《概率论与数理统计》强化训练题二解答

一、是非题(填“对”或“错”)

1. 对;　2. 对;　3. 错;　4. 错;　5. 对

二、填空题

1. $\{TT, TH, HT, HH\}$;　$\dfrac{3}{4}$;

2. 0.2;　$\dfrac{1}{3}$;

3. 1;　$\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k^2$;　0;

5. $\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$;　0.

三、单项选择题

1. B;　2. D;　3. B;　4. C;　5. B.

四、玻璃杯成箱出售，每箱10只．已知各箱中残次品个数为$0, 1, 2$的概率分别为0.8, 0.15, 0.05. 现有一顾客欲购一箱玻璃杯，售货员任意取一箱，顾客开箱随机地检验一只，若不是残次品，顾客则买下该箱玻璃杯．试求:

1. 顾客买下该箱玻璃杯的概率;
2. 在顾客买下的一箱玻璃杯中，确实无残次品的概率.

解: 1. 记B_k为箱中有k个残次品$(k = 0, 1, 2, 3)$,　A为“顾客买下该箱玻璃杯”.

$$P(A) = \sum_{k=0}^{3} P(B_k)P(A \mid B_k) = 0.8\times 1 + 0.15\times 0.9 + 0.05\times 0.8 = 0.975;$$

2. $P(B_0 \mid A) = \dfrac{P(B_0)P(A \mid B_0)}{P(A)} = \dfrac{0.8}{0.975} = 0.8205.$

五、设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = c\mathrm{e}^{-|x|},\ -\infty < x < +\infty.$$

求:

1. 常数 c;
2. X 的分布函数;
3. X 的值落在 $(-1, 1)$ 内的概率;
4. 求 $Y = X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解：1. $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = c\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = 2c\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2c,$

$c = \dfrac{1}{2};$

2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u.$

当 $x < 0$ 时，$F(x) = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x};$

当 $x \geq 0$ 时，$F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^{x} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x};$

3. $P\{-1 < X < 1\} = F(1) - F(-1) = 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} = 1 - \mathrm{e}^{-1};$

4. $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}.$

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$

$$= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = 2F(\sqrt{y}) - 1,$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}};$$

当 $y \leq 0$ 时，$f_Y(y) = 0.$

六、设 A, B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$， $P(B|A)=\frac{1}{2}$， $P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

1. 求二维随机变量 (X,Y) 的分布律;

2. 计算 X 与 Y 的协方差.

解： 1. $P\{X=1\}=P(A)=\frac{1}{4}$,

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{8},$$

$$P\{Y=1\}=P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{4},$$

X \ Y	0	1	$p_{i.}$
-1	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$p_{.j}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

2. $E(X)=\frac{1}{4}$, $E(Y)=\frac{1}{4}$, $E(XY)=\frac{1}{8}$,

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{16}.$$

七、 设总体 X 具有概率密度

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\beta(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\beta > 0$ 为未知参数. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为一组简单随机样本, 试求:

1. β 的矩估计量;

2. β 的最大似然估计量.

解: 1. $E(X) = \int_0^1 \beta x(1-x)^{\beta-1} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta+1}$,

$$\beta = \frac{1-E(X)}{E(X)},$$

β 的矩估计量 $\hat{\beta}_M = \dfrac{1-\overline{X}}{\overline{X}}$;

2. 记 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本观测值,

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \beta) = \beta^n \left(\prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \right)^{\beta-1},$$

$$l(\beta) = n \ln \beta + (\beta-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i),$$

$$l'(\beta) = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) = 0,$$

β 的最大似然估计值 $\hat{\beta}_L = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}$.

β 的最大似然估计量 $\hat{\beta}_L = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)}$.

八、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 现从该总体抽取一组容量为 40 的样本, 算得样本均值 $\overline{x} = 4.3082$, 样本标准差 $s = 1.8537$.

1. 求 σ 的置信度为 95% 的区间估计;

2. 在 $\alpha = 0.05$ 水平下, 能否认为总体均值 μ 仍然没有超过 4 ?

解: 1. σ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right].$

查表得 $\chi^2_{0.05/2}(40-1)=58.1201,\ \chi^2_{1-0.05/2}(40-1)=23.6543,$

于是置信区间为 $\left[\sqrt{\dfrac{39\times 1.8537^2}{58.1201}},\ \sqrt{\dfrac{39\times 1.8537^2}{23.6543}}\right],$

即 $[1.5185,\ 2.3802].$

2. 建立假设检验问题:

$$H_0:\ \mu\le 4,\quad H_1:\ \mu>4.$$

利用 t 检验法, 对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，查表得拒绝域为

$$W=\{t\,|\,t>t_\alpha(n-1)\}=\{t\,|\,t>t_{0.05}(39)\}=\{t\,|\,t>1.6849\}.$$

而

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\frac{4.3082-4}{1.8537}\cdot\sqrt{40}=1.0515<1.6849,$$

所以接受 H_0，即总体均值 μ 仍然没有超过 4 .