离散数学复习题

二元关系和函数部分

1、 已知R⊆A×A，且A={1，2，3，4，5}，R的关系矩阵M_R如下，求R的自反、对称和传递闭包的矩阵$M_{r(R)}$、$M_{s(R)}$、$M_{t(R)}$。

要求用矩阵计算法和Warshall两种算法求$M_{t(R)}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

2、设A={1,2,3,6,9}，在A×A上定义关系R：如果a+d=b+c, 则<a, b>R<c, d>。

证明：（1）R是等价关系。

（2）求$[<3，6>]_R$

3、设A＝{a，b，c}，求A上所有等价关系。

4、已知R是A上的自反关系，

(1) 证明$R\circ R^{-1}$是A上的自反关系；

(2) 证明$R\circ R^{-1}$是A上的对称关系；

(3) $R\circ R^{-1}$是否为A上的传递关系？如果是，给出证明；如果不是，给出反例。

5、集合A={1,2,3,4,5}上划分为S={{1,2},{3,4,5}}

写出由S导出的A上等价关系ρ;

画出ρ的关系图，求Mρ。

6、设A={1，2，……，10}，在A上的小于等于关系R是偏序关系。（1）画出哈斯图；（2）求出其子集B_1={1，2，3}和B_2={8，9，10}以及B_3=A中的所有重要元素（最大值、最小值、极大值、极小值、上界、下界、上确界、下确界）。

7、设A={2，3，4，6，9，12，18}上的整除关系R是偏序关系。（1）画出哈斯图；（2）求出其子集B_1={2，4}和B_2={4，6，9}以及B_3=A中的所有重要元素（最大值、最小值、极大值、极小值、上界、下界、上确界、下确界）。

8、设有函数$f(x)=x^2-2$，$g(x)=x+4$，$x\in R$，

求（1）$f\circ g$

（2）$g\circ f$

（3）f和g中有逆函数吗？如有则给出其逆函数。

9、证明：

（1）若$f\circ g$是单射，则f是单射的；

（2）若$f\circ g$是满射，则g是满射的。

答案1

1、

$$M_{r(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

答案2

2、（1）　证：i) <a，b>∈A×A， a＋b＝b＋a

∴<a，b> R <a，b>自反性成立

ii) <a，b>，<c，d>∈A×A，且<a，b> R <c，d>

有a＋d＝b＋c，则c＋b＝d＋a

∴<c，d> R <a，b>对称性成立

iii) <a，b>，<c，d>，<e，f>∈A×A，

且<a，b> R <c，d>，<c，d> R <e，f>

∴a＋d＝b＋c且c＋f＝的d＋e。

∴a＋f＝b＋e

∴<a，b> R <e，f>传递性成立

由以上三条知，R是等价关系

（2）解：[<3，6>]$_R$ ＝｛<1，4>，<2，5>，<3，6>，<4，7>，<5，8>，<6，9>｝

3＋d＝6＋c 其中1≤c，d≤9

即d－c＝3

答案3

3、解：集合A的所有划分为：

由划分取得A上所有的等价关系为：

$R_1 = I_A \cup \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

$R_2 = I_A \cup \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

$R_3 = I_A \cup \{\langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$

$R_4 = I_A$

$R_5 = I_A \cup \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

答案4

4、(1) 任取$x \in A$，则 $<x,x> \in R$

$\Rightarrow <x,x> \in R \wedge <x,x> \in R$

$\Rightarrow <x,x> \in R \wedge <x,x> \in R^{-1}$

$\Rightarrow <x,x> \in R \circ R^{-1}$

(2) 任取$x \in A$，则 $<x,y> \in R \circ R^{-1}$

$\Rightarrow \exists z(<x,z> \in R \wedge <z,y> \in R^{-1})$ （合成运算定义）

$\Rightarrow \exists z(<y,z> \in R \wedge <z,x> \in R^{-1})$ （逆关系定义）

$\Rightarrow <y,x> \in R \circ R^{-1}$ （合成运算定义）

(3)不一定。反例：集合A={1,2,3}，R={<1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,2>, <2,3>}, 则$R \circ R^{-1}$={={<1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,2>, <2,1>, <2,3>, <3,2>}，上述关系中包含 <1,2>, <2,3>, 缺少<1,3>，因此不是传递的。

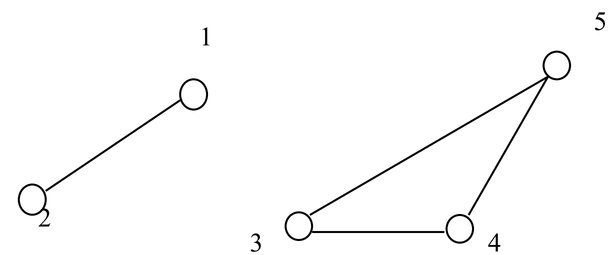
答案5

5、解：（1）$\rho=\{\{1,2\}\times\{1,2\}\}\cup\{\{3,4,5\}\times\{3,4,5\}\}$

$=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}\cup\{<3,3>,<3,4>,<3,5>,<4,3>,<4,4>,<4,5>,<5,3>,<5,4>,<5,5>\}$

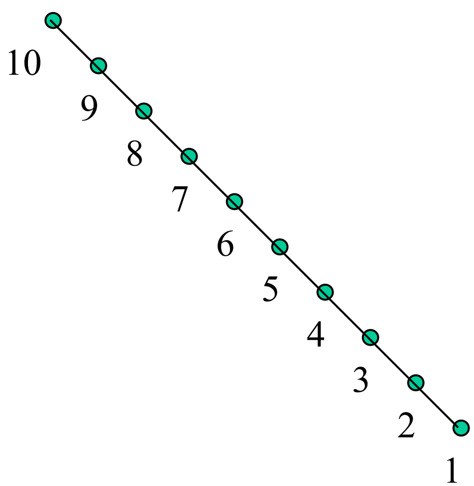
$=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,<4,3>,<4,4>,<4,5>,<5,3>,<5,4>,<5,5>\}$

$$\mathbf{M\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



答案6

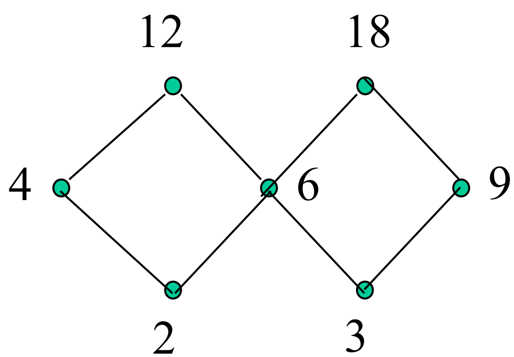
6、解：<A,<=>的哈斯图如下所示



	B_1 ={1，2，3}	B_1 ={8，9，10}	B_3=A
最大元	3	10	10
最小元	1	8	1
极大元	3	10	10
极小元	1	8	1
上界	3,4,…,10	10	10
上确界	3	10	10
下界	1	1,2,…,8	1
下确界	1	8	1

答案7

7、解：<A,|>的哈斯图如下所示



	B_1 ={2，4}	B_1 ={4，6，9}	B_3=A
最大元	4	无	无
最小元	2	无	无
极大元	4	4,6,9	12,18
极小元	2	4,6,9	2,3
上界	4,12	无	无
上确界	4	无	无
下界	2	无	无
下确界	2	无	无

答案8

8、解：（1）$f\circ g= g(f(x))=x^2+2$

（2）$g\circ f= f(g(x))=(x+4)^2-2=x^2+8x+14$

（3）f非双射函数，所以没有反函数；

g的反函数为：$g^{-1}(\mathrm{x})=x-4$

答案9

9、（1）若$f\circ g$是单射，则f是单射的；

证明：设 f：A→B， g：B→C， $f\circ g$： A→C

（f 单射意味着： $x1\neq x2 \Rightarrow f(x1)\neq f(x2)$ ）

因为$f\circ g$是单射，若$a1\neq a2$，则 $g(f(a1))\neq g(f(a2))$ ；

根据g是函数，若$g(f(a1))\neq g(f(a2))$ ，则$f(a1)\neq f(a2)$

根据单射判定定理可知f是单射的。

（2）若$f\circ g$是满射，则g是满射的。

证明：(f 满射意味着： $\forall y \in B$, 都存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$.）

因为$f\circ g$是满射，即$\forall c \in$C, 都存在 $a\in A$ 使得 $g(f(a))=c$成立

根据f是函数，存在$b\in$B，使得$f(a)=b$，即$g(b)=c$成立。