

《概率统计》习题课 (二)



一. 填空题:

1) 设离散型随机变量 X 分布律为

$$P\{X = k\} = 5A(1/2)^k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

则 $A = \underline{\frac{1}{5}}$

解: 由 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ 即 $\sum_{k=1}^{\infty} [5A(1/2)^k] = 1$

得 $A = \frac{1}{5}$



一. 填空题:

2) 已知随机变量 X 的密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 且 } P\{X > 0.5\} = 5/8, \text{ 则}$$

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{\frac{1}{2}}$$

解: 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 得 $\int_0^1 (ax + b)dx = \frac{a}{2} + b = 1$

$$\text{又 } P\{X > 0.5\} = \int_{0.5}^1 (ax + b)dx = \frac{3a}{8} + \frac{b}{2} = \frac{5}{8},$$

解得: $a = 1, b = \frac{1}{2}$



一. 填空题:

3) 设 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则
 $P\{X < 0\} = \underline{0.2}$

解: 由对称性得 $P\{X < 2\} = 0.5$, $P\{0 < X < 2\} = 0.3$,

$$\text{所以 } P\{X < 0\} = P\{X < 2\} - P\{0 < X < 2\}$$

$$= 0.2$$



二、 选择题:

1) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么当 σ 增大时,

$$P\{|X - \mu| < \sigma\} = \underline{\text{C}}$$

A) 增大; B) 减少;

C) 不变; D) 增减不定。

$$\text{解: 由 } P\{|X - \mu| < \sigma\} = P\left\{\frac{|X - \mu|}{\sigma} < 1\right\}$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= 2\Phi(1) - 1$$



二、 选择题:

2) 设 X 的密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 且 $f(x) = f(-x)$, 那么对任意给定的 a 都有 **B**

A) $f(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$;

B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx$;

C) $F(a) = F(-a)$; D) $F(-a) = 2F(a) - 1$

解: 由对称性得 $F(0) = P\{X \leq 0\} = 0.5$,

$$\begin{aligned}\therefore F(-a) &= P\{X \leq -a\} = \int_{-\infty}^{-a} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$



3) 下列函数中, 可作为某一随机变量的分布函数是 B

A) $F(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ B) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$

C) $F(x) = \begin{cases} 0.5(1 - e^{-x}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

D) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, 其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

解: 由 $F(x)$ 的性质 $0 \leq F(x) \leq 1$ $F(x)$ 不减

$F(-\infty) = 0$ $F(+\infty) = 1$ $F(x)$ 右连续

以及 $f(x) \geq 0$ 得 B 正确



三、解答题

1) 从一批有10个合格品与 3个次品的产品中一件一件地抽取产品，各种产品被抽到的可能性相同，求在二种情况下，直到取出合格品为止，所需抽取次数的分布率。

(1) 放回 (2) 不放回

解：(1) 放回： 设抽取次数为随机变量 X ,

则 X 的所有可能取值为： $X = 1, 2, \dots$

分布律为： $P\{X = k\} = \left(\frac{3}{13}\right)^{k-1} \frac{10}{13} \quad k = 1, 2, \dots$



三、解答题

1) 从一批有10个合格品与 3个次品的产品中一件一件地抽取产品，各种产品被抽到的可能性相同，求在二种情况下，直到取出合格品为止，所需抽取次数的分布率。

(1) 放回 (2) 不放回

解：(2) 不放回： 设抽取次数为随机变量 X ,

则 X 的所有可能取值为 $X = 1, 2, 3, 4$

$$\text{分布律为: } P\{X = 1\} = \frac{10}{13}, \quad P\{X = 2\} = \frac{3}{13} \frac{10}{12},$$

$$P\{X = 3\} = \frac{3}{13} \frac{2}{12} \frac{10}{11}, \quad P\{X = 4\} = \frac{3}{13} \frac{2}{12} \frac{1}{11} \frac{10}{10}$$



三、解答题

2) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = Ae^{-|x|}$ ($-\infty < x < +\infty$), 求(1)系数 A ; (2) $P\{0 \leq X \leq 1\}$; (3) 分布函数 $F(x)$.

解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|} dx$

$$= 2 \int_0^{+\infty} Ae^{-x} dx = 2A = 1$$

得: $A = \frac{1}{2}$

$$(2) P\{0 \leq X \leq 1\} = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

三、解答题

2) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = Ae^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

求: (1) 系数 A ; (2) $P\{0 \leq X \leq 1\}$; (3) 分布函数 $F(x)$.

解: (3) $F(x) = P\{X \leq x\}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^t dt, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^t dt + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} dt, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

三、解答题

3) 对球的直径作测量, 设其值均匀地分布在 $[a, b]$ 内。求体积的密度函数。

解: (3) 直径 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$\text{体积 } Y = \frac{\pi}{6} X^3$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{\pi}{6} X^3 \leq y\right\} = P\left\{X \leq \sqrt[3]{\frac{6y}{\pi}}\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{\frac{6y}{\pi}}} f(x) dx$$



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{\pi}{6}a^3 \\ \int_a^{\sqrt[3]{6y/\pi}} \frac{1}{b-a} dx, & \frac{\pi}{6}a^3 \leq y < \frac{\pi}{6}b^3 \\ 1, & y \geq \frac{\pi}{6}b^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F'_Y(y) &= \begin{cases} \left(\sqrt[3]{6y/\pi}\right)' \frac{1}{b-a}, & \frac{\pi}{6}a^3 < y < \frac{\pi}{6}b^3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi(b-a)} \left(\frac{6y}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^3 < y < \frac{\pi}{6}b^3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$



三、解答题

4) 设在独立重复实验中，每次实验成功概率为0.5，问需要进行多少次实验，才能使至少成功一次的概率不小于0.9

解：(4) 设需要 N 次，由 $X \sim b(N, 0.5)$

$$\begin{aligned} \text{至少成功一次概率: } P\{X \geq 1\} &= 1 - P\{X < 1\} \\ &= 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.5^N \geq 0.9 \end{aligned}$$

得 $N \geq 4$



三、解答题

5) 公共汽车车门的高度是按男子与车门碰头的机会在0.01以下来设计的, 设男子的身高 $X \sim N(168, 7^2)$, 问车门的高度应如何确定?

解: (5) 设门高为 h , 碰头事件为 $\{X > h\}$,

由题意得 $P\{X > h\} < 0.01$, 即 $1 - P\{X \leq h\} < 0.01$,

$$\therefore 1 - \Phi\left\{\frac{h-168}{7}\right\} < 0.01, \quad \therefore \Phi\left\{\frac{h-168}{7}\right\} > 0.99,$$

$$\therefore \frac{h-168}{7} > 2.326, \quad \therefore h > 184.3$$



四、证明题

设随即变量 X 的参数为2的指数分布,
证明: $Y = 1 - e^{-2X}$ 在区间(0,1)上服从均匀分布。

证明: X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{1 - e^{-2X} \leq y\} \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P\left\{X \geq -\frac{\ln(1-y)}{2}\right\}, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_{-\frac{\ln(1-y)}{2}}^{+\infty} 2e^{-2x} dx, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} -\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right)' 2e^{-2\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right)}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$