第二章 母函数

上海大学计算机学院 王冰

类型	例子	是否排列	允许重复？	计数
无重组合	从n个球中取r个	No	No	$C(n, r)$
无重排列	从n个人中找r个排队	Yes	No	$P(n, r)$
可重组合	从n种水果中选r个拼果篮	No	Yes	$C(n+r-1, r)$
可重排列	n个字母组成的r位串	Yes	Yes	n^r
多重全排列	r_1个a, r_2个b组成的n位串	Yes	Yes	$n!/(r_1!\ r_2!)$

1. 母函数的概念 –组合的母函数

例 设有a, b, c三个不同的球, 从中选取一个, 或选a, 或选b, 或选c, 把这些可能的选取形象地表示为a+b+c.

类似地, 从中选取二个, 或选a和b, 或选a和c, 或选b和c. 可形象地表示为ab+ac+bc, 同样, 从中选取三个, 只有一种方法, 也可形象地表示为abc.

- 从多项式

$(1+ax)(1+bx)(1+cx)$

$=1+(a+b+c)x+(ab+ac+bc)x^2+(abc)x^3$

中发现,所有这些可能的选取方式正好是x幂的系数. 其中x^i的系数是从三个球中选取i个的方法之形象表示.

- 因子$(1+ax)$形象地指出,对球a,有两种选取方法:不选a,或选a. 因子$(1+ax)$中的1表示不选a,而x的系数a表示选a.

- 在上述多项式中, x^i的系数表明选取i个球的方法, 则

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)$$

表明: 对a, b, c三球, 选取的方法是: "选a或不选a"和"选b或不选b"以及"选c或不选c".

- 多项式中x的幂次表示选取球的个数, 而其相应系数表示一切可能的选取方法.

- 如果只关心不同组合方案的数目，不关心各种方案的罗列. 可以令a=b=c=1，则：
- $(1+x)^3$

  $= C(3,0)+C(3,1)x + C(3,2)x^2+C(3,3)x^3 = 1+3x+3x^2+x^3.$
- 总方案数$N=C(3,0)+C(3,1)+C(3,2)+C(3,3)$

  $=1+3+3+1=8.$

- 是一个关于形式变量x的幂函数, 这个幂函数中不同幂次的系数都是一个组合数.
- 推广到任意n个不同球所有可能组合的方案数-二项式系数. 用形式级数的观点来看待.
- 基本思想: 把离散的数列同多项式或幂级数一一对应起来, 从而把离散数列间的结合关系转化为多项式或幂级数之间的运算。

2. 母函数定义

定义2.1 利用给定序列$a_0,a_1,a_2,\ldots$构造函数

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

称为序列$a_0, a_1, a_2,\ldots$的母函数.

- 母函数定义中的级数是形式幂级数, 不必关心收敛性, x只是一个形式变量.
- 有限序列 $a_0, a_1,\ldots, a_n$也可以定义它的母函数. (后面添加0)
- 理论依据: 多项式的任何一项与组合结果一一对应。

3. 母函数的运算

设序列$\{a_n\}$的母函数$A(x)=\sum a_n x^n$, $\{b_n\}$的母函数为$B(x)=\sum b_n x^n$. 运算定义如下:

(1) 相等:$A(x)=B(x) \Leftrightarrow \{a_n\}=\{b_n\} \Leftrightarrow a_n=b_n$, $n=1,2,\ldots$

(2) 相加: $A(x)+B(x)=\sum(a_n+b_n)\,x^n$

(3) 相减: $A(x)-B(x)=\sum(a_n-b_n)\,x^n$

(4) 数乘: $cA(x)=\sum(ca_n)\,x^n$

(5) 相乘: $A(x)B(x)=\sum c_n x^n$, 其中

$c_0=a_0b_0$,

$c_1=a_0b_1+a_1b_0$,

$c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$, …………,

$c_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0$, …………

(6) 逆: 如果$A(x)B(x)=1$, 则称$B(x)$为$A(x)$的逆, 记为$B(x)=A^{-1}(x)=1/A(x)$.

(显然两者互为逆.)

例 设$F(x)=1+x+x^2+\ldots$, $G(x)=1-x$, 由定义可以得到 $F(x)G(x)=1$, 因此$1/G(x)=G^{-1}(x)=F(x)$, 即

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

例 有限数列$C(n,r)$, $r=0,1,2,\cdots,n$的母函数?

2.1母函数
-由数列推出母函数

例 求无限数列{1， 1， ⋯， 1， ⋯}的母函数?

例 求无限数列{1， 2， …， n， …}的母函数?

例 设$u_n = 2^n$， 则{u_n}的母函数?

2.1母函数
-由数列推出母函数

例 求序列$\{(n+1)\}$的母函数。

2.1母函数
-由数列推出母函数

例 证明序列$C(n,n), C(n+1,n), C(n+2,n)\ldots$,的母函数是：$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$

2.1母函数
-由数列推出母函数

例：确定方程：$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负奇整数解

$e_1,e_2,\ldots,e_k$的个数a_n的生成函数。

2.1母函数

定理2.1.1 组合的母函数：设 $S=\{n_1\cdot e_1, n_2\cdot e_2, \cdots, n_m\cdot e_m\}$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，则 S 的 r 可重组合的母函数为

$$G(x)=\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n_i}x^j\right)=\sum_{r=0}^{n}a_r x^r$$

其中，r 可重组合数为 x^r 之系数 a_r，$r=0, 1, 2, \cdots, n$.

推论1 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，则 r 无重组合的母函数为

$$G(x)=(1+x)^n$$

组合数为 x^r 之系数 $C(n, r)$。

2.1母函数

推论2 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\cdots,\infty\cdot e_n\}$，则 r 无限可重组合的母函数为

$$G(x)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\right)^n=\frac{1}{(1-x)^n}$$

组合数为 x^r之系数 $C(n+r-1,r)$。

推论3 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\cdots,\infty\cdot e_n\}$，每个元素至少取一个，则 r 可重组合（$r\geq n$）的母函数为

$$G(x)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}x^j\right)^n=\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

2.1母函数-应用

例 设有2个红球，1个黑球，1个白球，问

（1）共有多少种不同的选取方法，试加以枚举?

（2）若每次从中任取3个，有多少种不同的取法?

2.1母函数-应用

例 设有红，黄，蓝三种大小相同的球分别为4个，3个和2个，从中任取4球，问：总共有多少种取法?

例 从上例的A中任取4球，若要求取出红球至少出现一个，黄球出现奇数个，蓝球出现偶数个，问：一共有多少种不同取法?

2.1母函数-应用

例 确定苹果、香蕉、橘子和梨的n-组合的个数，其中在每个n-组合中要求：苹果的个数必须是偶数，香蕉的个数必须是5的倍数，橘子的个数最多4个，梨的个数为0或1个，确定生成函数。

2.1母函数-应用

例 求不定方程$k_1+k_2+k_3+k_4=20$的解数。其中，限制k_1可取0,2,4; k_2可取1,3,5; k_3可取6,7;k_4可取8,9。

2.1母函数-应用

例 从n双互不相同的袜子（每双袜子中的两只相同）中取出r只，要求没有任何两只是成对的，共有多少种不同的取法？

2.1母函数-已知母函数求序列

例 设母函数$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{x}{(1-x)^3}$，求un 。

例 求 $(1 + x^4 + x^8)^{10}$ 中x^{20}项的系数。

2.2母函数的性质

由于母函数与它的生成数列之间是一一对应的，因此，若两个母函数之间存在某种关系，则对应的生成数列之间也必然存在相应的关系。反之亦然。利用这类对应关系，常常能帮助我们构造出某些指定数列的母函数的形式。特别地，还能得到一些求和的新方法。

设数列$\{a_k\}$、$\{b_k\}$、$\{c_k\}$的母函数分别为$A(x)$、$B(x)$、$C(x)$，且都可逐项微分和积分。

2.2母函数的性质

性质1 若 $b_k=\begin{cases}0, & k<r\\ a_{k-r}, & k\geq r\end{cases}$ （即 $a_k=b_{k+r}$），则 $B(x)=x^rA(x)$。

证 $B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{r-1}x^{r-1}+b_rx^r+b_{r+1}x^{r+1}+\cdots$

$$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{r\text{个}}+b_rx^r+b_{r+1}x^{r+1}+\cdots$$

$$=a_0x^r+a_1x^{r+1}+\cdots$$

$$=x^rA(x)$$

2.2母函数的性质

性质2　若 $b_k = a_{k+r}$，则 $B(x) = \left[A(x) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i\right] \Big/ x^r$

证　$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = a_r + a_{r+1} x + a_{r+2} x^2 + \cdots$

$$= \frac{1}{x^r}\left(a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + a_{r+2} x^{r+2} + \cdots\right)$$

$$= \left[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{r-1} x^{r-1}\right] \Big/ x^r$$

2.2母函数的性质

性质3 若 $b_k=\sum_{i=0}^{k} a_i$，则 $B(x)=\frac{A(x)}{1-x}$

（证） 给等式 $b_k=\sum_{i=0}^{k} a_i$ 的两端都乘以 x^k 并分别相加，得

$$
\begin{array}{lll}
k=0 & 1: & b_0=a_0 \\
k=1 & x: & b_1=a_0+a_1 \\
k=2 & x^2: & b_2=a_0+a_1+a_2 \\
 & & \vdots \\
k=n & x^n: & b_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n \\
+) & & \vdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$B(x)=\frac{a_0}{1-x}+\frac{a_1x}{1-x}+\frac{a_2x^2}{1-x}+\cdots=\frac{A(x)}{1-x}$$

2.2母函数的性质

性质3　若 $b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)}{1-x}$

例如，设 $A(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$　　$(a_k=1)$

令 $b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i=k+1$，那么易得

$$B(x)=1+2x+3x^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

同理，令 $c_k=\sum_{i=0}^{k}b_i=1+2+\cdots+(k+1)$，可得

$$C(x)=1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}$$

2.2母函数的性质

性质4 若 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ 收敛，且 $b_k=\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ ，则 $B(x)=\dfrac{A(1)-xA(x)}{1-x}$

证 首先由条件知 b_k 存在，按定义

$$b_0=a_0+a_1+a_2+\cdots=A(1)$$

$$b_1=a_1+a_2+a_3+\cdots=A(1)-a_0$$

$$\vdots$$

$$b_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots=A(1)\ -a_0-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}$$

给 b_k 对应的等式两端都乘以 x^k 并分别按左右求和，得

$$B(x)=A(1)+x(A(1)-a_0)+x^2(A(1)-a_0-a_1)+x^3(A(1)-a_0-a_1-a_2)+\ldots$$

2.2母函数的性质

$$B(x) = A(1) + x(A(1) - a_0) + x^2(A(1) - a_0 - a_1) + x^3(A(1) - a_0 - a_1 - a_2) + \ldots$$

$$A(1)[1 + x + x^2 + \cdots] - a_0 x[1 + x + x^2 + \cdots] - a_1 x^2[1 + x + x^2 + \cdots] - \cdots$$

$$= \frac{A(1)}{1-x} - \frac{x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots)}{1-x} = \frac{A(1)}{1-x} - \frac{xA(x)}{1-x} = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

2.2母函数的性质

性质5 若 $b_k = ka_k$，则 $B(x) = xA'(x)$ 。

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$= x\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k x^k\right)' = x\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right)'$$

$$= x[A(x) - a_0]'$$

$$= xA'(x)$$

2.2母函数的性质

性质6 若 $b_k = \dfrac{a_k}{1+k}$，则 $B(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{x}\int_0^x x^k dx = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) dx$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$$

2.2母函数的性质

性质7　若 $c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$，则 $C(x)=A(x)B(x)$ 。

$$c_0=a_0b_0$$

$$c_1=a_0b_1+a_1b_0$$

$$c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$$

$$\vdots$$

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$$

给 c_k 对应的等式两端都乘以 x^k 后左右两边分别求和

$$C(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$$

2.2母函数的性质

$$C(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$$

$$=a_0(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)+a_1x(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)$$

$$+a_2x^2(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)+\cdots$$

$$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)$$

作业

- 作业