

# 离散数学复习题

命题逻辑和一阶逻辑部分

# 1、将下列语句用谓词公式形式化：

- 1) 没有不犯错误的人。
- 2) 凡是实数，或者大于零，或者等于零，或者小于零。
- 3) 实数的加运算满足交换律。
- 4) 每人都有自己喜欢的水果，有人喜欢所有的水果。
- 5) 一个数是偶数当且仅当它可被2整除。
- 6) 并不是火车都比汽车跑得快，有的汽车比有的火车跑得快。

2、给定解释如下：

$$(1) D=\{2, 3\} \quad (2) a=2 \quad (3) f(2)=3, f(3)=2$$

$$(4) F(x): F(2)=0, F(3)=1 ; \quad G(x): G(2)=1, G(3)=0$$

$$G(x,y): G(i,j)=1, i,j=2,3$$

$$L(x,y): L(2,2)=L(3,3)=1,$$

$$L(2,3)=L(3,2)=0$$

求下列各式的值，并说明理由(即给出求解过程)：

$$(1). \forall x (F(x) \wedge G(x))$$

$$(2). \exists x (F(x) \wedge G(x, f(x)))$$

$$(3). \forall x \exists y L(x,y)$$

3、求下列公式的主范式

$$(1) (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$$

$$(2) q \wedge (p \vee \neg q)$$

$$(3) p \vee (\neg p \rightarrow (q \vee (\neg q \rightarrow r)))$$

$$(4) (p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$$

$$(5) p \rightarrow (p \wedge (q \rightarrow r))$$

4、证明  $\{\neg, \vee\}$  是最小联结词组。

5、根据真值表求公式M，要求联结词个数最少。

<b>P</b>	<b>Q</b>	<b>R</b>	<b>M</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
<b>F</b>	<b>T</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>	<b>F</b>
<b>T</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>T</b>	<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
<b>T</b>	<b>T</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>

6、求以下两式的前束范式：

$$(1) \quad \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

$$(2) \quad \forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,z))$$

$$(3) \quad \{(\forall x)[P(x) \rightarrow (R(x) \vee (\forall z)Q(x))]\} \rightarrow \\ (\exists x)R(x)\} \rightarrow (\exists z)S(x, z)$$

## 7、用三种不同方法证明 下列逻辑等价式：

$$(1) A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$(2) A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$(3) A \rightarrow (A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \rightarrow B$$

$$(4) A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

## 8、用推理理论证明：

(1) 用直接证法证明：

$$\neg P \vee Q, R \vee \neg Q, R \rightarrow S \Rightarrow \neg S \rightarrow \neg P$$

(2) 用反证法证明：

$$S \rightarrow \neg Q, S \vee R, \neg R, \neg P \vee Q \Rightarrow P$$

(3) 用CP规则证明：

$$A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \Rightarrow A \rightarrow C$$



## 8、试完成如下推理（续）：

- (4) 如果今天下大雨，则马路上不好行走；  
如果马路难走，则我不去逛书店；  
如果我不去逛书店，则在家学习。  
所以，如果今天下大雨，则我在家学习。

## 8、试完成如下推理（续）：

（5）四位体操运动员A、B、C、D应邀参加表演赛。

今知，如果A参加，则若B参加，C一定参加；

如果D参加，则A一定参加，B也一定参加。

可以推得：如果D参加，则C一定参加。

9、设S、T、M为任意集合，判断下列命题正误：（正√，误×）

- (1)  $\emptyset$ 是 $P(\emptyset)$ 的子集. ( )
- (2) 如果 $S \cup T = S \cup M$ ，则 $T=M$ . ( )
- (3) 如果 $S-T = \emptyset$ ，则 $S=T$ . ( )
- (4)  $S \oplus S = S$ . ( )
- (5) 非空集合A上的恒等关系既是A上的等价关系也是A上的偏序关系。 ( )
- (6) 在命题逻辑中，任何命题公式的主合取范式都是存在的，并且是唯一的。 ( )

# 答案（1）

1、略

2、（1） 0 （2） 1 （3） 1

3、（1）  $\sum (1, 2, 3)$  ,  $\prod (0)$  。

（2）  $\sum (3)$  ,  $\prod (0, 1, 2)$  。

（3）  $\sum (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  ,  $\prod (0)$  。

4、略

5、主范式的方式求解，最后化简为：

$$\begin{aligned} S &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\ &\Leftrightarrow ((\neg P \vee P) \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge R) \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge R \Leftrightarrow (Q \rightarrow P) \wedge R \end{aligned}$$

## 答案 (2)

6、 (1)  $\exists x \exists y (A(x) \rightarrow B(y))$

(2)  $\forall x \forall y \forall z ((P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow Q(x,y,a))$

(3)  $\forall x \forall y \exists z ((P(x) \rightarrow (R(x) \vee Q(x))) \rightarrow R(y) \rightarrow S(a, z))$

7、真值表法、等值演算法、主范式法

8、(1)(2)(3)略

(4) (5) 详见下页

9、 (1)  $\checkmark$  (2)  $\times$  (3)  $\times$  (4)  $\times$  (5)  $\checkmark$  (6)  $\checkmark$

## 答案（3）

8、（4）证明：设P：今天下大雨； Q：马路难走； R：我去逛书店； S：我在家学习。

前提：  $P \rightarrow Q$ ,  $Q \rightarrow \neg R$ ,  $\neg R \rightarrow S$

结论：  $P \rightarrow S$

证明过程略

## 答案（4）

8、（5）设A、B、C、D为相应的运动员去参加比赛。

前提： $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ,  $D \rightarrow (A \wedge B)$

结论： $D \rightarrow C$

证明： $D \rightarrow (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg D \vee (A \wedge B)$   
 $\Leftrightarrow (\neg D \vee A) \wedge (\neg D \vee B)$   
 $\Leftrightarrow (D \rightarrow A) \wedge (D \rightarrow B)$

即证

前提： $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ,  $D \rightarrow A$ ,  $D \rightarrow B$

结论： $D \rightarrow C$

## 答案 (5)

8、 (5) 前提:  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ,  $D \rightarrow A$ ,  $D \rightarrow B$   
结论:  $D \rightarrow C$

证明:

(1) $D \rightarrow A$	P
(2) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	P
(3) $D \rightarrow (B \rightarrow C)$	$T_{(1)(2)}I$
(4) $D \rightarrow B$	P
(5) $B \rightarrow (D \rightarrow C)$	$T_{(3)}E$
(6) $D \rightarrow C$	$T_{(4)(5)}I$