# 概率统计

## 习题课 三

# 一、填空题

1. 设 $P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7}$, $P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$,

则 $P\{\max\{X,Y\}\geq 0\}=$ <u>5/7</u>.

**解** $\max\{X,Y\}<0 \Leftrightarrow X<0,Y<0.$

$$P\{\max\{X,Y\}<0\}=P\{X<0,Y<0\}$$

因为 $P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$,

所以 $P\{X<0\}=P\{Y<0\}=\frac{3}{7}$,

又因为 $P\{(X<0)\cup(Y<0)\}=1-P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$

故 $P\{X<0,Y<0\}=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}-\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$

2. 已知 $X$、$Y$ 的分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/3 | $b$ |
| 1 | $a$ | 1/6 |

且$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$独立，则 $a=$ 1/3 , $b=$ 1/6 .

**解** $P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}=a$

$$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=a+\frac{1}{3}$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=1, Y=0\}=a+b$$

因为$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$独立，所以

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}$$

即

$$a=(a+\frac{1}{3})(a+b)$$

联立

$$a+b+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

得到

$$a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}.$$

# 二、选择题

1. 已知 $X_1$、$X_2$ 相互独立，且分布律为

| $X_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 1/2 | 1/2 |

$(i=1,2)$

那么下列结论正确的是____*C*____.

A. $X_1 = X_2$

B. $P\{X_1 = X_2\} = 1$

C. $P\{X_1 = X_2\} = 1/2$

D. 以上都不正确

解 $\{X_1 = X_2\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0\} + \{X_1 = 1, X_2 = 1\}$

因为 $X_1$、$X_2$ 相互独立，所以

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = P\left\{X_1 = 0\right\} \cdot P\left\{X_2 = 0\right\} = 1/4$$

$$P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = P\left\{X_1 = 1\right\} \cdot P\left\{X_2 = 1\right\} = 1/4$$

故 $P\{X_1 = X_2\} = 1/2$

2. 设离散型随机变量$(X,Y)$的联合分布律为

| $(X,Y)$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(2,1)$ | $(2,2)$ | $(2,3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $1/6$ | $1/9$ | $1/18$ | $1/3$ | $\alpha$ | $\beta$ |

且 X、Y 相互独立 ,则 ____$A$____.

$A.\quad \alpha=2/9,\beta=1/9$ $\quad B.\quad \alpha=1/9,\beta=2/9$

$C.\quad \alpha=1/6,\beta=1/6$ $\quad D.\quad \alpha=8/15,\beta=1/18$

解　因为 $X$、Y 相互独立，所以

$$P\{X=1,Y=3\}=P\left\{X=1\right\}\cdot P\{Y=3\}$$

即

$$\frac{1}{18}=(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18})(\frac{1}{18}+\beta)$$

解得

$$\beta=1/9$$

又因为

$$\alpha+\beta+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}=1$$

或者 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$

故

$$\alpha=\frac{2}{9}$$

3.设 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，那么 $X$ 和 $Y$ 的联合分布为 $\underline{\quad C \quad}$.

$A.$ 二维正态分布,且 $\rho=0$

$B.$ 二维正态分布,且 $\rho$ 不定

$C.$ 未必是二维正态分布

$D.$ 以上都不对

当 X、Y 相互独立时，则 $X$ 和 Y 的联合分布为 $A$ .

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

# 三、解答题

1. 把一枚均匀硬币抛掷三次,设$X$为三次抛掷中正面出现的次数, 而 $Y$ 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值, 求 $(X,Y)$ 的分布律与边缘分布 .

解 $(X, Y)$ 可取值 (0,3) , (1,1) , (2,1) , (3,3)

$$P\{X=0,\ Y=3\}=\left(1/2\right)^3=1/8$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3/8$$

$$P\{X=2,\ Y=1\}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=3/8$$

$$P\{X=3,\ Y=0\}=\left(1/2\right)^3=1/8.$$

| $X \backslash Y$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/8 |
| 1 | 3/8 | 0 |
| 2 | 3/8 | 0 |
| 3 | 0 | 1/8 |

(*X*,Y) 关于 X 的边缘分布

$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=0, Y=3\}=1/8,$

$P\{X=1\}=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=1, Y=3\}=3/8,$

$P\{X=2\}=P\{X=2, Y=1\}+P\{X=2, Y=3\}=3/8,$

$P\{X=3\}=P\{X=3, Y=1\}+P\{X=3, Y=3\}=1/8.$

(*X*,Y) 关于 Y 的边缘分布

$$P\{Y=1\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k,Y=1\}=3/8+3/8=6/8,$$

$$P\{Y=3\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k,Y=3\}=1/8+1/8=2/8.$$

2. 设二维连续型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

(1) 求A、B、C 的值，

(2) 求 $(X,Y)$ 的联合密度，

(3) 判断 $X$、Y 的独立性.

解 (1) 由 $F(+\infty,-\infty)=0$, $F(-\infty,+\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=0$, 得到

$$A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$$

$$A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=0$$

$$A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$$

解得 $A=\dfrac{1}{\pi^2}$, $B=C=\dfrac{\pi}{2}$.

$$(3)\ F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)\quad(-\infty<y<+\infty)$$

可见 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),(x,y)\in R^2.$

故 $X$、Y 相互独立.

$(2)$ $(X,Y)$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$$

$(3)$ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{9+y^2}dy$$

$$=\frac{2}{\pi^2(4+x^2)}[\arctan\frac{y}{3}]_{-\infty}^{\infty} \quad =\frac{2}{\pi(4+x^2)}$$

$(-\infty<x<+\infty)$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\frac{6}{\pi^2(9+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx$$

$$=\frac{3}{\pi^2(9+y^2)}[\arctan\frac{x}{2}]_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{3}{\pi(9+y^2)}\qquad(-\infty<y<+\infty)$$

可见 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\quad (x,y)\in R^2.$

故 $X$、Y 相互独立 .

3. 设 $X$、Y 相互独立且服从$U[-b,b]$ ,求方程 $t^2+tX+Y=0$ 有实根的概率 ,并求当$b\to\infty$时这概率的极限.

解 $X$、Y 相互独立且服从$U[-b,b]$， 所以 $X$、Y 的联合密度为

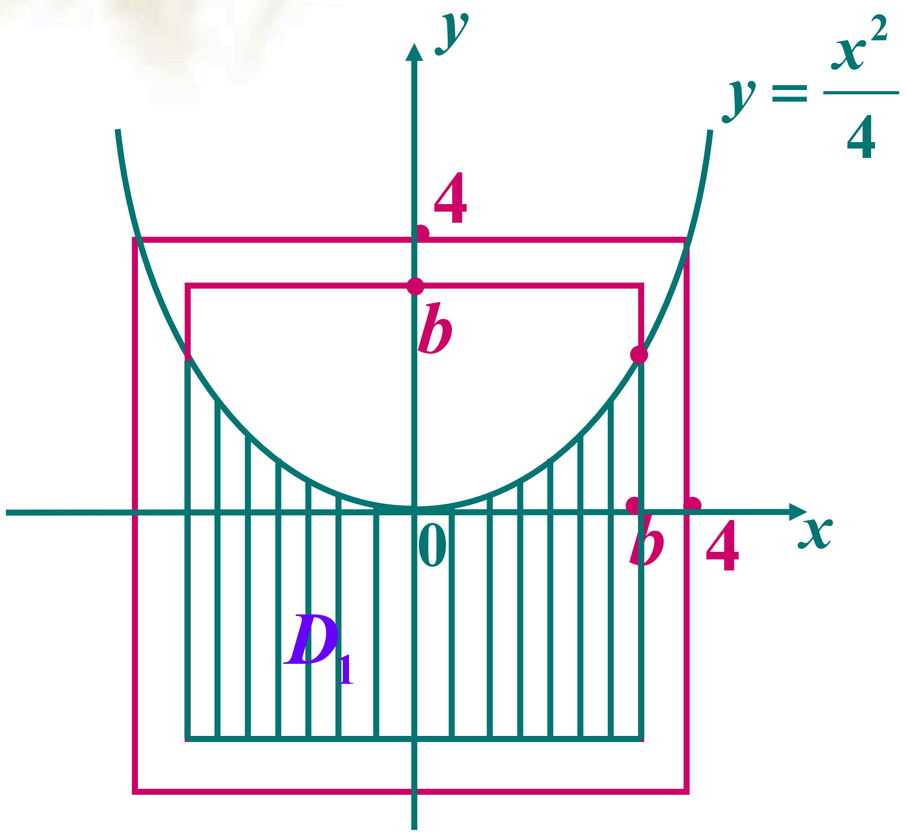
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4b^2},|x|\le b,|y|\le b\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

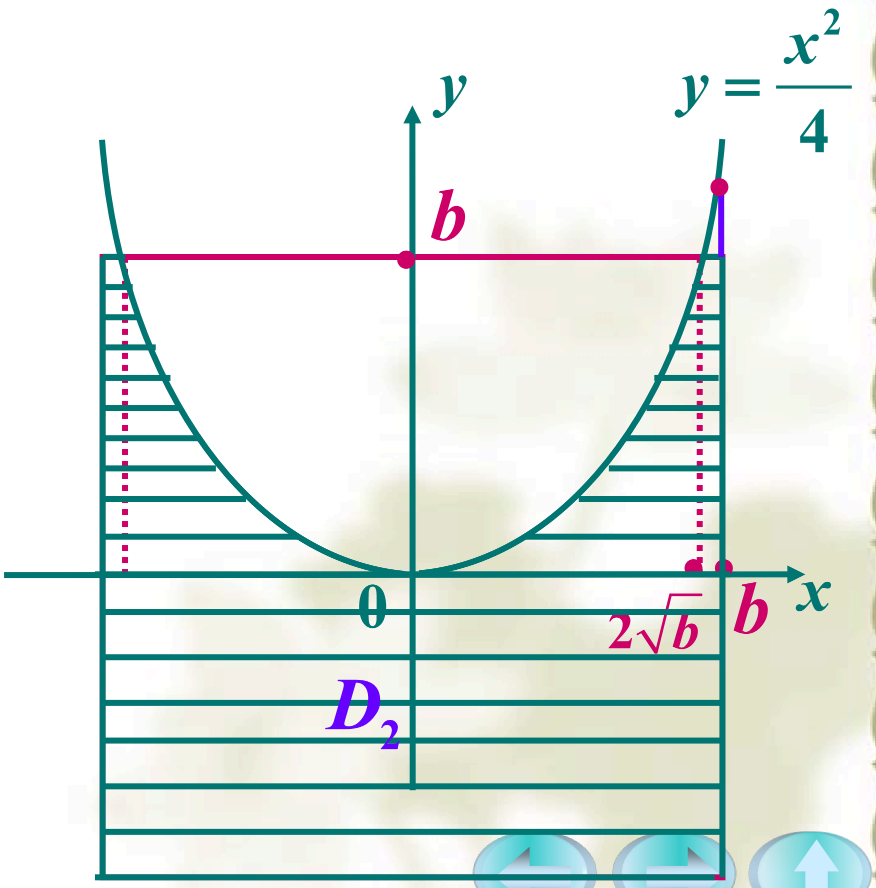
方程 $t^2+tX+Y=0$有实根的概率为

$$P\left\{X^2-4Y\ge 0\right\}$$

$$=P\left\{Y\le\frac{X^2}{4}\right\}=\iint_D f(x,y)dxdy，其中\ D:y\le\frac{x^2}{4}.$$

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = b^2/4 \le b\,(> b) \end{cases}$$



当 $b \le 4$ 时,

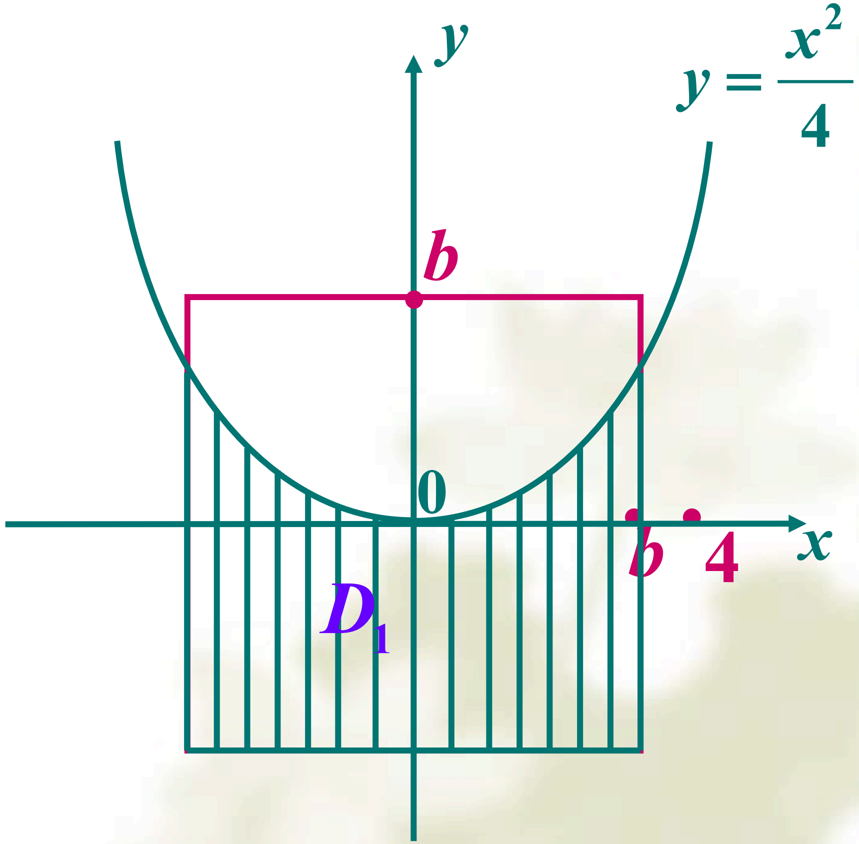
$$P\left\{X^2 - 4Y \ge 0\right\}$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \frac{1}{4b^2}\iint_{D_1} dxdy$$

$$= \frac{2}{4b^2}\left(b^2 + \int_0^b dx \int_0^{x^2/4} dy\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{b}{24}$$

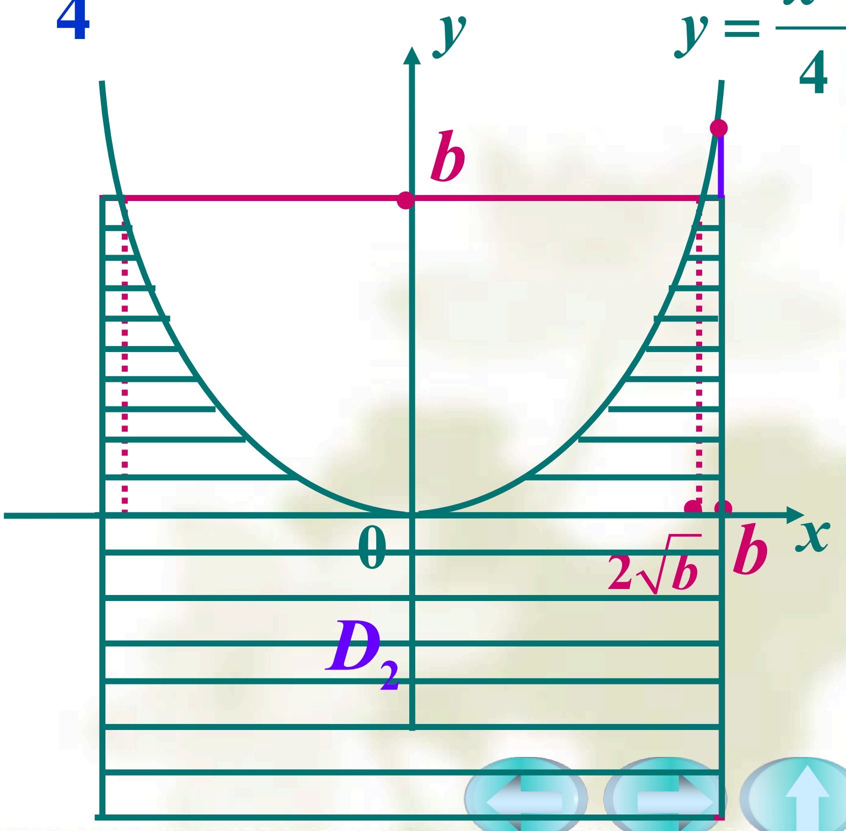


当 $b>4$ 时,

$$P\left\{X^2-4Y\geq 0\right\}=\iint_{D_2} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{1}{4b^2}\iint_{D_2} dxdy$$

$$=\frac{2}{4b^2}\{b^2+[b(b-2\sqrt{b})+\int_0^{2\sqrt{b}}\frac{x^2}{4}dx\}$$

$$=1-\frac{2}{3\sqrt{b}}$$



因而

$$P\{X^2-4Y\geq 0\}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{b}{24}, & 0\leq b\leq 4\\ 1-\dfrac{2}{3\sqrt{b}}, & b>4\end{cases}$$

可见

$$\lim_{b\to\infty}P\{X^2-4Y\geq 0\}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{2}{3\sqrt{b}}\right)=1.$$

4. 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & \text{其它} \end{cases}$$

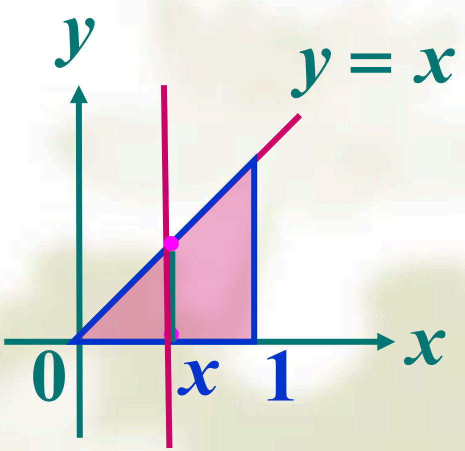
求 (1) $A$的值 (2) (X,Y)的分布函数 (3) 两个边缘密度.

解 (1) $1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x Ay(1-x)\,dy$$

$$=\frac{A}{2}\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$=A/24$$




故 $A=24$.

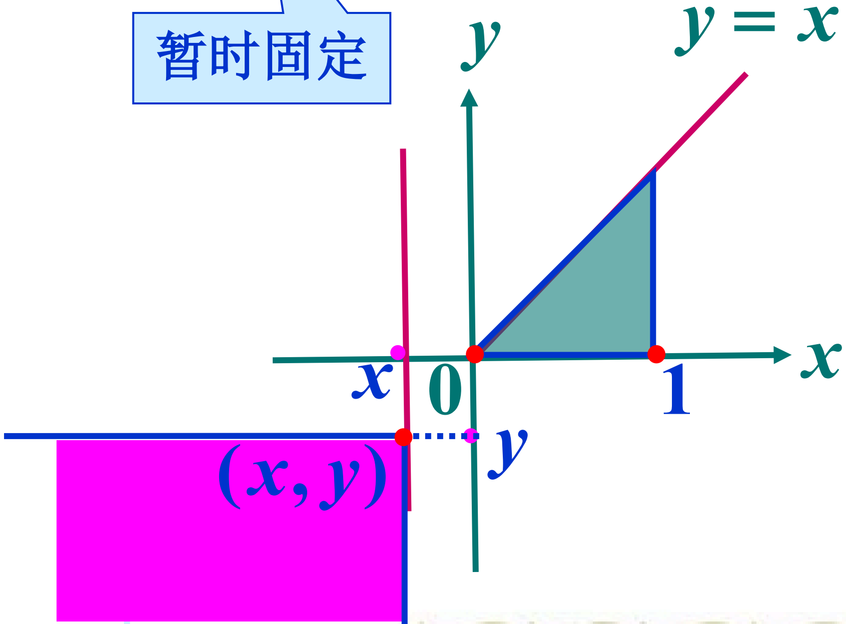
解 (2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$

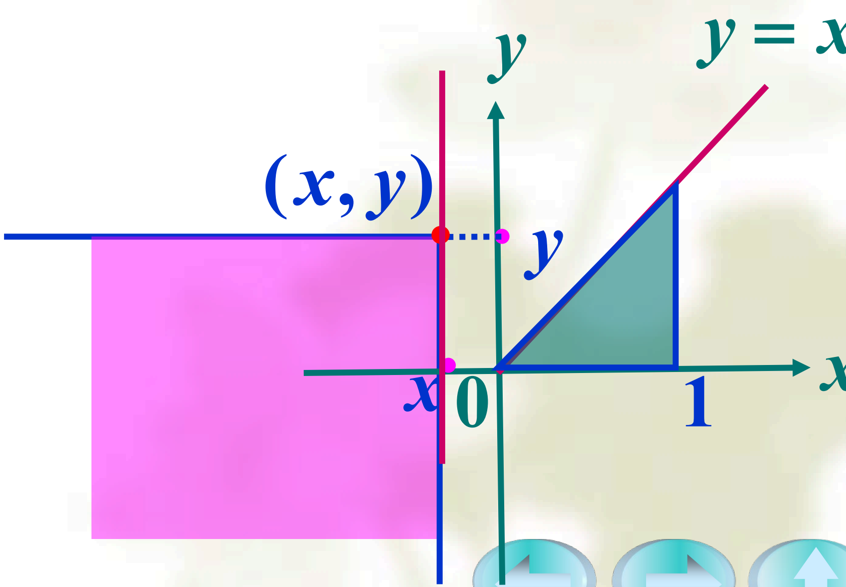
积分区域 $D=(-\infty,x]\times(-\infty,y]$

$f(x,y)\neq 0$ 区域 $\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$

当 $x<0$ 时，不论 $y<0$ 还是 $y\ge 0$，都有 $F(x,y)=0.$

暂时固定



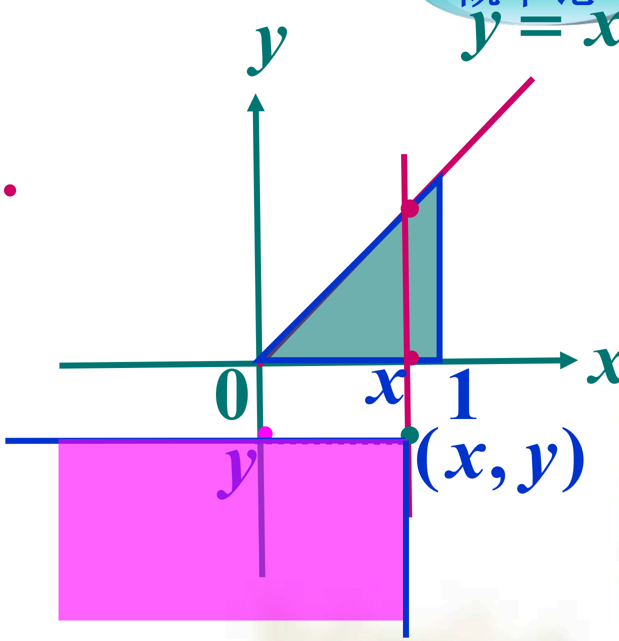
当 $0 \le x < 1, y < 0$ 时，$F(x,y) = 0.$

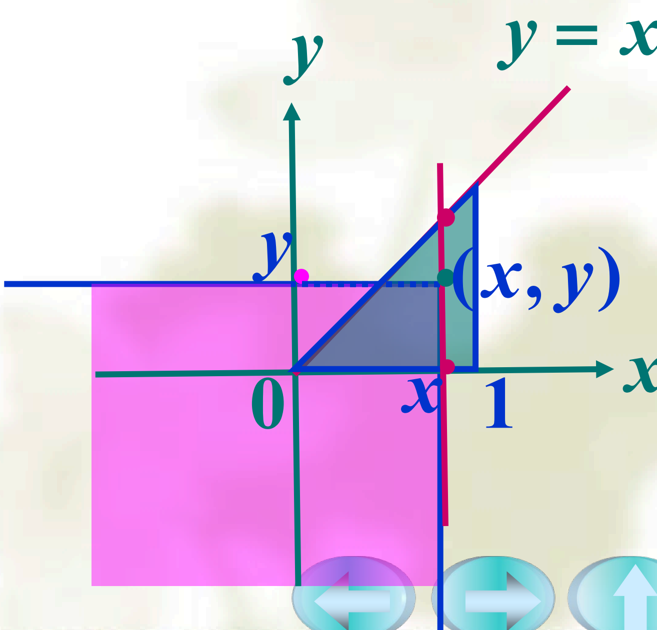
当 $0 \le x < 1, 0 \le y < x$ 时，

$$F(x,y) = 24\int_0^y y\,dy\int_y^x (1-x)\,dx$$

$$= 24\int_0^y \left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right)y - y^2 + \frac{y^3}{2}\right]dy$$

$$= 3y^4 - 8y^3 + 12\left(x - x^2/2\right)y^2.$$



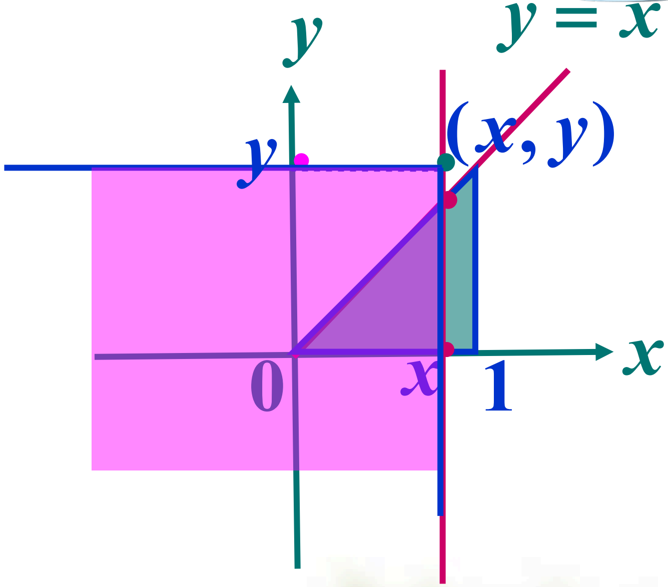



当 $0 \le x < 1, y \ge x$ 时，

$$F(x,y) = 24\int_0^x (1-x)dx\int_0^x y\,dy$$

$$= 12\int_0^x (x^2 - x^3)dx$$

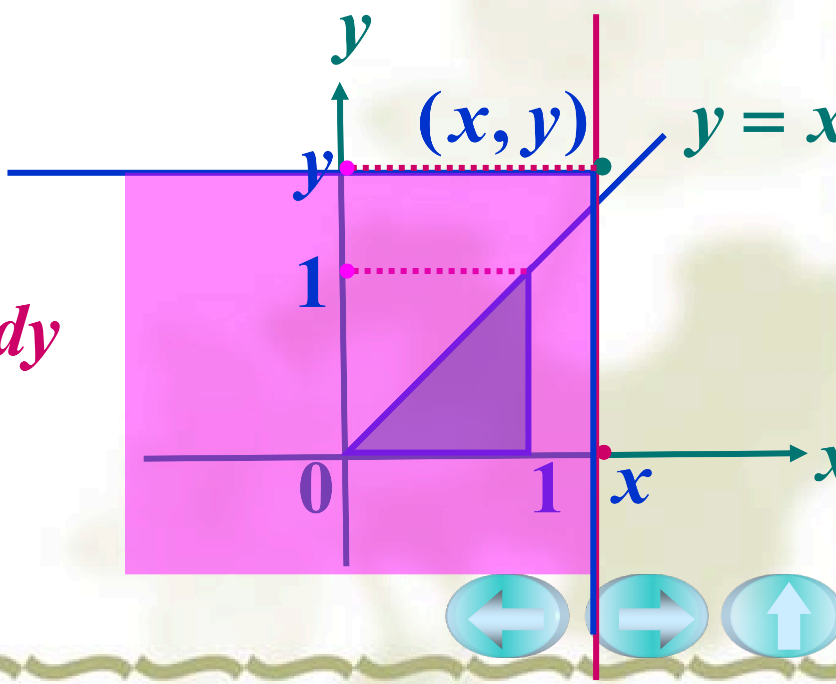
$$= 4x^3 - 3x^4.$$




当 $x \ge 1, y \ge 1$ 时，

$$F(x,y) = 24\int_0^1 (1-x)dx\int_0^x y\,dy$$

$$= 1.$$



当 $x \geq 1, 0 \leq y < 1$ 时,

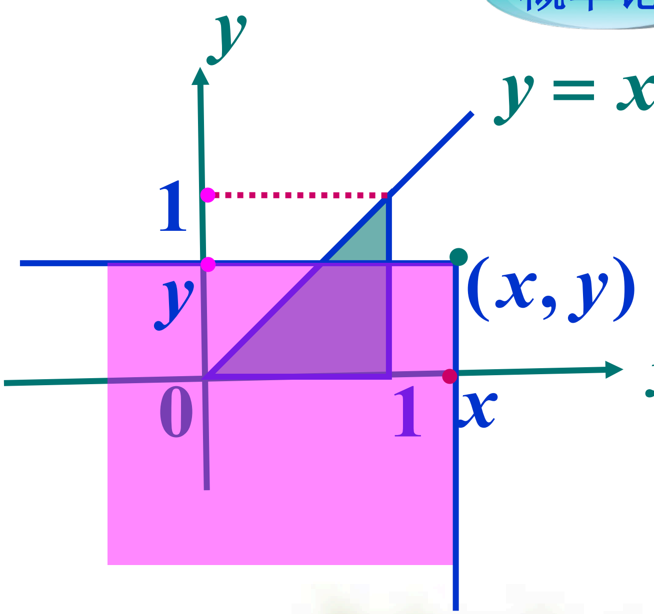
$$F(x,y) = 24\int_0^y y\,dy\int_y^1 (1-x)\,dx$$

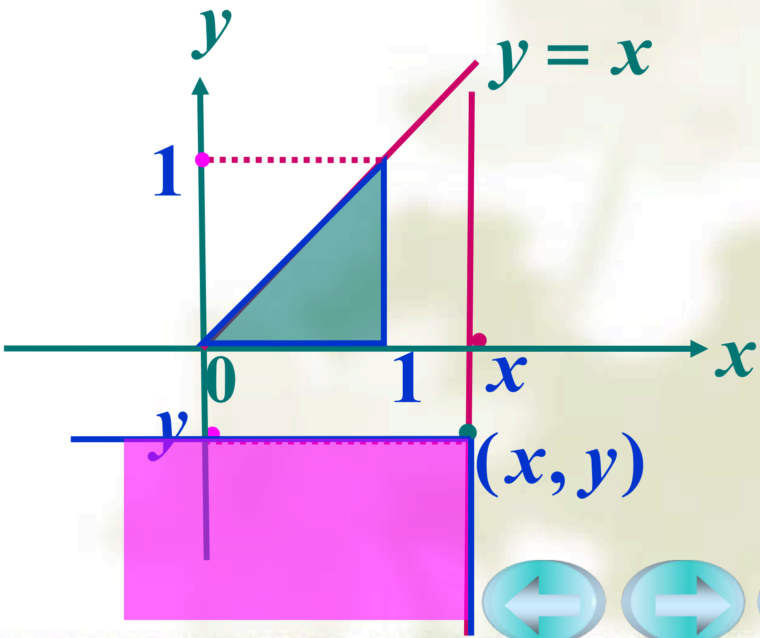
$$= 24\int_0^y \left(\frac{y}{2} - y^2 + \frac{y^3}{2}\right)dy$$

$$= 3y^4 - 8y^3 + 6y^2.$$

当 $x \geq 1, y < 0$ 时,

$$F(x,y) = 0.$$



综上

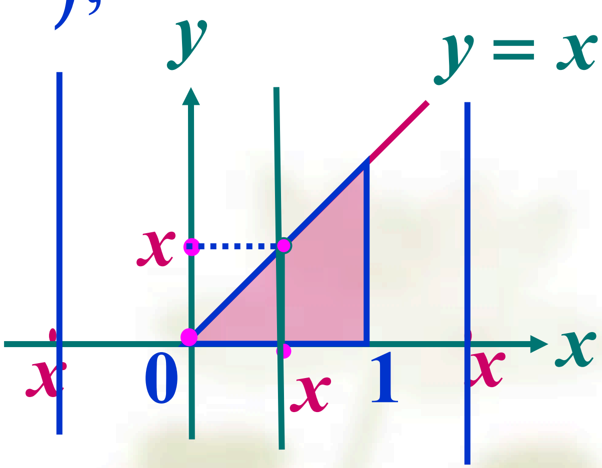
$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x>0\text{或}y<0 \\ 3y^4-8y^3+12\left(x-x^2/2\right)y^2, & 0\le x<1, 0\le y<x \\ 4x^3-3x^4, & 0\le x<1, y\ge x \\ 3y^4-8y^3+6y^2, & x\ge 1, 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$

暂时固定

解 (3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

当 $x>1$ 或 $x<0$ 时， $\forall y\in(-\infty,+\infty)$,

都有 $f(x,y)=0$, 故 $f_X(x)=0$.




当 $0\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy$$

$$+\int_{0}^{x} f(x,y)dy+\int_{x}^{+\infty} f(x,y)dy.$$

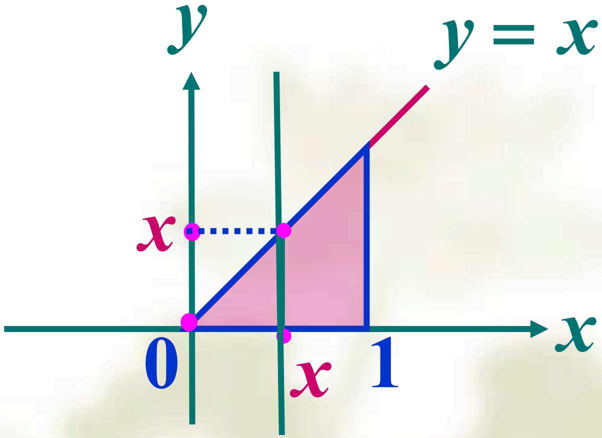
当 $0 \le x \le 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy$$

$$+\int_{0}^{x} f(x,y)dy + \int_{x}^{+\infty} f(x,y)dy.$$

$$= \int_{0}^{x} 24y(1-x)dy$$

$$= 12x^2(1-x),$$




综上,

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意取值范围

解 (2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当$y>1$或$y<0$时，对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

都有 $f(x,y)=0$，故 $f_Y(y)=0$.

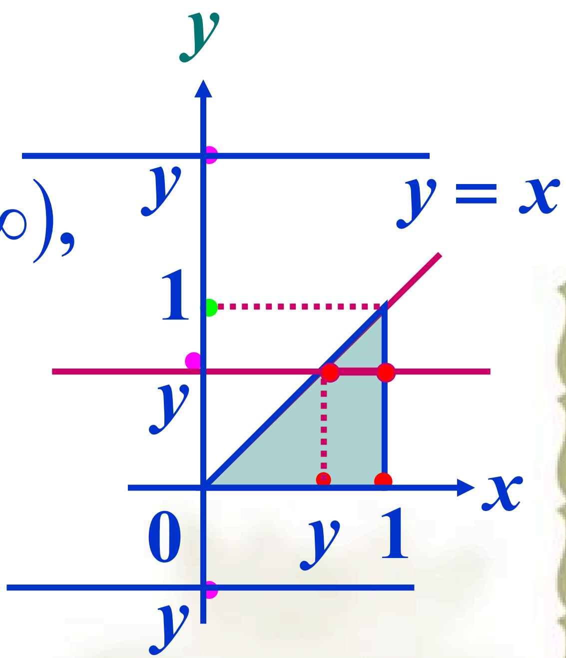
当$0\le y\le 1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx$$

$$+\int_{y}^{1} f(x,y)dx+\int_{1}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

$$=\int_{y}^{1} 24y(1-x)dx$$

$$=12y(1-y)^2,$$



综上，

$$f_Y(y)=\begin{cases}24y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

注意取值范围

5. 设 $(X,Y)$ 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

(1) X 与Y 是否相互独立?

(2) 求 $f(y|x)$ 和 $f(x|y)$;

(3) 求 $Z=X+Y$ 概率密度.

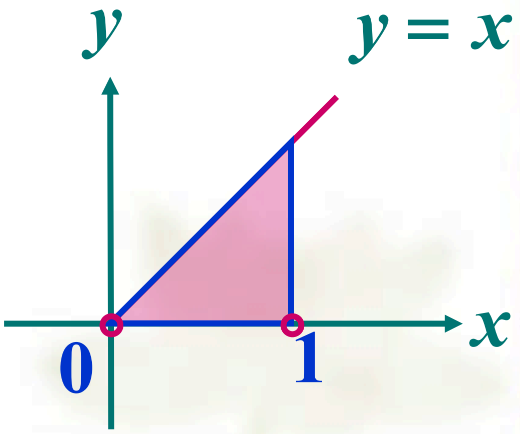
解 (1) 因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

所以 X 与Y 不独立 .

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



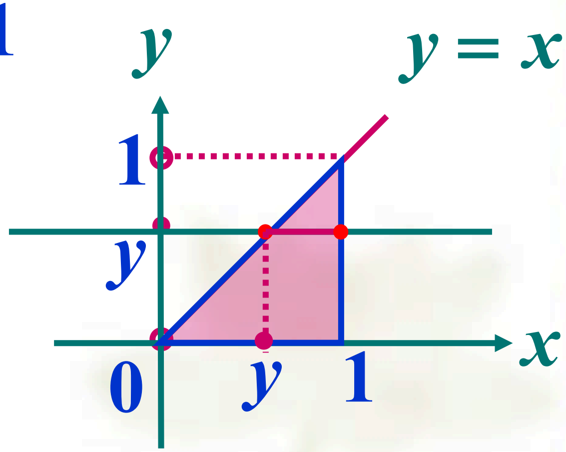

当 $0<x<1$ 时, $f_X(x)\neq 0.$

故 $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}2y/x^2, & 0<x<1, 0<y\le x\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$

暂时固定

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$




当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)\neq 0$.

故

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2(1-x)\big/(1-y)^2, & y\le x<1, 0<y<1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

暂时固定

(3)

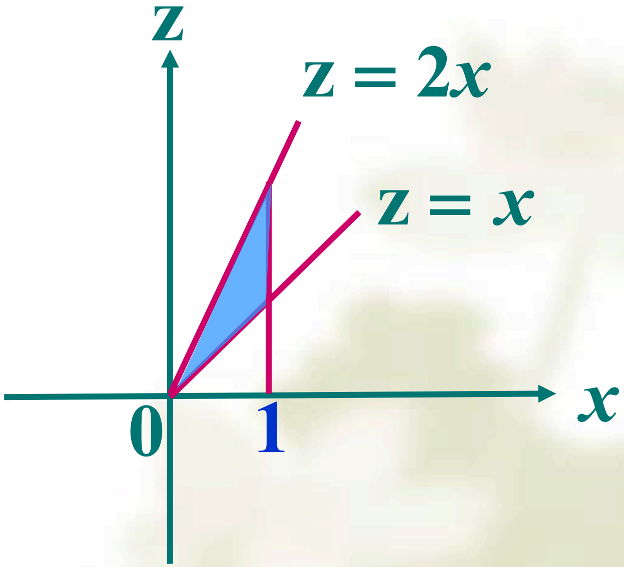
$Z=X+Y$ 的密度函数为

暂时固定

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z\text{-}x \le x \end{cases}$$

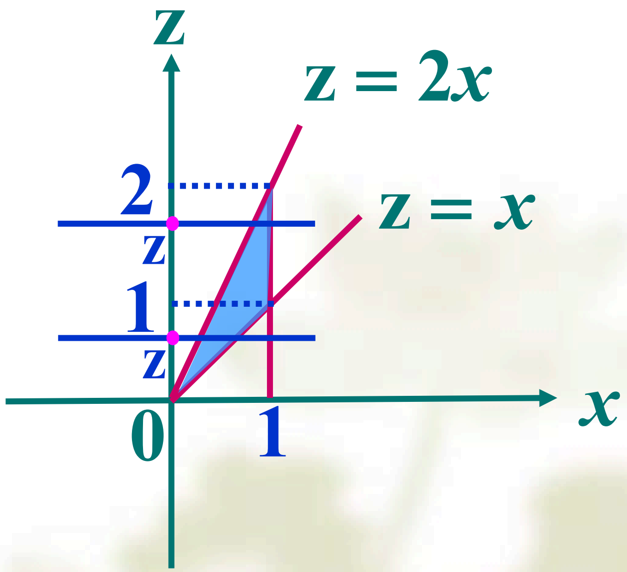
$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le z \le 2x \end{cases}$$



当 $z \le 0$ 或 $z > 2$ 时， $f_Z(z) = 0$.

当 $0 < z \le 1$ 时，

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{1} 24(z - x)(1 - x)dx$$




当 $1 < z \le 2$ 时，

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{z} 24(z - x)(1 - x)dx$$

# 四、证明题

在区间 [0,1]上随机地投掷两点,试证这两点间的距离的密度函数为

$$f(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0\le z\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

**证明** 设这两个随机点分别为 X , Y , 则有

$X\sim U[0,1]$, $Y\sim U[0,1]$. 于是 X , Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因为 X , Y 相互独立，所以 X , Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

这两个随机点 X , Y 的距离为 $Z=|X-Y|$ .

Z 的分布函数为

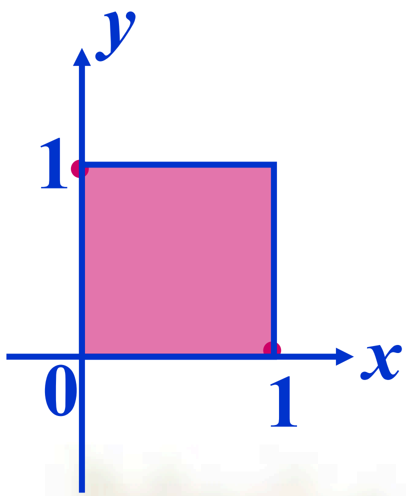
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\} \quad =P\{|X-Y|\le z\}$$

暂时固定

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$, $f_Z(z)=0$.

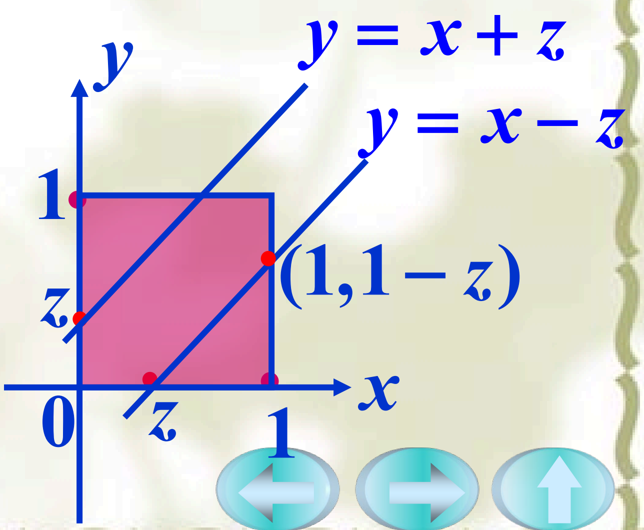
当 $z=0$ 时，$F_Z(z)=0$, $f_Z(z)=0$.

当 $z>0$ 时，




$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)\,dxdy$$

当 $0<z<1$ 时，

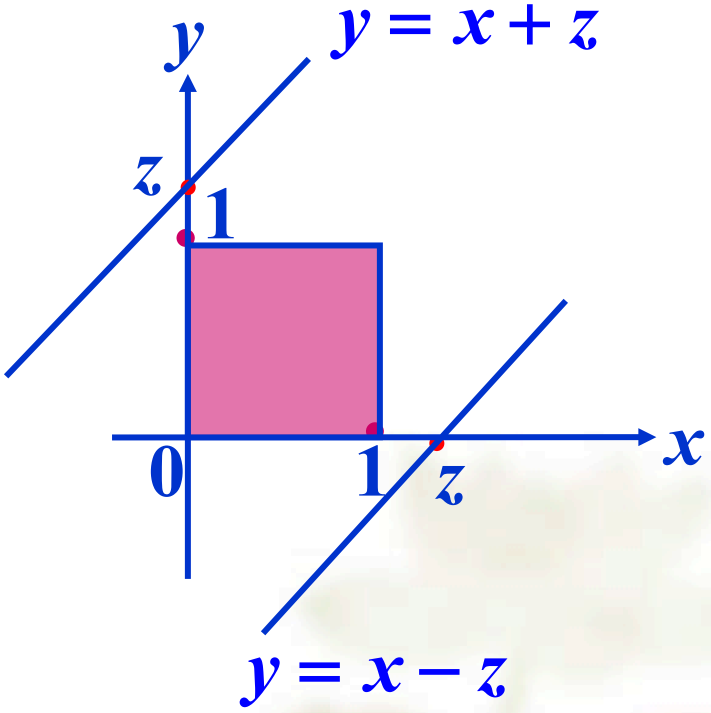



$$F_Z(z)=1-(1-z)^2=2z-z^2$$

$$f_Z(z)=2(1-z).$$

当 $z \geq 1$ 时，

$F_Z(z) = 1,\ f_Z(z) = 0.$




综上

$$f(z) = \begin{cases} 2\pi(1-z), & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$