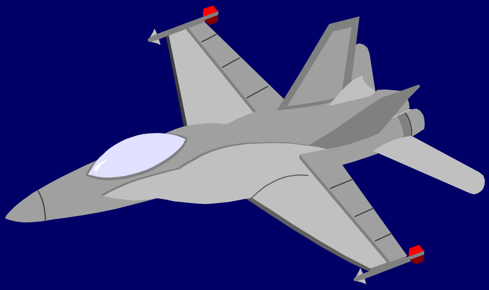
由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，我们重点讨论二维随机变量.

到现在为止，我们只讨论了一维*r.v*及其分布. 但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

在打靶时,命中点的位置是由一对*r .v* (两个坐标)来确定的.



飞机的重心在空中的位置是由三个r .v (三个坐标)来确定的等等.



一般地，设 E 是一个随机试验,它的样本空间是 $S=\{e\}$, 设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$ 是定义在 S 上的随机变量,由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n维随机变量.

以下重点讨论二维随机变量.

请注意与一维情形的对照 .

一、二维随机变量的分布函数

定义1 设(X,Y)是二维随机变量，如果对于任意实数x,y，二元函数

$$F(x,y)$$

$$=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}$$

$$\triangleq P(X\le x, Y\le y)$$

一维随机变量

X的分布函数

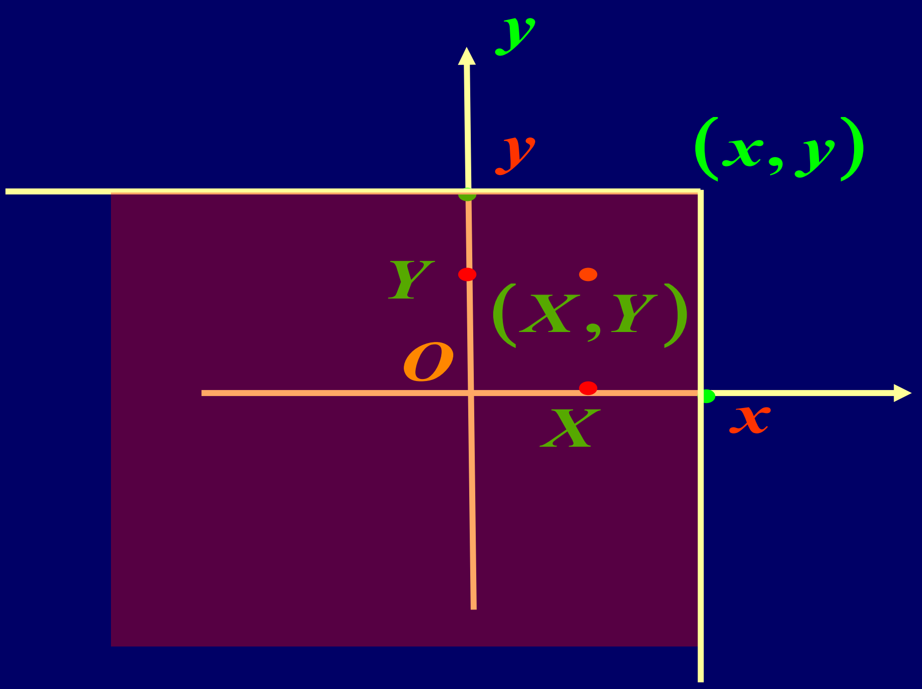
$$F(x)=P(X\le x)$$

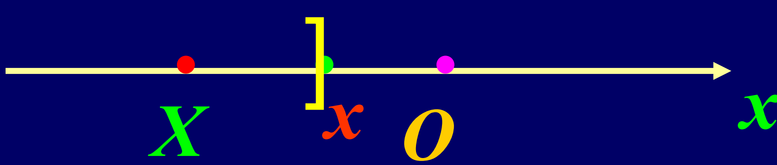
$$-\infty<x<\infty$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或者称为随机变量X和Y的联合分布函数.

分布函数的函数值的几何解释

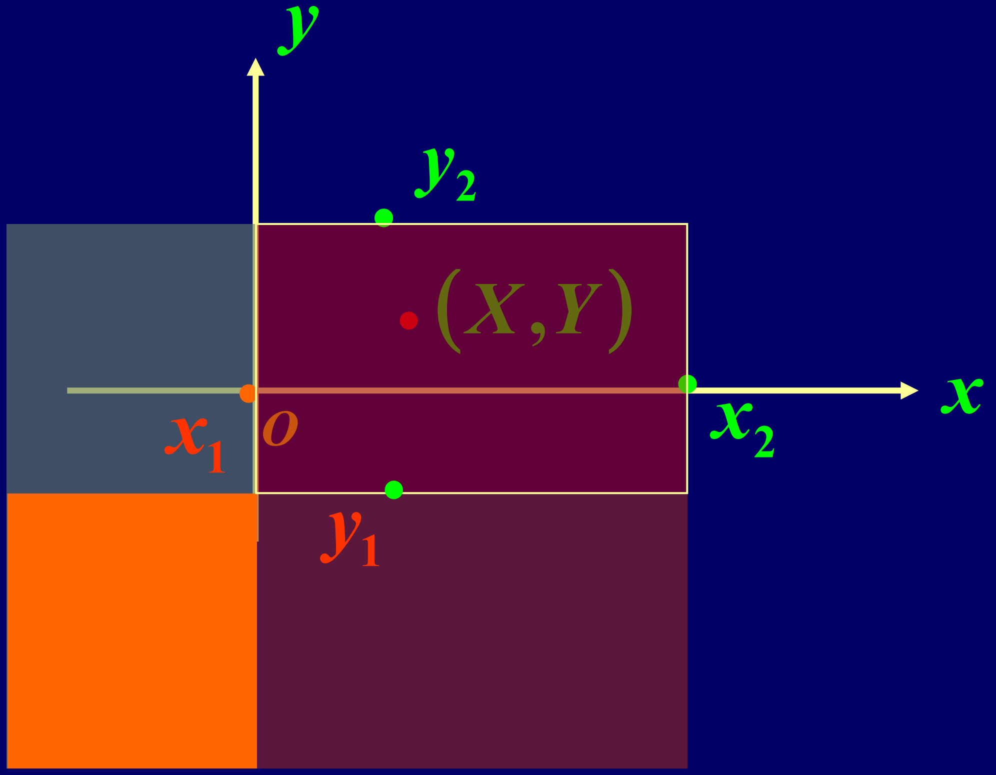
将二维随机变量 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标, 那么,分布函数 $F(x,y)$在点(x,y) 处的函数值就是随机点(X,Y) 落在下面左图所示的,以点 (x,y)为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率.





随机点(X,Y)落在矩形域$[x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2]$内的概率为

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$$

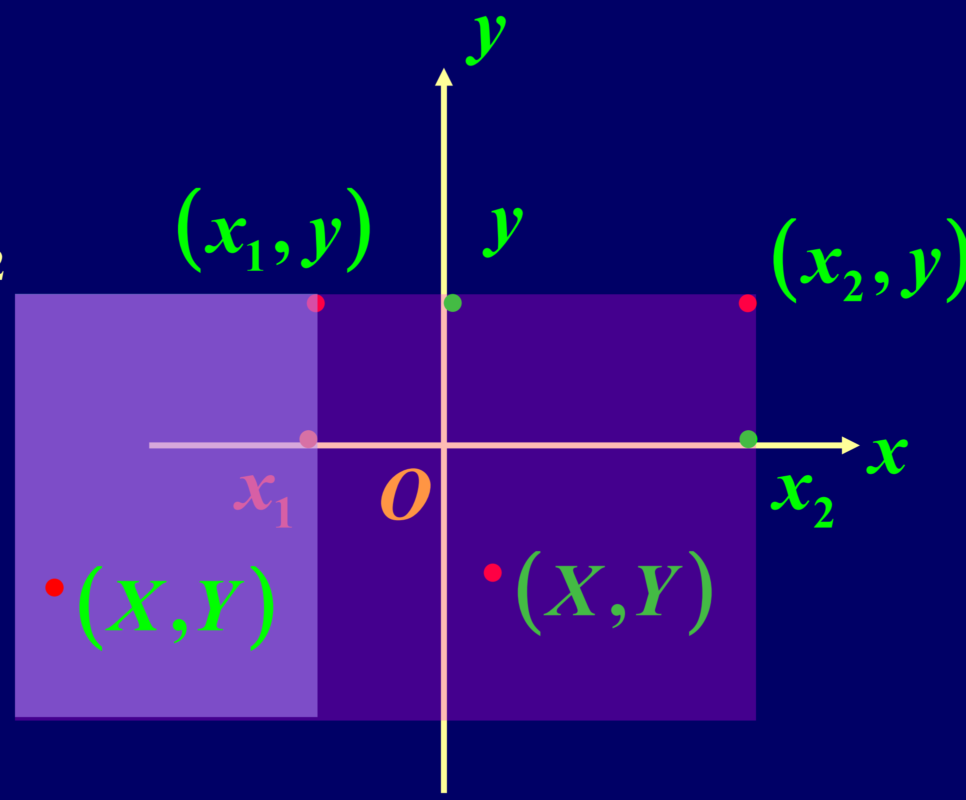


分布函数 $F(x,y)$ 的性质：

1．$F(x,y)$ 是关于变量 x 和 y 的不减函数；

对任意固定的 $y \in R$ 及 $\forall\, x_1, x_2 \in R$，当 $x_1 < x_2$ 时 $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$；

对任意固定的 $x \in R$ 及 $\forall\, y_1, y_2 \in R$，当 $y_1 < y_2$ 时 $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$；

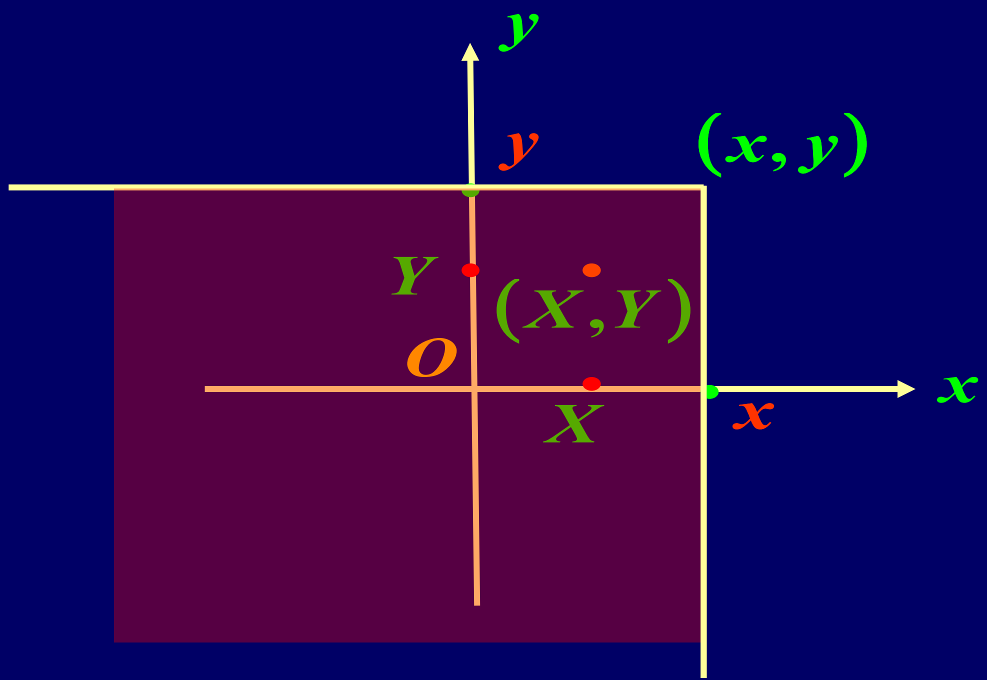


2. $0 \le F(x,y) \le 1$，且

对任意固定的 $y \in R$，$F(-\infty, y) = 0$，

对任意固定的 $x \in R$，$F(x, -\infty) = 0$，

$F(-\infty, -\infty) = 0$ ， $F(+\infty, +\infty) = 1$.



3. $F(x,y) = F(x+0, y)$，$F(x,y) = F(x, y+0)$.

二、二维离散型随机变量

定义2 如果二维随机变量 (X,Y) 全部可能取到的不相同的值是有限对或可列无限多对，则称 (X,Y) 是离散型随机变量.

设二维离散型随机变量 (X,Y) 可能取的值是 (x_i, y_j), $i,j=1,2,\cdots$,记

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},$$
$$i,j=1,2,\cdots$$

称之为二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律，或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

一维随机变量 X

离散型

X 的分布律

$$P(X=x_k)=p_k,$$
$$k=1,2,\ldots$$

$$\begin{cases} p_k \geq 0, \quad k=1,2,\ldots \\ \sum_k p_k = 1 \end{cases}$$

二维离散型随机变量(X,Y)的分布律具有性质

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0, i, j = 1,2,\cdots \\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{cases}$$

也可用表格来表示随机变量X和Y的联合分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

例1 把一枚均匀硬币抛掷三次，设X为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X,Y) 的分布律 .

解 (X, Y) 可取值 $(0,3)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,3)$

$$P\{X=0, Y=3\}=(1/2)^3=1/8$$

$$P\{X=1, Y=1\}=\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3/8$$

$$P\{X=2, Y=1\}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=3/8$$

$$P\{X=3, Y=0\}=(1/2)^3=1/8.$$

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

三、二维连续型随机变量

定义3　对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$,如果存在非负的函数 $f(x,y)$, 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量, 函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

一维随机变量X

连续型

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$-\infty<x<+\infty$$

X的概率密度函数

$f(x)\quad x\in R$

$$f(x)\ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度具有性质

$$f(x,y)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

$$\left(\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy=1\right)$$

（X,Y）的概率密度的性质：

1. $f(x,y) \geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$; $\left(\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,dxdy = 1\right)$;

3. 设 G 是 xOy 平面上的区域，则有

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy;$$

4. 在 $f(x,y)$的连续点， $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

例2　设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

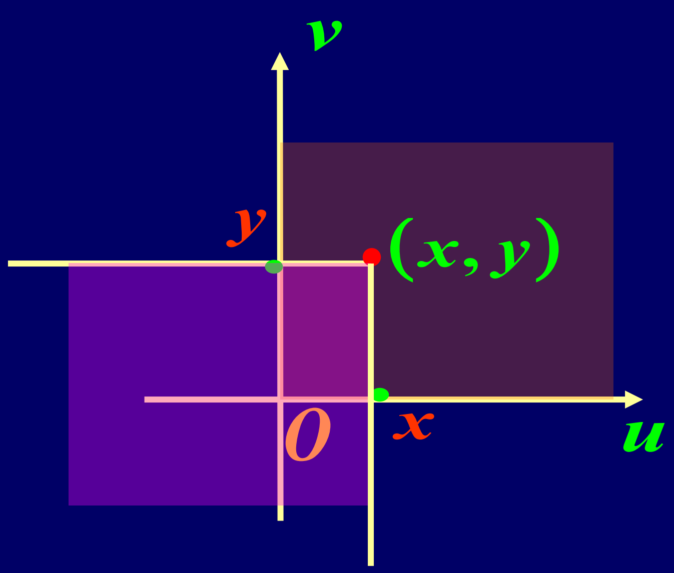
(1) 求分布函数$F(x,y)$;

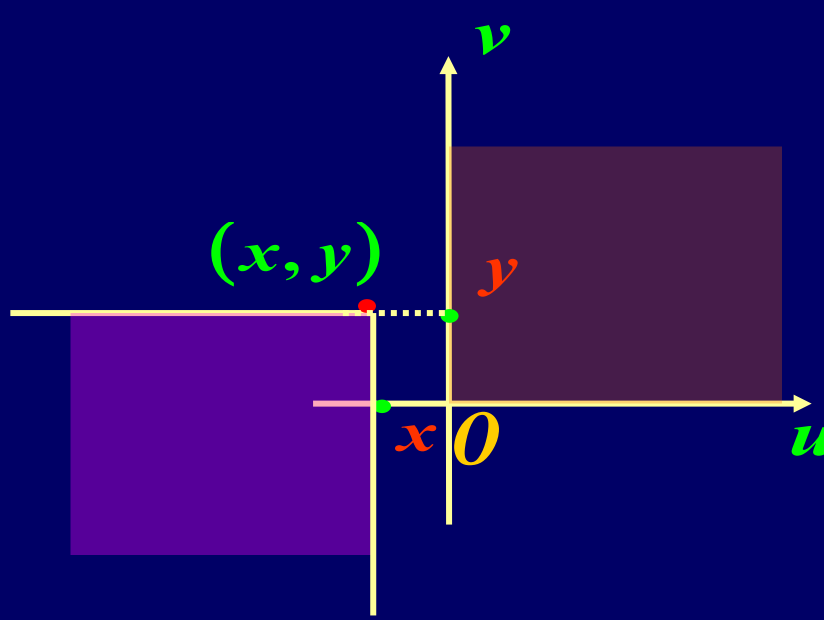
(2) 求概率 $P\{Y\le X\}$.

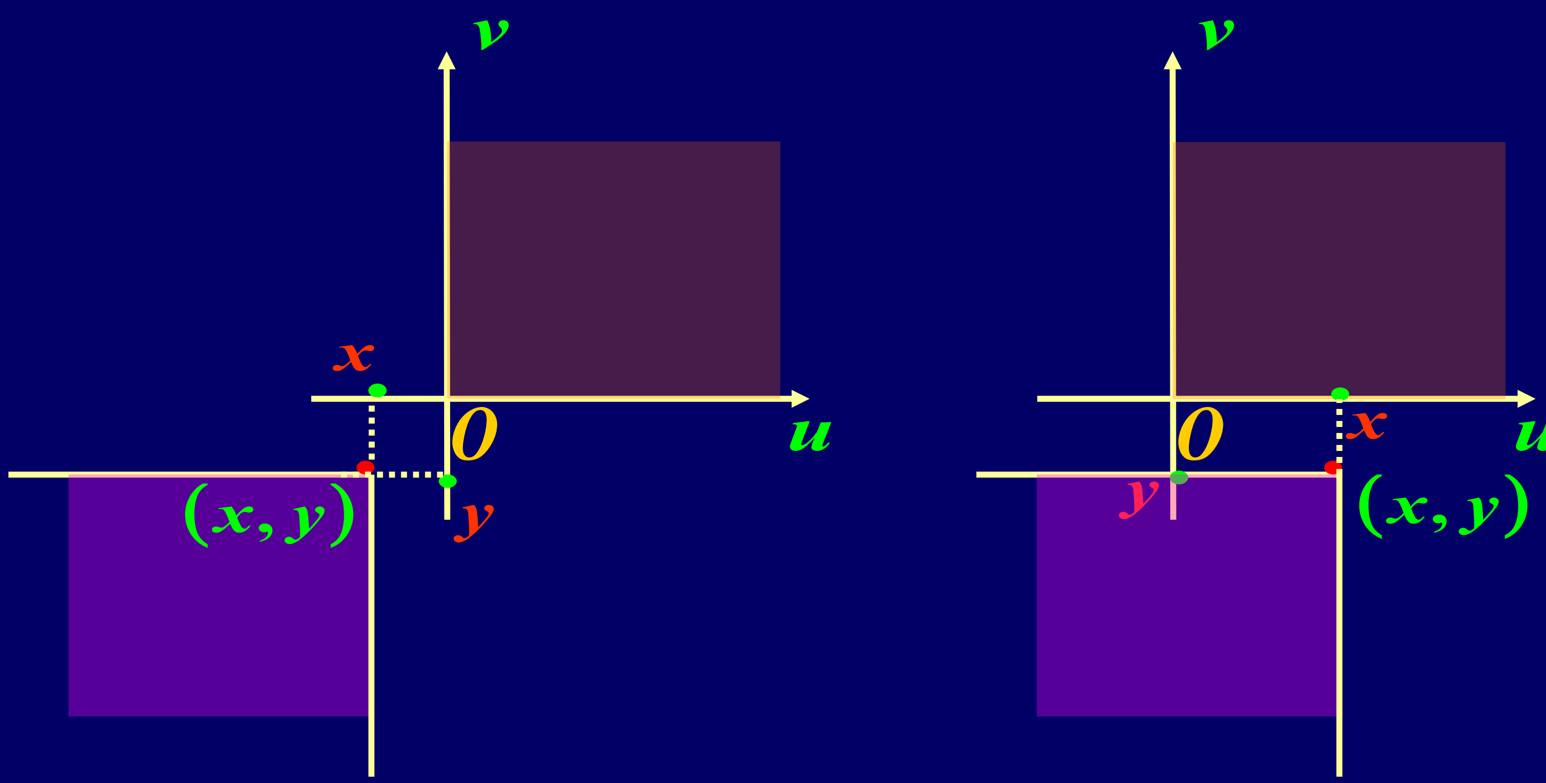
解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$

积分区域 $D=\{(u,v)\mid -\infty<u\le x,-\infty<v\le y\}$

$f(u,v)\neq 0$ 区域 $\{(u,v)\mid u>0,v>0\}$






v
x
O
u
y
(x, y)
v
O
x
u
y
(x, y)

当 $x>0, y>0$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

$$=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2e^{-(2u+v)}\,du\,dv = 2\int_{0}^{y} e^{-v}dv\cdot\int_{0}^{x} e^{-2u}du$$

$$=\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-y}\right)$$

当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv = 0$$

故 $$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-y}\right), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) $P\{Y \le X\}$

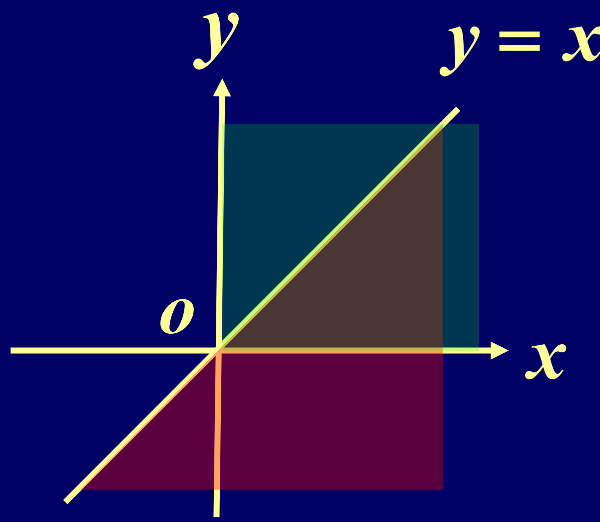
$$= \iint\limits_{y \le x} f(x,y)\,dxdy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} dx \int_0^{x} e^{-(2x+y)}\,dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx \int_0^{x} e^{-y}\,dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \left(e^{-2x} - e^{-3x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}.$$



四、课堂练习

设随机变量(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k;

(2) 求概率 $P\{X<1, Y<3\}$.

解 (1) $1 = \iint\limits_{R^2} f(x, y)\, dxdy$

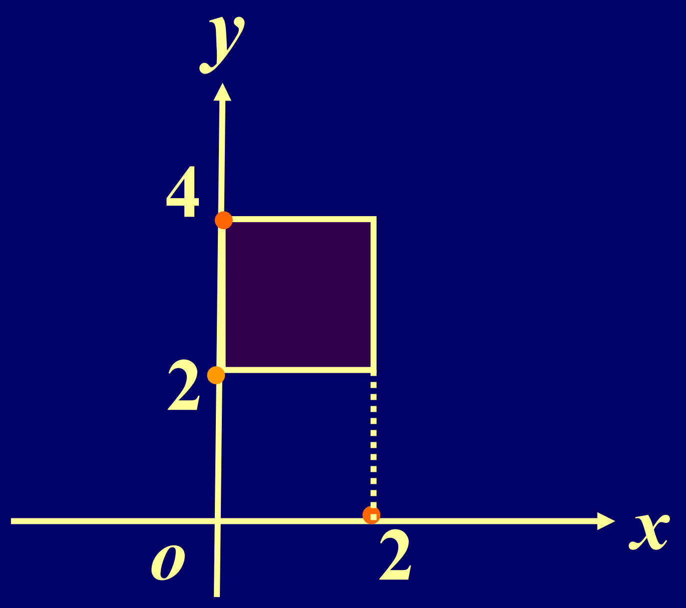
$$= k\int_0^2 dx \int_2^4 (6 - x - y)\, dy$$

$$= k\int_0^2 dx \int_2^4 (6 - x - y)\, dy$$

$$= 2k\int_0^2 (3 - x)\, dx$$

$$= 8k$$

故 $k = 1/8.$



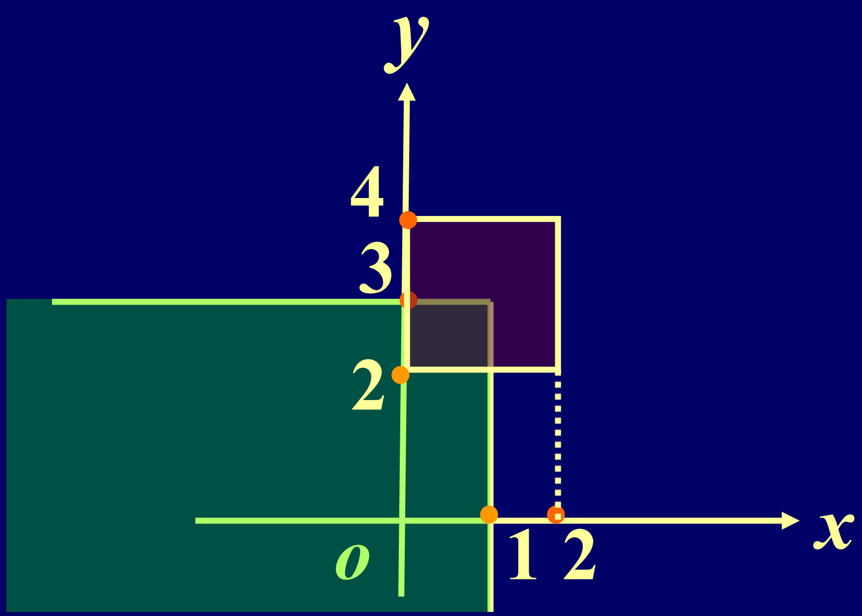
(2) $P\{X<1,Y<3\}$

$$=\int_{-\infty}^{1}dx\int_{-\infty}^{3}f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{1}dx\int_{2}^{3}(6-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{1}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}$$



五、小结

在这一节中，我们与一维情形相对照，介绍了二维随机变量的分布函数 ,离散型随机变量的分布律以及连续型随机变量的概率密度函数.

六、布置作业

《概率统计》标准化作业 (三)