第6章 图

计算机工程与科学学院　封卫兵

6.3 图的矩阵表示

6.3.1 无向图的关联矩阵

6.3.2 有向无环图的关联矩阵

6.3.3 有向图的邻接矩阵，无向图的相邻矩阵

图中的通路数与回路数

6.3.4 图的可达矩阵

6.3.1 无向图的关联矩阵

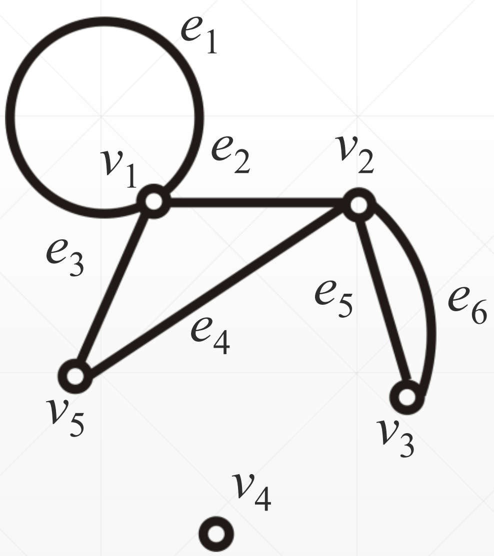
设无向图 $G = <V, E>$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数，称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵,

记为 $M(G)$. M_{ij} 的可能取值为：0, 1, 2

例:

$$M(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



6.3.1 无向图的关联矩阵

关联矩阵的性质

1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2, \qquad j = 1,2,\ldots,m;$

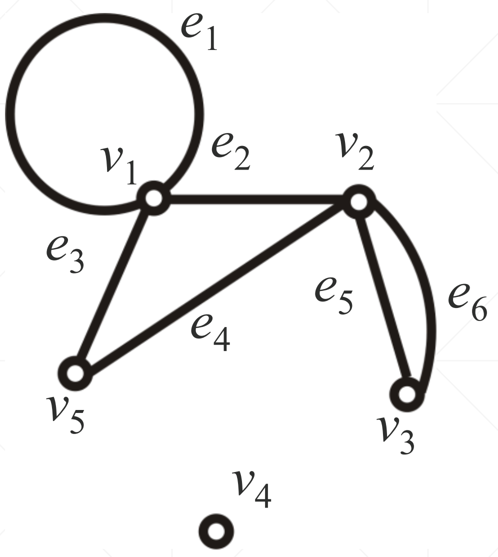
2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i), \qquad i = 1,2,\ldots,n;$

3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

4) e_j 与 e_k 是平行边 $\Leftrightarrow$ 第 j 列与第 k 列相同;

5) v_i 是孤立点 $\Leftrightarrow$ 第 i 行全为 0;

6) e_j 是环 $\Leftrightarrow$ 第 j 列的一个元素为 2，其余为 0 .



$$M(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3.2 无环有向图的关联矩阵

无环有向图的关联矩阵

设无环有向图 $D=<V, E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,

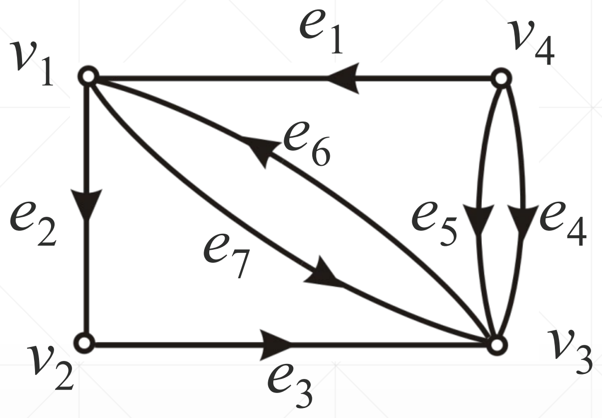
$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

令

$$m_{ij}=\begin{cases}1\,, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0\,, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1\,, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为 D 的关联矩阵，记为$M(D)$.

例：



$$M(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

6.3.2 无环有向图的关联矩阵

$$M(D)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

性质：

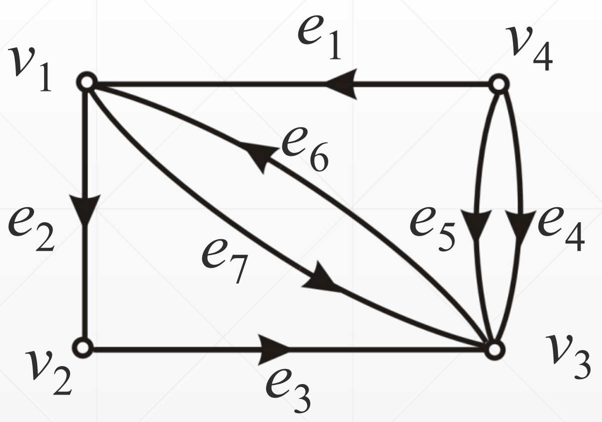
1) 每列恰好有一个 1 和一个 −1

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0, j=1,2,\ldots,m\text{；从而}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=0$$

2) 1 总个数等于 −1 的总个数等于边数.（握手定理）

3) 第 i 行 1 的个数等于$d^{+}(v_i)$，第 i 行 −1 的个数等于$d^{-}(v_i)$

4) e_j 与 e_k 是平行边 $\Leftrightarrow$ 第 j 列与第 k 列相同.



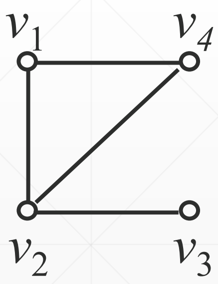
6.3.3 有向图的邻接矩阵

无向图的相邻矩阵

设无向简单图 $G=<V,E>$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 与 v_j 之间边的条数，称 $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 为 G 的相邻矩阵, 记作 $A(G)$.

例： 写出无向图的相邻矩阵，并求 v_1 到 v_2 长度为 3 的通路数和 v_1 到 v_1 长度为 3 的回路数.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



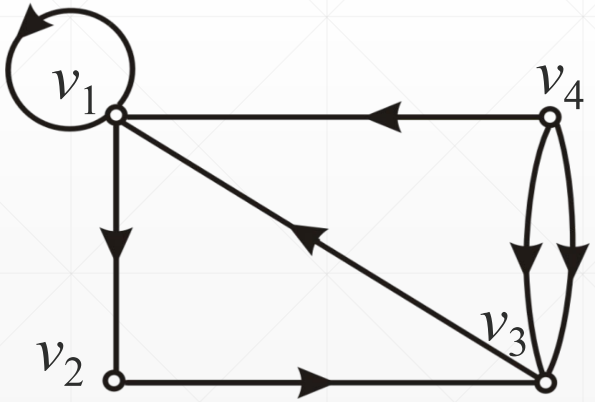
v_1 到 v_2 长度为 3 的通路有 4 条：$v_1v_2v_1v_2$, $v_1v_2v_3v_2$, $v_1v_4v_1v_2$, $v_1v_2v_4v_2$.

v_1到v_1长度为3的回路有2条：$v_1v_2v_4v_1$, $v_1v_4v_2v_1$.

6.3.3 有向图的邻接矩阵

设有向图 $D = \langle V, E\rangle$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称 $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵，记作 $A(D)$，简记作 A .

例:



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3.3 有向图的邻接矩阵

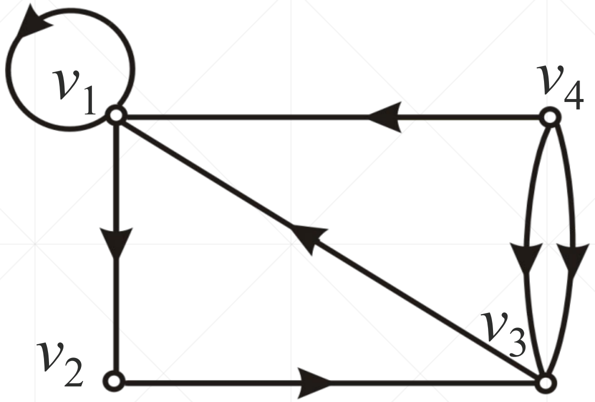
性质：

1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$

2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$

3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$

4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ 等于 D 中环的个数



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3.3 有向图的邻接矩阵

有向图中的通路数与回路数

定理6.6 设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵，则 $A^l\ (l \geq 1)$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路(含回路)数，$a_{ii}^{(l)}$ 等于 v_i 到自身长度为 l 的回路数，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中长度为 l 的通路(含回路)总数，$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 等于D中长度为 l 的回路总数.

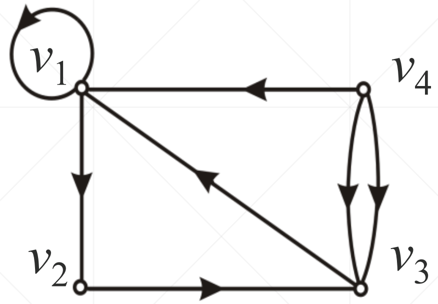
6.3.3 有向图的邻接矩阵

有向图中的通路数与回路数（续）

推论 设 $B_l = A + A^2 + \ldots + A^l\ (l \geq 1)$，则 B_l 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到 v_j 长度小于等于 l 的通路(含回路)数，$b_{ii}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到 v_i 长度小于等于 l 的回路数，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中长度小于等于 l 的通路(含回路)数，$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于等于 l 的回路数.

6.3.3 有向图的邻接矩阵

例:



$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&2&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\3&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\3&3&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}3&2&1&0\\1&1&1&0\\2&1&1&0\\4&3&3&0\end{bmatrix}$$

v_1 到 v_2 长为 3 的通路有 1 条;
v_1 到 v_3 长为 3 的通路有 1 条;
v_1 到自身长为 3 的回路有 2 条;
D 中长为 3 的通路共有 16 条,
其中回路 4 条 .

注: 在这里的通路和回路数是定义意义下的

研讨题

1）若简单无向图 G 有 n 个顶点，而边数大于$(n-1)(n-2)/2$，那么G是连通图。

2）若 G 是具有 n 个结点的简单无向图，如果 G 中每一对结点度数之和均大于等于 $n-1$，那么 G 是连通图。

3）有 13 个杯子，杯口均朝上放在桌子上。要求每次只能翻动 12 只杯子，能否把 13 只杯子全部翻成底朝上。

6.3.4 有向图的可达矩阵

有向图的可达矩阵

设有向图 $D = <V, E>$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } vj \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \qquad 1 \le i, j \le n$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为 G 的可达矩阵，记作 $P(G)$, 简记为 P .

性质： 1) $P(G)$ 主对角线上的元素 全为 1；

2) 有向图 D 强连通当且仅当 $P(D)$ 的元素 全为 1；

3) 对 n 阶图， $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b_{ij}^{(n-1)} > 0, \ i \ne j$.

6.3.4 有向图的可达矩阵

如何得到图的可达矩阵 P？

方法一：

1) 写出邻接矩阵 A；

2) 计算 $B = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k$；

   (k 取多少？) $k = n - 1$

3) 改写 B：

   ① B中非零元素改为“1”；

   ② B中对角线元素改为“1”.

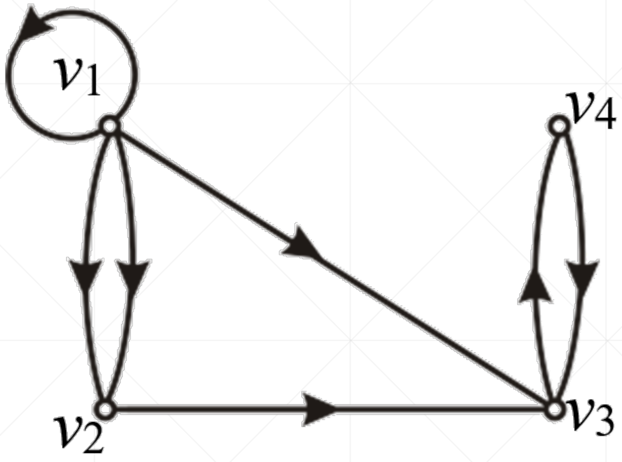
方法二：

Warshall 算法?

3) Warshall 算法直接得到 P .

6.3.4 有向图的可达矩阵

例:



1) v_1 到 v_4, v_4 到 v_1 长为 3 的通路各有多少条?

2) v_1 到自身长为 1,2,3,4 的回路各有多少条?

3) 长为 4 的通路共有多少条 ? 其中有多少条回路?

4) 长度小于等于 4 的回路共有多少条?

5) 写出 D 的可达矩阵，并问 D 是强连通的吗?

6.3.4 有向图的可达矩阵

解：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&2&6&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

v_1 到 v_4 长为 3 的通路有 3 条，v_4 到 v_1 长为 3 的通路有 0 条；

v_1 到自身长为 1,2,3,4 的回路各有 1 条；

长为 4 的通路共有 16 条，其中有 3 条回路；

长度小于等于4的回路共有 8 条 .

6.3.4 有向图的可达矩阵

求可达矩阵：

方法一：

1) $B = A + A^2 + A^3 = ?$ $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2) 改写 B：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

方法二：

1) 改写 A：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

2) Warshall算法：

强连通? ✘ 单连通? ✔