上海大学 2012～2013 学年冬季学期试卷（A）

成绩	

课程名： 概率论与数理统计 B 课程号：__________ 学分： 5

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号______________ 应试人所在院系_____________

题号	一	二	三	四	五
得分	10	15	10	60	5

一、是非题（本题共 2 分×5=10 分）

1、对任意两个事件 A 与 B，都有 $A\cup B-B=A$。 （ 错 ）

2、任意多个互不相容事件并的概率一定等于这些事件概率之和。 （ 错 ）

3、如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自于服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的总体 X 的简单样本，那么样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是独立的。 （ 对 ）

4、如果总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，在样本容量一定条件下，要提高参数 μ 估计的置信度，那么就一定会降低估计的精度，即置信区间长度会增大。 （ 对 ）

5、如果总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，那么统计量 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是参数 σ^2 的无偏估计。 （ 对 ）

二、填空题（每格 3 分，共计 15 分）

6、设事件 A，B 和 C 的概率为 $P((A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，而 $P(AC)=P(BC)=0$，$P(AB)=\frac{1}{8}$，那么三个事件都不发生的概率为 $\underline{P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)=1-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}}$。

7、如果一个罐中有红球 4 个，黑球 6 个，从中任意选取两球。如果发现取到的两个球中有一个是红球，那么另一个也是红球的概率为 $\underline{P(A_2\mid A_1\cup A_2)=\frac{P(A_2)}{P(A_1)+P(A_2)}=\frac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}=\frac{1}{5}}$。

8、如果随机变量 X 服从区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布，那么在 $c\neq 0$ 时，随机变量 $Y=cX+d$ 的均值为 $\underline{d}$，方差为 $\underline{\frac{1}{3}c^2}$。

9、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从相同指数分布，密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$，那么 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $\underline{f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0, & z<0\end{cases}}$。

草 稿 纸

三、选择题（本题共 2 分×5=10 分）

10、对任意两个独立且发生概率均大于零的事件 A 和 B，不正确的是__D__。

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 一定独立； **(B)** $\overline{A}$ 与 B 一定独立；

(C) A 与 $\overline{B}$ 一定独立； **(D)** A 与 B 一定互不相容。

11、随机变量 X 的概率密度和分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$，则一定有__B__。

(A) $0 \le f(x) \le 1$； **(B)** $0 \le F(x) \le 1$； **(C)** $P(X=x)=f(x)$； **(D)** $P(X=x)=F(x)$。

12、随机变量 $X \sim F(n,m)$，即服从 F 分布。对 $0<\alpha<1$，分位数一定成立关系__C__。

(A) $F_\alpha(m,n)=F_{1-\alpha}(n,m)$； **(B)** $F_\alpha(m,n)=1-F_{1-\alpha}(n,m)$；

(C) $F_\alpha(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$； **(D)** $F_\alpha(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$。

13、对任意事件 A 和 B，若 $P(B)>0$，则一定有__A__。

(A) $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$； **(B)** $P(A|B)+P(A|\overline{B})=1$；

(C) $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$； **(D)** 以上结论都不一定成立。

14、设随机变量 X 与 Y 独立，且都服从参数为 p 的 $0-1$ 分布。则一定成立的是__B__。

(A) $P(X=Y)=p^2$； **(B)** $P(X=Y)=p^2+(1-p)^2$；

(C) $P(X=Y)=\dfrac{1}{2}$； **(D)** $P(X=Y)=1$。

四、计算题:（共 60 分）

15、（本题共 10 分）设有两罐，其中第一个罐中黑球 6 个，白球 4 个；第二个罐中白球和黑球各 5 个。现在随机选取一罐，并从该罐中随机抽取一球。计算，

1）抽到的球是黑球的概率；

2）如果发现抽到的是白球，该球是从第一个罐中抽取的概率是多大？

解. 以 A 记事件“抽到的是黑球”；以 B 记事件“选取的是第一个罐”。(+1 分)

那么已知条件为：$P(A|B)=0.6$；$P(A|\overline{B})=0.5$；$P(B)=0.5$。(+3 分)

1） $P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})=0.55$ （2+1 分）

2） $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}|B)P(B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{0.4\times0.5}{0.45}=\dfrac{4}{9}$ （2+1 分）

草　稿　纸

16、（本题共 15 分）设随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	-1	1	2
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

1）计算$Z_1 = X+Y$的分布律；2）计算$Z_2=\max\{X,Y\}$的分布律；
3）计算协方差$\mathrm{cov}(X,Y)$；4）计算相关系数ρ_{XY}。

解 1）

Z_1	-2	0	1	3	4
	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

（+5 分）

2）

Z_2	-1	1	2
	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

（+3 分）

3）$EX=-\frac{6}{10}+\frac{8}{10}=\frac{1}{5}$，$EY=-\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，

$EXY=\frac{1}{10}-\frac{2}{10}-\frac{6}{10}-\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{4}{10}=-\frac{5}{10}$，

$\mathrm{cov}(X,Y)=-\frac{5}{10}-\frac{4}{25}=-\frac{25+8}{50}=-\frac{33}{50}$（1+1+2 分）

4），$EX^2=\frac{6}{10}+\frac{16}{10}=\frac{11}{5}$，$EY^2=\frac{6}{10}+\frac{16}{10}=\frac{11}{5}$，$DX=\frac{11}{5}-\frac{1}{25}=\frac{54}{25}$，$DY=\frac{11}{5}-\frac{16}{25}=\frac{39}{25}$，

$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=-\frac{33}{50}\times\sqrt{\frac{25\times25}{54\times39}}=-\frac{11}{6}\sqrt{\frac{1}{26}}\approx-0.36$（+3 分）

17、（本题 10 分）为检验某种药物是否会改变人的血压，挑选了 10 名试验者，测量了他们服药前后的血压，得到下面的数据。

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
服药前	134	122	132	130	128	140	118	127	125	142
服药后	140	130	135	126	134	138	124	126	132	144

假设服药前后的血压差服从正态分布。如果显著性水平取为0.05，从这些数据中是否能得出该药物会改变血压的结论？
（附注：$u_{0.05}=1.65$，$u_{0.025}=1.96$，
$t_{0.05}(10)=1.81$，$t_{0.05}(9)=1.83$，$t_{0.025}(10)=2.23$，$t_{0.025}(9)=2.26$）

解 以X记服药前后的血压差，则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

检验问题：原假设H_0：$\mu=\mu_0=0$；备选假设$\mu\neq\mu_0=0$。（+2 分）。

由于方差未知，用$t-$检验法，接受域为$\{|t|=|\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s_0}|\leq t_{\alpha/2}(n-1)\}$，（+3 分）

这里，$n=10$。计算样本均值和方差的观测值：$\overline{x}=3.1$，$s_0^2=17.6556$，从而

$t=2.3228>t_{0.025}(9)=2.26$不在接受域内。（+3 分）。

因此拒绝原假设，即应该认为血压有变化。（+2 分）

草 稿 纸

18、（本题 15 分）设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & 0\le x\le 2, \max(0,x-1)\le y\le \min(1,x) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

（1） 确定常数c的值；（2）计算两个随机变量的边际密度函数；并判断这两个随机变量是否独立；（3）计算它们的协方差。

解 （1）$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x cdydx+\int_1^2\int_{x-1}^1 cdydx=c$，（直接图示后用均匀分布，通过面积计算也可以）（+2 分）

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} 0, & x\notin(0,2) \\ \int_0^x dy=x, & 0\le x\le 1 \\ \int_{x-1}^1 dy=2-x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$，（+2 分）

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} 0, & y\notin(0,1) \\ \int_y^{y+1} dy=1, & 0\le y\le 1 \end{cases}$，（+2 分），不独立。（+1 分）。

（3） $EX=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\frac{1}{3}+4-1-\frac{1}{3}(8-1)=1$，（+2 分）；

$EY=\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}$，（+1 分）；

$EXY=\int_0^1\int_0^x xydydx+\int_1^2\int_{x-1}^1 xydydx=\frac{7}{12}$，（或 $EXY=\int_0^1\int_y^{1+y} xydxdy=\frac{7}{12}$）（+3 分）

因此，$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{12}$。（+2 分）

19、（本题 10 分）设总体X服从的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta \\ 0, & x<\theta \end{cases}。$$

分别给出参数θ的矩估计和最大似然估计。

解 矩估计：$EX=\int_\theta^\infty xe^{-(x-\theta)}dx=\int_0^\infty (x+\theta)e^{-x}dx=1+\theta$（3 分），所以，

$\bar{X}=1+\hat{\theta}$，或$\hat{\theta}=\bar{X}-1$。（+2 分）

最大似然估计：似然函数 $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\begin{cases} e^{n\theta-\sum_{i=1}^n x_i}, & \min\{x_1,\ldots,x_n\}\ge\theta \\ 0, & \min\{x_1,\ldots,x_n\}<\theta \end{cases}$，（2+1 分）

该函数在$\min\{x_1,\ldots,x_n\}$处取到最大值，因此最大似然估计为$\hat{\theta}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$。（+2 分）

草　稿　纸

五、证明题（共 5 分）

20、（本题 5 分）由总体 X 的样本 $X_1,\ldots,X_n$ 可定义验分布：

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<X_{(1)}\\ \dfrac{k}{n}, & X_{(k)}\le x<X_{(k+1)}\\ 1, & x\ge X_{(n)}\end{cases}。$$

证明：对任意给定的 x 和 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\{|F_n(x)-F(x)|>\varepsilon\}=0，$$

这里 $F(x)$ 是总体的分布函数。

证 定义 $Y_k=\begin{cases}1, & X_k\le x\\ 0, & X_k>x\end{cases}$，则该序列独立同分布的随机变量序列，分布律为

Y_k	0	1
p	$1-F(x)$	$F(x)$

则 $F_n(x)=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}Y_k}{n}$。（+2 分）

因此 $E[F_n(x)]=F(x)$， $D[F_n(x)]=\dfrac{1}{n}F(x)(1-F(x))$，由切比雪夫不等式：

$\lim_{n\to\infty}P\{|F_n(x)-F(x)|>\varepsilon\}\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{F(x)(1-F(x))}{n\varepsilon^2}=0$。（2+1 分）

（或直接引用伯努利大数定理）。

草 稿 纸