例题精选

例1　为保证设备正常工作，需要配备适量的维修人员．设共有300台设备，每台的工作相互独立，发生故障的概率都是0.01.若在通常的情况下，一台设备的故障可由一人来处理．问至少应配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

我们先对题目进行分析：

300台设备，独立工作，出故障概率都是0.01. 一台设备故障一人来处理.

问至少配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

设X为300台设备同时发生故障的台数，

300台设备，独立工作，每台出故障概率p=0.01 . 可看作n=300的贝努里概型.

可见， $X \sim b(n,p)$，$n=300$, $p=0.01$

300台设备，独立工作，出故障概率都是0.01．一台设备故障一人来处理.

问至少配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

设X为300台设备同时发生故障的台数，

$X \sim b(n,p)$，$n=300$, $p=0.01$

设需配备N个维修人员， 所求的是满足

$P(X>N) < 0.01$ 或 $P(X \leq N) \geq 0.99$

的最小的N.

下面给出正式求解过程：

解：设X为300台设备同时发生故障的台数，

$X \sim b(n,p)$，$n=300$, $p=0.01$

设需配备N个维修人员， 所求的是满足

$P(X>N) < 0.01$的最小的N.

$$P(X>N)=\sum_{k=N+1}^{300} C_{300}^{k}(0.01)^{k}(0.99)^{300-k}$$

$$\approx \sum_{k=N+1}^{300} \frac{3^{k} e^{-3}}{k!}$$

$$\approx \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^{k} e^{-3}}{k!}$$

n大,p小,$np=3$,
用 $\lambda=np=3$
的泊松近似

我们求满足 $\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{3^k e^{-3}}{k!} < 0.01$ 的最小的N.

查书末的泊松分布表得

$$\sum_{k=9}^{\infty}\frac{e^{-3}3^k}{k!}\approx 0.0038, \qquad \sum_{k=8}^{\infty}\frac{e^{-3}3^k}{k!}\approx 0.012,$$

$N+1 \geq 9$, 即$N \geq 8$

即至少需配备8个维修人员.

例2　X具有离散均匀分布，即

$P(X=x_i)=1/n$，$i=1,2,\ldots,n$，　求X的分布函数.

解：将X所取的n个值按从小到大的顺序排列为：

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$$

显然，$x < x_{(1)}$时，$F(x)=P(X\le x)=0$,

$x_{(1)} \le x < x_{(2)}$时，$F(x)=P(X\le x)=1/n$,

$x_{(2)} \le x < x_{(3)}$时，$F(x)=P(X\le x)=2/n$,

$\vdots$

例2　X具有离散均匀分布，即

$P(X=x_i)=1/n$，$i=1,2,\ldots,n$，求X的分布函数.

解：将X所取的n个值按从小到大的顺序排列为：

$$x_{(1)}\le x_{(2)}\le \ldots \le x_{(n)}$$

$x_{(k)}\le x< x_{(k+1)}$时，$F(x)=P(X\le x)=k/n$,

⋮

$x\ge x_{(n)}$时，$F(x)=P(X\le x)=1$

例2　X具有离散均匀分布，即

$P(X=x_i)=1/n$，　$i=1,2,\ldots,n$，　求X的分布函数.

于是得

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x<\min(x_1,\cdots,x_n)\\ \dfrac{k}{n}, & \text{当}x\geq\min(x_1,\cdots,x_n)\text{，且}x_j(j=1,2,\cdots,n)\text{中}\\ & \text{恰有}k\text{个不大于}x\\ 1, & \text{当}x\geq\max(x_1,\cdots,x_n)\end{cases}$$

这个结果在数理统计中有用.

例3 设$r.v\ X$的密度函数为 $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 $F(x)$.

解: $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 求 $F(x)$.

解： 对 $x < -1$， $F(x) = 0$

对 $-1\le x\le 1$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\cdot dt+\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\frac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}$$

对 $x>1$， $F(x) = 1$

即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

例4 设有函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试说明$F(x)$能否是某个$r.v$ 的分布函数.

解： 注意到函数 $F(x)$在$[\pi/2,\pi]$上下降，不满足性质(1)，故$F(x)$不能是分布函数.

或者 $$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

不满足性质(2)， 可见$F(x)$也不能是$r.v$ 的分布函数.

例5 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 $F(x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

由于$f(x)$是分段表达的，求$F(x)$时注意分段求.

$$X \sim f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x t\,dt & 0 \le x < 1 \\ \int_0^1 t\,dt+\int_1^x (2-t)dt & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

即

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1 \\ 2x-1-\dfrac{x^2}{2}, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

例6 设$r.vX$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

(1) 求X取值在区间$(0.3,0.7)$的概率；

(2) 求X的概率密度.

解: (1) $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

(2) $$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

注意到$F(x)$在1处导数不存在，根据改变被积函数在个别点处的值不影响积分结果的性质，可以在$F'(x)$没意义的点处，任意规定$F'(x)$的值.

第二章 自测题

一. 随机变量 X 具有以下的分布律:

X	--2	0	2	3
P	0.2	0.2	0.3	0.3

则$Y = X^2$的分布律为______.

Y	0	4	9
P	0.2	0.5	0.3

二. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = Ae^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$,系数$A =$ __0.5__;X 的分布函数$F_X(x) =$ ______;$Y = X^2$的概率密度________.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0.5e^{x} & x < 0 \\ 1 - 0.5e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & y \geq 0 \end{cases}$$

三．设随机变量 X 服从参数为（2，P）的二项分布，随机变量 Y 服从参数（3，P）的二项分布，若

$P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$,则$P\{Y \geq 1\} =$ $\underline{\frac{19}{27}}$.

四．设$X \sim N(2,\sigma^2)$,且$P(2 < X < 4) = 0.3$,

则$P(X < 0) =$ $\underline{0.2}$.

五．设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = k) = a\frac{(b\lambda)^k}{k!}, k = 0,1,2,\cdots,$$ 其中 $b,\lambda > 0$ 是

已知常数，则$a =$ $\underline{e^{-b\lambda}}$.