# 第14章 代数系统

计算机工程与科学学院 封卫兵

# 第14章 代数系统

14.1 二元运算及其性质

14.2 代数系统

14.3 几个典型的代数系统

# 14.1 二元运算及其性质

## 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

二元运算定义及其实例

一元运算定义及其实例

运算的表示

## 14.1.2 二元运算的性质

交换律、结合律、幂等律、分配律、吸收律

特异元素：单位元、零元、可逆元

消去律

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 数的发展历史

| | $+$ | $-$ | $\times$ | $\div$ | $1/x$ | $x^2$ | $\sqrt{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | ✔ | ✘ | ✔ | ✘ | ✘ | ✔ | ✘ |
| Z | ✔ | ✔ | ✔ | ✘ | ✘ | ✔ | ✘ |
| Q | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✘ |
| R | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✘ |
| C | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ | ✔ |

**注：** 除法和倒数中均不含 0 .

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 运算的定义

**定义14.1** 设 $S$ 为集合，函数 $f: S \times S \to S$ 称为 $S$ 上的二元运算，

简称为二元运算．也称 $S$ 对 $f$ 封闭．

**定义14.2** 设 $S$ 为集合，函数 $f: S \to S$ 称为 $S$ 上的一元运算，

简称为一元运算. 也称 $S$ 对 $f$ 封闭．

**例：** 前表中打 ✓ 的都是二元或一元运算，打 ✗ 的都不是运算．

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 二元运算的实例

**例：** 设 $M_n(\mathbf{R})$ 表示所有 $n$ 阶 $(n \geq 2)$ 实矩阵的集合，即

$$M_n(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbf{R},\ i,j = 1,2,\ldots,n \right\}$$

矩阵加法和乘法都是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的二元运算？ ✓

矩阵减法是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的二元运算？ ✓

矩阵除法是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的二元运算？ ✗

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 二元运算的实例（续）

1) 设 $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$a_i \circ a_j = a_i$，则 $\circ$ 为 $S$ 上二元运算？ ✓

2) 幂集 $P(S)$ 上的二元运算：

| $\cup$ | $\cap$ | $-$ | $\oplus$ |
|---|---|---|---|
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

3) $S^S$ 为 $S$ 上的所有函数的集合，$S^S$ 的合成运算 $\circ$ ？ ✓

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 一元运算的实例

**例:**

1) $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$上求相反数的运算;

2) 非零有理数集$\mathbf{Q}^*$，非零实数集 $\mathbf{R}^*$上求倒数运算;

3) 复数集合 $\mathbf{C}$ 上求共轭复数的运算;

4) 幂集 $P(S)$ 上，全集为 $S$，求绝对补运算 $\sim$ ;

5) $A$ 为 $S$ 上所有双射函数的集合，$A \subseteq S^S$，求反函数;

6) 在 $M_n(\mathbf{R})$ $(n \geq 2)$ 上求转置矩阵 .

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 运算的表示

**算符**：$\circ, *, \cdot, \oplus, \otimes$ 等符号表示二元或一元运算．

对二元运算 $\circ$，如果 $x$ 与 $y$ 运算得到 $z$，记做 $x \circ y = z$；

对一元运算 $\circ$，$x$ 的运算结果记作 $\circ x$；

表示二元或一元运算的方法：公式、 运算表．

**注**：在同一个问题中不同的运算使用不同的算符．

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

**公式表示**

**例：**设 R 为实数集合，如下定义 R 上的二元运算 $*$：

$$\forall x, y \in R,\ x * y = x.$$

那么

$3 * 4 =$ 3 ,

$0.5 * (-3) =$ 0.5 .

**运算表**（表示有穷集上的一元和二元运算）

二元运算的运算表

| $\circ$ | $a_1$ | $a_2$ | … | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1 \circ a_1$ | $a_1 \circ a_2$ | … | $a_1 \circ a_n$ |
| $a_2$ | $a_2 \circ a_1$ | $a_2 \circ a_2$ | … | $a_2 \circ a_n$ |
| . | | . . . | | |
| . | | . . . | | |
| $a_n$ | $a_n \circ a_1$ | $a_n \circ a_2$ | … | $a_n \circ a_n$ |

一元运算的运算表

| | $\circ a_i$ |
|---|---|
| $a_1$ | $\circ a_1$ |
| $a_2$ | $\circ a_2$ |
| . | . |
| . | . |
| $a_n$ | $\circ a_n$ |

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 运算表的实例

**例：** $A = P(\{a,b\})$, $\oplus$, ~ 分别为对称差和绝对补运算（$\{a,b\}$为全集）

$\oplus$的运算表

| $\oplus$ | $\varnothing$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
| $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\varnothing$ | $\{a.b\}$ | $\{b\}$ |
| $\{b\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ | $\varnothing$ | $\{a\}$ |
| $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{b\}$ | $\{a\}$ | $\varnothing$ |

~的运算表

| $X$ | $\sim X$ |
|---|---|
| $\varnothing$ | $\{a,b\}$ |
| $\{a\}$ | $\{b\}$ |
| $\{b\}$ | $\{a\}$ |
| $\{a,b\}$ | $\varnothing$ |

# 14.1.1 二元运算与一元运算的定义

## 运算表的实例（续）

**例：** $Z_5 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$, $\oplus$, $\otimes$ 分别为模 5 加法与乘法 .

$\oplus$的运算表

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

$\otimes$的运算表

| $\otimes$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

## 14.1.2 二元运算的性质

**定义14.3** 设 $\circ$ 为 $S$ 上的二元运算,

1) 如果对于任意的 $x, y \in S$ 有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则称运算在 $S$ 上满足交换律;

**注:** 运算表是对称的 .

2) 如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则称运算在 $S$ 上满足结合律;

**注:** 运算表无特征的 .

3) 如果对于任意的 $x \in S$ 有

$$x \circ x = x,$$

则称运算在 $S$ 上满足幂等律 .

**注:** 运算表对角线元素与表头相同 .

# 14.1.2 二元运算的性质

**例：**下列集合上的二元运算的性质：

| 集合 | 运算 | 交换律 | 结合律 | 幂等律 |
|---|---|---|---|---|
| **Z, Q, R** | 普通加法 $+$ | 有 | 有 | 无 |
| | 普通乘法 $\times$ | 有 | 有 | 无 |
| $M_n(\mathbf{R})$ | 矩阵加法 $+$ | 有 | 有 | 无 |
| | 矩阵乘法 $\times$ | 无 | 有 | 无 |
| $P(B)$ | 并 $\cup$ | 有 | 有 | 有 |
| | 交 $\cap$ | 有 | 有 | 有 |
| | 相对补 $-$ | 无 | 无 | 无 |
| | 对称差 $\oplus$ | 有 | 有 | 无 |
| $A^A$ | 函数复合 $\circ$ | 无 | 有 | 无 |

## 14.1.2 二元运算的性质

**定义14.4** 设 $\circ$ 和 $*$ 为 $S$ 上两个不同的二元运算,

1) 如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z) \quad \text{右分配律}$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y) \quad \text{左分配律}$$

则称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足分配律 .

2) 如果 $\circ$ 和 $*$ 都可交换，并且对于任意的 $x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x \qquad x * (x \circ y) = x$$

则称 $\circ$ 和 $*$ 运算满足吸收律.

# 14.1.2 二元运算的性质

**例：**下列集合上的二元运算的性质：

| 集合 | 运算 | 分配律 | 吸收律 |
| --- | --- | --- | --- |
| $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ | 普通加法 $+$ 与乘法 $\times$ | $\times$ 对 $+$ 可分配 | 无 |
| | | $+$ 对 $\times$ 不分配 | |
| $M_n(\mathbf{R})$ | 矩阵加法 $+$ 与乘法 $\times$ | $\times$ 对 $+$ 可分配 | 无 |
| | | $+$ 对 $\times$ 不分配 | |
| $P(B)$ | 并 $\cup$ 与交 $\cap$ | $\cup$ 对 $\cap$ 可分配 | 有 |
| | | $\cap$ 对 $\cup$ 可分配 | |
| | 交 $\cap$ 与对称差 $\oplus$ | $\cap$ 对 $\oplus$ 可分配 | 无 |
| | | $\oplus$ 对 $\cap$ 不分配 | |

# 14.1.2 二元运算的性质

## 二元运算的特异元素（单位元）

**定义14.5** 设 $\circ$ 为 $S$ 上的二元运算，如果存在 $e_l$ (或 $e_r$) $\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \quad (\text{或 } x \circ e_r = x),$$

则称 $e_l$ ( 或 $e_r$ ) 是 $S$ 中关于 $\circ$ 运算的左单位元 (或右单位元) .

若 $e \in S$ 关于 $\circ$ 运算既是左单位元又是右单位元，则称 $e$ 为 $S$ 上关于 $\circ$ 运算的单位元．单位元也叫做幺元．

**注：** 1) 在运算表中左 (右) 单位元所在行 (列) 的元素与上 (前) 表头相同；

2) 若一侧有多个单位元，则另一侧就没有单位元．

## 14.1.2 二元运算的性质

### 单位元的唯一性定理

**定理14.1** 设 $\circ$ 为 $S$ 上的二元运算，$e_l$ 和 $e_r$ 分别为 $S$ 中关于运算的左和右单位元，则 $e_l = e_r = e$ 为 $S$ 上关于 $\circ$ 运算的唯一的单位元 .

**证明：**

$$e_l = e_l \circ e_r = e_r,$$

所以 $e_l = e_r$，将这个单位元记作 $e$ .

假设 $e'$ 也是 $S$ 中的单位元，则有

$$e' = e \circ e' = e.$$

唯一性得证 .

## 14.1.2 二元运算的性质

### 二元运算的特异元素（零元）

**定义14.6** 设 $\circ$ 为 $S$ 上的二元运算，如果存在 $\theta_l$(或$\theta_r$)$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \ (\text{或}\ x \circ \theta_r = \theta_r),$$

则称 $\theta_l$ (或$\theta_r$) 是 $S$ 中关于 $\circ$ 运算的左零元 (或右零元) .

若 $\theta\in S$ 关于 $\circ$ 运算既是左零元又是右零元，则称 $\theta$ 为 $S$ 上关于 $\circ$ 运算的零元 .

**注：** 1) 在运算表中左 (右) 零元所在行 (列) 的元素与前 (上) 表头相同；

2) 若一侧有多个零元，则另一侧就没有零元 .

# 14.1.2 二元运算的性质

## 零元的唯一性定理

**定理** 设 $\circ$ 为 $S$ 上的二元运算，$\theta_l$ 和 $\theta_r$ 分别为 $S$ 中关于运算的左和右零元，则 $\theta_l = \theta_r = \theta$ 为 $S$ 上关于 $\circ$ 运算的唯一的零元 .

**证明:**

$$\theta_l = \theta_l \circ \theta_r = \theta_r,$$

所以 $\theta_l = \theta_r$，将这个零元记作 $\theta$ .

假设 $\theta'$ 也是 $S$ 中的零元，则有

$$\theta' = \theta \circ \theta' = \theta.$$

唯一性得证 .

**注:** 当 $|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的；

当 $|S| = 1$时，这个元素既是单位元也是零元 .

# 14.1.2 二元运算的性质

## 二元运算的特异元素（逆元）

**定义14.7** 令 $e$ 为 $S$ 中关于运算 $\circ$ 的单位元 . 对于 $x\in S$，如果

存在 $y_l$（或 $y_r$）$\in S$ 使得

$$y_l \circ x = e \text{（或 } x \circ y_r = e\text{）},$$

则称 $y_l$ (或 $y_r$) 是 $x$ 的左逆元 ( 或右逆元 ).

关于 $\circ$ 运算，若 $y\in S$ 既是 $x$ 的左逆元又是 $x$ 的右逆元，

则称 $y$ 为 $x$ 的逆元 . 如果 $x$ 的逆元存在，就称 $x$ 是可逆的 .

**注：** 在运算表中单位元对应的前表头元素与上表头元素互为左、右逆元 .

## 14.1.2 二元运算的性质

### 逆元的唯一性定理

**定理14.2** 设$\circ$为$S$上可结合的二元运算，$e$为该运算的单位元，对于$x\in S$，如果存在左逆元$y_l$和右逆元$y_r$，则有$y_l = y_r = y$，且$y$是$x$的唯一的逆元.

**证明：** 由$y_l \circ x = e$ 和$x \circ y_r = e$，得

$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

令$y_l = y_r = y$，则$y$是$x$的逆元.

假若$y' \in S$也是$x$的逆元，则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

所以$y$是$x$唯一的逆元.

**注：** 对于可结合的二元运算，可逆元素$x$只有唯一的逆元，记为$x^{-1}$.

# 14.1.2 二元运算的性质

**例:**

| 集合 | 运算 | 单位元 | 零元 | 逆元 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ | 普通加法 $+$ | $0$ | 无 | $x$ 的逆元 $-x$ |
| | 普通乘法 $\times$ | $1$ | $0$ | $x$ 的逆元 $x^{-1}$ $(x \neq 0)$ |
| $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ | 矩阵加法 $+$ | $\theta$ | 无 | $X$ 逆元$-X$ |
| | 矩阵乘法 $\times$ | $E$ | $\theta$ | $X$ 的逆元 $X^{-1}$ ($X$ 可逆) |
| $P(B)$ | 并 $\cup$ | $\varnothing$ | $B$ | $\varnothing$ 的逆元为 $\varnothing$ |
| | 交 $\cap$ | $B$ | $\varnothing$ | $B$ 的逆元为 $B$ |
| | 对称差 $\oplus$ | $\varnothing$ | 无 | $X$ 的逆元为 $X$ |

其中 $\theta$ 和 $E$ 分别表示 $n$ 阶全 0 矩阵和单位矩阵 .

## 14.1.2 二元运算的性质

### 消去律

**定义14.6** 设$\circ$为集合$S$上二元运算，如果对于任意元素 $x, y, z \in S, x \neq \theta$，都有

$$x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z,$$

$$y \circ x = z \circ x \Rightarrow y = z,$$

成立，则称$\circ$运算满足消去律.

**例：** 1）普通加法和乘法满足消去律？ ✔

2）矩阵加法满足消去律 ？ ✔

3）矩阵乘法满足消去律 ？ ✘

4）集合的并和交运算满足消去律 ？ ✘

## 14.1.2 二元运算的性质

**例：** 设 $\circ$ 运算为 **Q** 上的二元运算，

$$\forall x, y \in \mathbf{Q}, \quad x \circ y = x + y + 2xy,$$

1) 判断 $\circ$ 运算是否满足交换律和结合律，并说明理由.

**解：** 1) $\circ$ 运算可交换. 任取 $x, y \in \mathbf{Q}$,

$$x \circ y = x + y + 2xy = y + x + 2yx = y \circ x,$$

$\circ$ 运算可结合，任取 $x, y, z \in \mathbf{Q}$,

$$(x \circ y) \circ z = (x + y + 2xy) + z + 2(x + y + 2xy)z$$

$$= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz$$

$$x \circ (y \circ z) = x + (y + z + 2yz) + 2x(y + z + 2yz)$$

$$= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz$$

## 14.1.2 二元运算的性质

**例：**（续）设$\circ$运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y \in Q, \quad x \circ y = x + y + 2xy,$$

2) 求出$\circ$运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元 .

**解：** 2) 设$\circ$运算的右单位元为 $e_r$，则对于任意 $x$ 有 $x \circ e_r = x$ 成立，即

$$x + e_r + 2xe_r = x \Rightarrow e_r = 0 \in Q,$$

由于$\circ$运算可交换，同理可证：左单位元 $e_l = 0 \in Q$,

所以 0 是单位元（幺元）.

## 14.1.2 二元运算的性质

**例：**（续）设 $\circ$ 运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y \in \mathrm{Q}, \quad x \circ y = x + y + 2xy,$$

2) 求出 $\circ$ 运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元 .

**解：** 2) 设 $\circ$ 运算的右零元为 $\theta_r$，则对于任意 $x$ 有 $x \circ \theta_r = \theta_r$ 成立，即

$$x + \theta_r + 2x\theta_r = \theta_r \Rightarrow \theta_r = -1/2 \in \mathrm{Q} \ ,$$

由于 $\circ$ 运算可交换，同理可证：左零元 $\theta_l = -1/2 \in \mathrm{Q}$，

所以 $-1/2$ 是零元 .

## 14.1.2 二元运算的性质

**例：**（续）设 $\circ$ 运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y \in Q, \quad x \circ y = x + y + 2xy,$$

2) 求出 $\circ$ 运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元 .

**解：** 2) 给定 $x$，设 $x$ 的右逆元为 $y_r$，则有 $x \circ y_r = 0$ 成立，即

$$x + y_r + 2xy_r = 0 \Rightarrow y_r = -\frac{x}{1+2x} \in Q \quad (x \neq -1/2)$$

是 $x$ $(x \neq -1/2)$ 的右逆元，由于 $\circ$ 运算可交换，

同理可证：左逆元 $y_l = -\dfrac{x}{1+2x}$，由于 $\circ$ 运算可结合，$x^{-1} = -\dfrac{x}{1+2x}$ .

# 14.1.2 二元运算的性质

**例：** 下面是三个运算表

1) 说明哪些运算是可交换的、可结合的、幂等的.

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $c$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $b$ | $c$ | $a$ |

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

| $\bullet$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

**解：** $*$： 交换律、结合律；

$\circ$： 结合律、幂等律；

$\bullet$： 交换律、结合律 .

# 14.1.2 二元运算的性质

**例：** 下面是三个运算表

2) 求出每个运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $c$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $b$ | $c$ | $a$ |

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

| $\bullet$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

**解：** $*$： 单位元： $b$ 、零元：无 、$a^{-1}=c, b^{-1}=b, c^{-1}=a$ ；

$\circ$： 单位元：无、零元：无 、没有逆元;

$\bullet$： 单位元： $a$ 、零元： $c$ 、$a^{-1}=a$, 其它元素无逆 .

# 14.1.2 二元运算的性质

**例：** 设集合 $A=\{a, b, c, d\}$ 上的 $\circ$ 运算如表所示。

1) 说明运算是否可结合，为什么?

2) 求出 $\circ$ 运算的单位元与零元 .

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $d$ |
| $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ |

**解：** 1) 不满足结合律 .

$(b\circ b)\circ c=c$， $b\circ(b\circ c)=d$

2) 单位元 $a$，零元 $d$

# 14.1.2 二元运算的性质

**例：** 设 集合 $A=\{a, b, c\}$，构造 $A$ 上的二元运算 * 使得 $a*b=c$, $c*b=b$, 且 * 运算是幂等的、可交换的，给出关于 * 运算的一个运算表，说明它是否可结合，为什么?

**解：** 运算表如下：

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | c | x |
| b | c | b | b |
| c | x | b | c |

其中 $x$ 可以为 $a$, $b$, 或 $c$

运算不可结合：$(a*b)*b=b$, $a*(b*b)=c$

# 作 业

- **14.1**
- **14.3**

# 研 讨 题

- 集合$A=\{\,n\mid n$ 是与5互质的自然数$\}$，则加法和乘法哪个是 $A$ 上的二元运算，为什么？

- 在实数集$R$上定义二元运算 $*$ 为：$a,\ b\in R,\ a*b=a\,|\,b\,|$, 问该二元运算是否满足交换律、结合律和幂等律 .

- 求出上述二元运算 $*$ 的左单位元、右单位元、左零元和右零元，若单位元存在则求出逆元 .