成绩	

上海大学 2013～2014 学年冬季学期试卷（A 卷）

课程名： 概率论与数理统计 课程号： 23014030 学分： 5

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号______________应试人所在院系_____________

题号	一	二	三	四	五
得分	10	15	10	60	5

得分	评卷人

一、是非题：（每小题 2 分，5 题共 10 分）

1、对事件 A 与 B，一定成立等式 $(A-B)\cup B=A$。 （ 错）

2、设 $0<P(B)<1$，若 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，则事件 A、B 一定相互独立。 （ 对）

3、若事件 A 可以发生，则必有 $P(A)>0$。 （ 错）

4、若随机变量 X 与 Y 独立且同分布，那么必有 $P(X\le Y)=P(Y\le X)=\frac{1}{2}$。 （ 错）

5、设 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的无偏估计，且 $D(\hat{\theta})>0$。则 $\hat{\theta}^2$ 不是参数 θ^2 的无偏估计。 （ 对）

得分	评卷人

二、填空题：（每格 3 分，共 15 分）

6、已知随机事件 A 和 B 的概率分别为 $P(A)=0.7$ 和 $P(B)=0.5$，且 $P(A-B)=0.4$，那么，

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)-P(A-B)}{P(B)}=\dfrac{0.7-0.4}{0.5}=0.6$。

7、设随机变量 X 服从区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布，随机变量 $Y=X^2$，则它们的相关系数 $\rho_{XY}=$ 0 。

8、口袋中有 a 个白球，b 个黑球和 n 个红球，现从中一个一个不放回地取球，则白球比黑球出现得早的概率为 $\dfrac{a}{a+b}$ 。

9、设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(-2,5)$。若 $a(X+bY)^2$ 服从 χ^2 分布，那么 $a=$ $\dfrac{2}{3}$ ，$b=$ $\dfrac{1}{2}$ 。

草 稿 纸

得分	评卷人

三、选择题：（每小题 2 分，5 题共 10 分）

10、设事件 A，B **互不相容，且** $P(A)>P(B)>0$**，则一定正确的是**<u>　D　</u>**。**

(A) $P(A)+P(B)=1$；　　**(B)** $P(A\cup B)=1$；

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$；　　**(D)** $P(\overline{AB})=1$。

11、设随机变量 X **的密度函数** $f_X(x)$**。令** $Y=-2X$**，则** Y **的密度函数** $f_Y(y)$ **为**<u>　C　</u>**。**

(A) $2f_X(-2y)$；　　**(B)** $2f_X\left(-\frac{y}{2}\right)$；

(C) $\frac{1}{2}f_X\left(-\frac{y}{2}\right)$；　　**(D)** $-\frac{1}{2}f_X\left(-\frac{y}{2}\right)$。

12、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$**，其中** σ^2 **已知，而** μ **为未知参数。**$X_1,\ldots,X_n$ **是来自于总体** X **简单样本，样本均值为** $\bar{X}$**，样本方差为** S^2**。则不是统计量的是**<u>　B　</u>**。**

(A) $2\bar{X}$；　　**(B)** $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$；　　**(C)** $\frac{S^2}{\sigma^2}$；　　**(D)** $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$。

13、设某人罚篮命中率为 90%**，独立罚篮 100 次，那么罚篮命中总次数用中心极限定理估计的近似分布为**<u>　C　</u>**。（这里，**$\phi(x)$ **是标准正态分布的分布函数）**

(A) $\phi(x)$；　　**(B)** $\phi(x-90)$；　　**(C)**；$\phi\left(\frac{x-90}{3}\right)$　　**(D)** $\phi\left(\frac{x-90}{9}\right)$。

14、设连续型随机变量 X **的密度函数满足** $f(x)=f(-x)$**，则对** $x>0$**，分布函数** $F(x)$ **一定有**<u>　A　</u>**。**

(A) $F(-x)=1-F(x)$；　　**(B)** $F(-x)=1-\int_0^x f(u)du$；

(C) $F(x)=F(-x)$；　　**(D)** $F(-x)=2F(x)-1$。

得分	评卷人

四、计算题：（5 题共 60 分）

15、（本题共 10 分）假设有两箱同种零件：第一箱内装 8 件，其中 4 件一等品；第二箱内装 10 件，其中 6 件一等品。现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回）。试求：

(1) 先取出的零件是一等品的概率；

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的概率。

解：以 A_i 记事件“第 i 次取出的零件是一等品”；以 B 记事件“选取的是第一箱”。（+1 分）

那么已知条件为：$P(A_1|B)=0.5$；$P(A_1|\bar{B})=0.6$；$P(B)=0.5$。

$$P(A_1A_2|B)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{3}{14}；\quad P(A_1A_2|\bar{B})=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}；\qquad（+3 分）$$

1）$P(A_1)=P(A_1|B)P(B)+P(A_1|\bar{B})P(\bar{B})=\frac{11}{20}$（2+1 分）

2）$P(A_1A_2)=P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|\bar{B})P(\bar{B})=\frac{23}{84}$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{115}{231}\quad（2+1 分）$$

草　　稿　　纸

16、（本题共 15 分）设随机变量 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax^2y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}。$$

（1）（5 分）求系数 A 的值；

（2）（4 分）求 X,Y 的边缘概率密度函数；

（3）（2 分）判断 X,Y 是否相互独立；

（4）（4 分）求概率 $P\{X>Y\}$。

解： 1）$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 Ax^2ydxdy=\frac{A}{6}$ （+3 分），因此 $A=6$。（+2 分）

2）当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=6\int_0^1 x^2ydy=3x^2$，其它处为零；（1+1 分）

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=6\int_0^1 x^2ydx=2y$，其它处为零；（1+1 分）

3） $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}6x^2y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

故 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以独立。（+2 分）

4） $P\{X>Y\}=P((X,Y)\in D)=6\int_0^1\int_0^x x^2ydydx$ （+3 分）

$=3\int_0^1 x^4dx==\frac{3}{5}$ （+2 分）

17、（本题 10 分）设某种元器件的寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均未知。现在随机抽取 25 件元器件，测得其平均寿命为 960 小时，标准差为 $s=100$。该种元器件的寿命超过 1000 小时才认为是合格的。由这些数据，对元器件的质量可作何种判断？（显著性水平取为 $\alpha=0.05$）

（附注：$u_{0.05}=1.65$，$u_{0.025}=1.96$，

$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.025}(24)=2.0639$）

解：检验问题：原假设 H_0：$\mu\ge 1000$；备择假设 H_1：$\mu<1000$。（+3 分）。

用 $t-$检验法，拒绝域为 $\{\bar{x}\mid t=\frac{\bar{x}-1000}{s/\sqrt{n}}\le -t_\alpha(n-1)\}$，（+3 分）

这里，$n=25$，$s=100$，$\alpha=0.05$。代入计算：$t=\frac{960-1000}{100/\sqrt{25}}=-2<-1.7109$，（+2）。

即在拒绝域内。因此拒绝原假设，认为产品不合格。（+2 分）

草 稿 纸

18、（本题 15 分）设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	1	2
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

1）（5 分）计算 $Z_1=X+Y$ 的分布律；2）（3 分）计算 $Z_2=\max\{X,Y\}$ 的分布律；3）（4 分）计算协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$；4）（3 分）计算相关系数 ρ_{XY}。

解：解 1）

Z_1	-2	0	1	3	4
	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

（+5 分）

2）

Z_2	-1	1	2
	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

（+3 分）

3）$EX=-\frac{6}{10}+\frac{8}{10}=\frac{1}{5}$，$EY=-\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，

$EXY=\frac{1}{10}-\frac{2}{10}-\frac{6}{10}-\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{4}{10}=-\frac{5}{10}$，

$\operatorname{cov}(X,Y)=-\frac{5}{10}-\frac{4}{25}=-\frac{25+8}{50}=-\frac{33}{50}$（1+1+2 分）

4），$EX^2=\frac{6}{10}+\frac{16}{10}=\frac{11}{5}$，$EY^2=\frac{6}{10}+\frac{16}{10}=\frac{11}{5}$，$DX=\frac{11}{5}-\frac{1}{25}=\frac{54}{25}$，$DY=\frac{11}{5}-\frac{16}{25}=\frac{39}{25}$，

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=-\frac{33}{50}\times\sqrt{\frac{25\times 25}{54\times 39}}=-\frac{11}{6}\sqrt{\frac{1}{26}}\approx -0.36$$（+3 分）

19、（本题 10 分）设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax^{a-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $a>0$ 为未知参数。

（1）（4 分）求参数 a 的矩估计 $\hat{a}_1$；

（2）（6 分）求参数 a 的最大似然估计 $\hat{a}_2$。

解 （1） $EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 ax^a dx=\frac{a}{a+1}$，（+2）

所以，$a=\frac{EX}{1-EX}$，故 $\hat{a}_1=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$。（+2）

（2）设样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则当所有的 $0<x_i<1$ 时，最大似然函数为

$$L(a;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}ax_i^{a-1}=a^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{a-1};$$ （+2）

否则为零。相应的对数似然函数为

$$\ln L(\theta;x_1,\ldots,x_n)=n\ln a+(a-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$，（+2）

由 $0=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;x_1,\ldots,x_n)=-\frac{n}{a}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，即得 $\hat{a}_2=n/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=\frac{1}{\overline{\ln x_i}}$。（1+1 分）

草 稿 纸

得分	评卷人

五、证明题：（1 题共 5 分）

20、（本题 5 分）设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$，且 $X+Y$，$X-Y$ 均服从正态分布。证明：若 $X+Y \sim N(0,1)$，则 $X-Y \sim N(0,3)$。

证明：显然 $E(X-Y)=EX-EY=0$。（+1 分）

$1=D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$，

故 $Cov(X,Y)=\dfrac{1-DX-DY}{2}=-\dfrac{1}{2}$。（+2 分）

因此，

$D(X-Y)=DX+D(-Y)+2Cov(X,-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=3$。（+2 分）

从而，$X-Y \sim N(0,3)$。

草　稿　纸