离散数学1

上海大学　2012～2013 学年 秋 季学期试卷

成绩	

课程名：离散数学（一）课程号：08305003 学分：4 （A 卷）

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人＿＿＿＿＿＿ 应试人学号＿＿＿＿＿＿＿ 应试人所在院系＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

得分	

一、选择（10 分，每小题 2 分）

1、设 $S=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$，下面不正确是（ D ）

A．$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\subseteq S$　　B．$\varnothing\in S$

C．$\{\varnothing\}\subseteq S$　　D．$\{\{\varnothing\}\}\in S$

2、下列语句是命题的（ D ）

A．请勿吐痰！　　B．我们要努力学习。

C．你明天有空吗？　　D．不存在最大质数。

3、设 R 是集合 A 上的二元关系，I_A 是 A 上的恒等关系，$I_A\cup R$，则 R 是 A 上的（ A ）

A．自反关系　　B．传递关系

C．对称关系　　D．反对称关系

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

4、$A=\{1,2,3,4\}$，在 A 上定义等价关系

$$R=\{<a,b>\mid \text{a+b 为偶数}\},$$

则商集 A/R 是（ D ）

A. $\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$　　B. $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

C. $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$　　D. $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$

5、考虑定义在整数集上的函数 $f:Z\to Z$，则下列函数是双射的是（ C ）

A. $f(x)=2x$　　B. $f(x)=x^2$

C. $f(x)=x+1$　　D. $f(x)=5$

得分	

二、判断是非正确的打“√”，否则打“×”（10 分，每小题 2 分）

1、北京与天津的距离很近是复合命题。（×）

2、闭式在给定的解释中变成命题。（√）

3、非空集合 A 上的关系 R 如果不是对称的一定是反对称的。（×）

4、R_1 和 R_2 分别是非空集合 A 上的关系，若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1\cup R_2$ 也是传递的。（×）

5、若 $f:A\to B$；$g:B\to C$ 是满射的，则 $f\circ g$ 是满射；反之亦然。（×）

三、计算题（40 分，每小题 10 分）

得分	

1、有父亲(A)、母亲(B)和三个孩子(C，D，E)组成的一个家庭，关于家中哪几个人看了电视的问题，有以下几种正确说法：

(1) A 在看电视时，B 也在看；

(2) D 和 E 或两人都看，或者他们之中的一个看了；

(3) B 和 C 只有一人看了；

(4) C 和 D 或者两人都看，或者两人都没看；

(5) 如果 E 看了，那么 A 和 D 也看了.

请用主范式证明到底哪几个人看了电视？

解： 设命题变项 A、B、C、D 和 E 分别表示 A、B、C、D 和 E 看了电视；

(1) $\Leftrightarrow A\rightarrow B$ (1 分)　(2) $\Leftrightarrow D\vee E$ (1 分)

(3) $\Leftrightarrow (B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C)$ (1 分)　(4) $\Leftrightarrow C\leftrightarrow D$ (1 分)

(5) $\Leftrightarrow E\rightarrow(A\wedge D)$ (1 分)

从而，同时满足上述说法的命题公式为

$(A\rightarrow B)\wedge(D\vee E)\wedge((B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C))\wedge(C\leftrightarrow D)\wedge(E\rightarrow(A\wedge D))$ (1 分)

$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B\Leftrightarrow\Pi(16,\ldots,23)$

$D\vee E\Leftrightarrow\Pi(0,4,8,12,16,20,24,28)$

$(B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C)\Leftrightarrow(B\vee C)\wedge(\neg B\vee\neg C)\Leftrightarrow\Pi(0,\ldots,3,12,\ldots,19,28,\ldots,31)$

$C\leftrightarrow D\Leftrightarrow(\neg C\vee D)\wedge(C\vee\neg D)\Leftrightarrow\Pi(2,\ldots,5,10,\ldots,13,18,\ldots,21,26,\ldots,29)$

$E\rightarrow(A\wedge D)\Leftrightarrow\neg E\vee(A\wedge D)\Leftrightarrow(\neg E\vee A)\wedge(\neg E\vee D)\Leftrightarrow\Pi(1,3,5,7,9,11,13,15,17,21,25,29)$

因此，原式$\Leftrightarrow\Pi(0,\ldots5,7,\ldots,31)\Leftrightarrow\Sigma(6)$ (3 分)

因此，看电视的人为 C 和 D。 (1 分)

2、设集合 $A=\{a，b，c，d\}$上的二元关系

$$R=\{<a,a>,<b,c>,<b,d>,<c,a>,<d,a>\}$$

（1）写出 R 的自反闭包 $r(R)$；（3 分）

（2）写出 R 的对称闭包 $s(R)$；（3 分）

（3）用 Warshall 算法求出传递闭包 $t(R)$的关系矩阵。（4 分）

解： $r(R)=R\cup\{<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$；

$s(R)=R\cup\{<c,b>,<d,b>,<a,c>,<a,d>\}$；

$$M_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

(M_1 到 M_4 每个 1 分)

、公式 $\forall x_1(F(x_1)\to\exists x_2G(x_1,x_2))\to(\exists x_2(H(x_2)\to\forall x_3G(x_2,x_3)))$

1) 在给定解释 I：个体域 $D=\{a,b\}$, $F(a)=1$, $F(b)=0$, $H(a)=0$, $H(b)=1$,

$G(a,a)=G(b,b)=1$, $G(a,b)=G(b,a)=0$，求上述公式的真值；（5 分）

2) 求上述公式的前束范式。（5 分）

解：(1) 消量词得：

原式$\Leftrightarrow((F(a)\to(G(a,a)\vee G(a,b))\wedge(F(b)\to(G(b,a)\vee G(b,b)))\to$

$((H(a)\to(G(a,a)\wedge G(a,b)))\vee(H(b)\to(G(b,a)\wedge G(b,b)))$

$\Leftrightarrow((1\to(1\vee 0))\wedge(0\to(0\vee 1)))\to((0\to(1\wedge 0))\vee(1\to(0\wedge 1)))$

$\Leftrightarrow(1\wedge 1)\to(1\vee 0)\Leftrightarrow 1$

(2) 原式 $\Leftrightarrow\forall x_1(F(x_1)\to\exists x_2G(x_1,x_2))\to(\exists x_4(H(x_4)\to\forall x_3G(x_4,x_3)))$

$\Leftrightarrow\forall x_1\exists x_2(F(x_1)\to G(x_1,x_2))\to(\exists x_4\forall x_3(H(x_4)\to G(x_4,x_3)))$

$\Leftrightarrow\exists x_1\forall x_2\exists x_4\forall x_3((F(x_1)\to G(x_1,x_2))\to(H(x_4)\to G(x_4,x_3)))$

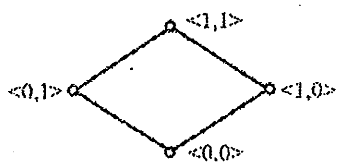
4、已知 $A=\{<1,1>,<1,0>,<0,1>,<0,0>\}$， 规定 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 为：

$$<a,b> \preccurlyeq <c,d> \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$$

（1）画出偏序集 $<A, \preccurlyeq>$ 的哈斯图；（4 分）

（2）令 $B=\{<1,1>,<1,0>,<0,1>\}$，求出 B 的最大元、最小元、极大元、极小元、上确界和下确界。（如果不存在则指明不存在）（6 分）

解：(1)



(2) 最大元：<1,1>；最小元：无；极大元：<1,1>；极小元：<0,1>和<1,0>；上确界：<1,1>；下确界：<0,0>。

得分	

四、证明（40 分，每小题 10 分）

1、设 R 是非空集合 A 上的关系，若 $\operatorname{dom} R = A$，证明：$R \circ R^{-1}$ 是自反的关系。

证：对 $\forall x \in A = \operatorname{dom} R$，$\exists y \in A$，使得 $<x, y> \in R$，从而 $<y, x> \in R^{-1}$，因此

$$(<x, y> \in R \wedge <y, x> \in R^{-1}) \to <x, x> \in R \circ R^{-1}$$

即，$R \circ R^{-1}$ 是自反的关系。

2、R 是集合 A 上的二元关系。对于所有的 a、b、$c \in A$，如果 aRb, bRc，

则 cRa，那么称 R 是循环关系。

证明: R 是自反和循环的当且仅当 R 是一等价关系。

证：(1) 充分性：只需证明 R 是对称和传递的。

对称性：对$\forall <x,y>\in R$，由 R 是自反的可知$<y,y>\in R$，从而

$$(<x,y>\in R \wedge <y,y>\in R) \rightarrow <y,x>\in R \qquad (3\text{ 分})$$

传递性：对$\forall <x,y>\in R, <y,z>\in R$，则

$$(<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R) \rightarrow <z,x>\in R \qquad (3\text{ 分})$$

由 R 是对称的，从而$<x,z>\in R$。

(2)必要性：只需证明 R 是循环的。

对$\forall <x,y>\in R, <y,z>\in R$，则由传递性知

$(<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R) \rightarrow <x,z>\in R$

再由 R 是对称的，有$<z,x>\in R$，证毕。 (4 分)

3、设 $f: A \to B, g: B \to C$ 是两个函数，证明：

(1) 若 $f \circ g$ 是满射且 g 是单射，则 f 是满射；（5 分）

(2) 若 $f \circ g$ 是单射且 f 是满射，则 g 是单射。（5 分）

证明：(1) $\forall y \in B$，$g(y) = z$，因为 $f \circ g: A \to C$ 是满射，则存在 $x \in A$，使得 $f \circ g(x) = z = g(f(x))$，因 g 是单射，有 $y = f(x)$，即 $\forall y \in B$，存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$，则 f 是满射。

(2) 反证法：设 g 不是单射，则存在 $y_1, y_2 \in B$，且 $y_1 \neq y_2$，使得 $g(y_1) = g(y_2) = z$。因 f 是满射，则存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f(x_1) = y_1$，$f(x_2) = y_2$，从而有

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = z, \quad 即 \quad f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2) = z$$

由 $f \circ g$ 是单射可知，$x_1 = x_2$，从而有 $y_1 = y_2$。

、在自然推理系统 P 中证明，

前提：$(p\wedge q)\to r, \neg r\vee s, \neg s, p$

结论：$\neg q$

明：　方法一：直接法

①$\neg s$	前提引入
②$\neg r\vee s$	前提引入
③$\neg r$	①②析取三段论
④$(p\wedge q)\to r$	前提引入
⑤$\neg(p\wedge q)$	③④拒取式
⑥$\neg p\vee\neg q$	⑤德摩根律置换
⑦p	前提引入
⑧$\neg q$	⑥⑦析取三段论

方法二：归谬法

①q	结论的否定引入
②p	前提引入
③$p\wedge q$	①②合取引入
④$(p\wedge q)\to r$	前提引入
⑤r	③④假言推理
⑥$\neg r\vee s$	前提引入
⑦s	⑤⑥析取三段论
⑧$\neg s$	前提引入
⑨$s\wedge\neg s$	⑦⑧合取，矛盾

还有其它证明方法，上述方法以供参考，每个推理步骤 1-2 分。

上海大学 2005~2006 学年春季学期试卷(A 卷)

课程名：离散数学(一)　　学分：4　(闭卷)

学号：________　姓名：参考答案　院系：________

成绩	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

得分	

一、(10 分)数学分析关于极限 $\lim_{x\to a} f(x)=b$ 的定义为：任意给定小正数 ε，则存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时有 $|f(x)-b|<\varepsilon$。

(1)用谓词公式表达上述定义。

(2)将上述谓词公式化为前束范式。

$(\forall\varepsilon)(P(\varepsilon,0) \to (\exists\delta)(P(\delta,0) \wedge \forall(x)(P(\delta,|x-a|) \to P(\varepsilon,|f(x)-b|)$

(1)：谓词公式(5分)

定义谓词：$P(x,y)$：$x>y$

$$(\forall\varepsilon)\Big(P(\varepsilon,0)\to(\exists\delta)\big(P(\delta,0)\wedge(\forall x)\big(P(\delta,|x-a|)\to P(\varepsilon,|f(x)-b|)\big)\big)\Big)$$

①　②　③　④　⑤

(2)：前束公式(5分)

$$(\forall\varepsilon)\Big(P(\varepsilon,0)\to(\exists\delta)\big(P(\delta,0)\wedge(\forall x)\big(P(\delta,|x-a|)\to P(\varepsilon,|f(x)-b|)\big)\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)\Big(P(\varepsilon,0)\to\big(P(\delta,0)\wedge\big(P(\delta,|x-a|)\to P(\varepsilon,|f(x)-b|)\big)\big)\Big)$$

得分	

二、(10 分)求 $P \Leftrightarrow (Q \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式。

证法一：求主合取范式(5分)

$P \Leftrightarrow (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \to Q \wedge R) \wedge (Q \wedge R \to P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (\neg (Q \wedge R) \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

证法二：求主析取范式(5分)

$P \Leftrightarrow (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg (Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

证法三：真值表法 4分 4分

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \Leftrightarrow (Q \wedge R)$	m	M
F	F	F	F	T	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	
F	F	T	F	T	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	
F	T	F	F	T	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	
F	T	T	T	F		$P \vee \neg Q \vee \neg R$
T	F	F	F	F		$\neg P \vee Q \vee R$
T	F	T	F	F		$\neg P \vee Q \vee \neg R$
T	T	F	F	F		$\neg P \vee \neg Q \vee R$
T	T	T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$	

主析取范式为：$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$(1分)

主合取范式为：$(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$(1分)

三、(10分)用推理规则证明:

(1)用直接证法证明: $S\to\neg Q$, $\neg P \quad Q$, $S\vee R$, $\neg R\Rightarrow P$

(2)用CP规则证明: $P\vee Q$, $P\to R$, $S\to(Q\to R)\Rightarrow S\to R$

得分	

(1)证明: 5分

1)	$S\vee R$	P	
2)	$\neg S\to R$	$T_{1)}$	E_{16}
3)	$S\to\neg Q$	P	
4)	$Q\to\neg S$	$T_{3)}$	E_{18}
5)	$\neg P \quad Q$	P	
6)	$(\neg P\to Q)\wedge(Q\to\neg P)$	$T_{5)}$	E_{20}
7)	$\neg P\to Q$	$T_{6)}$	I_1
8)	$\neg P\to\neg S$	$T_{4)7)}$	I_{13}
9)	$\neg P\to R$	$T_{2)8)}$	I_{13}
10)	$\neg R\to P$	$T_{9)}$	E_{18}
11)	$\neg R$	P	
12)	P	$T_{10)11)}$	I_{11}

(2)证明: 5分

1)	S	$P(AD)$	
2)	$P\vee Q$	P	
3)	$P\to R$	P	
4)	$S\to(Q\to R)$	P	
5)	$Q\to R$	$T_{1)4)}$	I_{11} ✓
6)	R	$T_{2)3)5)}$	I_{14}
7)	$S\to R$	CP规则	

得分	

四、(10 分)用推理规则证明:

(1)用反证法证明: $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

(2)用直接证法证明: $(\forall x)\neg P(x)$, $(\exists y)(R(y) \wedge S(y)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

$$\Rightarrow (\forall y)(R(y) \rightarrow \neg S(y))$$

(1)证明: 5分

1)	$\neg((\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$	$P(AD)$	
2)	$\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)$	$T_{1)}$	E_9
3)	$\neg(\forall x)P(x)$	$T_{2)}$	
4)	$(\exists x)\neg P(x)$	$T_{3)}$	E_{26}
5)	$\neg(\exists x)Q(x)$	$T_{2)}$	
6)	$(\forall x)\neg Q(x)$	$T_{5)}$	E_{25}
7)	$\neg P(a)$	$ES_{4)}$	
8)	$\neg Q(a)$	$US_{6)}$	
9)	$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	P	
10)	$P(a) \vee Q(a)$	$US_{9)}$	
11)	$Q(a)$	$T_{7)10)}$	I_{10}
12)	$\neg Q(a) \wedge Q(a)$	$T_{8)11)}$ 矛盾	I_9

(2)证明: 5分

1)	$(\forall x)\neg P(x)$	P	
2)	$\neg P(a)$	$US_{1)}$	
3)	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	$T_{2)}$	I_3
4)	$\neg(P(a) \wedge Q(a))$	$T_{3)}$	E_8
5)	$(\forall x)\neg(P(x) \wedge Q(x))$	$UG_{4)}$	
6)	$\neg(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	$T_{5)}$	E_{25}
7)	$(\exists y)(R(y) \wedge S(y)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	P	
8)	$\neg(\exists y)(R(y) \wedge S(y))$	$T_{6)7)}$	I_{12}
9)	$(\forall y)\neg(R(y) \wedge S(y))$	$T_{8)}$	E_{25}
10)	$\neg(R(b) \wedge S(b))$	$US_{9)}$	
11)	$\neg R(b) \vee \neg S(b)$	$T_{10)}$	E_8
12)	$R(b) \rightarrow \neg S(b)$	$T_{11)}$	E_{16}
13)	$(\forall y)(R(y) \rightarrow \neg S(y))$	$UG_{12)}$	

4

五、(10 分)

(1)对谓词公式 $(\forall x)R(x,y)\vee(\forall y)P(x,y)\wedge(\exists y)Q(x,y)$ 中的自由变元进行代入。

(2)对谓词公式 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 先消去量词后求真值。其中，

论域 $D=\{1,2\}$， $P(1,1)\Leftrightarrow P(2,1)\Leftrightarrow F$； $P(1,2)\Leftrightarrow P(2,2)\Leftrightarrow T$。

得分	

(1) 代入 (5分)

$$\left(\forall \underset{1}{x}\right)R\left(\underset{1}{x},\underset{1}{y}\right)\vee\left(\forall \underset{2}{y}\right)P\left(\underset{2}{x},\underset{2}{y}\right)\wedge\left(\exists \underset{3}{y}\right)Q\left(\underset{2}{x},\underset{3}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)R(x,a)\vee(\forall y)P(b,y)\wedge(\exists z)Q(b,z)$$

(2) 求值 (5分)

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y)\Leftrightarrow(\forall x)\big(P(x,1)\vee P(x,2)\big)$$

$$\Leftrightarrow\big(P(1,1)\vee P(1,2)\big)\wedge\big(P(2,1)\vee P(2,2)\big)$$

$$\Leftrightarrow(F\vee T)\wedge(F\vee T)\Leftrightarrow T\wedge T\Leftrightarrow T$$

5

六、(10 分)对于任意集合 A 和 B，Φ 是空集，E 是全集，证明以下三个命题彼此等价：

$A-B=\Phi$，　$A\subseteq B$，　$A\cup B=E$。

得分	

证明(1)：$A-B=\Phi\Rightarrow A\subseteq B$　(4分)

$\because A-B=\Phi\Rightarrow A\cap\sim B=\Phi\Rightarrow B\cup(A\cap\sim B)=B\cup\Phi$

$\Rightarrow(B\cup A)\cap(B\cup\sim B)=B\Rightarrow(B\cup A)\cap E=B\Rightarrow B\cup A=B\overset{\because A\subseteq B\cup A}{\Rightarrow}A\subseteq B$

证明(2)：$A\subseteq B\Rightarrow\sim A\cup B=E$　(3分)

$\because A\subseteq B\Rightarrow\sim A\cup A\subseteq\sim A\cup B\Rightarrow E\subseteq\sim A\cup B\overset{\because\sim A\cup B\subseteq E}{\Rightarrow}\sim A\cup B=E$

证明(3)：$\sim A\cup B=E\Rightarrow A-B=\Phi$　(3分)

$\because\sim A\cup B=E\Rightarrow\sim(\sim A\cup B)=\sim E\Rightarrow A\cap\sim B=\Phi\Rightarrow A-B=\Phi$

由上述结论得到以上三个命题彼此等价。

6

七、(10分)对于任意集合A、B和C，证明：

得分

(1)$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

(2)$(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

证明(1)：(5分)

Set $<x,y>\in(A-B)\times C \Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C \Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B)\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge\neg(x\in B)\wedge y\in C)\vee(x\in A\wedge\neg(y\in C)\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(\neg(x\in B)\vee\neg(y\in C))\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow<x,y>\in(A\times C)\wedge\neg(<x,y>\in(B\times C))\Leftrightarrow<x,y>\in(A\times C)-(B\times C)$

$\because$ $<x,y>$是任意取的， $\therefore$ $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

证明(2)：(5分)

$(A\oplus B)\times C=((A-B)\cup(B-A))\times C=((A-B)\times C)\cup((B-A)\times C)$

$=((A\times C)-(B\times C))\cup((B\times C)-(A\times C))=(A\times C)\oplus(B\times C)$

八、(10 分)设 R 是集合 A 上的二元关系，证明：

(1)若 R 对称，则 $r(R)$ 对称。

(2)$ts(R) \supseteq st(R)$。

得分	

证明(1)：(5分)

$\because\ r(R) = R \cup I_A \overset{R对称}{=} R^c \cup I_A^c = (R \cup I_A)^c = (r(R))^c$

$\therefore\ r(R)$对称

证明(2)：(5分)

$\because\ s(R) \supseteq R \Rightarrow ts(R) \supseteq t(R) \Rightarrow sts(R) \supseteq st(R)$

又$\because\ s(R)$对称$\Rightarrow ts(R)$对称$\Leftrightarrow sts(R) = ts(R)$

$\therefore\ ts(R) \supseteq st(R)$

九、(10 分)定义实数集 R 上的二元关系 $S=\left\{<x,y>\left|\frac{x-y}{2}\in I\right.\right\}$，$I$ 为整数集。

(1)证明：S 是 R 上的等价关系。

(2)求山等价关系 S 所产生的 1 的等价类 $[1]_S$ 和 1/4 的等价类 $\left[\frac{1}{4}\right]_S$。

得分	

证明(1)：(6分)

1) $a\in R\Rightarrow\frac{a-a}{2}=0\in I\Rightarrow<a,a>\in S$ $\because a$是任意取的 $\therefore S$自反

2) $a,b\in R\wedge<a,b>\in S\Rightarrow\frac{a-b}{2}=t\in I\Rightarrow\frac{b-a}{2}=-t\in I\Rightarrow<b,a>\in S$

$\because$ $<a,b>$是任意取的 $\therefore S$对称

3) $a,b,c\in R\wedge<a,b>\in S\wedge<b,c>\in S\Rightarrow\frac{a-b}{2}=t_1\in I\wedge\frac{b-c}{2}=t_2\in I$

$\Rightarrow\frac{a-c}{2}=t_1+t_2\in I\Rightarrow<a,c>\in S$ $\because$ $<a,b>$和$<b,c>$是任意取的 $\therefore S$传递

$\therefore$ S是R上的等价关系

证明(2)：(4分)

$$[1]_S=\left\{a\left|\frac{1-a}{2}\in I\right.\right\}=\{a|a\in 1-2I\}=\{\cdots,-3,-1,1,3,\cdots\}$$

$$\left[\frac{1}{4}\right]_S=\left\{a\left|\frac{\frac{1}{4}-a}{2}\in I\right.\right\}=\left\{a\left|a\in\frac{1}{4}-2I\right.\right\}=\left\{\cdots,-\frac{15}{4},-\frac{7}{4},\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{17}{4},\cdots\right\}$$

得分	

十、(10分)设函数 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$，证明:

(1)若 f 和 g 均满射，则复合函数 $g \circ f$ 满射。

(2)若 f 和 g 均入射，则复合函数 $g \circ f$ 入射。

证明(1)：(5分)

$$z \in Z \overset{g满射}{\Rightarrow} (\exists y)(y \in Y \wedge g(y) = z) \overset{f满射}{\Rightarrow} (\exists y)((\exists x)(x \in X \wedge f(x) = y) \wedge g(y) = z)$$

$$\Rightarrow (\exists x)(x \in X \wedge g(f(x)) = z) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X \wedge g \circ f(x) = z)$$

$\because z$是任意取的 $\therefore$复合函数$g \circ f$满射

证明(2)：(5分)

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g入射}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f入射}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

$\because x_1, x_2$是任意取的 $\therefore$复合函数$g \circ f$入射

10

上海大学 2006~2007 学年春季学期试卷(A 卷)

成绩	

课程名：离散数学(一)　　课程号：08305003　　学分：4　(闭卷)

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人：__________　应试人学号：参考答案　应试人所在院系：__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

得分	

一、(10分) 设函数 $f: A \to B$，函数 $g: B \to A$，且复合函数 $g \circ f$ 为 A 上的恒等函数 I_A，试用定义证明：f 是入射的，g 是满射的。

证：因为复合函数 $g \circ f$ 为 A 上的恒等函数 I_A，所以对于任意 $x \in A$，都有 $g \circ f(x) = x$。

对于任意的 $x_1, x_2 \in A$，若 $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

所以，f 是入射的。

对于任意的 $x \in A \Rightarrow g \circ f(x) = x$

$$\stackrel{\text{复合函数定义}}{\Rightarrow} (\exists y)(y \in B \wedge f(x) = y \wedge g(y) = x)$$

$$\Rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge g(y) = x)$$

所以，g 是满射的。

21

二、(10 分) 简化下列命题公式：

得分	

(1) $\neg(P \to Q) \vee (P \to (P \wedge Q))$；

(2) $((A \uparrow A) \wedge B) \wedge (A \vee (B \downarrow B))$。

解：(1) $\neg(P \to Q) \vee (P \to (P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee (P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee \neg P \Leftrightarrow P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

(2) $((A \uparrow A) \wedge B) \wedge (A \vee (B \downarrow B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \wedge (A \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg B) \Leftrightarrow F \vee F \Leftrightarrow F$

三、(10 分) 求公式 $(\forall y)\neg P(x,y) \to (\exists y)((\forall z)Q(y,z) \wedge (\forall x)R(z,y))$ 的前束析取范式。

得分	

解：$(\forall y)\neg P(x,y) \to (\exists y)((\forall z)Q(y,z) \wedge (\forall x)R(z,y))$

去除多余量词

$\Leftrightarrow (\forall y)\neg P(x,y) \to (\exists y)((\forall z)Q(y,z) \wedge R(z,y))$

换名

$\Leftrightarrow (\forall a)\neg P(x,a) \to (\exists y)((\forall b)Q(y,b) \wedge R(z,y))$

蕴涵

$\Leftrightarrow \neg(\forall a)\neg P(x,a) \vee (\exists y)((\forall b)Q(y,b) \wedge R(z,y))$

深入

$\Leftrightarrow (\exists a)P(x,a) \vee (\exists y)((\forall b)Q(y,b) \wedge R(z,y))$

量词提前

$\Leftrightarrow (\exists a)(\exists y)(\forall b)[P(x,a) \vee (Q(y,b) \wedge R(z,y))]$

22

四、(10分) 根据下面真值表，求公式S的主析取范式和主合取范式。

得分

A	B	C	S
F	F	F	T
F	F	T	T
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	T
T	T	F	F
T	T	T	F

解:

m	M
$\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C$	
$\neg A\wedge\neg B\wedge C$	
	$A\vee\neg B\vee C$
$\neg A\wedge B\wedge C$	
$A\wedge\neg B\wedge\neg C$	
$A\wedge\neg B\wedge C$	
	$\neg A\vee\neg B\vee C$
	$\neg A\vee\neg B\vee\neg C$

公式S的主析取范式为：$\sum m_{0,1,3,4,5} \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5$

$$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)$$

公式S的主合取范式为：$\prod M_{2,6,7} \Leftrightarrow M_2\wedge M_6\wedge M_7$

$$\Leftrightarrow(A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)$$

五、(10分) 设集合$A=\varnothing$，ρ表示幂集。求$S=\rho(\rho(\rho(A)))$的值，并请说明$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$是$S$的元素，还是$S$的子集。

得分

解：$\rho(A)=\rho(\varnothing)=\{\varnothing\}$，$\rho(\rho(A))=\rho(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$。

$S=\rho(\rho(\rho(A)))=\rho(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$。

因为$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in S$，所以$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$是$S$中的元素；

因为$\varnothing\in S$，$\{\varnothing\}\in S$，所以$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$是$S$的子集。

得分	

六、(10 分) 用推理规则证明：$A\to\neg B,\ A\vee C,\ \neg D\leftrightarrow B\Rightarrow\neg C\to D$。

直接证法：

1)	$\neg D\leftrightarrow B$	P	
2)	$(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$	$T_{1)}$	E_{20}
3)	$\neg D\to B$	$T_{2)}$	I_1
4)	$\neg B\to D$	$T_{3)}$	E_{18}
5)	$A\to\neg B$	P	
6)	$A\to D$	$T_{4)5)}$	I_{13}
7)	$A\vee C$	P	
8)	$\neg A\to C$	$T_{7)}$	E_{16}
9)	$\neg C\to A$	$T_{8)}$	E_{18}
10)	$\neg C\to D$	$T_{6)9)}$	I_{13}得证

CP 规则：

1)	$\neg C$	P(附加前提)	
2)	$A\vee C$	P	
3)	A	$T_{1)2)}$	I_{10}
4)	$A\to\neg B$	P	
5)	$\neg B$	$T_{3)4)}$	I_{11}
6)	$\neg D\leftrightarrow B$	P	
7)	$(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$	$T_{6)}$	E_{20}
8)	$\neg D\to B$	$T_{7)}$	I_1
9)	D	$T_{5)8)}$	I_{12}
10)	$\neg C\to D$	CP规则	得证

反证法：

1)	$\neg(\neg C\to D)$	P(附加前提)	
2)	$\neg C$	$T_{1)}$	I_7
3)	$A\vee C$	P	
4)	A	$T_{2)3)}$	I_{10}
5)	$A\to\neg B$	P	
6)	$\neg B$	$T_{4)5)}$	I_{11}
7)	$\neg D\leftrightarrow B$	P	
8)	$(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$	$T_{7)}$	E_{20}
9)	$\neg D\to B$	$T_{8)}$	I_1
10)	$\neg D$	$T_{1)}$	I_8
11)	B	$T_{10)}$	I_{11}
12)	$B\wedge\neg B$矛盾	$T_{6)11)}$	I_9得证

1) $A\vee C$ P
2) $\neg C\to A$ T①E
3) $A\to\neg B$ P
4) $\neg C\to\neg B$ T②③I
5) $\neg D\Leftrightarrow B$ P
6) $(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$ T⑤E
7) $\neg D\to B$ T⑥I
8) $\neg B\to D$ T⑦E
9) $\neg C\to D$ T④⑧I

$\neg A\vee\neg B$
$A\vee C$
$D\vee B$ $\neg B\vee\neg D$
$\neg C$

① $\neg C$
② $A\vee C$
③ A
④ $\neg A\vee\neg B$
⑤ $\neg B$
⑥ $B\vee D$
⑦ D

24

七、(10 分) 设S,R是集合A上的等价关系，试证明：$R\circ S$是集合A上的等价关系当且仅当$R\circ S=S\circ R$。

得分	

证：若S,R是集合A上的等价关系，则满足自反性、对称性、传递性。

("⇐") 1) 对于任意的$a\in A \overset{S,R满足自反性}{\Longrightarrow} \langle a,a\rangle\in R\wedge\langle a,a\rangle\in S\Rightarrow\langle a,a\rangle\in R\circ S$，

所以$R\circ S$满足自反性；

2) 对于任意的$a,b\in A\wedge\langle a,b\rangle\in R\circ S\Rightarrow(\exists c)(\langle a,c\rangle\in R\wedge\langle c,b\rangle\in S)$

$\overset{S,R满足对称性}{\Longrightarrow}(\exists c)(\langle c,a\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S)\Rightarrow\langle b,a\rangle\in S\circ R\overset{R\circ S=S\circ R}{\Longrightarrow}\langle b,a\rangle\in R\circ S$，

所以$R\circ S$满足对称性；

3) 对于任意的$a,b,c\in A\wedge\langle a,b\rangle\in R\circ S\wedge\langle b,c\rangle\in R\circ S\Rightarrow\langle a,c\rangle\in(R\circ S)\circ(R\circ S)$

$\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{\Longleftrightarrow}}\langle a,c\rangle\in R\circ(S\circ R)\circ S\overset{S\circ R=R\circ S}{\Longleftrightarrow}\langle a,c\rangle\in R\circ(R\circ S)\circ S$

$\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{\Longleftrightarrow}}\langle a,c\rangle\in(R\circ R)\circ(S\circ S)\Rightarrow(\exists d)(\langle a,d\rangle\in R\circ R\wedge\langle d,c\rangle\in S\circ S)$

$\Rightarrow(\exists d)((\exists t)(\langle a,t\rangle\in R\wedge\langle t,d\rangle\in R)\wedge(\exists s)(\langle d,s\rangle\in S\wedge\langle s,c\rangle\in S))$

$\overset{S,R满足传递性}{\Longrightarrow}(\exists d)(\langle a,d\rangle\in R\wedge\langle d,c\rangle\in S)\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R\circ S$，所以$R\circ S$满足传递性。

综上所述，$R\circ S$是集合A上的等价关系。

("⇐") 对于任意的关系$C\subseteq D\wedge E\subseteq F\Rightarrow C\circ E\subseteq D\circ F$

1) 由$\left.\begin{array}{l}S满足自反性\Leftrightarrow I_A\subseteq S\\R满足自反性\Leftrightarrow I_A\subseteq R\end{array}\right\}\Rightarrow I_A=I_A\circ I_A\subseteq R\circ S\Leftrightarrow R\circ S$满足自反性；

2) 由$\left.\begin{array}{l}S满足对称性\Leftrightarrow S=S^C\\R满足对称性\Leftrightarrow R=R^C\end{array}\right\}\Rightarrow R\circ S=R^C\circ S^C=(S\circ R)^C\overset{R\circ S=S\circ R}{=}(R\circ S)^C$

所以：$R\circ S$满足对称性；

3) 由$\left.\begin{array}{l}S满足传递性\Leftrightarrow S\circ S\subseteq S\\R满足传递性\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R\end{array}\right\}\Rightarrow(R\circ R)\circ(S\circ S)\subseteq R\circ S$

又因为$(R\circ R)\circ(S\circ S)\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{=}}R\circ(R\circ S)\circ S\overset{R\circ S=S\circ R}{=}R\circ(S\circ R)\circ S\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{=}}(R\circ S)\circ(R\circ S)$，

所以$(R\circ S)\circ(R\circ S)\subseteq R\circ S$，即$R\circ S$满足传递性，

综上所述，$R\circ S$是集合A上的等价关系。

("⇒") 若$R\circ S$是集合A上的等价关系，则满足自反性、对称性、传递性。

对于任意的$\langle x,z\rangle\in R\circ S\overset{R\circ S满足对称性}{\Longleftrightarrow}\langle z,x\rangle\in R\circ S\Leftrightarrow(\exists y)(y\in A\wedge\langle z,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in S)$

$\overset{R,S满足对称性}{\Longleftrightarrow}(\exists y)(y\in A\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S)\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ R$。所以，$R\circ S=S\circ R$。

25

得分	

八、(10 分) 对谓词公式 $(\exists x)(\forall y)\big(H(f(x))\vee G(y,f(x))\big)$ 先消去量词后求真值。其中，对于任意的 x,y 属于个体域 $D=\{2,3\}$，

$$f(x)=\begin{cases}3 & x=2\\ 2 & x=3\end{cases},\quad H(x)=\begin{cases}F & x=2\\ T & x=3\end{cases},\quad G(x,y)=\begin{cases}F & x=y\\ T & x\neq y\end{cases}。$$

解：$(\exists x)(\forall y)\big(H(f(x))\vee G(y,f(x))\big)$

$$\Leftrightarrow(\exists x)\Big[\big(H(f(x))\vee G(2,f(x))\big)\wedge\big(H(f(x))\vee G(3,f(x))\big)\Big]$$

$$\Leftrightarrow\Big[\big(H(f(2))\vee G(2,f(2))\big)\wedge\big(H(f(2))\vee G(3,f(2))\big)\Big]\vee$$

$$\Big[\big(H(f(3))\vee G(2,f(3))\big)\wedge\big(H(f(3))\vee G(3,f(3))\big)\Big]$$

$$\Leftrightarrow\Big[\big(H(3)\vee G(2,3)\big)\wedge\big(H(3)\vee G(3,3)\big)\Big]\vee\Big[\big(H(2)\vee G(2,2)\big)\wedge\big(H(2)\vee G(3,2)\big)\Big]$$

$$\Leftrightarrow\big[(T\vee T)\wedge(T\vee F)\big]\vee\big[(F\vee F)\wedge(F\vee T)\big]$$

$$\Leftrightarrow(T\wedge T)\vee(F\wedge T)$$

$$\Leftrightarrow T\vee F\Leftrightarrow T$$

得分	

九、(10 分) 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，构造一个以 $\{a,b\},\{c,d,e\},\{f\}$ 为全部等价类的 A 上的等价关系 R，并证明 R 是 A 上的等价关系。

解：$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,$

$\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,c\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,$

$\langle f,f\rangle\}$

证：1) 因为 $R\supseteq I_A$，所以 R 是自反的；

2) 因为 $R=R^C=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,$

$\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,c\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle\}$，所以 R 是对称的；

3) 因为 $R\circ R=R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,$

$\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,c\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle\}$，

所以，由 $R\circ R\subseteq R$ 知 R 是传递的。

综上所述，R 是 A 上的等价关系。

27

十、(10 分) 设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的二元关系，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

得分	

(1) 求：M_R、$M_{r(R)}$、$M_{s(R)}$；

(2) 用 *WarShall* 算法求 $M_{t(R)}$。

解：(1) $M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$M_{r(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，$M_{s(R)}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

(2) 使用 *WarShall* 算法

第一列情况：$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，第二列情况：$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

第三列情况：$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$，第四列情况：$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$。

所以，$M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$。

28