第14章 代数系统

计算机工程与科学学院 封卫兵

14.2 代数系统

14.2.1 代数系统的定义与实例

14.2.2 代数系统的分类

14.2.3 子代数系统与积代数系统

14.2.4 代数系统的同态与同构

14.2.1 代数系统定义与实例

定义14.7 非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 组成的系统称为一个代数系统，简称代数，记作 $<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$.

例： 1）$<\mathbf{N}, +>$, $<\mathbf{Z}, +, \cdot>$, $<\mathbf{R}, +, \cdot>$ 是代数系统，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示普通加法和乘法；

2）$<M_n(\mathbf{R}), +, \cdot>$ 是代数系统，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示 n 阶 $(n \geq 2)$ 实矩阵的加法和乘法；

3）$<P(S), \cup, \cap, \sim>$ 是代数系统，$\cup$ 和 $\cap$ 为并和交，$\sim$ 为绝对补；

14.2.1 代数系统定义与实例

例： 4）$<\mathbf{Z}_n, \oplus, \otimes>$ 是代数系统，$Z_n = \{ 0, 1, \ldots , n-1 \}$，$\oplus$ 和 $\otimes$ 分别表示模 n 的加法和乘法，对于 $x, y \in \mathbf{Z}_n$，

$$x \oplus y = (x + y) \bmod n, \quad x \otimes y = (xy) \bmod n .$$

注:

1）对于代数系统 $<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$，其中的集合 S 称为**载体**;

2）对于某些代数系统，具有某种特异元素（例如关于二元运算的单位元）也作为系统的性质，此时可以将这个特异元素作为系统的成分列出来，例如 $<A, \circ, e>$，这时 e 也称作**代数常数**.

14.2.2 代数系统的分类

定义14.8 (1) 如果两个代数系统 $V_1 = <S_1, f_1^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}>$ 和 $V_2 = <S_2, f_1^{(2)}, \ldots, f_n^{(2)}>$ 中运算的个数相同，对应运算的元数相同且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统 .

例:

$V_1 = <\mathbf{N}, +, \times>$,

2 个运算,

+, × 都是二元运算

+：代数常数（单位元）

×：代数常数（单位元、零元）

$V_2 = <\mathbf{Z}_n, \oplus, \otimes>$,

2 个运算,

⊕, ⊗ 都是二元运算

⊕：代数常数（单位元）

⊗：代数常数 （单位元、零元）

14.2.2 代数系统的分类

定义14.8 (2) 如果两个同类型的代数系统对应的运算所规定的运算性质也相同，则称为同种的代数系统 .

例： $V_1 = <\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1>$,

$V_2 = <M_n(\mathbf{R}), +, \cdot, \theta, E>$, θ 为 n 阶全 0 矩阵，E 为 n 阶单位矩阵

$V_3 = <P(B), \cup, \cap, \varnothing, B>$

是同类型的代数系统? ✓

运算个数：2，对应运算的元数：2，代数常数：2

是同种的代数系统？

14.2.2 代数系统的分类

$V_1=<\mathbf{R},+,\cdot,0,1>$	$V_2=<M_n(\mathbf{R}),+,\cdot,\theta,E>$	$V_3=<P(B),\cup,\cap,\varnothing,B>$
+ 可交换, 可结合	+ 可交换, 可结合	∪ 可交换, 可结合
· 可交换, 可结合	· 不可交换, 可结合	∩ 可交换, 可结合
+ 满足消去律	+ 满足消去律	∪ 不满足消去律
· 满足消去律	· 满足消去律	∩ 不满足消去律
· 对 + 可分配	· 对 + 可分配	∩ 对 ∪ 可分配
+ 对 · 不可分配	+ 对 · 不可分配	∪ 对 ∩ 可分配
+ 与 · 没有吸收律	+ 与 · 没有吸收律	∪ 与 ∩ 满足吸收律
+ 具有单位元	+ 具有单位元	∪ 具有单位元
对于+，每个元素都可逆	对于+，每个元素都可逆	对于∪，不是每个元素都可逆

V_1, V_2 与 V_3 都不是同种的代数系统 .

14.2.2 代数系统的分类

$V_1 = <\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1>$	$V_2 = <M_n(\mathbf{R}), +, \cdot, \theta, E>$	$V_3 = <P(B), \cup, \cap, \varnothing, B>$
+ 可交换, 可结合	+ 可交换, 可结合	∪ 可交换, 可结合
· 可交换, 可结合	· 不可交换, 可结合	∩ 可交换, 可结合
+ 满足消去律	+ 满足消去律	∪ 不满足消去律
· 满足消去律	· 满足消去律	∩ 不满足消去律
· 对 + 可分配	· 对 + 可分配	∩ 对 ∪ 可分配
+ 对 · 不可分配	+ 对 · 不可分配	∪ 对 ∩ 可分配
+ 与 · 没有吸收律	+ 与 · 没有吸收律	∪ 与 ∩ 满足吸收律
+ 具有单位元	+ 具有单位元	∪ 具有单位元
对于+，每个元素都可逆	对于+，每个元素都可逆	对于∪，不是每个元素都可逆

如果选取上述为分类规定，V_1, V_2与 V_3 同种? ✓

14.2.3 子代数系统与积代数系统

子代数

定义14.9 设 $V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$ 是代数系统，B 是 S 的非空子集，如果 B 对 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 都是封闭的，且 B 和 S 含有相同的代数常数，则称 $<B, f_1, f_2, \ldots, f_k>$ 是 V 的子代数系统，简称子代数. 有时将子代数系统简记为 B.

思考： B 和 V 同类型? B 和 V 同种?

注： 对于任何代数系统 V，其子代数一定存在 .

14.2.3 子代数系统与积代数系统

子代数（续）

例:

1）$\mathbf{N}$ 是 $<\mathbf{Z}, +>$ 的子代数？ ✓

2）$\mathbf{N}$ 也是 $<\mathbf{Z}, +, 0>$ 的子代数？ ✓

3）$\mathbf{N} - \{0\}$ 是 $<\mathbf{Z}, +>$ 的子代数？ ✓

4）$\mathbf{N} - \{0\}$ 是 $<\mathbf{Z}, +, 0>$ 的子代数？ ✗

14.2.3 子代数系统与积代数系统

关于子代数的术语

最大的子代数：就是 V 本身；

最小的子代数：V 中所有代数常数构成集合 B，且 B 对 V 中所有运算封闭，则 B 就构成了 V 的最小的子代数；

注： 不是所有代数常数构成的集合 B 都是最小的子代数 .

例： $<\mathbf{Z}, +, \times, 1, 0>$，则 $B = \{1, 0\}$，最小子代数为 $<B, +, \times, 1, 0>$ ？

最小子代数为：$<\mathbf{N}, +, \times, 1, 0>$

14.2.3 子代数系统与积代数系统

关于子代数的术语（续）

平凡的子代数：最大和最小子代数称为 V 的平凡子代数；

真子代数：若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为 V 的真子代数 .

例： 设 $V = \langle \mathbf{Z}, +, 0 \rangle$，令 $n\mathbf{Z} = \{ nz \mid z \in \mathbf{Z} \}$，$n$ 为自然数，则：

$\underline{\quad n\mathbf{Z} \quad}$ 是 V 的子代数，

当 $n = 1$ 和 0 时，$n\mathbf{Z}$ 是 V 的平凡的子代数，

其他的都是 V 的非平凡的真子代数 .

14.2.3 子代数系统与积代数系统

积代数

两个同类型的代数系统可以构造积代数系统 .

定义14.10 设 $V_1 = <S_1, \circ>$ 和 $V_2 = <S_2, *>$ 是代数系统，其中 $\circ$ 和 $*$ 是二元运算 . V_1 与 V_2 的积代数 $V = <S_1 \times S_2, \cdot>$,

$\forall <x_1, y_1>, <x_2, y_2> \in S_1 \times S_2$, $<x_1, y_1> \cdot <x_2, y_2> = <x_1 \circ x_2, y_1 * y_2>$.

例： $V_1 = <\mathbf{Z}, +>$, $V_2 = <M_2(\mathbf{R}), \cdot>$, 积代数 $<\mathbf{Z} \times M_2(\mathbf{R}), \circ>$ 为：

$\forall <z_1, M_1>, <z_2, M_2> \in \mathbf{Z} \times M_2(\mathbf{R})$, $<z_1, M_1> \circ <z_2, M_2> = <z_1+z_2, M_1 \cdot M_2>$.

$$\left\langle 5, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \circ \left\langle -2, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle 3, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

14.2.3 子代数系统与积代数系统

积代数的性质

设 $V_1 = <S_1, \circ>$ 和 $V_2 = <S_2, *>$ 是代数系统，其中 $\circ$ 和 $*$ 是二元运算.

V_1 与 V_2 的积代数是 $V = <S_1 \times S_2, \cdot>$

1）若 $\circ$ 和 $*$ 运算是可交换的，那么 $\cdot$ 运算也是可交换的;

证明： $\forall <x_1, y_1>, <x_2, y_2> \in S_1 \times S_2$,

$$\begin{aligned} <x_1, y_1> \cdot <x_2, y_2> &= <x_1 \circ x_2, y_1 * y_2> \\ &= <x_2 \circ x_1, y_2 * y_1> \\ &= <x_2, y_2> \cdot <x_1, y_1> . \end{aligned}$$

14.2.3 子代数系统与积代数系统

积代数的性质（续）

2）若 $\circ$ 和 $*$ 运算是可结合的，那么$\cdot$ 运算也是可结合的；

证明： $\forall \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle \in S_1 \times S_2$，

$$
\begin{aligned}
(\langle x_1, y_1\rangle \cdot \langle x_2, y_2\rangle) \cdot \langle x_3, y_3\rangle &= (\langle x_1 \circ x_2, y_1 * y_2\rangle) \cdot \langle x_3, y_3\rangle \\
&= \langle (x_1 \circ x_2) \circ x_3, (y_1 * y_2) * y_3\rangle \\
&= \langle x_1 \circ (x_2 \circ x_3), y_1 * (y_2 * y_3)\rangle \\
&= \langle x_1, y_1\rangle \cdot \langle x_2 \circ x_3, y_2 * y_3\rangle \\
&= \langle x_1, y_1\rangle \cdot (\langle x_2, y_2\rangle \cdot \langle x_3, y_3\rangle).
\end{aligned}
$$

14.2.3 子代数系统与积代数系统

积代数的性质（续）

3）若 $\circ$ 和 $*$ 运算是幂等的，那么$\cdot$ 运算也是幂等的；

证明： $\forall \langle x, y\rangle \in S_1 \times S_2$， $\langle x, y\rangle \cdot \langle x, y\rangle = \langle x\circ x, y*y\rangle = \langle x, y\rangle$

4）若 $\circ$ 和 $*$ 运算分别具有单位元 e_1 和 e_2，那么 $\cdot$ 运算也具有单位元 $\langle e_1, e_2\rangle$；

证明： $\forall \langle x, y\rangle \in S_1 \times S_2$，

$$\langle e_1, e_2\rangle \cdot \langle x, y\rangle = \langle e_1\circ x, e_2*y\rangle = \langle x, y\rangle$$

$$\langle x, y\rangle \cdot \langle e_1, e_2\rangle = \langle x\circ e_1, y*e_2\rangle = \langle x, y\rangle$$

所以，$\langle e_1, e_2\rangle$ 是 $\cdot$ 运算的单位元 .

14.2.3 子代数系统与积代数系统

积代数的性质（续）

5）若 $\circ$ 和 $*$ 运算分别具有零元 θ_1 和 θ_2，那么 $\cdot$ 运算也具有零元 $<\theta_1, \theta_2>$；

证明： $\forall <x, y> \in S_1 \times S_2$，

$$<\theta_1, \theta_2> \cdot <x, y> = <\theta_1 \circ x, \theta_2 * y> = <\theta_1, \theta_2>$$

$$<x, y> \cdot <\theta_1, \theta_2> = <x \circ \theta_1, y * \theta_2> = <\theta_1, \theta_2>$$

6）若 x 关于 $\circ$ 的逆元为 x^{-1}，y 关于 $*$ 的逆元为 y^{-1}，那么 $<x, y>$ 关于 $\cdot$ 运算也具有逆元 $<x^{-1}, y^{-1}>$．

证明： 设 $\circ$ 和 $*$ 运算分别具有单位元 e_1 和 e_2，那么 $\cdot$ 运算也具有单位元 $<e_1, e_2>$． $\forall <x, y> \in S_1 \times S_2$，

$$<x, y> \cdot <x^{-1}, y^{-1}> = <x \circ x^{-1}, y * y^{-1}> = <e_1, e_2>$$

$$<x^{-1}, y^{-1}> \cdot <x, y> = <x^{-1} \circ x, y^{-1} * y> = <e_1, e_2>$$

14.2.3 子代数系统与积代数系统

积代数的性质（总结）

1) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算是可交换的，那么 $\cdot$ 运算也是可交换的；

2) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算是可结合的，那么 $\cdot$ 运算也是可结合的；

3) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算是幂等的，那么 $\cdot$ 运算也是幂等的；

4) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算分别具有单位元 e_1 和 e_2，那么 $\cdot$ 运算也具有单位元 $<e_1, e_2>$；

5) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算分别具有零元 θ_1 和 θ_2，那么 $\cdot$ 运算也具有零元 $<\theta_1, \theta_2>$；

6) 若 x 关于 $\circ$ 的逆元为 x^{-1}, y 关于 $*$ 的逆元为 y^{-1}，那么

$<x, y>$关于 $\cdot$ 运算也具有逆元 $<x^{-1}, y^{-1}>$.

14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射的定义

同态映射的分类

　单同态、满同态、同构、自同态

同态映射的实例

满同态映射的性质

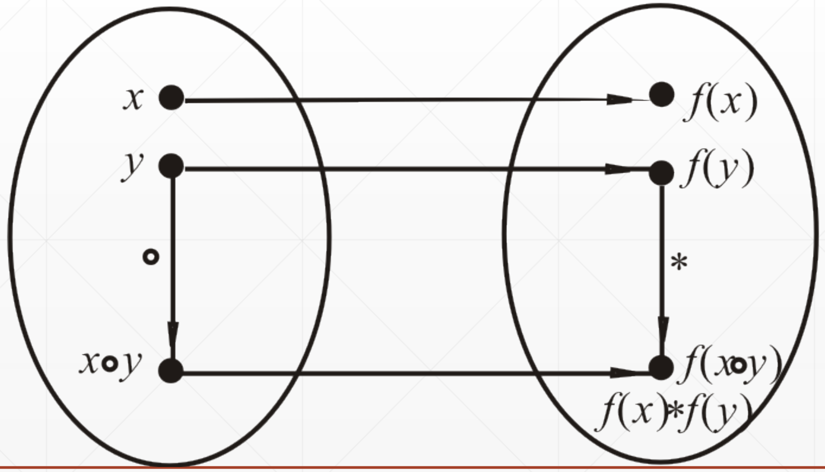
14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射

定义14.11 设 $V_1=<S_1,\circ>$ 和 $V_2=<S_2,*>$ 是代数系统，其中 $\circ$ 和 $*$ 是二元运算. $f:S_1\to S_2$，且 $\forall x,y\in S_1$

$$f(x\circ y)=f(x)*f(y)$$

则称 f 为 V_1 到 V_2 的同态映射，简称同态 .



14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射（续）

例： $V_1 = \langle \mathbf{R}, + \rangle$, $V_2 = \langle \mathbf{R}^+, \times \rangle$

1) $f(x) = e^x$ 是 V_1 到V_2 的同态，因为:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad f(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)$$

2) $g(x) = \log x$ 是 V_2 到 V_1 的同态，因为:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^+, \quad g(x \times y) = \log(x \times y) = \log x + \log y = g(x) + g(y)$$

3) $h(x) = x^2$ 不是 V_1 到 V_2 的同态，因为:

$$h(2+3) = 25 \neq 36 = h(2) \times h(3)$$

14.2.4 代数系统的同态与同构

$g(x_1)=y_1$

$g(x_2)=y_1$

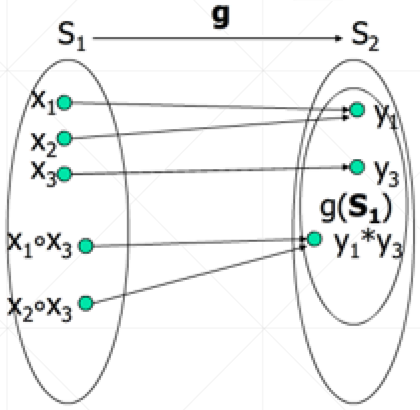
$g(x_3)=y_3$

$g(x_1\circ x_3)=$

$g(x_1)*g(x_3)=y_1*y_3$

$g(x_2\circ x_3)=$

$g(x_2)*g(x_3)=y_1*y_3$



同态映射的分类

同态映射如果是单射，则称为单同态；

如果是满射，则称为满同态，这时称 V_2 是 V_1 的同态像，记作 $V_1 \sim V_2$；

如果是双射，则称为同构，也称代数系统 V_1 同构于 V_2，记作 $V_1 \cong V_2$.

对于代数系统 V，它到自身的同态称为自同态 .

类似地可以定义单自同态、满自同态和自同构 .

14.2.4 代数系统的同态与同构

例： $V=\langle \mathbf{R}^*, \cdot\rangle$，判断下面的哪些函数是$V$的自同态？是否为单自同态、满自同态和自同构？

1) $f(x)=|x|$　　自同态 ✔　单自同态 ✘　满自同态 ✘　自同构 ✘

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^*, \quad f(x\cdot y)=|x\cdot y|=|x|\cdot|y|=f(x)\cdot f(y)$$

2) $f(x)=2x$　　自同态 ✘

$$f(2\cdot 2)=f(4)=8, \quad f(2)\cdot f(2)=4\cdot 4=16$$

3) $f(x)=x^2$　　自同态 ✔　单自同态 ✘　满自同态 ✘　自同构 ✘

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^*, \quad f(x\cdot y)=(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2=f(x)\cdot f(y)$$

14.2.4 代数系统的同态与同构

例： $V = <\mathbf{R}^*, \cdot>$, 判断下面的哪些函数是$V$的自同态？是否为单自同态、满自同态和自同构？

4) $f(x) = 1/x$ 自同态 ✓ 单自同态 ✓ 满自同态 ✓ 自同构 ✓

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^*, \quad f(x \cdot y) = 1/(x \cdot y) = 1/x \cdot 1/y = f(x) \cdot f(y)$$

5) $f(x) = -x$ 自同态 ✗

$$f(1 \cdot 1) = f(1) = -1, \quad f(1) \cdot f(1) = (-1) \cdot (-1) = 1$$

6) $f(x) = x + 1$ 自同态 ✗

$$f(1 \cdot 1) = f(1) = 2, \quad f(1) \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4$$

14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射的实例

1) 设 $V = <\mathbf{Z}, +>$，$\forall a \in \mathbf{Z}$，令

$$f_a : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, \qquad f_a(x) = ax$$

f_a 是 V 的自同态？✓

因为 $\forall x, y \in \mathbf{Z}$，$f_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f_a(x) + f_a(y)$

单自同态 ？✓ 满自同态 ？✗ 自同构 ？✗

当 $a =$ __±1__ 时，f_a 为自同构

当 $a = 0$ 时称 f_0 为零同态 .

14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射的实例（续）

2) 设 $V_1 = <\mathbf{R}, +>$, $V_2 = <\mathbf{R}^*, \cdot>$，其中 $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$，令

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*, \quad f(x) = e^x$$

那么 f 是 V_1 到 V_2 的同态映射 ？✔

因为$\forall x, y \in \mathbf{R}$有：

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y).$$

单同态 ？✔　　满同态？✘　　同构？✘

14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射的实例（续）

3) $V = \langle Z_n, \oplus \rangle$, f_p： $Z_n \to Z_n$,

$$f_p(x) = (xp) \bmod n\,,\quad p = 0, 1, \ldots, n-1.$$

因为 $\forall x, y \in Z_n$,

$$\begin{aligned} f_p(x \oplus y) &= ((x \oplus y)p) \bmod n \\ &= (xp) \bmod n \oplus (yp) \bmod n \\ &= f_p(x) \oplus f_p(y) \end{aligned}$$

所以，存在 n 个 V 的自同态 .

14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射的实例（续）

3) $V = \langle Z_n, \oplus \rangle$, f_p： $Z_n \to Z_n$,

$$f_p(x) = (xp) \bmod n, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1.$$

例： $n = 6$，则 $p = 0, 1, \ldots, 5$，$x = 0, 1, \ldots, 5$，哪个是自同构？

$f_0(x) = 0$, ✗ $\qquad f_1(x) = x$, ✓

$f_2(0) = f_2(3) = 0$, $f_2(1) = f_2(4) = 2$, $f_2(2) = f_2(5) = 4$, ✗

$f_3(0) = f_3(2) = f_3(4) = 0$, $f_3(1) = f_3(3) = f_3(5) = 3$, ✗

$f_4(0) = f_4(3) = 0$, $f_4(1) = f_4(4) = 4$, $f_4(2) = f_4(5) = 2$, ✗

$f_5(0) = 0$, $f_5(1) = 5$, $f_5(2) = 4$, $f_5(3) = 3$, $f_5(4) = 2$, $f_5(5) = 1$. ✓

14.2.4 代数系统的同态与同构

同态映射的实例（续）

4) $V_1 = \langle \mathbf{Z}, + \rangle$, $V_2 = \langle \mathbf{Z}_n, \oplus \rangle$, $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$,

$$f(x) = (x) \bmod n .$$

因为 $\forall x, y \in \mathbf{Z}$,

$$f(x+y) = (x+y) \bmod n = (x) \bmod n \oplus (y) \bmod n = f(x) \oplus f(y) .$$

例： $n = 3$，则 $f(x) = 0, 1, 2$

$$f(3x) = 0, \quad f(3x+1) = 1, \quad f(3x+2) = 2$$

f 为哪种同态? 满同态

14.2.4 代数系统的同态与同构

满同态映射的性质

设 V_1 和 V_2 是代数系统，$f: V_1 \to V_2$ 是满同态映射，则

1） 若 V_1 中的 $\circ$ 运算是可交换 (可结合，幂等) 的，那么 V_2 中对应的 $\circ'$ 运算也是可交换 (可结合，幂等)的；

2） 若 V_1 中的 $\circ$ 对 $*$ 运算是可分配的，那么 V_2 中对应的 $\circ'$ 对 $*'$ 运算也是可分配的；

3） 若 V_1 中的 $\circ$ 和 $*$ 运算是可吸收的，那么 V_2 中对应的 $\circ'$ 和 $*'$ 运算也是可吸收的；

14.2.4 代数系统的同态与同构

满同态映射的性质（续）

设 V_1 和 V_2 是代数系统，$f: V_1 \to V_2$ 是满同态映射，则

4）若 V_1 中 $\circ$ 运算具有单位元 e_1 (或零元 θ_1)，那么 $f(e_1)$ (或 $f(\theta_1)$) 是 V_2 中关于对应的 $\circ'$ 运算的单位元 (或零元)；

5）若 x 关于 V_1 中 $\circ$ 运算的逆元为 x^{-1}，那么 $f(x)$ 在 V_2 中关于对应的 $\circ'$ 运算的逆元为 $f(x^{-1})$.

14.2.4 代数系统的同态与同构

满同态映射的性质（证明）

设 V_1 和 V_2 是代数系统，$f: V_1 \to V_2$ 是满同态映射, 则

1）若V_1中的 $\circ$ 运算是可结合的，那么V_2中对应的 $\circ'$ 运算也是可结合的.

证明： 因为 f 是满射，所以 $\forall x, y, z \in V_2$, 存在 $a, b, c \in V_1$ 使得

$$f(a) = x, \quad f(b) = y, \quad f(c) = z,$$

于是

$$\begin{aligned}(x \circ' y) \circ' z &= (f(a) \circ' f(b)) \circ' f(c) = f(a \circ b) \circ' f(c) \\ &= f((a \circ b) \circ c) = f(a \circ (b \circ c)) = f(a) \circ' (f(b \circ c)) \\ &= f(a) \circ' (f(b) \circ' f(c)) = x \circ' (y \circ' z)\end{aligned}$$

14.2.4 代数系统的同态与同构

满同态映射的性质（证明续）

设 V_1 和 V_2 是代数系统，$f: V_1 \to V_2$ 是满同态映射，则

4）若 V_1 中 $\circ$ 运算具有单位元 e_1，那么 $f(e_1)$ 是 V_2 中关于对应的 $\circ'$ 运算的单位元 .

证明： 因为 f 是满射，所以 $\forall x \in V_2$，存在 $a \in V_1$ 使得 $f(a)=x$，于是

$$x \circ' f(e_1) = f(a) \circ' f(e_1) = f(a \circ e_1) = f(a) = x\,,$$

同理，$f(e_1) \circ' x = x$.

所以 $f(e_1)$ 是 V_2 中关于对应的 $\circ'$ 运算的单位元 .

14.2.4 代数系统的同态与同构

例： $S_1 = \{<a, b> \mid a, b \in \mathbf{R}\}$，$V_1 = <S_1, \bullet>$，其中 • 的定义为

$$<a_1, b_1> \bullet <a_2, b_2> = <a_1a_2, b_1b_2>,$$

$$f : V_1 \to V_1, \quad f(<a, b>) = <a, 0>,$$

不是满射，但是 V_1 的自同态，因为：

$\forall x = <a_1, b_1>, \forall y = <a_2, b_2> \in V_1$,

$$f(x \bullet y) = f(<a_1a_2, b_1b_2>) = <a_1a_2, 0> = <a_1, 0> \bullet <a_2, 0> = f(x) \bullet f(y),$$

V_1 的单位元：$<1, 1>$，但是：$f(<1, 1>) = <1, 0>$ 不是 V_1 的单位元，

即，若 f 不是满射，则(4)不一定成立 .

思考： 什么情况下(4)成立?

设 $S_2 = \{<a, 0> \mid a \in \mathbf{R}\}$，$V_2 = <S_2, \bullet>$，则 $f : V_1 \to V_2$ 为满射，(4)成立 .

14.2.4 代数系统的同态与同构

满同态映射的性质（证明续）

设 V_1 和 V_2 是代数系统，$f: V_1 \to V_2$ 是满同态映射，则

5）若 x 关于 V_1 中 $\circ$ 运算的逆元为 x^{-1}，那么 $f(x)$ 在 V_2 中关于对应的 $\circ'$ 运算的逆元为 $f(x^{-1})$.

证明： 设 V_1 中 $\circ$ 运算的单位元为 e_1，则 V_2 中关于对应的 $\circ'$ 运算的单位元为 $f(e_1)$.

$$f(x) \circ' f(x^{-1}) = f(x \circ x^{-1}) = f(e_1),$$

同理，$f(x^{-1}) \circ' f(x) = f(x^{-1} \circ x) = f(e_1)$,

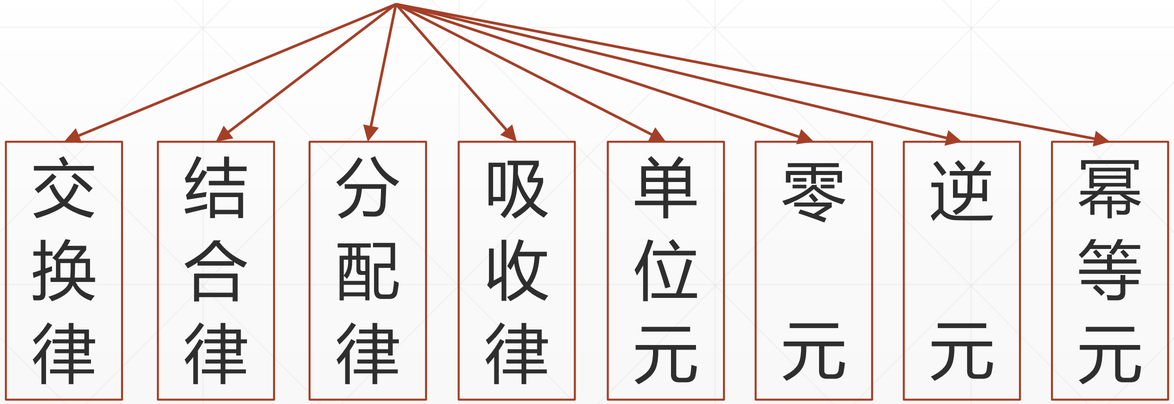
所以，$(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$.

14.2.4 代数系统的同态与同构

满同态映射的性质（续）

设 V_1 和 V_2 是代数系统，$f: V_1 \to V_2$ 是满同态映射，则满同态 f 对性质的保持是单方向的，即

$$V_1\text{的性质} \quad \Rightarrow \quad V_2\text{的性质}$$



作　业

14.9

14.10

研 讨 题

1）设 f 和 g 是两个 $<S, \circ>$ 到 $<V, *>$ 的同态，其中二元运算 $*$ 满足交换律和结合律，证明：

$$h(x)=f(x)*g(x),$$

也是 $<S, \circ>$ 到 $<V, *>$ 的同态 .

2）请写出代数系统 $<N, \times>$ 的所有子代数系统． 那么代数系统 $<N, +, \times>$的子代数系统有哪些．(要求考虑代数常数)

3）设 V_1 和 V_2 都是一个代数系统 V 的子代数系统，那么$V_1 \cap V_2$和 $V_1 \cup V_2$也是V的子代数系统吗？若是证明之，若不是请举一例 .