# 2017 ~ 2018 学年冬季学期概率论与数理统计 A 试卷(A 卷)答案

## 一. 是非题: (每小题 2 分, 5 题共 10 分; 正确的填“对”, 错误的填“错”)

1. 对事件 $A$ 与 $B$, 一定成立等式 $(A\cup B)-B=A$. (错)

2. 对事件 $A$ 和 $B$, 若 $P(A)+P(B)>1$, 则这两个事件一定不是互不相容的. (对)

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 不独立. (错)

4. 若事件 $A$ 的概率 $P(A)=0$, 则该事件一定不发生. (错)

5. 设总体 $X$ 的期望 $\mu=E(X)$ 存在, 但未知, 那么 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为参数 $\mu$ 的相合估计量. (对)

## 二. 填空题: (每空格 3 分, 5 空格共 15 分)

6. 已知事件 $A$ 和 $B$ 的概率分别为 $P(A)=0.7$ 和 $P(B)=0.5$, 且 $P(B-A)=0.15$, 那么, $P(B\,|\,A)=$ __0.5__.

7. 设随机变量 $X$ 服从区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布, 随机变量 $Y=X^2$, 则它们的协方差系数 $\operatorname{cov}(X,Y)=$ __0__; 事件 $\left\{Y\le\dfrac{1}{2}\right\}$ 的概率 $P\left\{Y\le\dfrac{1}{2}\right\}=$ __$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$__.

8. 甲乙两人独立抛掷一枚均匀硬币各两次, 则甲抛出的正面次数不少于乙的概率为 __$\dfrac{11}{16}$__.

9. 如果 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自总体 $X\sim N(0,2^2)$ 的简单随机样本, 若 $Y=c[(X_1+X_2)^2+(X_1-X_2)^2]\sim\chi^2(2)$, 则常数 $c=$ __$\dfrac{1}{8}$__.

## 三. 选择题: (每小题 2 分, 5 题共 10 分)

10. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$ 是随机变量 $X$ 的概率密度, 则区间 $[a,b]$ 必须是 ( B ).

A. $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$　　B. $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　　C. $[0,\pi]$　　D. $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

11. 设随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f_X(x)$，令 $Y=3X$，则 $Y$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 为( D ).

A. $3f_X(y)$　　B. $\frac{1}{3}f_X(y)$　　C. $3f_X\left(\frac{y}{3}\right)$　　D. $\frac{1}{3}f_X\left(\frac{y}{3}\right)$

12. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是简单随机样本, 记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$S_3^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，

$S_4^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$. 那么服从 $t(n-1)$ 分布的是( B ).

A. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}$　　B. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n}}$　　C. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　D. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

13. 设某人罚篮命中率为 $70\%$，独立罚篮 $100$ 次, 那么罚篮命中总次数用中心极限定理估计的近似分布为( C ). (这里, $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数)

A. $\Phi(x)$　　B. $\Phi(x-70)$　　C. $\Phi\left(\frac{x-70}{\sqrt{21}}\right)$　　D. $\Phi\left(\frac{x-70}{21}\right)$

14. 设连续型随机变量 $X$ 的密度函数满足 $f(x)=f(-x)$，则对 $x>0$，分布函数 $F(x)$ 一定有( A ).

A. $F(-x)=\frac{1}{2}-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$　　B. $F(-x)=1-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

C. $F(x)=F(-x)$　　D. $F(-x)=2F(x)-1$

## 四. 计算题: (5 题, 共 58 分)

15. (本题 10 分)已知某地区某种疾病男性的发病率是 $5\%$，而女性的发病率是 $0.25\%$. 如果该地区男女的人数相同. 计算:

(1) (5 分)该地区这种疾病的发病率;

(2) (5 分)如果某人未患这种疾病, 那么这个人是男性的概率为多大?

解: (1)以 $A$ 记事件“抽到的人是男性”; 则 $\bar{A}$ 为事件“抽到的人是女性”.

以 $B$ 记事件“此人患病”.

则该地区这种疾病的发病率

$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid\bar{A})P(\bar{A})$ -----------------(2 分)

$=5\%\times0.5+0.25\%\times0.5$ -----------------(2 分)

$\approx 2.63\%$. -----------------(1 分)

(2) $P(A\,|\,\bar{B})=\dfrac{P(\bar{B}\,|\,A)P(A)}{1-P(B)}$ -----------------(3 分)

$=\dfrac{(1-5\%)\times 0.5}{1-2.63\%}$ -----------------(1 分)

$\approx 48.78\%$. -----------------(1 分)

16. (本题 15 分)设随机变量 $X$ 与 $Y$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax(1-y), & 0<x<1,\quad x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) (3 分)求常数 $A$ 的值;

(2) (5 分)求 $(X,Y)$ 落在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{1}{2}<x<1,\dfrac{1}{2}<y<1\right\}$ 的概率;

(3) (7 分)计算边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断这两个随机变量是否独立.

解: (1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 Ax(1-y)\mathrm{d}y=\dfrac{A}{24}$, -----------------(2 分)

得 $A=24$; -----------------(1 分)

(2) $P\{(X,Y)\in D\}=24\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_x^1 x(1-y)\mathrm{d}y$ -----------------(3 分)

$=12\int_{\frac{1}{2}}^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\dfrac{5}{16}$; -----------------(2 分)

(3) 当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=0$;

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=24\int_x^1 x(1-y)\mathrm{d}y=12x(1-x)^2$,

所以 $f_X(x)=\begin{cases}12x(1-x)^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ -----------------(3 分)

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=0$;

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=24\int_0^y x(1-y)\mathrm{d}x=12(1-y)y^2$,

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}12(1-y)y^2, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ -----------------(3 分)

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以不独立. -----------------(1 分)

17. (本题 12 分)设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(x+1)^2, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases},$$

(1) ( 2 分)确定常数 $A$ 的值;

(2) ( 6 分)写出 $X$ 的分布函数;

(3) ( 4 分)计算概率 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$.

解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 得 $A\int_{-1}^{1}(x+1)^2\mathrm{d}x=1$, -----------------(1 分)

即 $\frac{A}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{1}=1$, 则 $A=\frac{3}{8}$. -----------------(1 分)

$$(2)\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{3}{8}\int_{-1}^{x}(t+1)^2\mathrm{d}t, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{8}(x+1)^3, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$ -----------------(2+2+2 分)

(3) $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=1-P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{37}{64}$. -----------------(4 分)

18. (本题 12 分)机器包装食盐, 包装的重量服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 要求每袋的标准重量为$1\,\mathrm{kg}$, 且方差 $\sigma^2\le 0.02^2$. 每天设备正式运行时, 要做抽样检验, 抽取$9$个样本, 得到的数据如下: 样本均值 $\bar{x}=0.998\,\mathrm{kg}$, 样本标准差 $s=0.032$. 问:

(1) (6 分)在显著性水平$\alpha=0.05$下, 就平均重量而言, 机器设备是否处于正常工作状态?

(2) (6 分)在显著性水平$\alpha=0.05$下, 就方差而言, 机器设备是否处于正常工作状态?

(附注: $t_{0.025}(8)=2.306$, $t_{0.025}(9)=2.262$, $u_{0.025}=1.960$, $u_{0.05}=1.645$, $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$, $\chi^2_{0.975}(8)=2.180$, $\chi^2_{0.975}(9)=2.700$, $\chi^2_{0.05}(8)=15.057$, $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$, $\chi^2_{0.95}(8)=2.733$, $\chi^2_{0.95}(9)=3.325$)

解: (1)原假设 $H_0$: $\mu=1$, 备选假设 $H_1$: $\mu\ne 1$. -----------------(2 分)

利用$T$ 检验, 拒绝域 $t=\left|\frac{\bar{x}-1}{s/\sqrt{9}}\right|>t_{0.025}(8)=2.306$. -----------------(2 分)

而观测值$t=\left|\dfrac{0.998-1}{0.032/3}\right|=0.1875$，不在拒绝域内. 就平均重量而言，机器工作正常.

-----------------(2 分)

(2)原假设$H_0$：$\sigma^2\le 0.02^2$，备选假设$H_1$：$\sigma^2>0.02^2$. -----------------(2 分)

利用$\chi^2$检验，拒绝域$\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{0.05}(8)=15.057$. -----------------(2 分)

而观测值$\chi^2=\dfrac{8\times 0.032^2}{0.02^2}=20.48$，在拒绝域内. 就方差而言，机器工作不正常.

-----------------(2 分)

19. (本题 9 分)设总体$X$的概率密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 其中$\theta$为未知参数，且$\theta>-1$，求$\theta$的矩估计和最大似然估计.

解：矩估计:

因为$E(X)=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$， -----------------(2 分)

因此参数$\theta$的矩估计为$\hat{\theta}=\dfrac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$; -----------------(2 分)

最大似然估计:

似然函数$L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}$， -----------------(2 分)

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

由$\dfrac{\partial\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$， -----------------(2 分)

得参数$\theta$的最大似然估计为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$. -----------------(1 分)

## 五. 证明题: (1 题，共 7 分)

20. (本题 7 分)如果$X$和$Y$是独立同分布的连续型随机变量，证明：$P\{X\le Y\}=\dfrac{1}{2}$. 并举例说明，对离散型随机变量，结论不正确.

证：由于$X$和$Y$独立同分布，且是连续型随机变量，所以

$$P\{X \le Y\} = P\{X \ge Y\} = P\{X > Y\},$$ -----------------(2 分)

则由 $P\{X \le Y\} + P\{X > Y\} = 1$，即得结论. -----------------(2 分)

对离散型随机变量 $X$ 和 $Y$，如 $X$ 和 $Y$ 独立，且均服从二项分布 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$，此时可计算得：$P\{X \le Y\} = \frac{3}{4}$，所以上述结论不正确. -----------------(3 分)