《概率论与数理统计》强化训练题三

一、是非题(填“对”或“错”)

1. 对于事件 A 和 B，总有 $A-B=A\overline{B}$. (　　)

2. 如果随机变量 X 和 Y 具有相同的分布，那么 $P\{X=Y\}>0$. (　　)

3. 如果 X 和 Y 均服从正态分布，则 (X,Y) 服从二维正态分布. (　　)

4. 如果 X 与 Y 相互独立，那么 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=\dfrac{E(X)}{E(Y)}$. (　　)

5. 设 $\hat{\theta}_n$ 是由大小为 n 的样本构成的估计量，并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n)=\theta$，那么 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计. (　　)

二、填空题

1. 一袋中有 5 个小球，它们是 2 个白球和 3 个黑球. 从中随机取两个球，则取到一黑一白的概率为________；如果已知其中一个是白球，则另一个是黑球的概率为________.

2. 若 $X\sim\pi(1)$，则 $P\{X\geq 1\}=$________；$P\{X=1\mid X\geq 1\}=$________.

3. 设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，如果 X 与 Y 相互独立，那么 $F(x,+\infty)F(+\infty,y)=$________；$F_{X|Y}(x\mid y)=$________.

4. 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots$ 相互独立，且对于每个 X_i，$E(X_i)=\mu_i$，$D(X_i)=\sigma^2$. 则 $E\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)^2\right]=$_______；任意 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\right|<\varepsilon\right\}=$_______.

5. 已知 X,Y 独立同分布于 $N(0,\sigma^2)$，那么 $\left(\dfrac{X}{Y}\right)^2\sim$_______；为使 $C(X+Y)^2$ 服从 χ^2 分布，则 $C=$________.

三、单项选择题

1. 对于 $P(A),P(B)>0$，如果 $P(A\mid B)=P(B\mid A)$，则(　　)

A. $A=B$　　　　B. $P(A)=P(B)$

C. A, B 相互独立　　　　　　D. A, B 互不相容

2. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 则 $P\{X \geq a\} = ($　　$)$

A. $1-F(a)$　　B. $F(a)-F(a^-)$　　C. $1-F(a^-)$　　D. $F(a)-F(-\infty)$

3. X, Y 相互独立, 且均服从 $b(1, p)$, 则 $P\{\min(X,Y) < \max(X,Y)\} = ($　　$)$

A. p^2　　B. 1　　C. $2p(1-p)$　　D. $(1-p)^2$

4. 如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且均服从指数分布, 则下列哪个随机变量仍然服从指数分布(　　)

A. $\sum_{i=1}^{n} X_i$　　B. $\prod_{i=1}^{n} X_i$　　C. $\max_{1 \leq i \leq n}\{X_i\}$　　D. $\min_{1 \leq i \leq n}\{X_i\}$

5. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为取自均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 的一组样本, 则下列哪个估计量不是 θ 的好估计(　　)

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　B. $\max_{1<i<n}\{X_i\}$　　C. $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　D. $\frac{n+1}{n}\max_{1<i<n}\{X_i\}$

四、有一批数量非常大的产品, 次品率为 p. 现从中取出 n 件样品进行检验, 如果全部合格, 则这批产品被接收. 但检验过程可能会出差错: 一件次品被误认为是合格品的概率为 a, 而一件合格品被误认为是次品的概率为 b. 假设各件样品的检验是独立的.

1. 求这批产品被接收的概率;

2. 如果这批产品经检验被接收, 求这 n 件样品确实都是合格品的概率.

五、设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x, \ -\infty < x < +\infty.$$

试计算:

1. 常数 A 和 B;

2. X 的概率密度函数 $f(x)$;

3. $P\{|X| \leq 1\}$;

4. $Y = X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

六、已知(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.2	0.3

求X与Y的相关系数.

七、本题是一保险公司关于投保人发生人身重大伤害事故的概率研究以及公司盈利的计算.

1. 该公司连续记录了n年的数据，其中第i年有N_i人投保，其中有k_i人发生了重大人身伤害事故. 求投保人每年发生重大人身伤害事故的概率p的极大似然估计(假设每个投保人每年是否发生重大人身伤害事故是相互独立的，并具有相同的概率);

2. 如果该保险公司已知了从事某种危险职业人员每年发生重大人身伤害事故的概率为$p = 0.005$. 现有5000名此种职业的人员在年初参保，每人交付800元的保费，如果投保人在该年发生重大人身伤害事故，可以获赔10万元. 利用中心极限定理计算保险公司该年在此项业务中盈利超过1百万元的概率.

八、设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 现从该总体中随机抽取一组容量为16的样本，算得样本均值$\overline{x} = 5.3328$，样本标准差$s = 0.9226$.

1. 求总体方差σ^2的置信度为0.95的区间估计;

2. 在显著性水平$\alpha = 0.05$下，能否认为该总体的期望超过5？