《概率论与数理统计》强化训练题二

一、是非题(填“对”或“错”)

1. 不可能事件与任何事件既互不相容又相互独立. (　　)

2. 设 $F(x)=P\{X\le x\}$, 那么 $P\{X<x\}=F(x-0)$. (　　)

3. 如果 (X,Y) 服从二维均匀分布, 则 X,Y 也必分别服从一维均匀分布. (　　)

4. 对于任何随机变量 X, 必存在有限数学期望 $E(X)$. (　　)

5. 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 为来自正态总体的样本, 令 $Y=(X_1-X_2)^2+(X_3-X_4)^2$. 则必存在常数 C, 使得 $CY\sim\chi^2(2)$. (　　)

二、填空题

1. 将一匀质硬币抛掷 2 次, 观察每次的正反面结果. 则样本空间为________; 事件“至少出现一次正面”发生的概率为________.

2. $P(B)=0.6$, $P(B-A)=0.4$, 则 $P(AB)=$________; $P(A|B)=$________.

3. 设 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布, 且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$. 则 $\lambda=$________; $P\{|X-1|\le 1\}=$________.

4. 设离散型随机变量 X 与 Y 独立同分布, 分布律为 $P\{X=k\}=p_k\ (k=1,2,\cdots)$, 则 $P\{X=Y\}=$_______; 若连续型随机变量 X 与 Y 独立同分布, 则 $P\{X=Y\}=$_______.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且具有相同的均值和方差: $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 由 Chebyshev 不等式, $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\ge\varepsilon\right\}\le$_______; 而 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\ge\varepsilon\right\}=$________.

三、单项选择题

1. 如果 $P(A|B)=P(B|A)$, 且 $P(AB)>0$, 则(　　)

A. $A=B$　　　　B. $P(A)=P(B)$

C. A, B 相互独立　　　　D. $A \bigcup B = S$

2. 已知随机变量 X 服从均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布，则 $\frac{E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 等于(　　)

A. λ　　B. $\frac{1}{\lambda}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 设 μ_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率. 则 $\forall \varepsilon > 0$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} =$ (　　)

A. 0　　B. 1　　C. p　　D. $1-p$

4. 设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 均是 θ 的无偏估计量，则(　　)

A. $E[(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)^2] = 0$　　B. $D(\hat{\theta}_1) = D(\hat{\theta}_2)$

C. $E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = 0$　　D. $E\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}\right) = 1$

5. 对于假设检验问题：$H_0: \theta = \theta_0$，$H_1: \theta \neq \theta_0$，第二类错误即为(　　)

A. H_0 为真却拒绝 H_0　　B. H_0 为假却接受 H_0

C. 总是拒绝 H_0　　D. 总是接受 H_0

四、玻璃杯成箱出售，每箱 10 只. 已知各箱中残次品个数为 $0, 1, 2$ 的概率分别为 0.8, 0.15, 0.05. 现有一顾客欲购一箱玻璃杯，售货员任意取一箱，顾客开箱随机地检验一只，若不是残次品，顾客则买下该箱玻璃杯. 试求:

1. 顾客买下该箱玻璃杯的概率;

2. 在顾客买下的一箱玻璃杯中，确实无残次品的概率.

五、设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = c\mathrm{e}^{-|x|}, \ -\infty < x < +\infty.$$

求:

1. 常数 c;

2. X 的分布函数;

3. X 的值落在 $(-1,1)$ 内的概率;

4. 求 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

六、设 A, B 为随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$， $P(B|A)=\dfrac{1}{2}$， $P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

1. 求二维随机变量 (X,Y) 的分布律(列表);

2. 计算 X 与 Y 的协方差.

七、 设总体 X 具有概率密度

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\beta(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\beta>0$ 为未知参数. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为一组简单随机样本，试求:

1. β 的矩估计量;

2. β 的最大似然估计量.

八、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 现从该总体抽取一组容量为 40 的样本，算得样本均值 $\overline{x}=4.3082$， 样本标准差 $s=1.8537$.

1. 求 σ 的置信度为 95% 的区间估计;

2. 在 $\alpha=0.05$ 水平下，能否认为总体均值 μ 仍然没有超过 4？