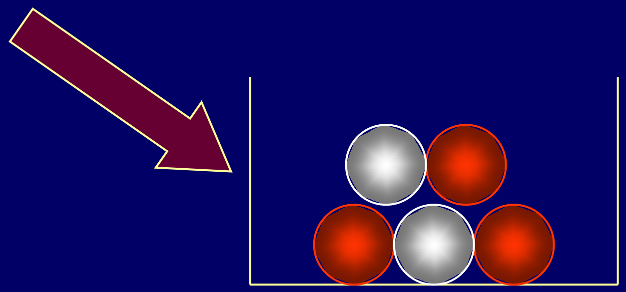
第二节 离散型随机变量及其分布律

- 离散型随机变量分布律的定义
- 离散型随机变量表示方法
- 三种常见分布
- 小结 布置作业

一、离散型随机变量分布律的定义

看一个例子

从中任取3 个球



取到的白球数X是一个随机变量 .

(1) X 可能取的值是0,1,2 ;

(2) 取每个值的概率为:

$$P\{X=0\}=\binom{3}{3}\Big/\binom{5}{3}=\frac{1}{10}$$

$$P\{X=1\}=\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{3}=\frac{6}{10}$$

$$P\{X=2\}=\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}\Big/\binom{5}{3}=\frac{3}{10}$$

定义1：某些随机变量*X*的所有可能取值是有限多个或可列无限多个，这种随机变量称为离散型随机变量．

定义2 ：设 $x_k\ (k=1,2,\ \ldots)$ 是离散型随机变量 X 所取的一切可能值，称

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$$

为离散型随机变量 X 的分布律.

其中 $p_k\ (k=1,2,\ \ldots)$ 满足:

（1）$p_k \geq 0,\qquad k=1,2,\ \ldots$

（2）$\sum_k p_k = 1$

用这两条性质判断一个函数是否是分布律

例2　设随机变量X的分布律为：

$$P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad \lambda>0$$

试确定常数a.

解: 依据分布律的性质

$$\begin{cases} P(X=k)\geq 0, \\ \sum_k P(X=k)=1 \end{cases}$$

即　$a\geq 0$,　$\sum_{k=0}^{\infty} a\frac{\lambda^k}{k!}=ae^{\lambda}=1$

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

从中解得　$a=e^{-\lambda}$

二、离散型随机变量表示方法

（1）公式法

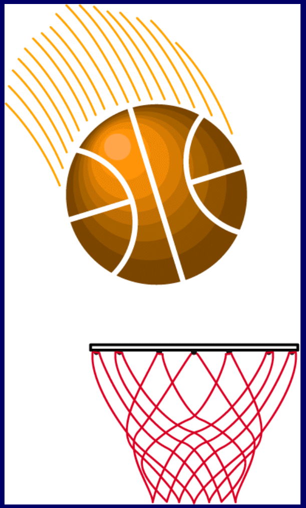
$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$$

（2）列表法

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

例3 某篮球运动员投中篮圈概率是0.9，求他两次独立投篮投中次数X的概率分布.

解： X可取值为0,1,2 ;



$$P\{X=0\}=(0.1)(0.1)=0.01$$

$$P\{X=1\}=2(0.9)(0.1)=0.18$$

$$P\{X=2\}=(0.9)(0.9)=0.81$$

常常表示为:

$$X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{Bmatrix}$$

这就是X的分布律.

例4　某射手连续向一目标射击，直到命中为止，已知他每发命中的概率是p，求所需射击发数X 的分布律.

解: 显然，X 可能取的值是1,2,… ,

为计算 $P\{X=k\}$， $k=1,2,\ldots$， 设

$A_k=\{$第k发命中$\}$，$k=1, 2, \ldots$,

于是　$P\{X=1\}=P(A_1)=p$,

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2)=(1-p)\cdot p$$

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=(1-p)^2\cdot p$$

……

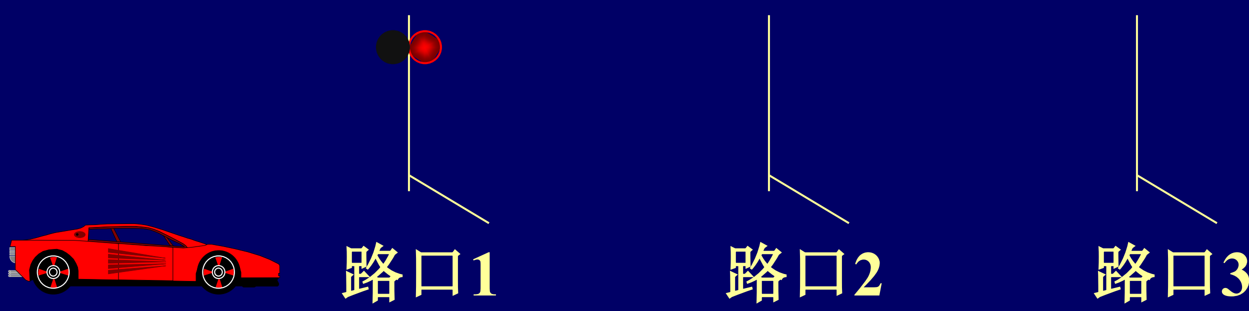
可见 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p \qquad k=1,2,\cdots\cdots$

这就是求所需射击发数X的分布律.

例5 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等. 以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求X的分布律.

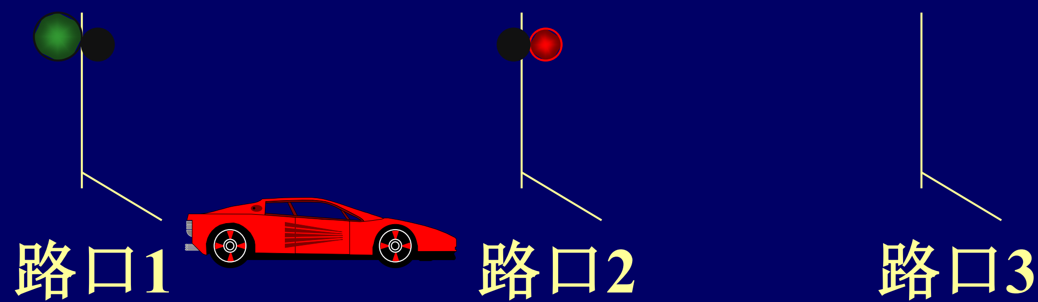
解: 依题意, X可取值0, 1, 2, 3.

设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3

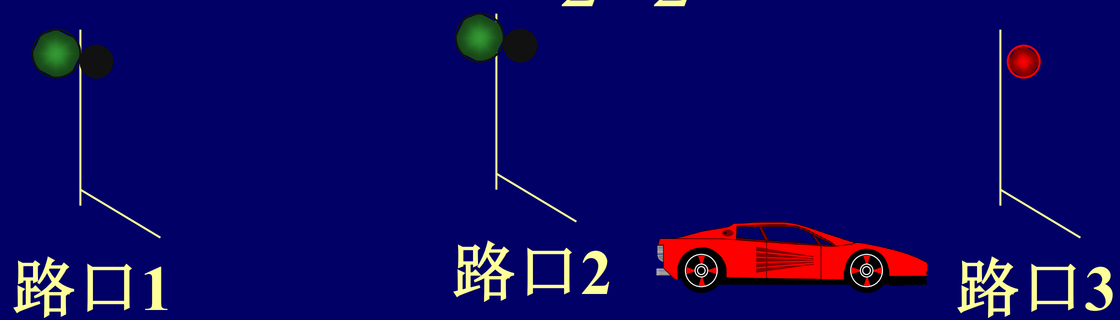


$$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2,$$

X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

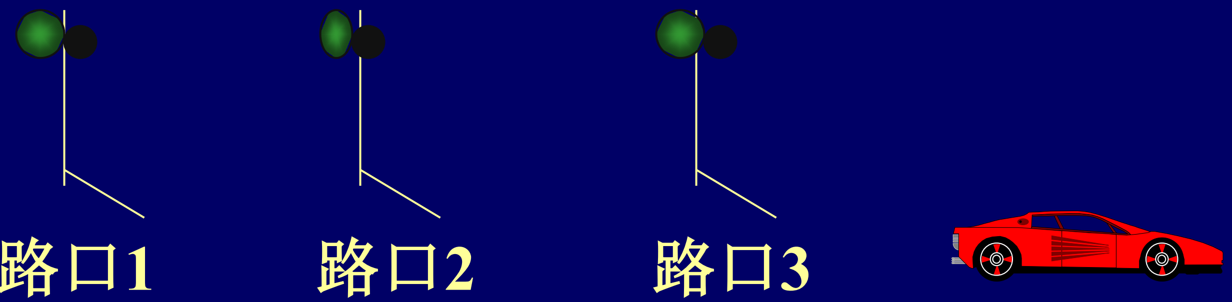


$$P\{X=1\}=P(\overline{A}_1 A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/4$$



$$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数



$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

即

$$X\sim\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

三、三种常见分布

1、（0-1）分布：（也称两点分布）

随机变量X只可能取0与1两个值，其分布律为：

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}，\quad k=0,1 \quad (0<p<1)$$

或 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{bmatrix}$ 或

X	0	1
p_i	$1-p$	p

2.伯努利试验和二项分布

看一个试验　将一枚均匀骰子抛掷3次.

令X 表示3次中出现“4”点的次数

X的分布律是:

$$P\{X = x_k\} = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}, k = 0,1,2,3.$$

一般地，设在一次试验E中我们只考虑两个互逆的结果：A 或 $\overline{A}$.

掷骰子：“掷出4点”，“未掷出4点”

抽验产品：“是正品”，“是次品”

… … … …

这样的试验E称为伯努利试验 .

将伯努利试验E独立地重复地进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重伯努利试验.

“重复”是指这 n 次试验中$P(A)=p$保持不变.

“独立”是指各次试验的结果互不影响.

用X表示n重伯努利试验中事件A发生的次数，则

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,\cdots,n$$

易证：（1）$P(X=k)\geq 0$

（2）$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1$

称 r.v X 服从参数为n和p的二项分布，记作

$X\sim b(n,p)$

例6　已知100个产品中有5个次品，现从中有放回地取3次，每次任取1个，求在所取的3个中恰有2个次品的概率.

解: 因为这是有放回地取3次，因此这3 次试验的条件完全相同且独立，它是贝努里试验.

依题意，每次试验取到次品的概率为0.05.

设X为所取的3个中的次品数，则 $X \sim b(3,0.05)$,

于是，所求概率为:

$$P(X=2)=C_3^2(0.05)^2(0.95)=0.007125$$

请注意:

若将本例中的“有放回”改为”无放回”,那么各次试验条件就不同了，此试验就不是伯努利试验．此时,只能用古典概型求解.

$$P(X=2)=\frac{C_{95}^{1}C_{5}^{2}}{C_{100}^{3}}\approx 0.00618$$

伯努利试验对试验结果没有等可能的要求，但有下述要求：

（1）每次试验条件相同；

（2）每次试验只考虑两个互逆结果 A 或 $\overline{A}$，

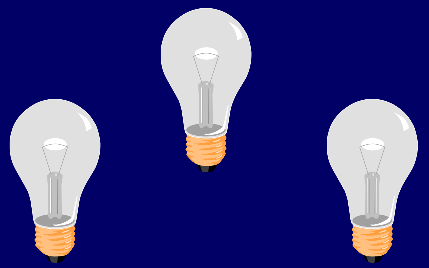
且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p$；

（3）各次试验相互独立.

可以简单地说，

二项分布描述的是n重伯努利试验中事件 A 出现的次数 X 的分布律 .

例7 某类灯泡使用时数在1000小时以上的概率是0.2，求三个灯泡在使用1000小时以后最多只有一个坏了的概率.



解：设X为三个灯泡在使用1000小时已坏的灯泡数 .

$$X \sim b\,(3,\,0.8),$$

$$P(X=k)=C_3^k(0.8)^k(0.2)^{3-k},\quad k=0,1,2,3$$

$$P\{X\le 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}$$

$$=(0.2)^3+3(0.8)(0.2)^2$$

$$=0.104$$

把观察一个灯泡的使用时数看作一次试验,
“使用到1000小时已坏”视为事件A. 每次试验,
A 出现的概率为0.8

例 某人进行射击, 设每次射击的命中率为0.02, 独立射击400次, 试求至少击中两次的概率.

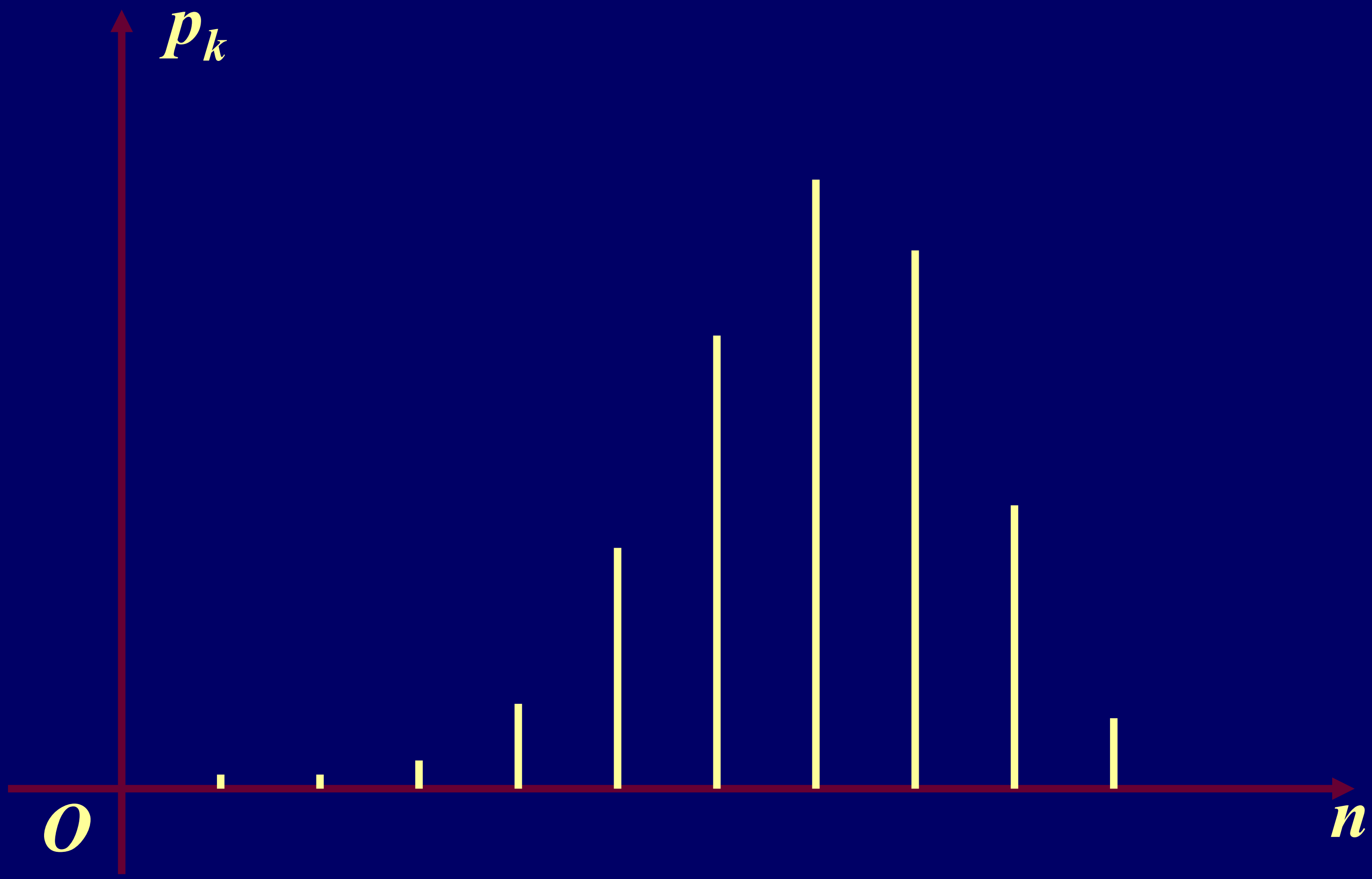
解 将一次射击看成是一次试验. 设击中的次数为*X*, 则*X*~*b*(400, 0.02). *X*的分布律为

$$P\{X=k\}=C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k},k=0,1,\cdots,400.$$

于是所求概率为

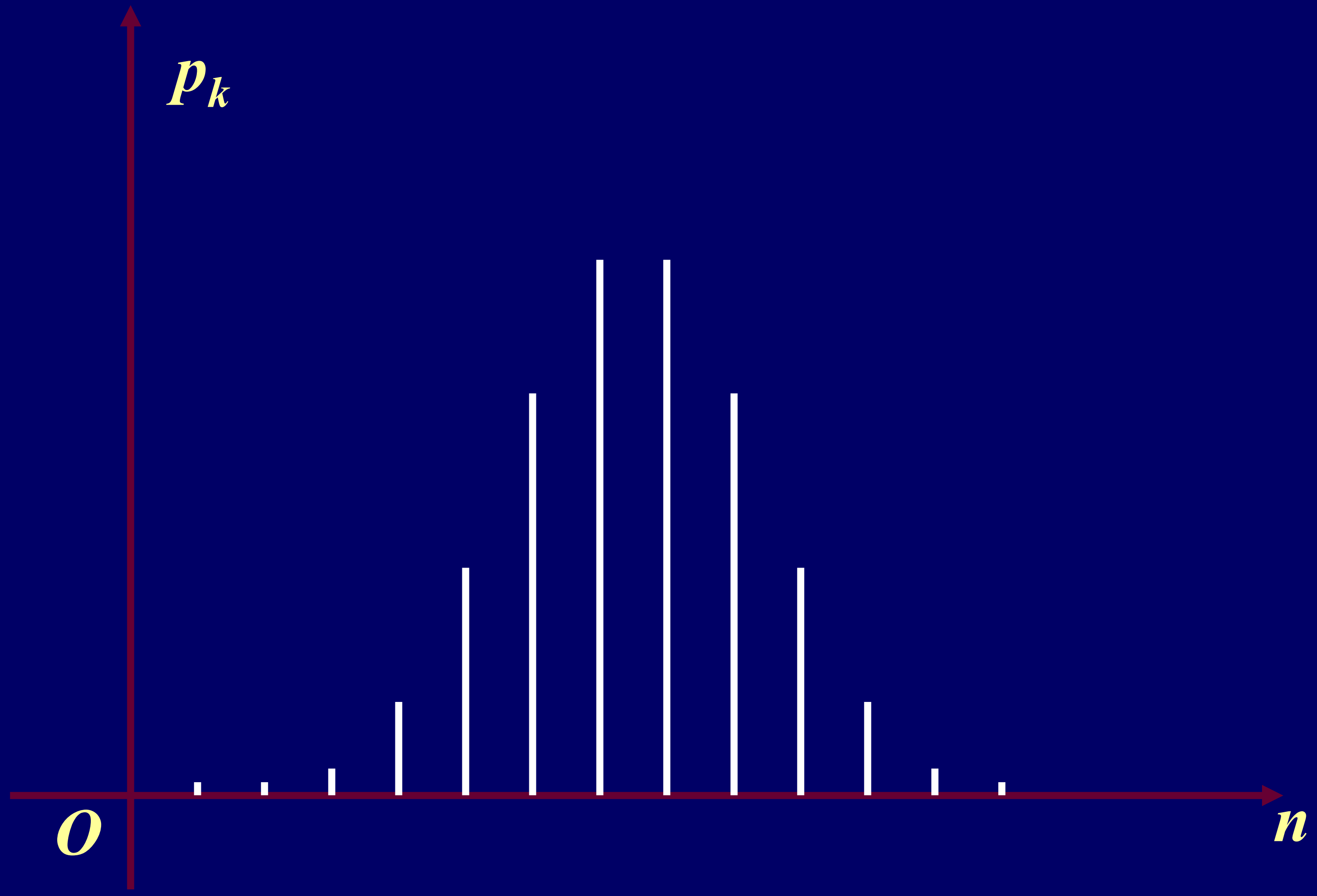
$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$
$$=1-(0.98)^{400}-400(0.02)(0.98)^{399}$$
$$=0.9972$$

二项分布的图形



n=10, p=0.7

二项分布的图形之二



$n=13,\ p=0.5$

3. 泊松分布

设随机变量X所有可能取的值为0 , 1 , 2 , … ,
且概率分布为:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 是常数,则称 X 服从参数为λ的泊松分布,记作$X\sim\pi(\lambda)$.

泊松分布具有**平稳性**, **无后效性**, **普通性**

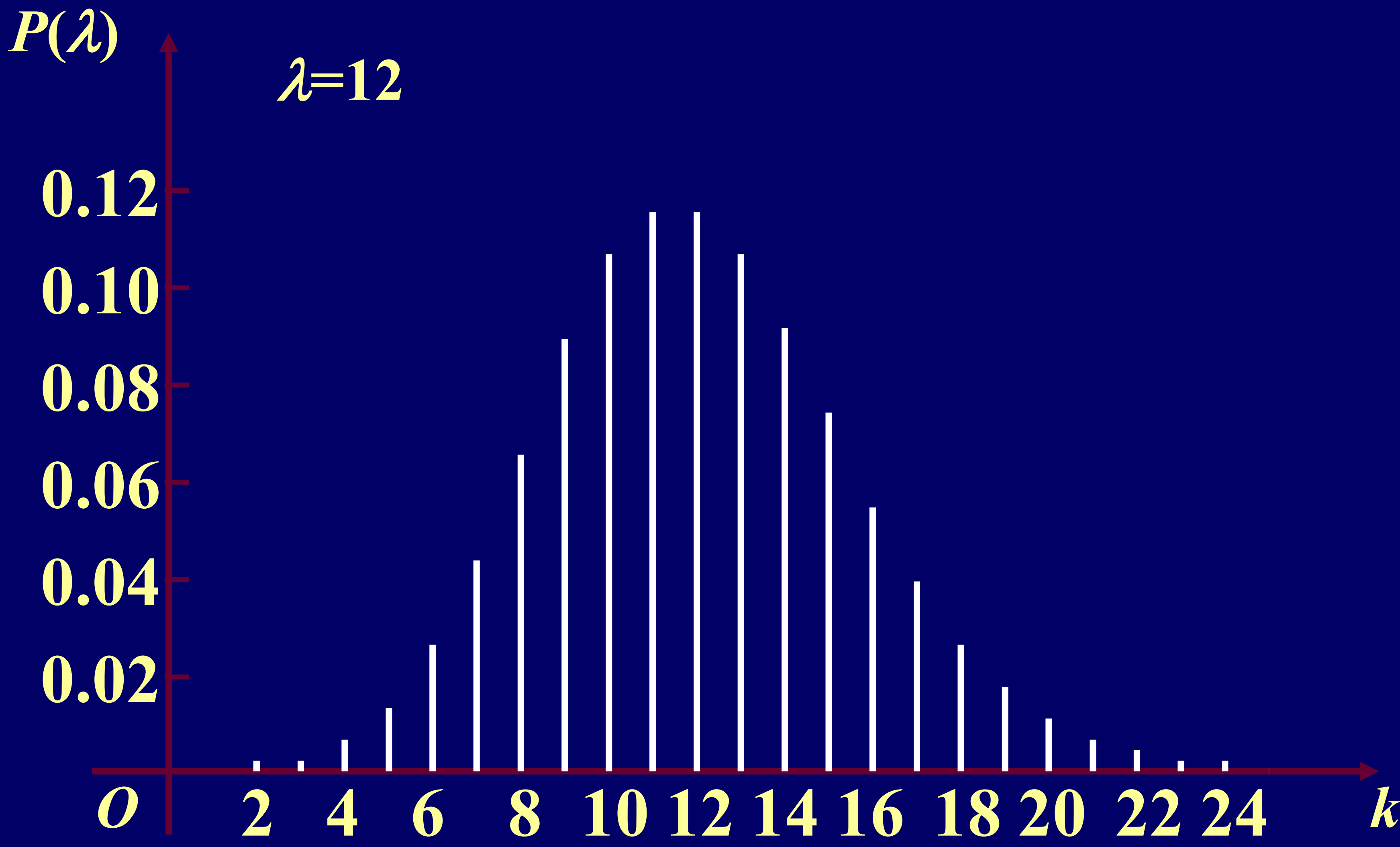
平稳性—在任意时间区间内, 事件发生k次($k \geq 0$)的概率只依赖于区间长度而与区间端点无关;
无后效性—在不相重叠的时间段内, 事件的发生相互独立;
普通性—如果时间区间充分小, 事件出现两次或两次以上的概率可以忽略不计.

对泊松流, 在任意时间间隔$(0,t)$内, 事件发生的次数服从参数为λt的泊松分布. λ称为泊松流的强度.

下列事件都可视为泊松流:

- 某电话交换台一定时间内收到的用户的呼叫数;
- 到某机场降落的飞机数;
- 某售票窗口接待的顾客数;
- 一纺绽在某一时段内发生断头的次数;
- 一段时间间隔内某放射物放射的粒子数;
- 一段时间间隔内某容器内的细菌数.

泊松分布的图形



例8 一家商店采用科学管理，由该商店过去的销售记录知道，某种商品每月的销售数可以用参数 $\lambda=5$ 的泊松分布来描述，为了以95%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少应进某种商品多少件？

解：设该商品每月的销售数为X,

已知X服从参数 $\lambda=5$的泊松分布.

设商店在月底应进某种商品m件,

求满足 $P\{X \le m\} > 0.95$ 的最小的m .

销售数

进货数

求满足 $P\{X \le m\} > 0.95$ 的最小的m.

也即 $P\{X > m\} \le 0.05$

或 $$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{e^{-5}5^k}{k!} \le 0.05$$

查泊松分布表得

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{e^{-5}5^k}{k!} \approx 0.032, \qquad \sum_{k=9}^{\infty} \frac{e^{-5}5^k}{k!} \approx 0.068$$

于是得 m+1=10, **m=9件**

四、小结

这一节，我们介绍了离散型随机变量及其分布律，并给出两点分布、二项分布、泊松分布三种重要离散型随机变量.

对于离散型随机变量，如果知道了它的分布律，也就知道了该随机变量取值的概率规律. 在这个意义上，我们说

离散型随机变量由它的分布律唯一确定.

五、布置作业

习题2-2（p41）：6、8、12

练习题

一． 一袋中有 4 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、在其中同时取三只，以 X 表示取出的三只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律

二．设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，（1）求 X 的分布律，（2）画出分布律的图形。

三、一篮球运动员的投篮命中率为 45%，以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率。

四、一大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻 t 每个设备使用的概率为 0.1，问在同一时刻

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是多少？

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是多少？

（4）至少有一个设备被使用的概率是多少？

一. 一袋中有 4 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、在其中同时取三只，以 X 表示取出的三只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律

解： X的所有可能取值为：$X=3,4$

$$P\{X=3\}=\frac{1}{C_4^3}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_4^3}=\frac{3}{4}$$

二. 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，（1）求 X 的分布律，（2）画出分布律的图形。

解： X的所有可能取值为：$X=0,1,2$

$$P\{X=0\}=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}\qquad P\{X=1\}=\frac{C_{13}^2C_2^1}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_{13}^1C_2^2}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$$

三、一篮球运动员的投篮命中率为 45%，以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率。

解：X的所有可能取值为：$X=1,2,\cdots$

A_i表示第i次投篮命中，$i=1,2,\cdots$

则 $P(A_i)=45\%$，$i=1,2,\cdots$

且 A_1，$A_2,\cdots A_{k-1}$，A_k相互独立

$$P\{X=k\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)$$

$$=(55\%)^{k-1}45\%,\quad k=1,2,\cdots$$

$$P\{X\text{取偶数}\}=\sum_{k=1}^{+\infty}P\{X=2k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[(55\%)^{2k-1}45\%\right]$$

$$=\frac{11}{31}$$

四、一大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻 t 每个设备使用的概率为 0.1，问在同一时刻

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是多少？ $\{X=2\}$

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是多少？ $\{X \geq 3\}$

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是多少？ $\{X \leq 3\}$

（4）至少有一个设备被使用的概率是多少？ $\{X \geq 1\}$

解： X表示同一时刻供水设备被使用的个数

则 $X \sim (5,0.1)$

$$P\{X=k\}=C_5^k(0.1)^k(0.9)^{5-k} \quad k=0,1,\cdots 5$$

(1) $$P\{X=2\}=C_5^2(0.1)^2(0.9)^{5-2}=0.0729$$

(2) $$P\{X\geq 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}$$

$$=0.00856$$

(3) $$P\{X\leq 3\}=1-P\{X>3\}$$

$$=1-P\{X=4\}-P\{X=5\}$$

$$=0.99954$$

(4) $$P\{X\geq 1\}=1-P\{X<1\}$$

$$=1-P\{X=0\}$$

$$=0.40951$$