

第二节 边缘分布

- 边缘分布函数
- 离散型随机变量的边缘分布律
- 连续型随机变量的边缘概率密度
- 课堂练习
- 小结 布置作业

二维联合分布全面地反映了二维随机变量 (X, Y) 的取值及其概率规律. 而单个随机变量 X, Y 也具有自己的概率分布. 那么要问: 二者之间有什么关系呢?

这一节里, 我们就来探求这个问题.

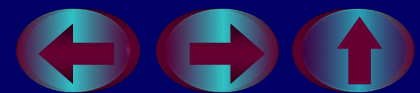


一、边缘分布函数

二维随机变量 (X, Y) 作为一个整体, 具有分布函数 $F(x, y)$, 而 X 和 Y 都是随机变量, 也有各自的分布函数, 分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$, 依次称为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数.

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y)$$



二、离散型随机变量的边缘分布律

一般地, 对离散型 r.v. (X, Y) ,
 X 和 Y 的联合分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \cdots$$

则 (X, Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_i.$$

($i=1, 2, \cdots$)

$$\left(\{X=x_i\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X=x_i, Y=y_j\} \right)$$



(X, Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_{.j} \\ (j = 1, 2, \dots)$$



例1 把一枚均匀硬币抛掷三次，设 X 为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X, Y) 的分布律。

解 (X, Y) 可取值 $(0, 3), (1, 1), (2, 1), (3, 3)$

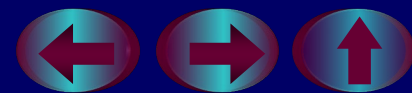
$$P\{X=0, Y=3\} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1/8$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3/8$$

$$P\{X=2, Y=1\} = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 3/8$$

$$P\{X=3, Y=0\} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1/8.$$

$X \backslash Y$	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8



$X \backslash Y$	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

$$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=0, Y=3\}=1/8,$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=1, Y=3\}=3/8,$$

$$P\{X=2\}=P\{X=2, Y=1\}+P\{X=2, Y=3\}=3/8,$$

$$P\{X=3\}=P\{X=3, Y=1\}+P\{X=3, Y=3\}=1/8.$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{k=0}^3 P\{X=k, Y=1\}=3/8+3/8=6/8,$$

$$P\{Y=3\}=\sum_{k=0}^3 P\{X=k, Y=3\}=1/8+1/8=2/8.$$



$X \backslash Y$	1	3	$P\{X = x_i\}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$P\{Y = y_j\}$	6/8	2/8	

我们常将边缘分布律写在联合分布律表格的边缘上，由此得出边缘分布这个名词。



联合分布与边缘分布的关系

$X \backslash Y$	1	3	$P\{X = x_i\}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$P\{Y = y_j\}$	6/8	2/8	

由联合分布可以确定边缘分布;

但由边缘分布一般不能确定联合分布.



三、连续型随机变量的边缘概率密度

对连续型 $r.v (X, Y)$,

X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x, y)$

则 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (-\infty < x < \infty)$$

事实上, $F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$



(X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (-\infty < y < \infty)$$



例2 设 (X,Y) 的概率密度是

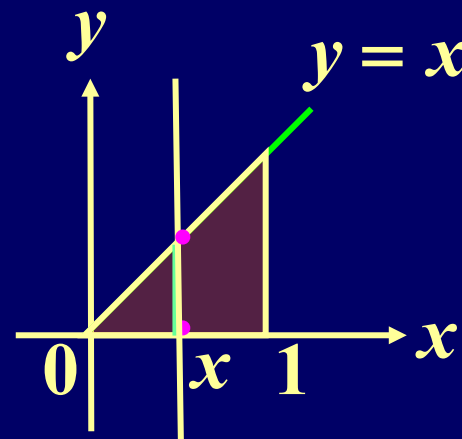
$$f(x,y) = \begin{cases} cy(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c 的值; (2) 两个边缘密度。

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad 1 &= \iint_{R^2} f(x,y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x cy(2-x) dy \\ &= \frac{c}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx \\ &= 5c/24, \end{aligned}$$

故

$$c = 24/5.$$



例2 设 (X, Y) 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} cy(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c 的值; (2) 两个边缘密度

暂时固定

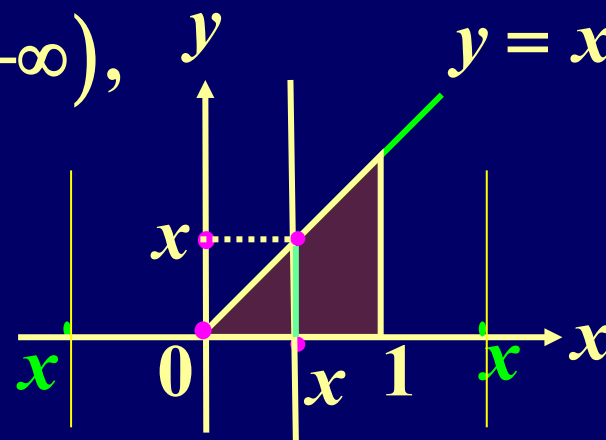
解 (2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

当 $x > 1$ 或 $x < 0$ 时, $\forall y \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(x, y) = 0$, 故 $f_X(x) = 0$.

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy$$

$$+ \int_0^x f(x, y) dy + \int_x^{+\infty} f(x, y) dy.$$



当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

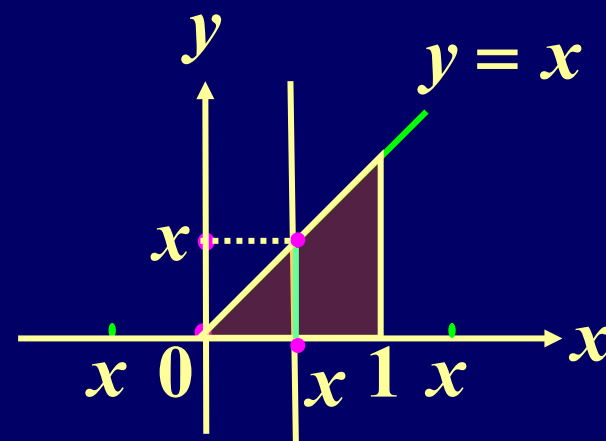
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy + \int_0^x f(x, y) dy + \int_x^{+\infty} f(x, y) dy.$$

$$= \int_0^x \frac{24}{5} y(2-x) dy$$

$$= \frac{12}{5} x^2 (2-x),$$

综上,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{5} x^2 (2-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



注意取值范围



例 2 设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y) = \begin{cases} cy(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

暂时固定

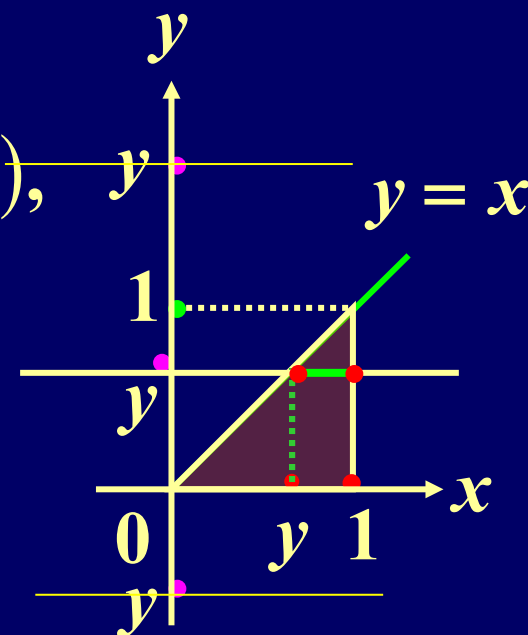
求 (1) c 的值; (2) 两个边缘密度.

解 (2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$

当 $y > 1$ 或 $y < 0$ 时, 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(x,y) = 0$, 故 $f_Y(y) = 0$.

当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^y f(x,y) dx + \int_y^1 f(x,y) dx + \int_1^{+\infty} f(x,y) dx.$$



$$= \int_y^1 \frac{24}{5} y(2-x) dx$$

$$= \frac{24}{5} y \left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2} \right),$$

综上,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{24}{5} y \left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2} \right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意取值范围



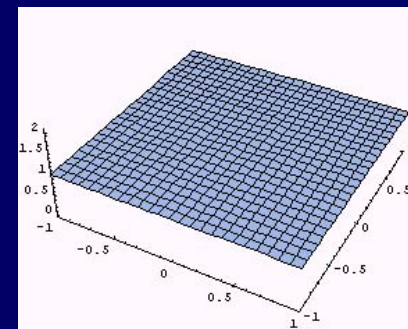
在求连续型 $r.v$ 的边缘密度时，往往要求联合密度在某区域上的积分。当联合密度函数是分段表示的时候，在计算积分时应特别注意积分限。

下面我们介绍两个常见的二维分布。



设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A .若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



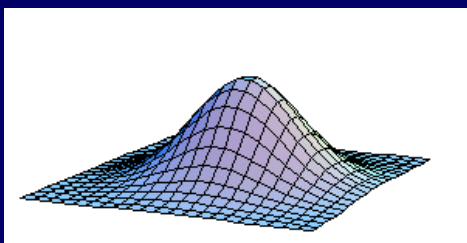
则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.

例

向平面上有界区域 G 上任投一质点，若质点落在 G 内任一小区域 B 的概率与小区域的面积成正比，而与 B 的形状及位置无关. 则质点的坐标 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.

若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$



$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty,$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$. 则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布. 记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.



例 3 试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

因为
$$\frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$= \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

所以

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2} dy$$



$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} dy$$

令 $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$, 则有

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \sqrt{2\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned}$$



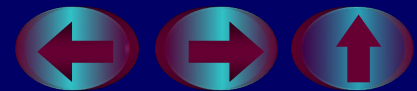
同理

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (-\infty < y < \infty)$$

可见

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且不依赖于参数 ρ 。

也就是说,对于给定的 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$, 不同的 ρ 对应不同的二维正态分布,但它们的边缘分布却都是一样的. 此例表明 由边缘分布一般不能确定联合分布.



四、课堂练习

设 (X, Y) 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度.



暂时固定

解 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

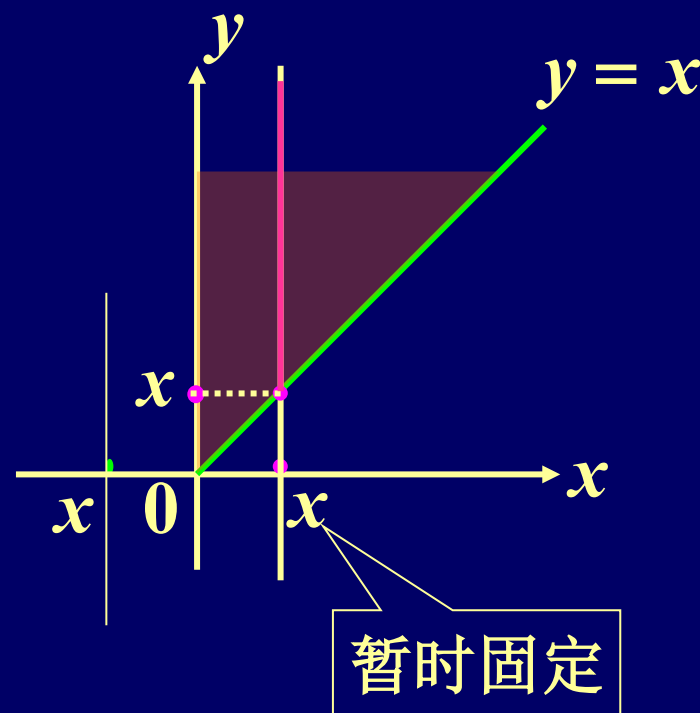
当 $x \leq 0$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^{+\infty} e^{-y} dy \\ &= e^{-y} \Big|_x^{+\infty} = e^{-x} \end{aligned}$$

故

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



暂时固定

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

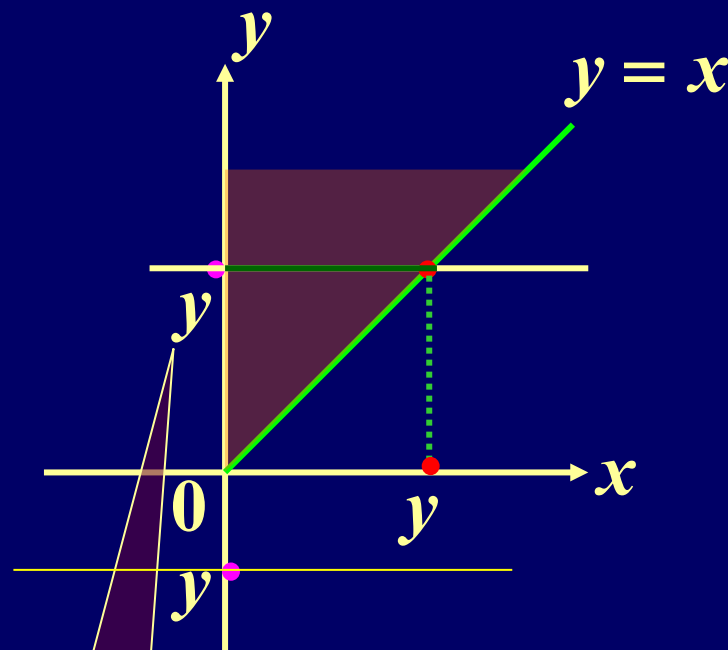
当 $y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx = 0$

当 $y > 0$ 时,

$$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}$$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$



暂时固定



五、小结

1. 在这一讲中，我们与一维情形相对照，介绍了二维随机变量的边缘分布.
2. 请注意联合分布和边缘分布的关系：
由联合分布可以确定边缘分布；
但由边缘分布一般不能确定联合分布.



六、布置作业

《概率统计》标准化作业 (三)

