第5章 Polya计数定理

1、群的定义与基本性质，子群
2、置换群
3、循环、奇置换与偶置换
4、Burnside引理
5、Polya定理

5.3 Burnside引理

(2)共轭类

$p_1=(1)(2)(3\ 4)=(2)(1)(3\ 4)$, $\dashrightarrow$ $(1)^2(2)^1(3)^0(4)^0$

$p_2=(1)(2\ 3\ 4)$. $\dashrightarrow$ $(1)^1(2)^0(3)^1(4)^0$

$p_3=(1\ 2)(3\ 4)$. $\dashrightarrow$ $(1)^0(2)^2(3)^0(4)^0$

$p_4=(1\ 2\ 3\ 4)$. $\dashrightarrow$ $(1)^0(2)^0(3)^0(4)^1$

$p_5=(1)(2)(3)(4)=(1)(2)(4)(3)=\ldots$ $\dashrightarrow$ $(1)^4(2)^0(3)^0(4)^0$

5.3 Burnside引理

一般可把S_n中任意一个置换p分解成若干互不相交的循环乘积：

$$p=\underbrace{(a_1a_2\ldots a_{k_1})(b_1b_2\ldots b_{k_2})\ldots(h_1h_2\ldots h_{k_t})}_{t\text{项}}$$

其中$k_1+k_2+\ldots+k_t=n.$

设其中k阶循环出现的次数为$c_k,k=1,2,\ldots n.$

k阶循环出现c_k次，用$(k)^{c_k}$表示。

S_n中的置换可按分解成格式$(pattern)$

$$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$$

的不同而分类。

5.3 Burnside引理

S_n中p的循环格式 $(1)^{C_1}(2)^{C_2}\ldots(n)^{C_n}$，满足

$$\sum_{k=1}^{n} kC_k = n$$

S_n中有相同格式的置换全体构成一个**共轭类**。

定理：S_n中属于$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$共轭类的元素的个数为$\dfrac{n!}{c_1!c_2!\ldots c_n!1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}}$

5.3 Burnside引理

证： $(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$ 格式即为

$$\underbrace{\overbrace{(\cdot)}^{1个}\ldots(\cdot)}_{c_1个}\underbrace{\overbrace{(\cdot\cdot)}^{2个}\ldots(\cdot\cdot)}_{c_2个}\ldots\underbrace{\overbrace{(\cdot\cdot\ldots\cdot)}^{k个}\ldots(\cdot\cdot\ldots\cdot)}_{c_k个}$$

$[1,n]$的全排列共有$n!$个，每个排列依顺序填入上述格式，可得属于该共轭类的一个置换，反过来，该共轭类的每个置换都可以通过这样而得到。然而由此所得的$n!$个置换中有重复，重复来自：

5.3 Burnside引理

(a)由循环$(a_1a_2\ldots a_k)=(a_2a_3\ldots a_ka_1)=\ldots=(a_ka_1a_2\ldots a_{k\text{-}1})$引起的，一个$k$阶循环可重复$k$次，$c_k$个$k$阶循环共重复了$k^{c_k}$次；

(b)由互不相交的c_k个k阶循环乘积的可交换性引起的。c_k个k阶循环重复了$c_k!$次。

故属于$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$共轭类的元素的个数为

$$\frac{n!}{c_1!c_2!\ldots c_n!1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}} \qquad \blacksquare$$

5.3 Burnside引理

例： S_4中$(2)^2$共轭类有$\dfrac{4!}{2!\ \ 2^2}=3$个置换， 即

$(12)(34),(13)(24),(14)(23)$

类$\{0,2,0,0\}$：

类$\{1,0,1,0\}$：$(1)^1(3)^1$共轭类有$\dfrac{4!}{1!\,3}=8$个置换， 即

$(123),(124),(132),(134),$

$(142),(143),(234),(243).$

类$\{4,0,0,0\}$: $(1)^4$共轭类的个数: $\dfrac{4!}{4!0!0!0!1}=1$。$(1)(2)(3)(4)$

类$\{0,0,0,1\}$: $(4)^1$ 共轭类的个数: $\dfrac{4!}{0!0!0!1!1^0 2^0 3^0 4^1}=6$

$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (13\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$

类$\{2,1,0,0\}$: $(1)^2(2)^1$ 共轭类的个数: 6个。$(1)(2)(3\ 4)$, $(1)(3)(2\ 4)$, $(1)(4)(2\ 3)$, $(2)(3)(1\ 4)$, $(2)(4)(1\ 3)$, $(3)(4)(1\ 2)$.

5.3 Burnside引理

(3)k不动置换类

设G是$[1,n]$上的一个置换群.$G \leqslant S_n$. $k \in [1,n]$,G中使k保持不变的置换全体,称为k不动置换类,记做F_k.

定理5.3.2 置换群G的k不动置换类F_k是G的一个子群.

封闭性: $k \xrightarrow{P_1} k \xrightarrow{P_2} k, k \xrightarrow{P_1P_2} k.$

结合性: 自然。

单位元: G的单位元属于F_k.

逆元: $P \in F_k, k \xrightarrow{P} \mathrm{k}, \mathrm{k} \xrightarrow{P^{-1}} k$ 于是, $P^{-1} \in F_k$

$\therefore \mathrm{F}_k \leq G.$

5.3 Burnside引理

定理5.3.3 设G是$[1,n]$上的一个置换群，E_i是$[1,n]$在G的作用下包含i的等价类，F_i是i不动置换类。则有

$$|E_i||F_i|=|G|,\ i=1,2,\ldots n$$

证明： 假设$|E_i| = l$，不妨设$E_i = \{a_1, \ldots, a_l\}$.

$\exists i \in E_i, \exists p_k \in G,$ 使得 $i \xrightarrow{p_k} a_k, k = 1,2,\ldots,l.$

构造 $G_k = F_i p_k = \{p | p_j \circ p_k, p_j \in F_i\}$，则

$\forall p \in G_k, i \xrightarrow{p} a_k, G_{i1} \cap G_{i2} = \emptyset, i_1 \neq i_2$

P_2

$\therefore \bigcup_{k=1}^{l} G_k$ 包含于G。

5.3 Burnside引理

(2) $\forall p \in G, \exists a_k \in E_i, i \xrightarrow{p} a_k,$

$\exists p_k, i \xrightarrow{p_k} a_k, \therefore \exists p_k^{-1}, a_k \xrightarrow{p_k^{-1}} i,$

$\therefore i \xrightarrow{p^\circ p_k^{-1}} i, \therefore p^\circ p_k^{-1} \in F_i, \therefore p \in F_i p_k = G_k,$

$\therefore$ G包含于 $\bigcup_{k=1}^{l} G_k$

$$G = F_i \cdot p_1 \bigcup F_i \cdot p_2 \bigcup \dots \bigcup F_i \cdot p_l$$

$$|G| = |F_i \cdot p_1| + |F_i \cdot p_2| + \cdots + |F_i \cdot p_l|$$
$$= |F_i| + |F_i| + \cdots |F_i| = l|F_i| = |E_i| \cdot |F_i|$$

5.3 Burnside引理

Burnside引理

定理5.3.4 设$G=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$, $(G,\circ)$是N={1,2,…,n}上的置换群，则在该群的作用下，N可分拆成

$$l=\frac{1}{|G|}(c_1(p_1)+c_1(p_2)+\cdots+c_1(p_m))$$

个不同的等价类。$c_1(p_i)$表示置换pi中1阶循环的个数，i=1,2,…,m。

5.3 Burnside引理

例： $G=\{e,(12),(34),(12)(34)\}$.

$c_1(p_1)=4, c_1(p_2)=2, c_1(p_3)=2, c_1(p_4)=0.$

$l=[4+2+2+0]/4=2$. 以列表分析：

p_j \ S_{jk} \ k	1 2 3 4	$c_1(p_j)$	
(1)(2)(3)(4)	1 1 1 1	4	$(1)^4$
(12)(3)(4)	0 0 1 1	2	$(1)^2(2)^1$
(1)(2)(34)	1 1 0 0	2	$(1)^2(2)^1$
(12)(34)	0 0 0 0	0	$(2)^2$
$\lvert F_k \rvert \to$	2 2 2 2	8	

$$S_{jk}=\begin{cases}1, & k^{p_j}=k,\\ 0, & k^{p_j}\neq k.\end{cases}$$

5.3 Burnside引理

一般而言，与上表相仿，有如下表格，其中

$$S_{jk}=\begin{cases}1, & k^{p_j}=k,\\ 0, & k^{p_j}\neq k.\end{cases}$$

S_{jk} \ k p_j	1	2	…	n	$c_1(p_j)$
p_1	S_{11}	S_{12}	…	S_{1n}	$c_1(p_1)$
p_2	S_{21}	S_{22}	…	S_{2n}	$c_1(p_2)$
…	…	…			…
p_g	S_{g1}	S_{g2}	…	S_{gn}	$c_1(p_g)$
$\lvert F_k\rvert$	$\lvert F_1\rvert$	$\lvert F_2\rvert$	…	$\lvert F_n\rvert$	$\sum_{k=1}^{n}\lvert F_k\rvert=\sum_{j=1}^{g}c_1(p_j)$.

5.3 Burnside引理

设在G作用下，$[1,n]$分成l个等价类。

$$[1,n]=E_1+E_2+\ldots+E_l.$$

若i, j同属一个等价类，则$E_i=E_j$, $|E_i|=|E_j|$

因$|E_i||F_i|=|G|$，故$|F_i|=|F_j|$. 所以

$$\sum_{k=1}^{n}|F_k|=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in E_i}|F_k|=\sum_{i=1}^{l}|E_k|\ |F_k|=l|G|$$

$$l=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{n}|F_k|=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(p_j)$$

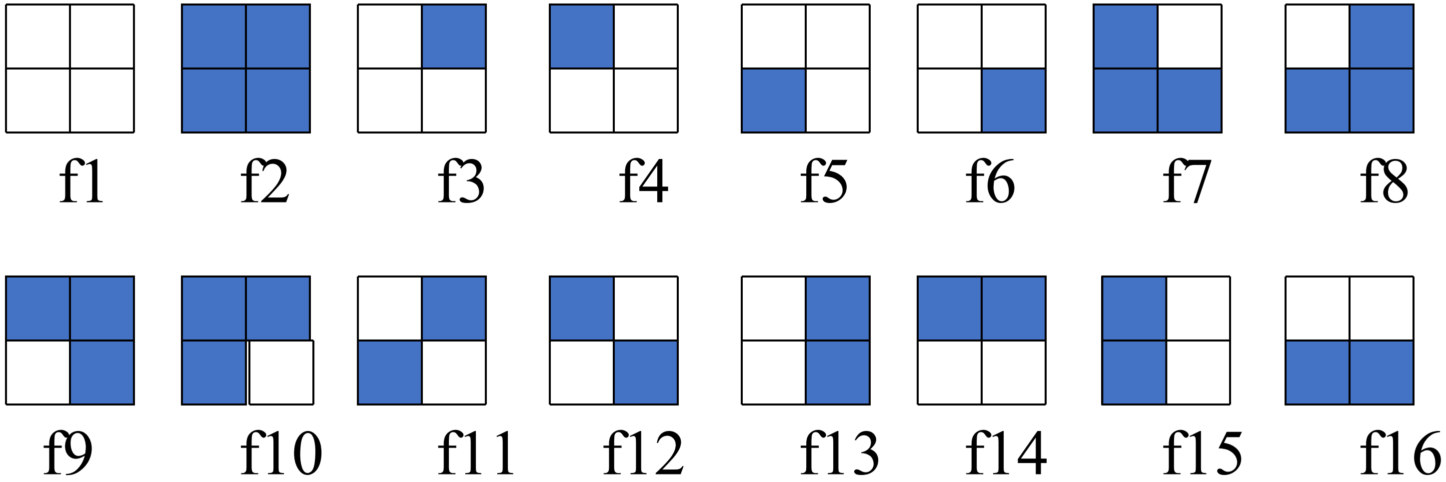
5.3 Burnside引理

例： 一正方形分成4格，2着色，有多少种方案?

图象：看上去不同的图形。

方案：经过转动相同的图象算同一方案。

图象数总是大于方案数。



5.3 Burnside引理

- $N=\{f_1,f_2,f_3,\dots,f_{16}\}$—图像集合。
- 置换群：$G=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$.
- 不动：$p_1=(1)(2)\dots(16)$
- 逆时针转90°：$p_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$
  $(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$
- 顺时针转90°：$p_3=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)$
  $(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$
- 转180°：$p_4=(1)(2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)$
  $(11)(12)\ (13\ 15)(14\ 16)$
- $(16+2+2+4)/4=6$(种方案)

- Burnside 引理的前提：要列出各种涂色方案，方可利用置换的性质将方案分为不同的等价类进行计数。
- 不足：当被染色的对象的个数n 或颜色数m 较大时，问题就变得非常复杂，且工作量很大
- 原因：因为首先各种染色方案共有m^n个，一个个枚举出来是比较困难的；其次还要找出在各种置换下互相等价的方案可能更加困难

- Polya问题描述：

设有n个对象，今用m 种颜色对其染色，其中每个对象任涂一种颜色，问有多少种不同的染色方案？

其中，对n个对象作某一置换，若其中一种染色方案变为另一种方案，则认为该两个方案是相同的，或者说是等价的。

- 问题描述（从集合与置换角度）：S是有n 个元素的集合，Q 是S 上的置换群，C是m种颜色的集合，用C中的颜色对S 中的元素染色，对每个元素任选一色染之，共有多少种不等价的方案。
- 等价方案的定义：两种方案称为等价，是指存在q∈Q， 将S中元素的一种染色方案变为另一种方案。

- 用Burnside引理：首先要考虑所有的染色方案构成一集合

$$C^S = \{f \mid f: S \xrightarrow{\text{映射}} C\} \quad (|C^S| = m^n)$$

- 再按照C^S上的置换$p \in G$，将各种方案分为不同等价类。这样做是很困难的，尤其是m^n种染色方案不易描绘出来。

- 重新考虑问题：

首先，映射f：S→C ，规定了S 中诸元素的一种染色方案，它将a∈S 染上颜色f(a) ∈C。所有f构成集合C^S，｜C^S｜=$|C|^{|S|}$=m^n.

- 实际上有两种置换群，G与Q，Q作用在集合S上，G作用在方案集C^S上，两个群之间有内在联系：对应于q∈Q ，相应地在C^S 上诱导出一个置换p∈G，且有

$$c_1(p) = m^{c(q)}$$

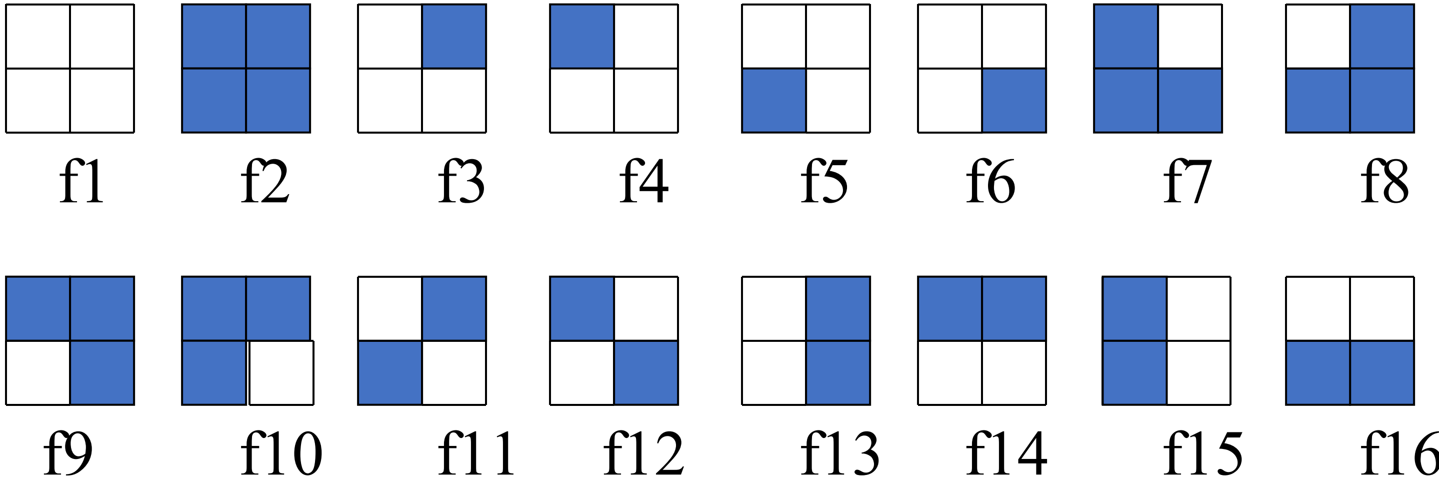
c(q) 为置换q中不相交循环的个数

特例，n＝4，m＝2仍用黑白两色染四个小正方形，被染色的对象集S＝{1，2，3，4}，颜色集C＝{黑，白}，方案集C^S＝{ f_1，f_2，…，f_{16}}。

这里，Q＝{q1，q2，q3，q4}，是针对S的置换集（绕大的正方形中心逆时针旋转）：

Q：

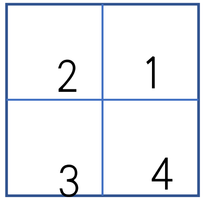
$$\begin{cases} q_1 = (1)(2)(3)(4), & \text{旋转}0^o \\ q_2 = (1234), & \text{旋转}90^o \\ q_3 = (13)(24), & \text{旋转}180^o \\ q_4 = (4321), & \text{旋转}270^o \end{cases}$$



而对应于C^S 上的置换集为：G＝{p1，p2，p3，p4}

G：

$$\begin{cases} p_1 = (f_1)(f_2)\cdots(f_{16}) \\ p_2 = (f_1)(f_2)(f_3f_4f_5f_6)(f_7f_8f_9f_{10}) \\ \qquad (f_{11}f_{12})(f_{13}f_{14}f_{15}f_{16}) \\ p_3 = (f_1)(f_2)(f_3f_5)(f_4f_6)(f_7f_9)(f_8f_{10}) \\ \qquad (f_{11})(f_{12})(f_{13}f_{15})(f_{14}f_{16}) \\ p_4 = (f_1)(f_2)(f_6f_5f_4f_3)(f_{10}f_9f_8f_7) \\ \qquad (f_{11}f_{12})(f_{16}f_{15}f_{14}f_{13}) \end{cases}$$



$c(q_i)$与 $c_1(p_i)$的对应关系：

$$c(q_1) = 4 \longleftrightarrow c_1(p_1) = 16 = 2^4$$

$$c(q_2) = 1 \longleftrightarrow c_1(p_2) = 2 = 2^1$$

$$c(q_3) = 2 \longleftrightarrow c_1(p_3) = 4 = 2^2$$

$$c(q_4) = 1 \longleftrightarrow c_1(p_4) = 2 = 2^1$$

内在原因：若将置换q_i的每一个轮换因子中的点染以同一种颜色，所得各种染法正是图案集C^S中那些在pi作用下不变的方案。

定理5.4.1 设$G = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$是作用于N={1,2,…,n}上的一个置换群，假定用K中颜色对N中的元素着色，并用$c(q_i)$表示置换qi的不交循环个数，则着色后的不同方案数为：

$$l = \frac{1}{|G|}\left(K^{c(q_1)} + K^{c(q_2)} + \cdots + K^{c(q_m)}\right).$$

5.4 Pólya计数定理

$\overline{P}_1=(a)(b)(c)(d), P_1=(1)(2)\ldots(16)$

$\overline{P}_2=(abcd), P_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$

$\overline{P}_3=(dcba), P_3=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$

$\overline{P}_4=(ac)(bd), P_4=(1)(2)(35)(46)(79)(8\ 10)(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$

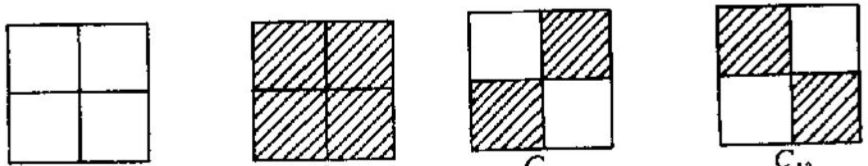
$C(\overline{P}_1)=4, C_1(P_1)=16=2^{C(\overline{P}_1)}$

$C(\overline{P}_2)=1, C_1(P_2)=2=2^{C(\overline{P}_2)}$

$C(\overline{P}_3)=1, C_1(P_3)=2=2^{C(\overline{P}_3)}$

$C(\overline{P}_4)=2, C_1(P_4)=4=2^{C(\overline{P}_4)}$

b	a
c	d



C_1 C_2 C_{11} C_{12}

举例

例 等边三角形的3个顶点用红，蓝，绿3着色，有多少种方案?

解：保持不变的变换群包括沿中心旋转0，120，240度和沿三条中线的翻转，即

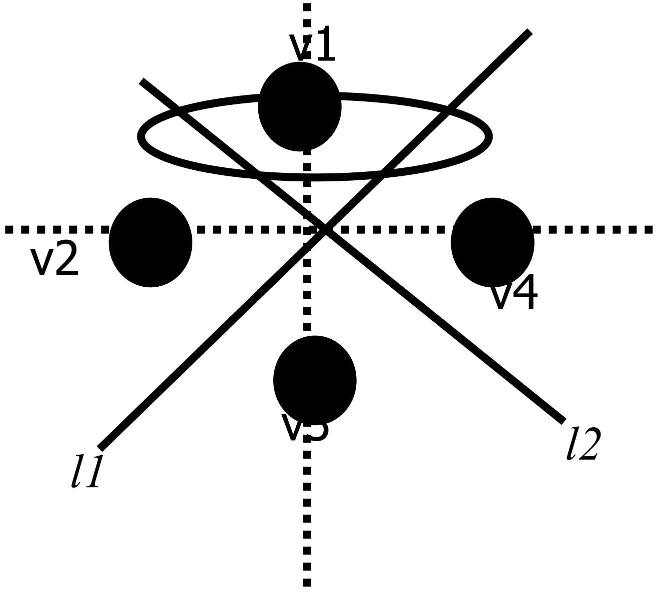
$$G=\{(1)(2)(3),(123),(321),(1)(23),(2)(13),(3)(12)\}$$

故不同的方案数为

$$L=\frac{1}{6}(3^3+3+3+3^2+3^2+3^2)=10$$

- 例 现有形状相同的蓝、白、黑珠子各若干颗，数量不限。假定用它们串成四珠手链，问有多少种方案？

解：对象集合：$N=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.



绕中心点顺时针旋转0度：

$p_1=(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)$;

绕中心点顺时针旋转90度: $p_2=(v_1v_2v_3v_4)$;

绕中心点顺时针旋转180度: $p_3=(v_1v_3)(v_2v_4)$;

绕中心点顺时针旋转270度: $p_4=(v_4v_3v_2v_1)$;

绕垂直对称轴: $p_5=(v_1)(v_3)(v_2v_4)$;

绕水平对称轴: $p_6=(v_2)(v_4)(v_1v_3)$;

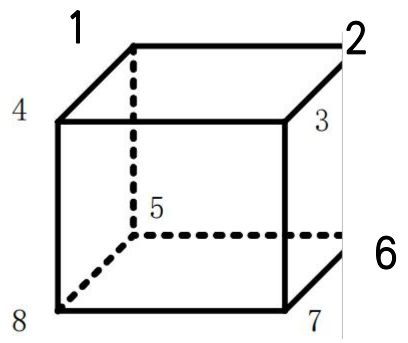
绕 l_1: $p_7=(v_1v_4)(v_2v_3)$;

绕 l_2: $p_8=(v_1v_2)(v_3v_4)$;

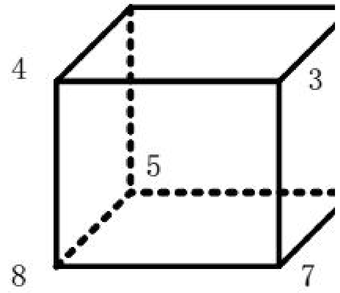
- G={p1,p2,p3,…,p8}，构成一个置换群。
- |G|=8; c(p1) = 4; c(p2) = 1,c(p3)=2;c(p4) = 1; c(p5) =3, c(p6) = 3,c(p7) = 2; c(p8) = 2;

  根据polya定理，$l = \frac{1}{8}(3^4 + 3^1 + 3^2 + 3^1 + 3^3 + 3^3 + 3^2 + 3^2)$ =21

例：用2种颜色给正6面体的8个顶点着色，有多少方案？



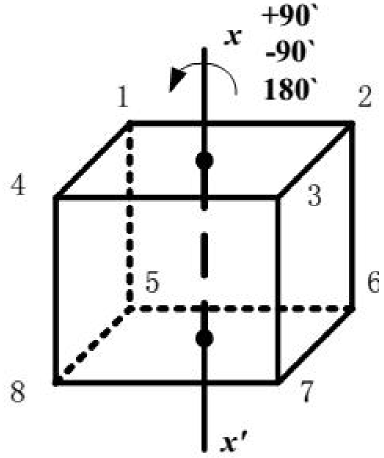
例5. 例 2种颜色给正6面体的8个顶点着色，有多少方案



解：用顶点的置换表示：

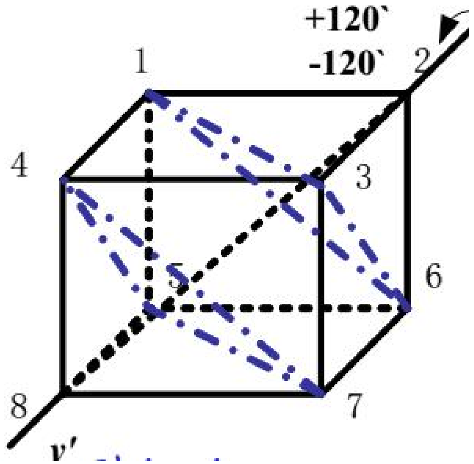
1. 面心-面心

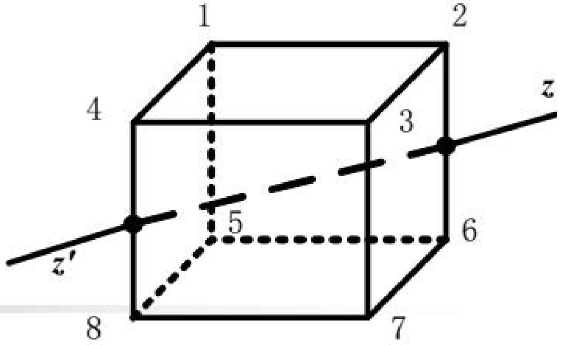
- +90°
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&2&3&8&5&6&7\end{pmatrix}=(1\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 7\ 6)$$
格式 $(4)^2$　共3个
- -90°
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&6&7&8&5\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$$
格式 $(4)^2$　共3个
- 180° (13) (24) (57) (68) 格式 $(2)^4$ 共 3个



2. 顶点-顶点

- +120° (2)(8)(136) (475) 格式 $(1)^2(3)^2$ 共 4个
  -120° (2)(8)(631) (574) 格式 $(1)^2(3)^2$ 共 4个





- 棱中-棱中

  沿zz’转180◦ (17) (35) (48) (26) 格式$(2)^4$ 共六个

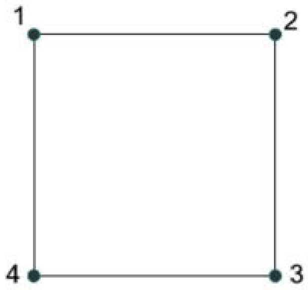
-

  不动 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) 格式 $(1)^8$ 共一个

- 所以，共有 1/24*(6*2^2+3*2^4+8*2^4+6*2^4+2^8)=23

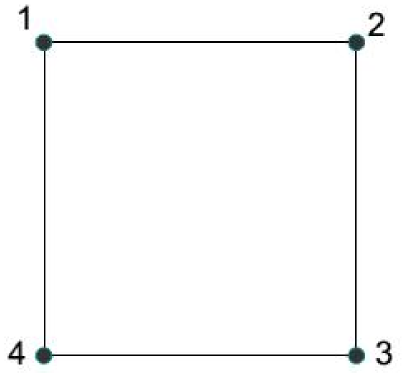
母函数型式的Pólya定理

例5.16：有3种不同颜色的珠子，串成4颗珠子的项链，有多少种方案？有哪些方案？



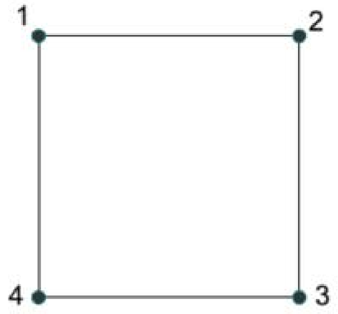
母函数型式的Pólya定理

例5.16：有3种不同颜色的珠子，串成4颗珠子的项链，有多少种方案？有哪些方案？



- 解：正4边形的运动群，共有8个元素
- 绕心转 90° (1234) 格式 $(4)^1 \Rightarrow 3^1$
  -90° (4321) 格式 $(4)^1 \Rightarrow 3^1$
  180° (13) (24) 格式 $(2)^2 \Rightarrow 3^2$
- 绕轴翻转 (12) (34) 格式 $(2)^2 \Rightarrow 3^2$
  (14) (23) 格式 $(2)^2 \Rightarrow 3^2$
  (1) (3) (24) 格式 $(1)^2(2) \Rightarrow 3^3$
  (2) (4) (13) 格式 $(1)^2(2) \Rightarrow 3^3$
- 不动 (1) (2) (3) (4) 格式 $(1)^4 \Rightarrow 3^4$
- 所以方案个数为：$[2 \cdot 3^1 + 3^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4]/8 = 21$

母函数型式的Pólya定理



- 绕心转 90° (1234) 格式 $(4)^1$ $3^1 \Rightarrow b^4+g^4+r^4$

  -90° (4321) 格式 $(4)^1$ $3^1 \Rightarrow b^4+g^4+r^4$

  180° $(13)(24)$ 格式 $(2)^2$ $3^2 \Rightarrow (b^2+g^2+r^2)^2$

- 绕轴翻转 $(12)(34)$ 格式 $(2)^2$ $3^2 \Rightarrow (b^2+g^2+r^2)^2$

  $(14)(23)$ 格式 $(2)^2$ $3^2 \Rightarrow (b^2+g^2+r^2)^2$

  $(1)(3)(24)$ 格式 $(1)^2(2)$ $3^3 \Rightarrow (b+g+r)^2(b^2+g^2+r^2)$

  $(2)(4)(13)$ 格式 $(1)^2(2)$ $3^3 \Rightarrow (b+g+r)^2(b^2+g^2+r^2)$

- 不动 $(1)(2)(3)(4)$ 格式 $(1)^4$ $3^4 \Rightarrow (b+g+r)^4$

属于同一循环的元素涂同一种颜色

可以得到一个关于b,g,r的多项式，多项式的展开项即为具体的方案数

- $P(b,g,r)=[2(b^4+g^4+r^4)+3(b^2+g^2+r^2)^2+2(b+g+r)^2(b^2+g^2+r^2)+(b+g+r)^4]/8$

  $= b^4+g^4+r^4+b^3g+b^3r+bg^3+br^3+g^3r+gr^3+2b^2g^2+2b^2r^2+2g^2r^2+2b^2gr+2bg^2r+2bgr^2$

- 上面的多项式共有21个不同的项，所以共有21种方案。
  每个方案可同多项式中的项表示如：
  b^4表示4颗珠子全部用蓝色；
  bg^2r表示一颗珠子用蓝色，二颗用绿色，一颗用红色…

母函数形式的Pólya定理：设$\underline{G}=\{\underline{p}_1,\underline{p}_2,\ldots,\underline{p}_g\}$是Ω(共有$n$个元素)上的一个置换群，$C(\underline{p}_k)$是置换$\underline{p}_k$的循环的个数，用$M$中的颜色对Ω中的元素着色，着色方案数为

$$\frac{1}{|\underline{G}|}\left[m^{C(\underline{p}_1)}+m^{C(\underline{p}_2)}+\ldots+m^{C(\underline{p}_g)}\right] \qquad (1)$$

令 $c_k(\underline{p}_i)$代表置换$\underline{p}_k$的作用在Ω上所得的阶为k的循环个数

$$m^{C(\underline{p}_i)} \Rightarrow (b_1+b_2+\ldots+b_m)^{c_1(\underline{p}_i)}(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2)^{c_2(\underline{p}_i)}\cdots(b_1^n+b_2^n+\ldots+b_m^n)^{c_n(}$$

将上式代入(1)可以得到polya母函数(循环指数多项式)为

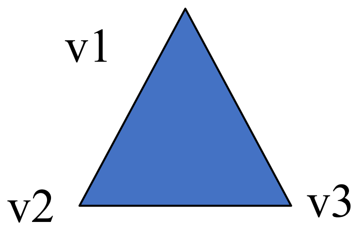
$$(G)=\frac{1}{|\underline{G}|}\sum_{i=1}^{g}\prod_{k=1}^{n}s_k^{c_k(\underline{p}_i)}$$

$$=\frac{1}{|\underline{G}|}[s_1^{c_1(\underline{p}_1)}s_2^{c_2(\underline{p}_1)}\ldots s_n^{c_n(\underline{p}_1)}+s_1^{c_1(\underline{p}_2)}s_2^{c_2(\underline{p}_2)}\ldots s_n^{c_n(\underline{p}_2)}$$

$$+s_1^{c_2(\underline{p}_g)}s_2^{c_2(\underline{p}_g)}\ldots s_n^{c_n(\underline{p}_g)}]$$

其中 $s_i=(b_1^i+b_2^i+\ldots+b_m^i),\ i=1,2,\ldots$

例 对空间等边三角形的三个顶点用b1, b2,b3三种颜色着色，试问有多少种不同方案？并给出具体方案



解: (1)对象集：N={v1,v2,v3};

(2)全部刚体对称变换构成3阶对称群S3,

q1=(v1)(v2)(v3),

q2=(v1v2v3),

q3=(v3v2v1),

q4=(v1)(v2v3), q5=(v2)(v1v3), q6=(v3)(v1v2).

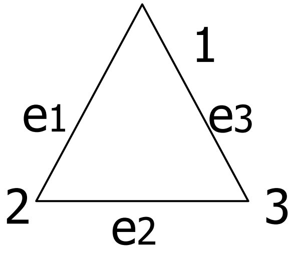
绕中心顺时针旋转0度，120度，240度，绕顶点vi的轴线180度。

- 根据polya计数定理，不同方案数为：
- $l=\frac{1}{|G|}\left(3^{c(q_1)}+3^{c(q_2)}+\cdots+3^{c(q_6)}\right)=\frac{1}{6}(3^3+3^1+3^1+3^2+3^2+3^2)$=10
- 具体方案为：

$$\frac{1}{6}\left((b1+b2+b3)^3+2(b_1^3+b_2^3+b_3^3)+3(b1+b2+b3)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\right)$$
$$=b_1^3+b_2^3+b_3^3+b_1b_2b_3+b_1^2b_2+b_1^2b_3+b_1b_2^2+b_1b_3^2+b_2b_3^2+b_2^2b_3$$

- 例 图的计数问题。设图$G=\{V,E\}$, $V=\{1,2,3\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3\}$.是一个完全图K_3，试用polya定理给出K_3上所有不同构的生成子图$H=\{V,E_H\}$.

解:$\forall e \in E$, e出现则染黑色, e不出现则染白色。



对象集合： $E=\{e_1,e_2,e_3\}$

$V=\{1,2,3\}$上的置换群：

$S_3=\{p_1=(1)(2)(3),\ p_2=(1\ 2\ 3),\ p_3=(3\ 2\ 1),\ p_4=(1)(2\ 3),\ p_5=(2)(1\ 3),\ p_6=(3)(1\ 2)\}$.

E上的置换群：

$G=\{q_1=(e_1)(e_2)(e_3), q_2=(e_1\ e_2\ e_3),\ q_3=(e_3\ e_2\ e_1),\ q_4=(e_2)(e_1\ e_3),\ q_5=(e_3)(e_1\ e_2),\ q_6=(e_1)(e_2\ e_3),\ \}$

- 根据polya定理推广形式，

$$\frac{1}{6}\Big((b1+b2)^3+2(b_1^3+b_2^3)$$
$$+3(b_1+b_2)(b_1^2+b_2^2)\Big)$$
$$=b_1^3+b_2^3+b_1b_2^2+b_1^2b_2$$