上海大学 2018 ～ 2019 学年冬季学期试卷A卷

成绩	

课程名: 概率论与数理统计A **课程号:** 01014016 **学分:** 5

应试人声明:

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人________ **应试人学号**________ **应试人所在院系**________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分	20	10	10	10	15	15	10	10

一 、(20分) 填空题(每格2分)

1. 袋中有黑球3个, 白球2个. 现每次从袋中任取一个球, 有放回地取两次, 则抽到是黑白球各一个的概率等于 $\underline{C_2^1\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{25}}$; 若是无放回地取两次, 则抽到黑白球各一个的概率则是 $\underline{\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}}$.

2. 设$X\sim b(n,p)$, $F(x)$是其分布函数. 则$F(1)=\underline{(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}}$; $F(n)-F(n-1)=\underline{p^n}$.

3. 设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$, 则$P\{Y>y\}=\underline{1-F(+\infty,y)}$; $P\{X>x,Y>y\}=\underline{1-(F(x,+\infty)+F(+\infty,y)-F(x,y))}$.

4. 二维正态随机向量$(X,Y)\sim N(1,2,4,9,-0.5)$, 则$\mathrm{E}\,(2X-Y)=\underline{0}$, $\mathrm{D}\,(2X-Y)=\underline{31}$.

5. 设总体的均值与方差分别为μ, σ^2, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体的一组简单随机样本, 并记$\overline{X}$为该样本均值. 则$\mathrm{E}\left(\overline{X}\right)=\underline{\mu}$; $\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right)=\underline{\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}}$

二 、(10分) 判别题(请在每个问题后的括号中填入✓或✗. 每小题2分)

1. 设A, B为两个事件, 且满足$A\overline{B}=\overline{A}B$, 则$A=B$. (✓)

2. 若随机变量X的分布函数$F(x)$在$x=c$处连续, 则$P\{X=c\}=0$. (✓)

3. 设(X,Y)服从二维均匀分布, 那么X必服从一维均匀分布. (✗)

4. 如果随机变量X与Y互不相关, 则X与Y必相互独立. (✗)

5. 如果估计量$\hat{\theta}$是未知参数θ的无偏估计量, $g(x)$是一连续函数, 那么$g(\hat{\theta})$将是$g(\theta)$的无偏估计量. (✗)

三 、(10分) 选择题(请在每个问题后的括号中填入A, B, C或D. 每小题2分)

1. A, B, C为三个事件, 那么事件$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$表示这三个事件 (B)

   (A) 三个都不发生 (B) 不多于两个发生

   (C) 不多于一个发生 (D) 恰有一个不发生

2. 设X的分布函数为$\Phi(x)$, 那么$2X+1\sim$ (C)

   (A) $N(1,2)$ (B) $N(1,3)$ (C) $N(1,4)$ (D) $N(1,5)$

3. 若X和Y具有相同的方差. 则$X+Y$与$X-Y$的相关系数等于 (D).

   (A) -1 (B) 1 (C) $1/2$ (D) 0

4. 设X_1, $X_2,\cdots$, X_{12}独立同分布于$U(0,1)$, 则与$\sum\limits_{i=1}^{12}X_i-6$的分布最相似的分布是 (A)

   (A) $N(0,1)$ (B) $b(12,\frac{1}{2})$ (C) $\pi(6)$ (D) $U(-6,6)$

5. 对于假设检验问题: $H_0:\theta\in\Theta_0$, $H_1:\theta\in\Theta_1$, 则一个检验犯“第一类错误”是指 (B).

   (A) H_0为假时, 接受H_0 (B) H_0为真时, 拒绝H_0

   (C) H_1为真时, 拒绝H_1 (D) H_1为真时, 接受H_1

四、(10分) 某种仪器由两部分组成. 假设这两个部分的质量互不影响, 且它们的优质品率分别为0.7和0.9. 如果两个部分都是优质品, 则组成的仪器一定合格; 如果两个部分中仅有一个是优质品, 则组成的仪器不合格率为0.2; 如果两个部分均不是优质品, 则组成的仪器不合格率降至0.5.

1. (6分) 求该种仪器的不合格率;
2. (4分) 如果发现一台仪器不合格, 问它有几个部分不是优质品的概率最大.

解1: 记A为一台仪器不合格; B_i表示该仪器有i个部分不是优质品$(i=0,1,2)$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=0}^{2} P(B_i)P(A|B_i) && (2分)\\ &= 0.7\times 0.9\times 0 + (0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.9)\times 0.2 + 0.3\times 0.1\times 0.5 && (1+1+1分)\\ &= 0.083 && (1分) \end{aligned}$$

解2:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} \quad (1分)$$

$$P(B_0|A) = 0 \quad (1分)$$

$$P(B_1|A) = \frac{0.068}{0.083} = 0.8193 \quad (1分)$$

$$P(B_2|A) = \frac{0.015}{0.083} = 0.1807 \quad (1分)$$

恰有一个部分不是优质品的概率最大.

五、(15分) 已知随机变量X的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} Cx(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求:

1. (5分) 常数C的值;
2. (5分) X的分布函数$F(x)$;
3. (5分) $P\left\{\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right\}$.

解1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = C\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x \quad (2分)$$

$$= \frac{C}{6} = 1 \quad (2分)$$

$$C = 6 \quad (1分)$$

解2:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u \quad (2分)$$

$$= \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2(3-2x), & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases} \quad (1+1+1分)$$

解3:

$$P\left\{\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right\} = F(\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{4}) \quad (2分)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{32} \quad (2分)$$

$$= \frac{11}{32} \quad (1分)$$

六、(15分) 设(X, Y)的联合概率密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. (5分) 求$P\{X+Y\geq 1\}$;

2. (10分) 计算边缘概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$, 并判断X与Y是否相互独立.

解1:

$$P\{X+Y\geq 1\}=\iint_{x+y\geq 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1分)$$

$$=3\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\mathrm{d}y \qquad (2分)$$

$$=3\int_{\frac{1}{2}}^{1} x(2x-1)\mathrm{d}x \qquad (1分)$$

$$=\frac{5}{8} \qquad (1分)$$

解2:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \qquad (1分)$$

$$=\int_{0}^{x} 3x\mathrm{d}y \qquad (1分)$$

$$=3x^2,\ (0\leq x\leq 1) \qquad (1+1分)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \qquad (1分)$$

$$=\int_{y}^{1} 3x\mathrm{d}x \qquad (1分)$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-y^2\right),\ (0\leq y\leq 1) \qquad (1+1分)$$

因为$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$, 所以X与Y不独立. (1+1分)

七、(10分) 设样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$取自概率密度函数为:

$$f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1},\ x\in(0,1)$$

的总体. 求:

1. (5分) θ的矩估计量;

2. (5分) θ的最大似然估计量.

解1:

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \qquad (1分)$$

$$=\theta\int_{0}^{1} x^{\theta}\mathrm{d}x \qquad (1分)$$

$$=\frac{\theta}{\theta+1} \qquad (1分)$$

$$\overline{X}=\frac{\hat{\theta}_M}{\hat{\theta}_M+1} \qquad (1分)$$

$$\hat{\theta}_M=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} \qquad (1分)$$

解2:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \qquad (1分)$$

$$=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} \qquad (1分)$$

$$l(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \qquad (1分)$$

$$l'(\theta)=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \qquad (1分)$$

$$l''(\theta)=-\frac{n}{\theta^2}<0$$

$$\hat{\theta}_L=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i} \qquad (1分)$$

八、(10分) 由于工艺水平的限制, 食品添加剂含量在每包食品中并不是完全相同的(假设服从正态分布), 但根据规定整批食品中添加剂含量的均值不得超过1mg/kg. 现对该批食品进行检测, 从送样中随机抽取25袋, 测得添加剂的平均含量为1.05mg/kg, 样本标准差0.23mg/kg.

1. (5分) 在$\alpha = 0.05$显著性水平下, 能否认为这批食品添加剂含量的均值超标?
2. (5分) 求该批食品添加剂含量标准差的90%的区间估计.

解1: $H_0: \mu \le 1 \qquad H_1: \mu > 1$ (1分)

$$T = \frac{\overline{x} - 1}{s}\sqrt{n} \quad (1分)$$

$$= \frac{1.05 - 1}{0.23} \times 5 = 1.087 \quad (1分)$$

$$< t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(24) = 1.7109 \quad (1分)$$

接受H_0, 即在该组样本观测值下不能认为总体均值显著超标. (1分)

解2:

$$\left[s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right] \quad (1\ 分)$$

$$= \left[0.23\sqrt{\frac{24}{36.4150}},\ 0.23\sqrt{\frac{24}{13.8484}}\right] \quad (1+1分)$$

$$= [0.1867,\ 0.3028] \quad (1+1分)$$

(注: 若计算结果是σ^2的90%区间估计: [0.0349, 0.0917], 则扣1分.)

χ^2-分布和t-分布分位点表

α	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025
$\chi^2_\alpha(24)$	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641
$\chi^2_\alpha(25)$	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465
$\chi^2_\alpha(26)$	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232
$t_\alpha(24)$	−2.0639	−1.7109	−1.3178	1.3178	1.7109	2.0639
$t_\alpha(25)$	−2.0595	−1.7081	−1.3163	1.3163	1.7081	2.0595
$t_\alpha(26)$	−2.0555	−1.7056	−1.3150	1.3150	1.7056	2.0555