上海大学 2013～2014 学年冬季学期试卷（A 卷）

成绩	

课程名：概率论与数理统计（B）课程号：________ 学分：5

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ________ 应试人学号 ________ 应试人所在院系 ________

题号	一	二	三	四	五
得分	10	30	10	42	8

一、是非题 (2 分×5=10 分)

1、对任意两个事件 A 和 B，都有结论 $(A\cup B)-B=A$。 （非）

2、对任意两个事件 A 和 B，一定有 $P(A|B)+P(A|\bar{B})=1$。 （非）

3、若二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布，且 $E(XY)=EXEY$，则 X 与 Y 独立。 （是）

4、若总体 X 服从 $[0,b]$ 上的均匀分布，其中 b 是未知参数，$X_1,\ldots,X_n$ 为其简单样本，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-EX$ 是一个统计量。 （非）

5、样本容量给定，则假设检验时不能同时减小犯第一类和第二类错误的概率。 （是）

二、填空题 (3 分×10=30 分)

6、设 $P(A)=0.1$，$P(A\cup B)=0.3$，且 A 与 B 互不相容，则 $P(B)=\underline{P(A\cup B)-P(A)=0.2}$。

7、甲乙两人同时向目标独立射击，各自的命中率分别为 0.7 和 0.8，则两人至少有一人击中目标的概率为 $\underline{1.5-0.56=0.94}$。

8、连续掷均匀骰子 6 次，则至少出现两次“6”点的概率为 $\underline{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6-\left(\frac{5}{6}\right)^5=0.263}$。

9、一袋中装有编号为 1 到 5 的 5 只球，一次随机抽取三球，记 X 为所取球的最大编号，则 $EX=\underline{4.5}$。

10、罐中有红球 6 只，黑球 4 只，从中不放回抽取两球。则第二次抽到红球的概率为：$\underline{\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=0.6}$。

11、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} a\cos x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}) \\ 0, & x\notin(0,\frac{\pi}{2}) \end{cases}$，则 $a=\underline{1}$。

12、设随机变量 $X\sim B(3,0.4)$，$Y\sim B(2,0.4)$，且独立，则 $P(X+Y=2)=\underline{C_5^2 0.4^2(1-0.4)^3=0.3456}$。

13、设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{c}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $EX=\underline{1}$。

14、如果总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 都是未知参数，总体的样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}$ 和 S^2，样本容量为 n，则参数 μ 的双侧置信区间为 $\underline{(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})}$，设置信度为 $1-\alpha$。

15、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 都是未知参数，总体的样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}$ 和 S^2，样本容量为 n，则假设检验问题

原假设 H_0：$\sigma^2\geq\sigma_0^2$；备选假设 H_1：$\sigma^2<\sigma_0^2$

的显著性水平为 α 的拒绝域为 $\underline{\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}}$。

三、选择题 （共 2 分×5=10 分）

16、设事件 A 与 B 互不相容，那么 <u>(B)</u> 一定成立。

（A） $P(\overline{AB})=0$；（B） $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$；

（C） $P(A)+P(B)=1$；（D） $P(AB)=P(A)P(B)$。

17、设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 互不相关，那么条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 <u>(A)</u>。

（A） $f_X(x)$；（B） $f_Y(y)$；

（C） $f_X(x)f_Y(y)$；（D） $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$。

18、设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单样本，其中 μ 已知，而 σ^2 未知，则下面不是统计量的是 <u>(B)</u>。

（A） $\max\{X_1,\ldots,X_n\}$；（B） $\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$；

（C） $\min\{X_1,\ldots,X_n\}$；（D） $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu$。

19、如果两个独立的随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，那么 $X=\min\{X_1,X_2\}$ 的分布函数是 <u>(D)</u>。

（A） $F_1(x)F_2(x)$；（B） $(1-F_1(x))(1-F_1(x))$；

（C） $1-F_1(x)F_2(x)$；（D） $1-(1-F_1(x))(1-F_2(x))$。

20、在假设检验时，样本容量给定，显著性水平为 α。如果犯第二类错误的概率为 β，则一定有 <u>(D)</u>。

（A） $\alpha+\beta=1$；（B） $\alpha+\beta>1$；

（C） $\alpha+\beta<1$；（D）以上结论都不一定成立。

四、计算题（共 42 分）

21、（本题 10 分）有三只盒子，第一个盒子中有 2 个黑球和 4 个白球，第二个盒子中有 4 个黑球和 2 个白球，第三个盒子中有黑球和白球各 3 个。现在随机任选一个盒子，并从中任取一球。

（1）（+7 分）计算取到白球的概率；

（2）（+3 分）如果已知取到的是白球，计算该球是从第一个盒子中取出的概率。

解（1）记 A_i 为事件：“选取的是第 i 个盒子”，$1\le i\le 3$。记 B 为事件：“取到白球”。则

$P(A_i)=\dfrac{1}{3}$；（+1 分），$P(B|A_1)=\dfrac{4}{6}$，$P(B|A_2)=\dfrac{2}{6}$，$P(B|A_3)=\dfrac{3}{6}$（1+1+1 分）。所以

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\dfrac{1}{2}$（2+1 分）

（2） $P(A_1|B)=\dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{9}$。（2+1 分）

22、（本题 10 分）已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=ae^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

（1）（+2 分）确定常数 a；

（2）（+4 分）计算分布函数 $F(x)$；

（3）（+4 分）计算数学期望 EX 和方差 DX。

解 （1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2a\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2a$，得 $a=\dfrac{1}{2}$。（1+1 分）

（2） $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-|t|}dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{t}dt, & x\le 0\\ \int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-t}dt, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x\le 0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, & x>0\end{cases}$。（2+2 分）

（3） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0$（+2 分）；$DX=EX^2-(EX)^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}dx=4$。（+2 分）

23、（本题 **12** 分）设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{9}$

（1）（+2 分）确定常数a；

（2）（+6 分）计算X与Y的边缘分布律，并判断这两个随机变量是否独立；

（3）（+4 分）计算$Z=X+Y$的分布律。

解（1）$a=1-(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9})=1-\frac{3+2+1+6+2}{18}=\frac{4}{18}$；（+2 分）

（2）X的边际分布

X	1	2
	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$

（+2 分）

Y的边际分布

Y	1	2	3
	$\frac{9}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{3}{18}$

（+2 分）

经验证，$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$，即X与Y独立。（+2 分）

（3）$Z=X+Y$的分布律

Z	2	3	4	5
	$\frac{3}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$

（1+1+1+1 分）

24、（本题 **10** 分）从某校一个班级的体检记录中随机抽取 **25** 名男生的身高数据，测得平均身高为 **170** 厘米，标准差为 **12** 厘米。如果假设该班级男生的身高X服从正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中，μ和σ^2均为未知参数。试求总体均值和标准差的置信度为 **0.95** 的置信区间。

（附分位数：$u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.65$；

$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，

$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，

$\chi^2_{0.975}(24)=12.401$，$\chi^2_{0.975}(25)=13.120$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$，$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$）

解 由于总体的方差未知，所以，均值的置信区间为

$$(\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$，（+3）

代入计算得置信区间：$(165.06,174.94)$。（+2 分）

由于均值未知，标准差的置信区间为

$$(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}})$$，（+3 分）

代入计算得置信区间：$(9.37,16.69)$。（+2 分）

五、证明题（共 8 分）

25、设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases},$$

其中 $0<\theta<1$ 是未知参数。如果 $X_1,\ldots,X_n$ 是一个简单样本，

（1）（+3 分）证明：参数 θ 的矩估计为 $\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$；

（2）（+5 分）证明：参数 θ 的最大似然估计为 $\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

证（1）由 $EX=\int_1^{\infty}\theta x^{-\theta}dx=-\dfrac{\theta}{1-\theta}=\bar{X}$；（+2 分）

因此 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$。（+1 分）

（2）似然函数：$L(\theta;X_1,\ldots,X_n)=\theta^n\prod\limits_{i=1}^{n}X_i^{-(\theta+1)}$，（+2 分）

因此，$0=\dfrac{\partial}{\partial\theta}L(\theta;X_1,\ldots,X_n)=\dfrac{n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$，（+2 分）解得：

此时 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$。（+1 分）