第三节　条件分布

- 离散型随机变量的条件分布
- 连续型随机变量的条件分布
- 课堂练习
- 小结 布置作业

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念 .

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率

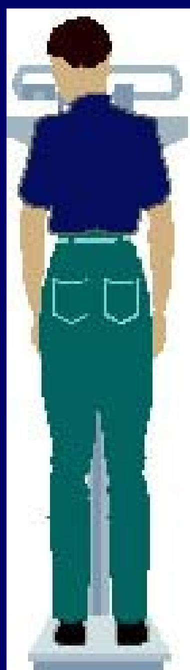
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

设有两个$r.v\ X,Y$， 在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布.

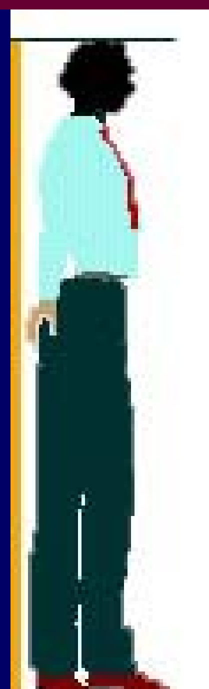
这个分布就是条件分布.

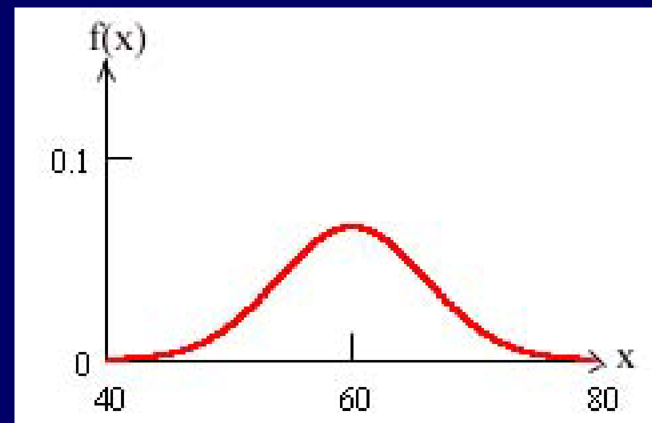
例如，考虑某大学的全体学生，从其中随机抽取一个学生，分别以X和Y表示其体重和身高．则X和Y都是随机变量，它们都有一定的概率分布.



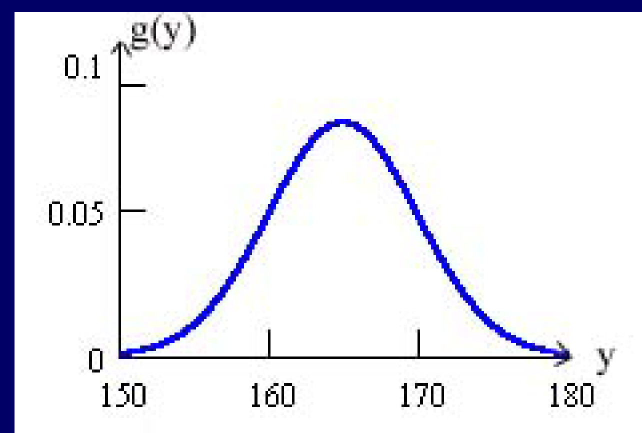
体重X

身高Y





体重X的分布



身高Y的分布

现在若限制 $1.7<Y<1.8$(米), 在这个条件下去求 X 的条件分布，这就意味着要从该校的学生中把身高在1.7米和1.8米之间的那些人都挑出来，然后在挑出的学生中求其体重的分布.

容易想象，这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样.

例如，在条件分布中体重取大值的概率会显著增加 .

一、离散型随机变量的条件分布

实际上（popup overlaps）念在另一种形式下的

类似定义在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

定义1　设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i=1,2,\ldots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

作为条件的那个r.v,认为取值是给定的，在此条件下求另一r.v的概率分布.

条件分布是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质．正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质．

例如：

$$P\left\{X = x_i \middle| Y = y_j\right\} \geq 0 \quad i=1,2, \dots$$

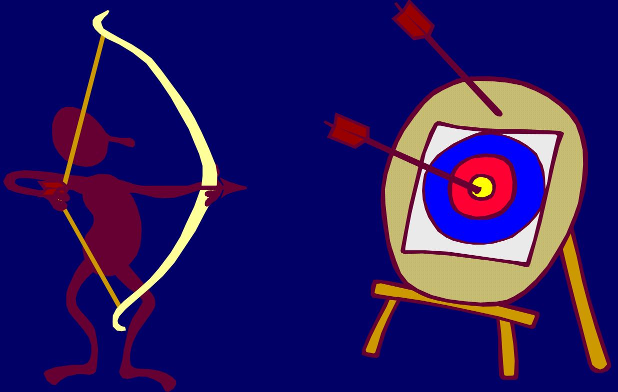
$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left\{X = x_i \middle| Y = y_j\right\} = 1$$

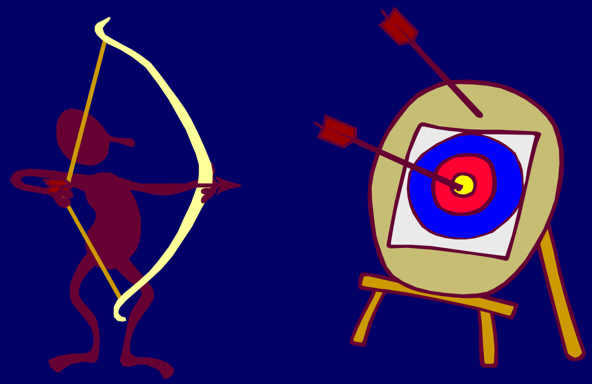
例1 一射手进行射击，击中目标的概率$p(0<p<1)$，射击进行到击中目标两次为止. 以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数. 试求 X 和 Y 的联合分布及条件分布.

解 依题意，$\{Y=n\}$ 表示在第n次射击时击中目标，且在前n-1次射击中有一次击中目标. $\{X=m\}$ 表首次击中目标时射击了m次.

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \cdots\ \boxed{m}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \boxed{n-1}\ \boxed{n}$

n次射击　　击中　　击中





n次射击

1　2　…　m　…………　n-1　n

击中　　击中

每次击中目标的概率为 p

$P\{X=m,Y=n\}=?$

不论$m(m<n)$是多少，$P\{X=m,Y=n\}$都应等于

$$\boxed{P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}}$$

由此得X和Y的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}$$

($n=2,3,\ldots;\ m=1,2,\ldots,n-1$)

为求条件分布，先求边缘分布.

X的边缘分布律是:

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-p)^{n-2}$$

$$=p^2\frac{(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}$$

$(m=1,2,\ldots)$

Y的边缘分布律是:

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1} P\{X=m, Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

$$(\ n=2,3,\ \ldots\ )$$

于是可求得:

当n=2,3, …时,

$$P\{X=m|Y=n\}$$

$$=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

联合分布

边缘分布

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{n-1},\qquad m=1,2,\ldots,n-1$$

当m=1,2, …时,

$$P\{X=n|Y=m\}$$

$$=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}$$

$$=p(1-p)^{n-m-1},\qquad n=m+1,m+2,\ldots$$

二、连续型随机变量的条件分布

设(X,Y)是二维连续型$r.v$，由于对任意x, y, $P\{X=x\}=0$, $P\{Y=y\}=0$ ，所以不能直接用条件概率公式得到条件分布，下面我们直接给出条件概率密度的定义.

定义2 设 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$, (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$,若对于固定的 y, $f_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度. 记为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件分布函数. 记为

$$P\{X\le x|Y=y\}\text{或}F_{X|Y}(x|y)$$

即

$$P\{X \le x | Y = y\} = F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

类似地,可以定义

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy$$

我们来解释一下定义的含义：

以 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为例

$$P\{X\le x|Y=y\}=\lim_{\varepsilon\to 0+}P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$$

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{y}^{y+\varepsilon}f(x,y)dy\right)dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(y)dy}=\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(x,y+\theta_1\varepsilon)dx}{\varepsilon\cdot f_Y(y+\theta_2\varepsilon)}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,y+\theta_1\varepsilon)dx}{f_Y(y+\theta_2\varepsilon)}\to\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dx}{f_Y(y)}\ (\varepsilon\to 0+)$$

$$F_{X|Y}(x|y) \triangleq P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

$$\Downarrow$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

例2 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & 0<x<\infty, 0<y<\infty \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $P\{X>1|Y=y\}$.

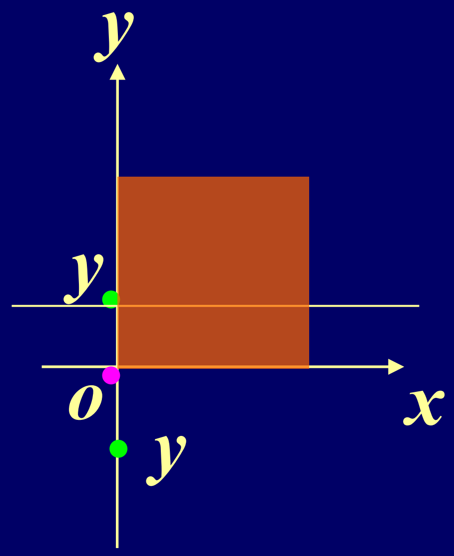
解 $P\{X>1|Y=y\}=\int_1^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx$

为此，需求出 $f_{X|Y}(x|y)$

由于 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}dx=\frac{e^{-y}}{y}[-ye^{-x/y}]\Big|_0^{\infty}$$

$$=e^{-y}, \qquad 0<y<\infty$$



于是对 $y>0$,

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-x/y}}{y}, \quad x>0$$

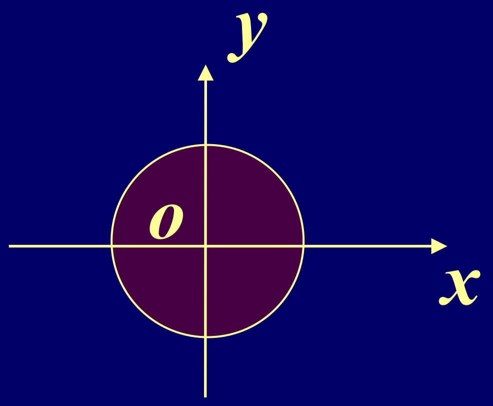
故对$y>0$, $P\{X>1|Y=y\}=\int_1^{\infty}\frac{e^{-x/y}}{y}dx$

$$=-e^{-x/y}\Big|_1^{\infty}=e^{-1/y}$$

例3 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求$f_{Y|X}(y\,|\,x)$



解 X的边缘密度为

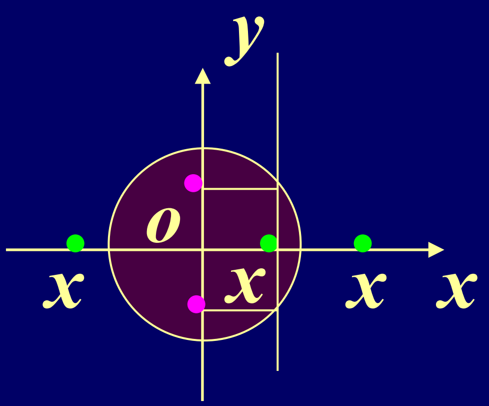
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

当$|x|<1$时,有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$



$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

X作为已知变量

即 当 $|x|<1$ 时,有

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0, & y\text{ 取其它值}\end{cases}$$

X已知的条件下
Y的条件密度

这里是y的取值范围

例4 设数 X 在区间 (0,1) 均匀分布，当观察到 $X=x$ $(0<x<1)$时，数Y在区间$(x,1)$上随机地取值 .求 Y 的概率密度.

解 依题意，X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

对于任意给定的值 x $(0<x<1)$，在$X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

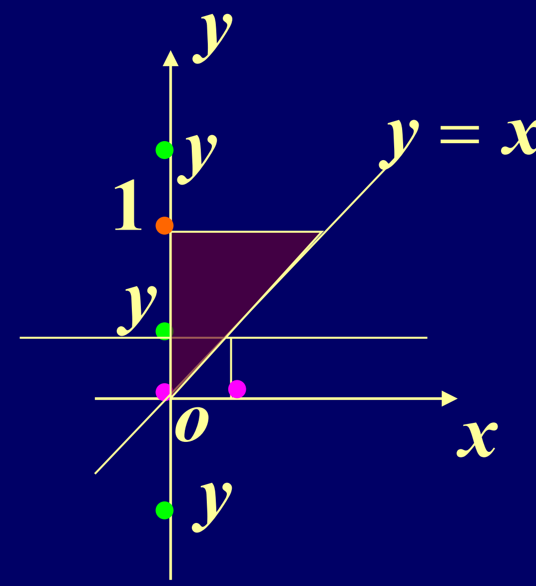
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

X 和 Y 的联合密度为

已知边缘密度、条件密度，求联合密度

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\,|\,x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



于是得 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

我们已经知道,

设 (X,Y)是连续型$r.v$，若对任意的x,y,有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

则称X,Y相互独立.

由条件密度的定义:

$$\begin{cases} f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} \end{cases}$$

可知，当X与Y相互独立时,

$$f_{Y|X}(y\mid x)=f_Y(y),\quad f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$$

也可用此条件判别二维连续型$r.v(X,Y)$的两个分量X与Y是否相互独立.

对离散型r.v有类似的结论，请同学们自行给出.

三、课堂练习

1．对于二维正态分布，在已知 $X=x$ 条件下，求Y的条件分布.

2．设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$.

1．对于二维正态分布，在已知 $X=x$ 条件下，求Y的条件分布.

解　设 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$, 则其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

X的边缘密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

在 $X=x$ 条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

2 . 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

解 (X,Y)关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0. \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

当 $y\le 0$ 时，
$f_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，若 $0<x<y$，

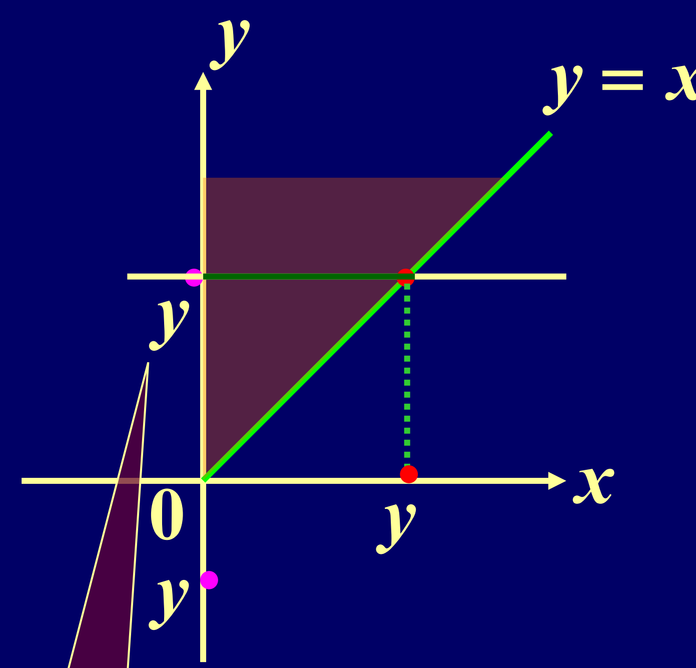
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{y}{ye^{-y}}=e^{y}$$

若 $y\le 0$ 或 $y\ge x$，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{0}{ye^{-y}}=0$$

综上　当 $y>0$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} e^{y}, & 0<x<y, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$



暂时固定

四、小结

这一节，我们介绍了条件分布的概念和计算，并举例说明对离散型和连续型随机变量如何计算条件分布．请课下通过练习进一步掌握．

五、布置作业

《概率统计》标准化作业 (三)