

第六节 独立性

- 两个事件的独立性
- 多个事件的独立性
- 独立性的概念在计算概率中的应用
- 小结 布置作业

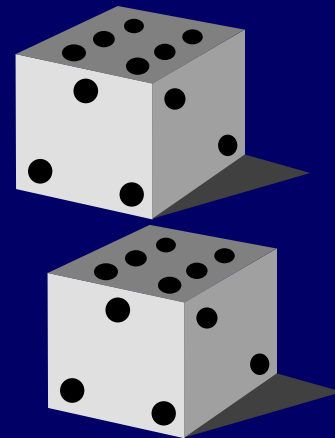
一、两事件的独立性

先看一个例子：

将一颗均匀骰子连掷两次，

设

$A=\{\text{第二次掷出6点}\},$
 $B=\{\text{第一次掷出6点}\},$



显然

$$P(A|B)=P(A)$$

这就是说,已知事件 B 发生,并不影响事件 A 发生的概率,这时称事件 A 、 B 独立.

由乘法公式知, 当事件 A 、 B 独立时, 有

$$P(AB)=P(A) P(B)$$

$$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

用 $P(AB)=P(A) P(B)$ 刻画独立性, 比用

$$P(A|B) = P(A)$$

或
$$P(B|A) = P(B)$$

更好, 它不受 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$ 的制约.



两事件独立的定义

若两事件 A 、 B 满足

$$P(AB) = P(A) P(B) \quad (1)$$

则称 A 、 B 相互独立，简称 A 、 B 独立.

定理1 事件 A 、 B 独立的充要条件为

$$P(A | B) = P(A), P(B) > 0$$

或

$$P(B | A) = P(B), P(A) > 0$$



证 先证必要性. 设事件 A 、 B 独立, 由独立定义知

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

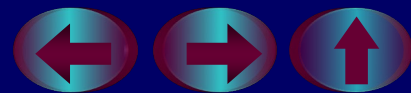
所以, 当 $P(B) > 0$ 时, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$

或者, 当 $P(A) > 0$ 时, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$

再证充分性: 设 $P(A|B) = P(A)$ 成立, 则有

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

由定义可知, 事件 A 、 B 相互独立.

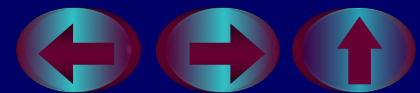


例 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，
记 $A=\{\text{抽到}K\}$ ， $B=\{\text{抽到的牌是黑色的}\}$
问事件 A 、 B 是否独立？

解 由于 $P(A)=4/52=1/13$ ， $P(B)=26/52=1/2$ ，
 $P(AB)=2/52=1/26$ 。

可见， $P(AB)=P(A)P(B)$

故 事件 A 、 B 独立。



前面我们是根据两事件独立的定义作出结论的，也可以通过计算条件概率去做：

从一副不含大小王的扑克牌中任取一张,记 $A=\{\text{抽到}K\}$, $B=\{\text{抽到的牌是黑色的}\}$, 则

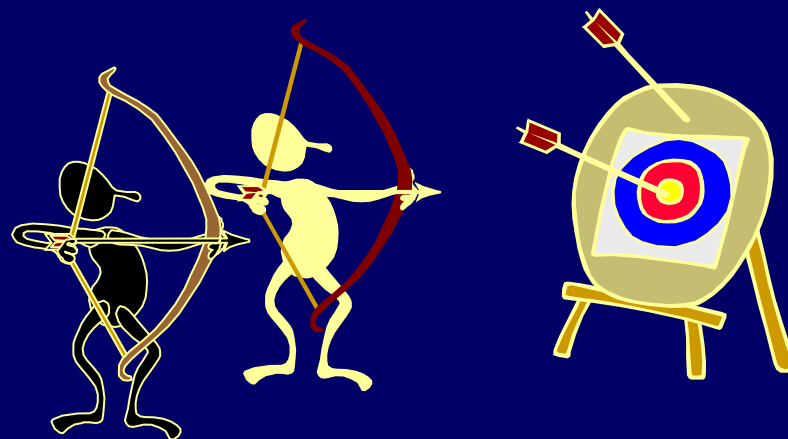
$$P(A)=1/13, P(A|B)=2/26=1/13$$

可见 $P(A)=P(A|B)$, 即事件 A 、 B 独立.

在实际应用中, 往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.



在实际应用中,往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.



例如

甲、乙两人向同一目标射击,记 $A=\{\text{甲命中}\}$,
 $B=\{\text{乙命中}\}$, A 与 B 是否独立?

由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率,
故认为 A 、 B 独立.

(即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率)

又如： 一批产品共 n 件，从中抽取2件，设
 $A_i = \{\text{第}i\text{件是合格品}\} \quad i=1,2$

若抽取是有放回的，则 A_1 与 A_2 独立.

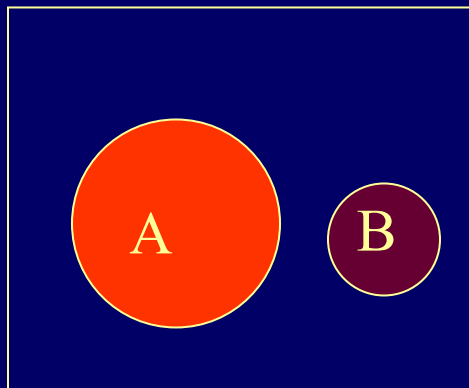
因为第二次抽取的结果
 不受第一次抽取的影响.

若抽取是无放回的，则 A_1 与 A_2 不独立.

因为第二次抽取的结果受到第一次
 抽取的影响.



请问：如图的两个事件是独立的吗？



我们来计算： $P(AB)=0$

而 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$

即 $P(AB) \neq P(A)P(B)$

故 $A、B$ 不独立

即 若 $A、B$ 互斥，且 $P(A)>0, P(B)>0$, 则 A 与 B 不独立.

反之，若 A 与 B 独立，且 $P(A)>0, P(B)>0$, 则 $A、B$ 不互斥.

前面我们看到独立与互斥的区别和联系，再请你做个小练习。

设 A 、 B 为互斥事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$ ，下面四个结论中，正确的是：

- | | |
|---------------|---------------------|
| 1. $P(B A)>0$ | 2. $P(A B)=P(A)$ |
| 3. $P(A B)=0$ | 4. $P(AB)=P(A)P(B)$ |

设 A 、 B 为独立事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$ ，下面四个结论中，正确的是：

- | | |
|---------------|---------------------|
| 1. $P(B A)>0$ | 2. $P(A B)=P(A)$ |
| 3. $P(A B)=0$ | 4. $P(AB)=P(A)P(B)$ |

定理 2 若两事件 A 、 B 独立, 则 \bar{A} 与 B , A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 \bar{B} 也相互独立.

证明 仅证 A 与 \bar{B} 独立

概率的性质

$$P(\bar{A}B) = P(A - AB)$$

$$= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$$

故 A 与 \bar{B} 独立

A 、 B 独立



二、多个事件的独立性

定义 设 A 、 B 、 C 为三事件, 如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$$

则称三事件 A 、 B 、 C 为两两独立的事件.

当事件 A 、 B 、 C 两两独立时, 等式

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

不一定成立.



例如 $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$,

$C = \{\omega_1, \omega_4\}$, 则 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 并且,

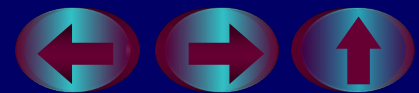
$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B),$$

$$P(AC) = \frac{1}{4} = P(A)P(C),$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = P(B)P(C).$$

即事件 A 、 B 、 C 两两独立.

但是 $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C).$



对于三个事件 A 、 B 、 C ，若

$$\left\{ \begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{array} \right.$$

四个等式同时成立,则称事件 A 、 B 、 C 相互独立.

此定义可以推广到任意有限多个事件的情形：



定义 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个事件, 如果对于任意的 k ($1 < k \leq n$), 和任意的 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ 有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为相互独立的事件.

请注意多个事件两两独立与相互独立的区别与联系

对 n ($n > 2$) 个事件

相互独立



两两独立



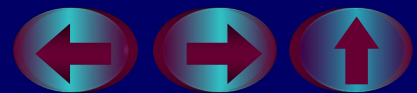
三、独立性的概念在计算概率中的应用

对独立事件，许多概率计算可得到简化

例1 有甲、乙两批种子，出苗率分别为0.8和0.9，
现从这两批种子中各任取一粒，求

- (1) 两粒种子都出苗的概率；
- (2) 恰好有一粒种子出苗的概率；
- (3) 至少有一粒种子出苗的概率。

解 设 $A = \{\text{由甲批中取出的一粒种子出苗}\}$
 $B = \{\text{由乙批中取出的一粒种子出苗}\}$



则事件 A 、 B 相互独立, 且事件"两粒种子都出苗"表示为: AB , "恰好有一粒出苗"表示为: $\bar{A}B + A\bar{B}$, "至少有一粒种子出苗"表示为: $A \cup B$.

$$(1) P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72;$$

$$(2) P(\bar{A}B \cup A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) \\ = P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B}) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1 = 0.26.$$

$$(3) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\ = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ = 0.8 + 0.9 - 0.8 \cdot 0.9 = 0.98.$$

$$\text{或者 } P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) \\ = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0.98.$$



$$\begin{aligned}\text{或者 } P(A \cup B) &= P(AB + \bar{A}B + A\bar{B}) \\ &= P(AB) + P(\bar{A}B + A\bar{B}) = 0.72 + 0.26 = 0.98.\end{aligned}$$

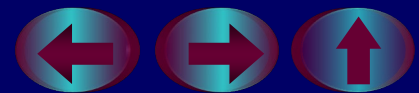
例2 设有两门高射炮,每一门击中飞机的概率都是 0.6,求下列事件的概率:

(1)同时发射一发炮弹而击中飞机的概率是多少?

(2)若有一架敌机入侵领空,欲以 99% 以上的概率击中它,问至少需要多少门高射炮?

解 设 $A_k = \{\text{第 } k \text{ 门高射炮发射一发炮弹而击中飞机}\}$, $k = 1, 2$, 则 A_k 之间相互独立, 且 $P(A_k) = 0.6$, 于是

$$(1) P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2)$$



$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - 0.4^2 = 0.84.$$

(2) 设至少需要 n 门高射炮, 由题知

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n}) \\ &= 1 - 0.4^n > 0.99 \end{aligned}$$

即 $(0.4)^n < 0.01,$

解之得, $n > \frac{\ln 0.01}{\ln 0.4} \approx 5.026.$



例3 要验收一批(100件)乐器.验收方案如下:自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的),如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收.设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的.试问这批乐器被接收的概率是多少?

解 设 $H_i = \{ \text{随机地取出3件, 恰有 } i \text{ 件音色不纯} \}$,
 $i = 0, 1, 2, 3$.

$A = \{ \text{这批乐器被接收} \}$. 则

$$P(A) = P(A | H_0)P(H_0) + P(A | H_1)P(H_1) \\ + P(A | H_2)P(H_2) + P(A | H_3)P(H_3)$$

$$\text{其中 } P(H_0) = \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}, \quad P(H_1) = \frac{C_{96}^2 C_4^1}{C_{100}^3},$$

$$P(H_2) = \frac{C_{96}^1 C_4^2}{C_{100}^3}, \quad P(H_3) = \frac{C_4^3}{C_{100}^3},$$



$$P(A | H_0) = (0.99)^3, \quad P(A | H_1) = (0.99)^2(0.05),$$

$$P(A | H_2) = (0.99)(0.05)^2, \quad P(A | H_3) = (0.05)^3.$$

所以这批乐器被接收的概率为：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | H_0)P(H_0) + P(A | H_1)P(H_1) \\ &\quad + P(A | H_2)P(H_2) + P(A | H_3)P(H_3) \\ &= \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3} \cdot (0.99)^3 + \frac{C_{96}^2 C_4^1}{C_{100}^3} \cdot (0.99)^2(0.05) \\ &\quad + \frac{C_{96}^1 C_4^2}{C_{100}^3} \cdot (0.99)(0.05)^2 + \frac{C_4^3}{C_{100}^3} (0.05)^3 = 0.8629. \end{aligned}$$



例4 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $1/5$ ， $1/3$ ， $1/4$ ，问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

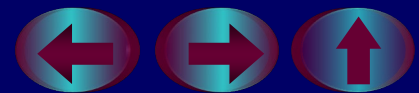
解 将三人编号为1，2，3，

记 $A_i = \{\text{第}i\text{个人破译出密码}\} \quad i=1, 2, 3$

所求为 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

已知， $P(A_1)=1/5$ ， $P(A_2)=1/3$ ， $P(A_3)=1/4$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$





1

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)]$$

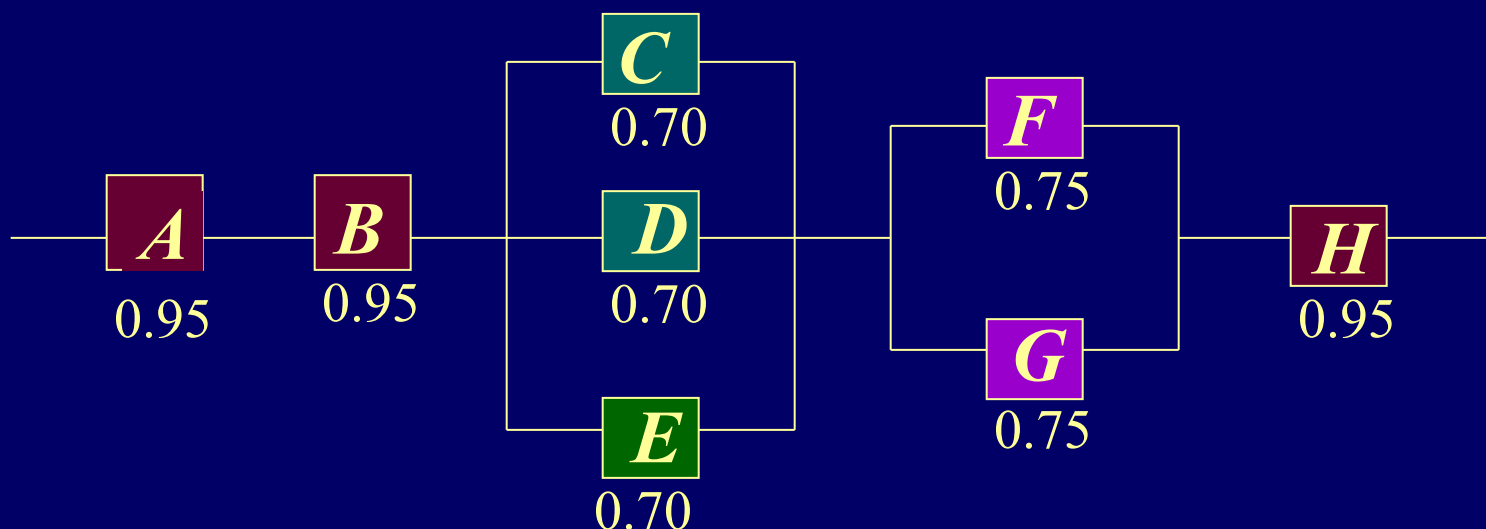
$$= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0.6$$

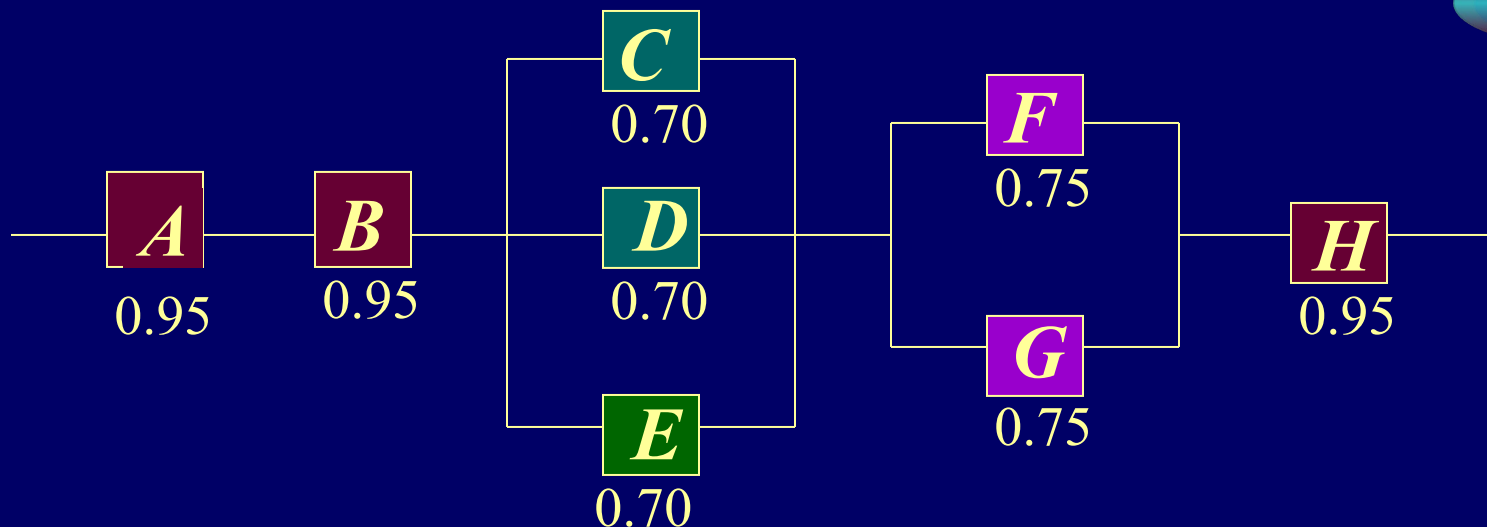
2



3

例5 下面是一个串并联电路示意图. A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 都是电路中的元件. 它们下方的数是它们各自正常工作的概率. 求电路正常工作的概率.





解 将电路正常工作记为 W ，由于各元件独立工作，有

$$P(W) = P(A)P(B)P(C \cup D \cup E)P(F \cup G)P(H)$$

其中 $P(C \cup D \cup E) = 1 - P(\bar{C})P(\bar{D})P(\bar{E}) = 0.973$

$$P(F \cup G) = 1 - P(\bar{F})P(\bar{G}) = 0.9735$$

代入得

$$P(W) \approx 0.782$$



四、小结

这一讲，我们介绍了事件独立性的概念。不难发现，当事件相互独立时，乘法公式变得十分简单，因而也就特别重要和有用。如果事件是独立的，则许多概率的计算就可大为简化。



五、 布置作业

习题1-5 (p28) : 5、 9、 13

