《概率论与数理统计》强化训练题一解答

一、是非题

1. 错;　　2. 错;　　3. 对;　　4. 对;　　5. 对

二、填空题

6. $\dfrac{1}{2}$;　　7. $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$; $\dfrac{5^n-4^n}{6^n}$;　　8. $\dfrac{1}{6}$;　　9. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

三、单项选择题

10. C;　　11. A;　　12. C;　　13. D;　　14. B

四、计算题

15. 设对某种疾病作诊断时, 患有该种疾病而能诊断出患该疾病的概率为 0.95, 而不患该疾病却被误诊为患该疾病的概率为 0.05. 这类疾病在整个地区的发生概率为 0.005. 计算

(1) 随机检查一个该地区的人被诊断为患有该疾病的概率;

(2) 被诊断为患有该疾病而确实是患病的概率.

解: 以 A 记事件"一个人被诊断为患有该疾病"; 以 B 记事件"一个人患有该疾病".

那么已知条件为: $P(A\mid B)=0.95$; $P(A\mid\overline{B})=0.05$; $P(B)=0.005$.

(1) $P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})=0.0545$;

(2) $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)}=0.0872$.

16. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ A(x+1)^2, & -1<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

(1) 确定参数A的值;

(2) 写出 X 的分布函数;

(3) 计算概率$P(X>1)$.

解: (1) $\int_{-1}^{1} A(x+1)^2 \mathrm{d}x = 1$, 则$A=\dfrac{3}{8}$.

(2) $$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ \dfrac{3}{8}\int_{-1}^{x}(t+1)^2\mathrm{d}t, & -1<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ \dfrac{1}{8}(x+1)^3, & -1<x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

(3) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=0.$

17. 设简单样本$(X_1,\cdots,X_n)$来自母体X服从正态分布$N(\mu,1)$, 其中μ为未知参数. 为得到μ的一个置信度为0.99而长度不超过0.2的置信区间, 则样本容量至少要为多大?(附注: $u_{0.01}=2.33$, $u_{0.005}=2.58$)

解: $1-\alpha=0.99$, 因此$\alpha=0.01$.

置信区间为$\left(\bar{X}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$,

因此$\dfrac{2}{\sqrt{n}}u_{0.005}\le 0.2$, 或$n\ge\left(\dfrac{2u_{0.005}}{0.2}\right)^2\approx 666$.

18. 两名枪手轮流射击一目标, 射中目标则停止射击. 设第一位枪手的命中率为p_1, 而第二位的命中率为p_2. 停止射击时所进行的射击总次数记为Z, 此时第一位和第二位枪手的射击次数分别记为X和Y次.

(1) 试以所定义的随机变量表示事件: “第一位枪手击中目标”; “第二位枪手击中目标”;

(2) 求 Z , X , Y 各自的分布律;

(3) 要使目标是由第二位枪手射中的概率较大, 则命中率 p_1 和 p_2 应该满足什么条件?

(4) 计算射击停止时第一位枪手的射击次数 X 的数学期望 EX .

解: (1) 事件“第一位枪手击中目标” $=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z=2k-1\}$;

事件“第二位枪手击中目标” $=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z=2k\}$.

(2) 说明: 对 $k=1,2\cdots$, $Z=2k-1$: 第一位枪手在第 $2k-1$ 次射中目标, 前 $2k-2$ 次射击中均未射中; $Z=2k$: 第二位枪手在第 $2k$ 次射中目标, 前 $2k-1$ 次两位枪手均未射中目标.

Z 的分布律:

$$P(Z=2k-1)=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}p_1;$$

$$P(Z=2k)=(1-p_1)^{k}(1-p_2)^{k-1}p_2.$$

X 的分布律:

对 $k\ge 1$, $P(X=k)=P(X=k,Z=2k-1)+P(X=k,Z=2k)$

$$=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}p_1+(1-p_1)^{k}(1-p_2)^{k-1}p_2$$

$$=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}(p_1+p_2-p_1p_2).$$

Y 的分布律:

对 $k\ge 1$, $P(Y=k)=P(Y=k,Z=2k+1)+P(Y=k,Z=2k)$

$$=(1-p_1)^{k}(1-p_2)^{k}p_1+(1-p_1)^{k}(1-p_2)^{k-1}p_2$$

$$=(1-p_1)^{k}(1-p_2)^{k-1}(p_1+p_2-p_1p_2).$$

而 $P(Y=0)=p_1$.

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}p_1 \le \sum_{k=1}^{\infty}(1-p_1)^{k}(1-p_2)^{k-1}p_2$,

即

$$p_2 > \frac{p_1}{1-p_1},\quad p_1 < \frac{1}{2}.$$

(4) $EX = \sum_{k=1}^{\infty} k[(1-p_1)(1-p_2)]^{k-1}(p_1+p_2-p_1p_2) = \dfrac{1}{p_1+p_2-p_1p_2}$.

五、证明题

19. 设随机变量 X 和 Y 独立，且服从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布. 证明 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z\le 1, \\ 2-z, & 1<z\le 2, \\ 0, & z\le 0 \text{ or } z>2. \end{cases}$$

证： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$,

当 $z\le 0$ 或 $z>2$ 时，$f_Y(z-x)=0,\ \forall 0\le x\le 1$，故 $f_Z(z)=0$；

当 $0<z\le 1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z \mathrm{d}x=z$;

当 $1<z\le 2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{z-1}^1 \mathrm{d}x=2-z$.

20. 设母体 X 服从参数为 (N,p) 的二项分布，其中 N,p 均是未知参数. 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自母体的简单随机样本，证明 N,p 的矩估计分别为 $\hat{N}=\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X}-B_2}$ 和 $\hat{p}=1-\dfrac{B_2}{\overline{X}}$，这里 $B_2=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2-\overline{X}^2$ 是二阶样本中心矩.

证： $EX=Np$，$DX=Np(1-p)$，因此

$$\hat{N}\hat{p} = \overline{X}\ ,\ \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i^2 = (\hat{N}\hat{p})^2 + \hat{N}\hat{p}(1-\hat{p})\ ,$$

由此$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i^2 = \overline{X}^2 + \overline{X}(1-\hat{p})$，解得

$$\hat{p} = 1 - \frac{B_2}{\overline{X}}，从而\ \hat{N} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{X} - B_2}.$$