# 第6章 图

**计算机工程与科学学院** 封卫兵

# 6.4 几种特殊的图

## 6.4.1 二部图

二部图的充要条件

匹配,极大匹配,最大匹配,完备匹配,完美匹配

## 6.4.2 欧拉图

欧拉回路(通路)及其存在的充要条件

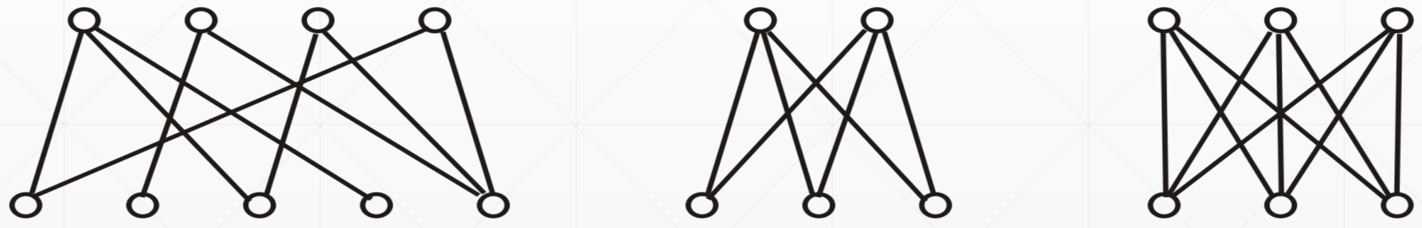
## 6.4.3 哈密顿图

哈密顿回路(通路)及其存在的必要条件和充分条件

## 6.4.4 平面图

## 6.4.1 二部图

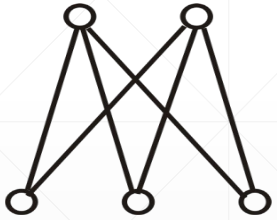
**定义6.19**　设无向图 $G=<V, E>$, 若能将 $V$ 分成 $V_1$ 和 $V_2$ 使得 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, 且 $G$ 中的每条边的两个端点都一个属于$V_1$, 另一个属于$V_2$, 则称 $G$ 为二部图，记为 $<V_1, V_2, E>$, 称 $V_1$ 和 $V_2$ 为互补顶点子集 .



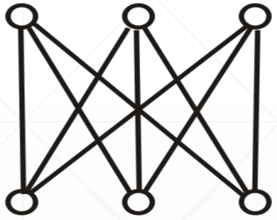
## 6.4.1 二部图

**定义6.19（续）** 又若 $G$ 是简单图，且$V_1$ 中每个顶点均与 $V_2$ 中每个顶点都相邻，则称 $G$ 为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中 $r=|V_1|$，$s=|V_2|$ .

在完全二部图 $K_{r,s}$ 中，顶点数 $n=r+s$，边数 $m=rs$ .



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

**注：** $V_1$ 和 $V_2$ 不一定是顶点集 $V$ 的划分，因此 $V_1$ 和 $V_2$ 有可能是空集$\varnothing$，零图和平凡图都是二部图 .

# 6.4.1 二部图

## 二部图的判别定理

**定理6.7** 无向图 $G = <V, E>$ 是二部图当且仅当 $G$ 中无奇长度的回路 .

**证明：** 必要性.

设 $G = <V_1, V_2, E>$ 是二部图，每条边只能从 $V_1$ 到 $V_2$，

或从 $V_2$ 到 $V_1$，故任何回路必为偶长度 .

# 6.4.1 二部图

## 二部图的判别定理（续）

**证明：** 充分性，已知 $G$ 中无奇长度的回路，要证 $G$ 是二部图 .

不妨设 $G$ 至少有一条边且连通 . 取任一顶点 $u$，令

$V_1 = \{v \mid v \in V \wedge d(v,u)$为奇数$\}$，$V_2 = \{v \mid v \in V \wedge d(v,u)$为偶数$\}$

则显然有 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，先证 $V_1$ 中任意两点不相邻 .

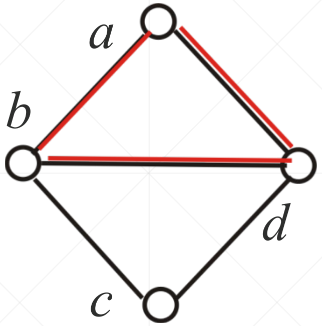
反证：假设存在 $s, t \in V_1$， $e = (s, t) \in E$ . 设 $\Gamma_1$， $\Gamma_2$ 分别是 $u$ 到 $s, t$ 的

短程线，则 $\Gamma_1 \cup e \cup \Gamma_2$ 是一条回路，其长度为奇数，**矛盾**.

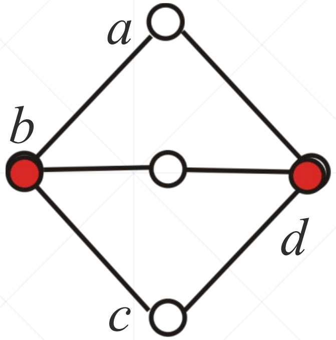
同理可证： $V_2$ 中任意两点不相邻 .

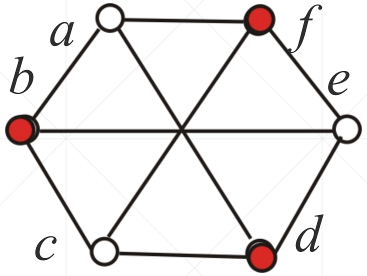
# 6.4.1 二部图

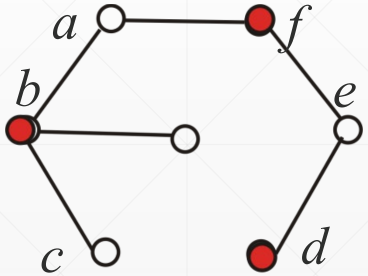
**例：**

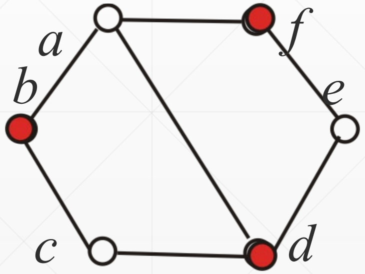


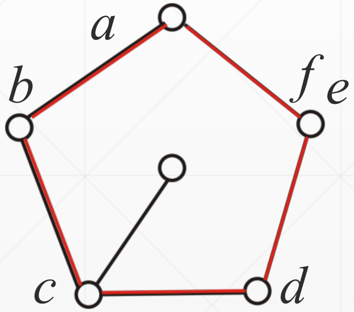

非二部图




非二部图

# 6.4.1 二部图

**判定二部图的AB法（红蓝法）**

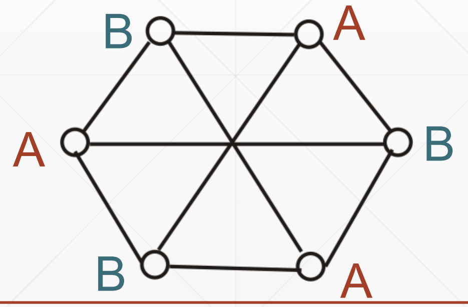
1）给任意一顶点标“A”；

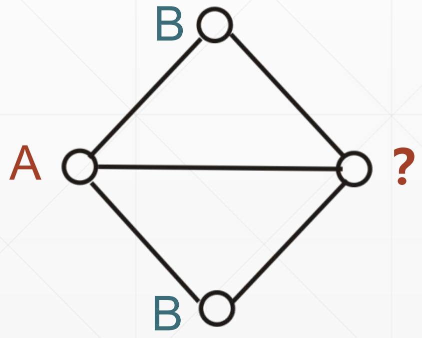
2）给所有与“A”相邻的顶点标“B”；

3）给所有与“B”相邻的顶点标“A”；

4）重复上述(2), (3)，若无矛盾地标出所有顶点，则为二部图，否则，不是二部图 .

**例：**

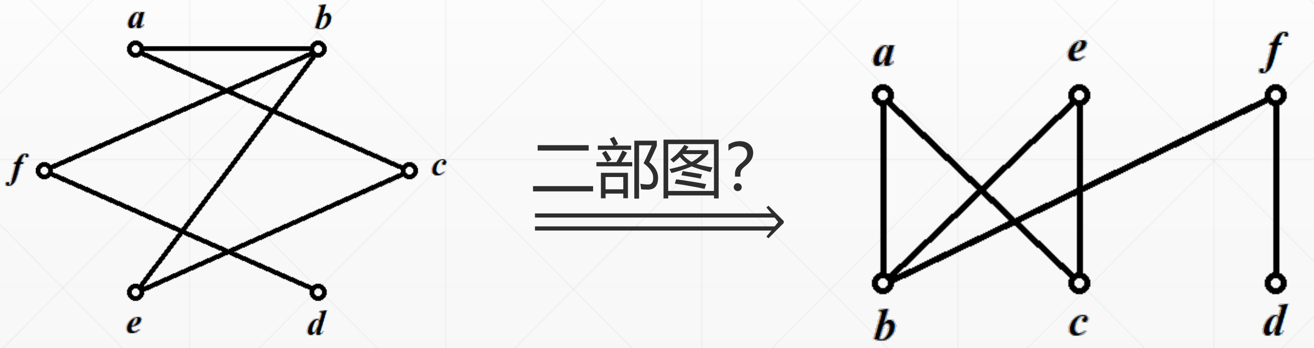


# 6.4.1 二部图

**例：** 六名间谍 $a, b, c, d, e, f$ 被擒，已知 $a$ 懂汉语、法语和日语，$b$ 懂德语、俄语和日语，$c$ 懂英语和法语，$d$ 懂西班牙语，$e$ 懂英语和德语，$f$ 懂俄语和西班牙语，问至少用几个房间监禁他们，能使在一个房间里的人不能直接对话？

**解：** 以六人为顶点，在懂共同语言的人的顶点间连边，得到图 $G$：




所以，两间房间即可．

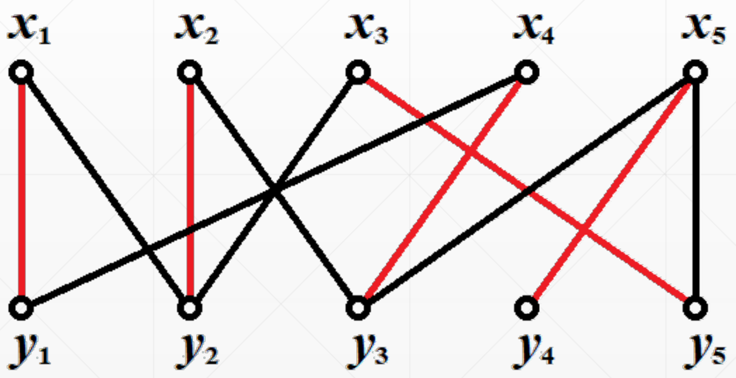
# 6.4.1 二部图

## 匹配

**例：** 现有 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ 五个人，$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ 五项工作，已知 $x_1$ 能胜任 $y_1$ 和 $y_2$，$x_2$ 能胜任 $y_2$ 和 $y_3$，$x_3$ 能胜任 $y_2$ 和 $y_5$，$x_4$ 能胜任 $y_1$ 和 $y_3$，$x_5$ 能胜任 $y_3$，$y_4$ 和 $y_5$．该如何安排，才能最大限度地使每项任务都有人做，并使尽可能多的人有工作做?

**解：** 1) 画二部图;

2) 在其中找一个边的子集，使得每个顶点只与一条边关联．



## 6.4.1 二部图

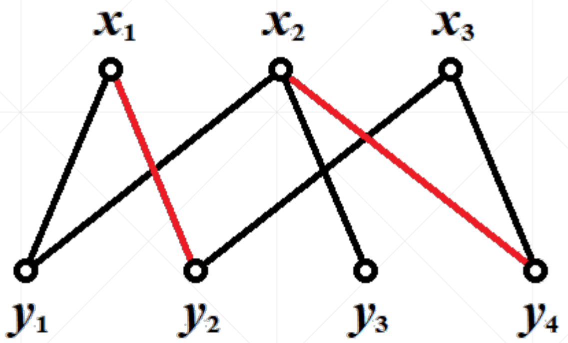
### 匹配（续）

**定义6.20** 设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$，$E'\subseteq E$. 若 $E'$ 中的边互不相邻, 则称 $E'$ 是 $G$ 的匹配. 如果在 $E'$ 中再添加任意一条边后所得到的边子集不再是匹配，则称 $E'$ 是 $G$ 的极大匹配. $G$ 中边数最多的匹配称为 $G$ 的最大匹配. 又设 $|V_1|\leq|V_2|$, $E'$是 $G$ 的匹配. 若 $|E'|=|V_1|$, 则称 $E'$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的完备匹配. 当 $|V_1|=|V_2|$ 时, 完备匹配称为完美匹配.

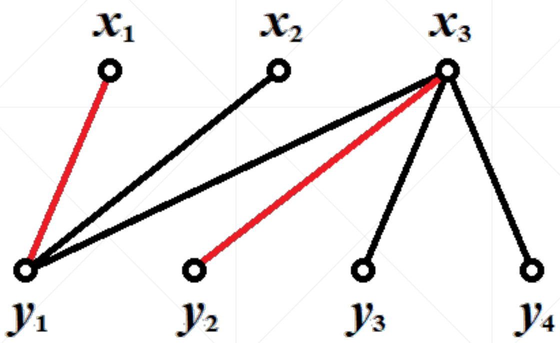
# 6.4.1 二部图

## 匹配（续）

极大匹配

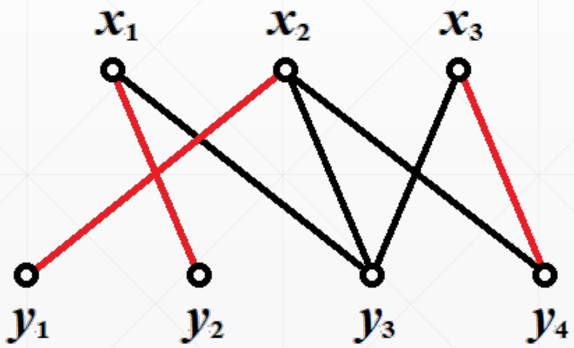



最大匹配

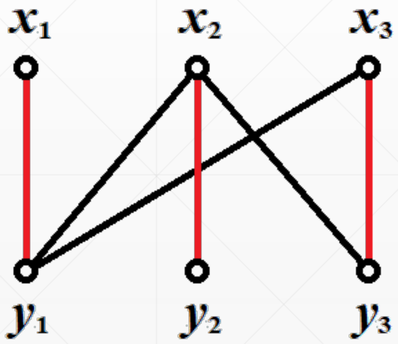



最大匹配

完备匹配



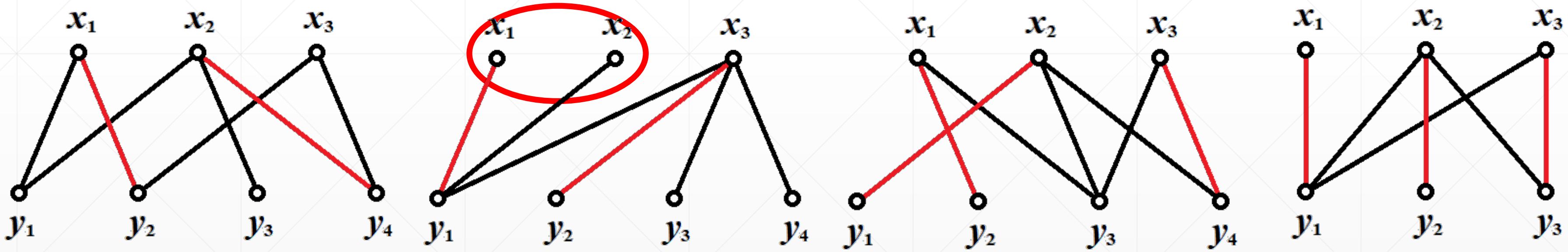

完美匹配



# 6.4.1 二部图

## 存在完备匹配的条件

**定理6.8**（Hall定理） 设二部图 $G = <V_1, V_2, E>$，$|V_1| \le |V_2|$，则 $G$ 中存在 $V_1$ 到 $V_2$ 的完备匹配当且仅当 $V_1$ 中任意 $k\ (1 \le k \le |V_1|)$ 个顶点至少与 $V_2$ 中的 $k$ 个顶点相邻 (相异性条件).




极大匹配　　最大匹配　　最大匹配 完备匹配　　完美匹配

第二个图不满足相异性条件, 不存在完备匹配

## 6.4.1 二部图

### 存在完备匹配的条件（续）

**定理6.9** 设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$, $|V_1|\le|V_2|$ . 如果存在正整数 $t$，使得 $V_1$ 中每个顶点至少关联 $t$ 条边，而 $V_2$ 中每个顶点至多关联 $t$ 条边( $t$ 条件)，则 $G$ 中存在 $V_1$ 到 $V_2$ 的完备匹配 .

**证明：** $V_1$中任意 $k$ $(1\le k\le|V_1|)$ 个顶点至少关联 $kt$ 条边，而 $V_2$ 中每个顶点至多关联 $t$ 条边，所以这 $kt$ 条边至少关联 $V_2$ 中 $k$个顶点，故 $V_1$ 中任意 $k$ 个顶点至少与 $V_2$ 中的 $k$ 个顶点相邻 .

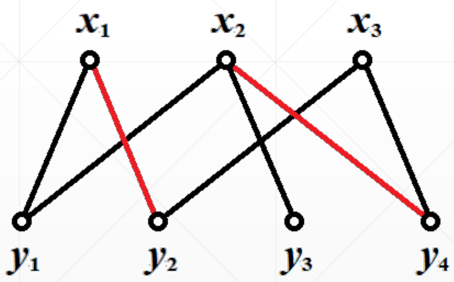
由 Hall 定理，$G$ 中存在从 $V_1$ 到 $V_2$ 的完备匹配 .

# 6.4.1 二部图

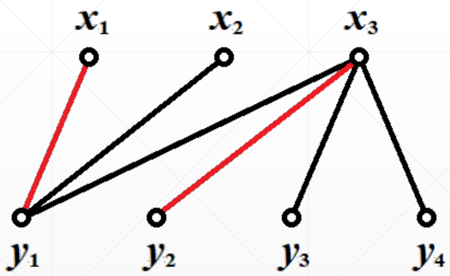
## 存在完备匹配的条件

**注：** Hall定理中的相异性条件是二部图存在完备匹配的充分必要条件，

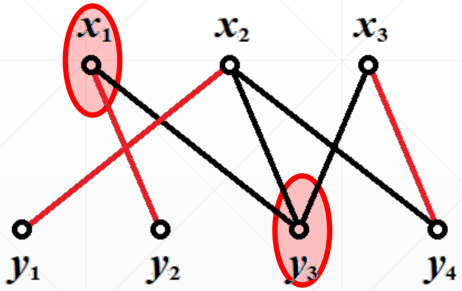
但 $t$ 条件只是二部图有完备匹配的充分条件，而不是必要条件。



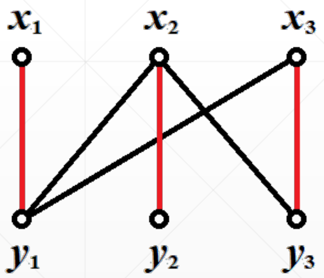

极大匹配




最大匹配




最大匹配
完备匹配




完美匹配

第三个图不满足 $t$ 条件, 但有完备匹配.

## 6.4.1 二部图

**例：** 某中学有 3 个课外活动小组：数学组, 计算机组和生物组 . 有赵, 钱, 孙, 李, 周 5 名学生, 问分别在下述3种情况下, 能否选出 3 人各任一个组的组长?

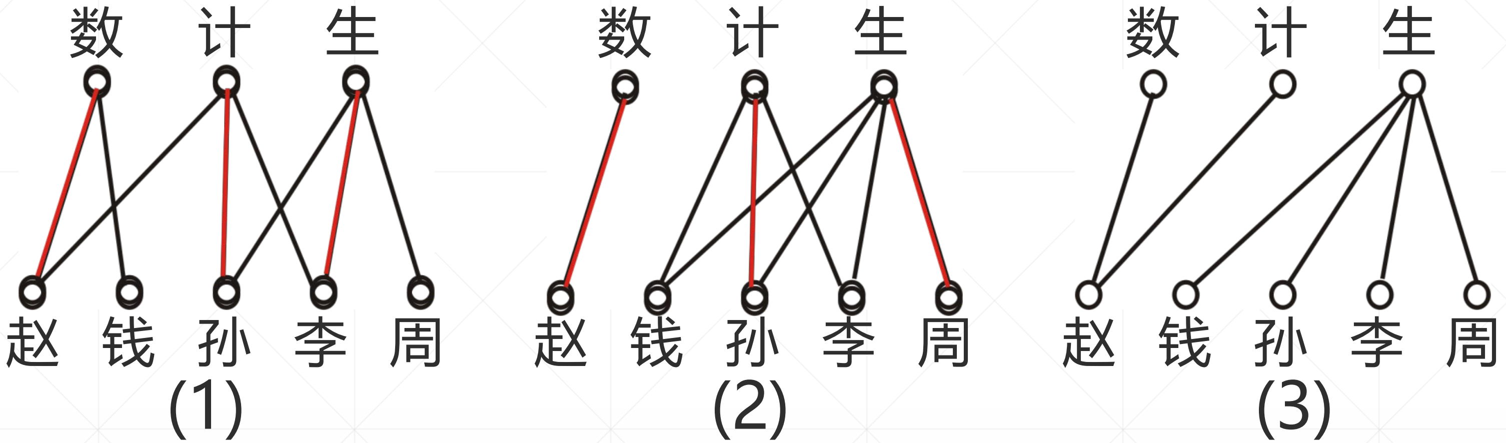
1) 赵, 钱为数学组成员, 赵, 孙, 李为计算机组成员, 孙, 李, 周为生物组成员 .

2) 赵为数学组成员, 钱, 孙, 李为计算机组成员, 钱, 孙, 李, 周为生物组成员 .

3) 赵为数学组和计算机组成员, 钱, 孙, 李, 周为生物组成员 .

# 6.4.1 二部图

**解：**




一个完备匹配对应一个方案

1）满足 $t$ 条件，$t=2$，存在完备匹配，且有多种方案；

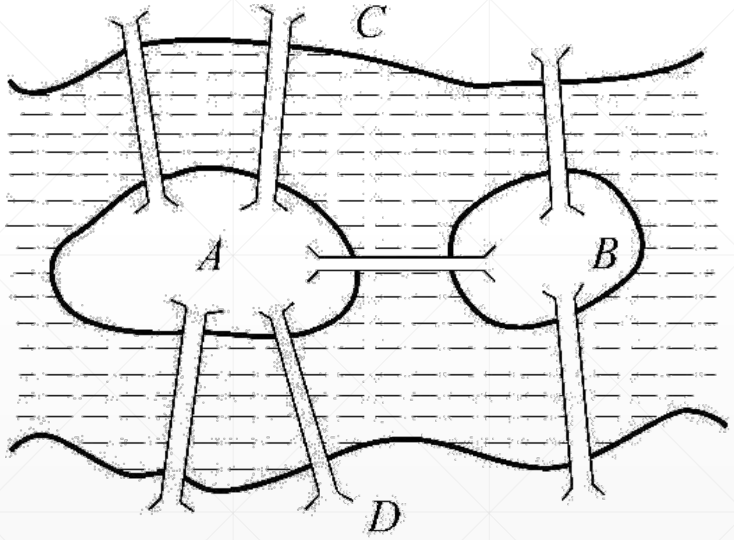
2）满足相异性条件，存在完备匹配，且有多种方案；

3）不满足相异性条件（$k=2$ 时不成立），不存在完备匹配 .

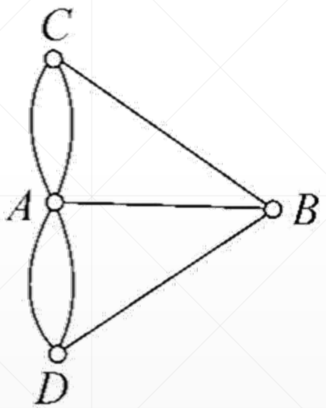

# 6.4.2 欧拉图

## 哥尼斯堡七桥

如何不重复地走完七桥，最后回到出发点?




(a)




(b)

存在经过图中每条边一次且仅一次的简单回路?

## 6.4.2 欧拉图

**欧拉通路**：经过所有顶点且每条边恰好经过一次的通路;

**欧拉回路**：经过所有顶点且每条边恰好经过一次的回路;

**欧拉图**：有欧拉回路的图 .

**注:**

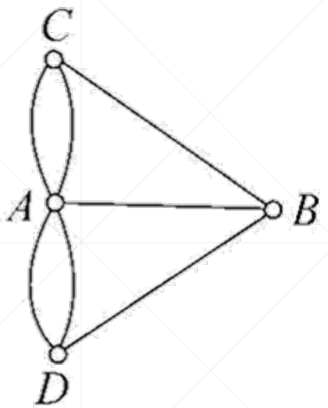
1）上述定义对无向图和有向图都适用;

2）规定平凡图为欧拉图;

3）欧拉通路是简单通路, 欧拉回路是简单回路;

4）环不影响图的欧拉性 .

## 6.4.2 欧拉图




### 无向欧拉图判别定理

**定理6.10** 无向图 $G$ 具有欧拉回路当且仅当 $G$ 是连通的且无奇度顶点 .

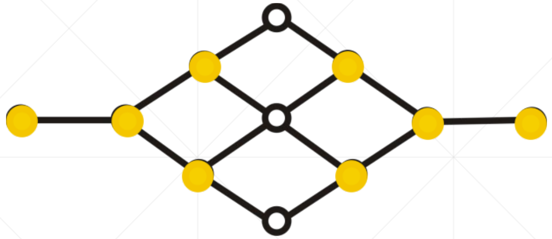
无向图 $G$ 具有欧拉通路、但没有欧拉回路当且仅当 $G$ 是连通的且有 2 个奇度顶点，其余顶点均为偶度数的 . 这 2 个奇度顶点是每条欧拉通路的端点 .

**推论** 无向图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 是连通的且无奇度顶点 .

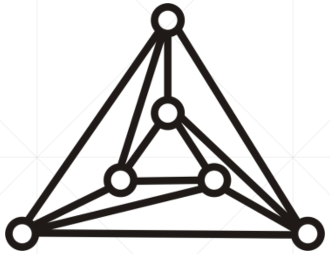
"一笔画"问题：对欧拉图，从任一点出发均可；对欧拉通路，只能从奇度点起步，到达另一奇度点终止 .

# 6.4.2 欧拉图

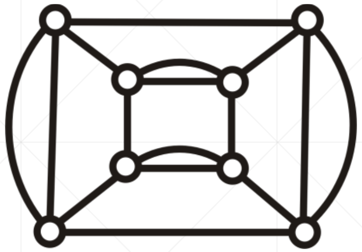
**例:**



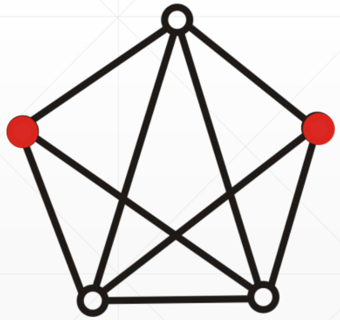
无欧拉通路



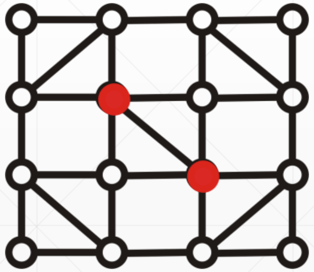
欧拉图



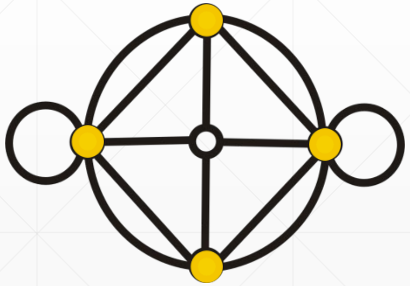
欧拉图



有欧拉通路
非欧拉图



有欧拉通路
非欧拉图



无欧拉通路

## 6.4.2 欧拉图

### 有向欧拉图判别定理

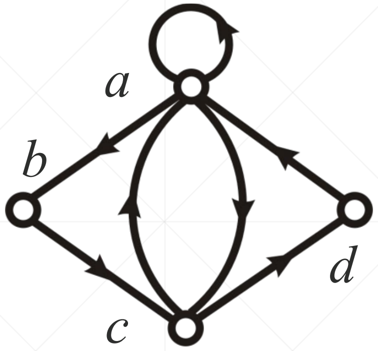
**定理6.11** 有向图 $D$ 有欧拉回路当且仅当 $D$ 是连通的且所有顶点的入度等于出度.

有向图 $D$ 有欧拉通路、但没有欧拉回路当且仅当 $D$ 是连通的且有一个顶点的入度比出度大1、一个顶点的入度比出度小1, 其余的顶点的入度等于出度.

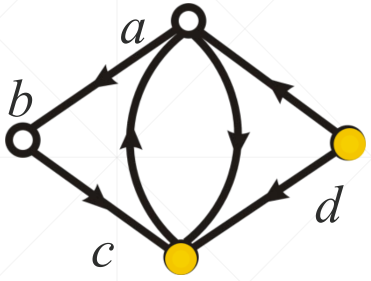
**推论** 有向图 $D$ 是欧拉图当且仅当 $D$ 是连通的且所有顶点的入度等于出度.

# 6.4.2 欧拉图

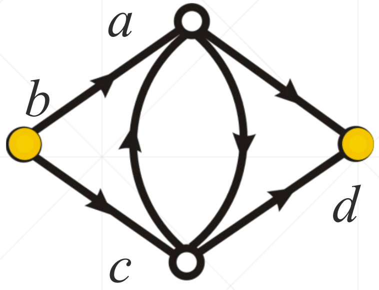
**例：**



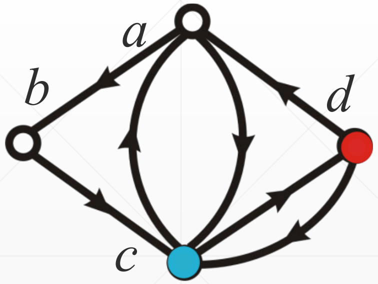

欧拉图



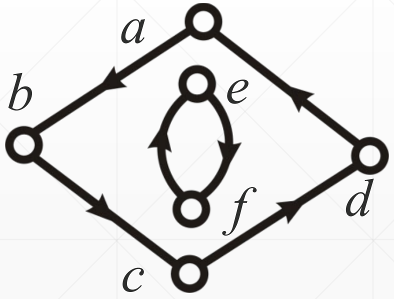

无欧拉通路



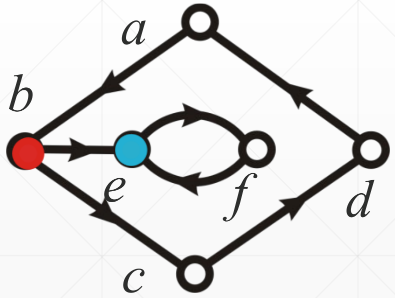

无欧拉通路




有欧拉通路
无欧拉回路



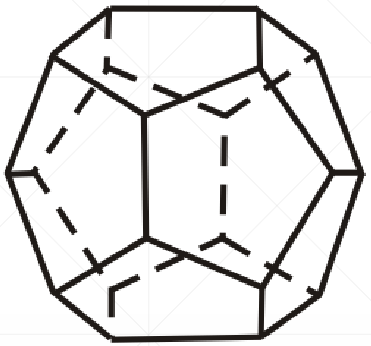

无欧拉通路

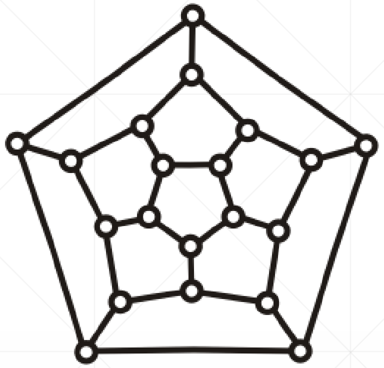



有欧拉通路
无欧拉回路

# 6.4.3 哈密顿图

**周游世界问题** (W. Hamilton, 1859年)





用一个正十二面体的20个顶点表示20个城市，怎样才能从一个城市出发，沿着棱经过每个城市恰好一次，最后返回到出发点？

投影：在图中找一条经过每一个顶点恰好一次的回路 .

## 6.4.3 哈密顿图

**哈密顿通路**：经过图中所有顶点一次且仅一次的通路；

**哈密顿回路**：经过图中所有顶点一次且仅一次的回路；

**哈密顿图**：具有哈密顿回路的图 .

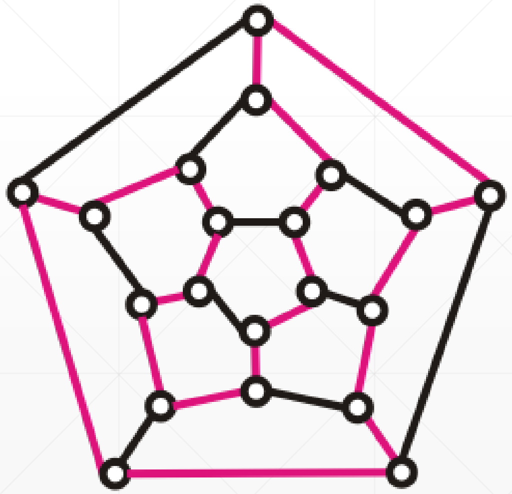
**注:**

1）哈密顿通路是初级通路；

2）哈密顿回路是初级回路；

3）有哈密顿通路不一定有哈密顿回路；

4）环与平行边不影响图的哈密顿性 .



## 6.4.3 哈密顿图

### 哈密顿图的必要条件

**定理6.12** 若无向图 $G = <V, E>$ 是哈密顿图, 则对于 $V$ 的任意非空真子集 $V_1$ 均有 $p(G - V_1) \le |V_1|$.

**证明：** 设 $C$ 为 $G$ 中一条哈密顿回路，则该回路包含了 $V$ 中所有顶点，则 $C - V_1$ 最多把 $C$ 分成 $|V_1|$ 个连通分支，即有 $p(C - V_1) \le |V_1|$.

又因为 $C \subseteq G$，则 $C - V_1$ 是 $G - V_1$ 的子图，所以 $G - V_1$ 的连通分支数不会多于$C - V_1$的连通分支数，故

$$p(G - V_1) \le p(C - V_1) \le |V_1|.$$

**注：** 这是必要条件，不是充分条件 .

## 6.4.3 哈密顿图

**哈密顿图的必要条件（续）**

**例：** 当 $r \neq s$ 时，$K_{r,s}$ 不是哈密顿图 .

**反证法：** 设 $K_{r,s} = <V_1, V_2, E>$ 是哈密顿图，其中 $|V_1| = s, |V_2| = r.$

因 $r \neq s$，不妨设 $r > s$，那么删除 $V_1$ 后，则 $K_{r,s}$ 变为 $r$ 个孤立点，

从而，$p\,(K_{r,s} - V_1) = r > s = |V_1|$，得到矛盾 .

**推论** 有割点的连通图不是哈密顿图 .

**证明：** 设 $v$ 为连通图 $G$ 的割点，设 $V_1 = \{v\}$，则 $|V_1| = 1$，于是

$$p\,(G - V_1) \geq 2 > |V_1|,$$

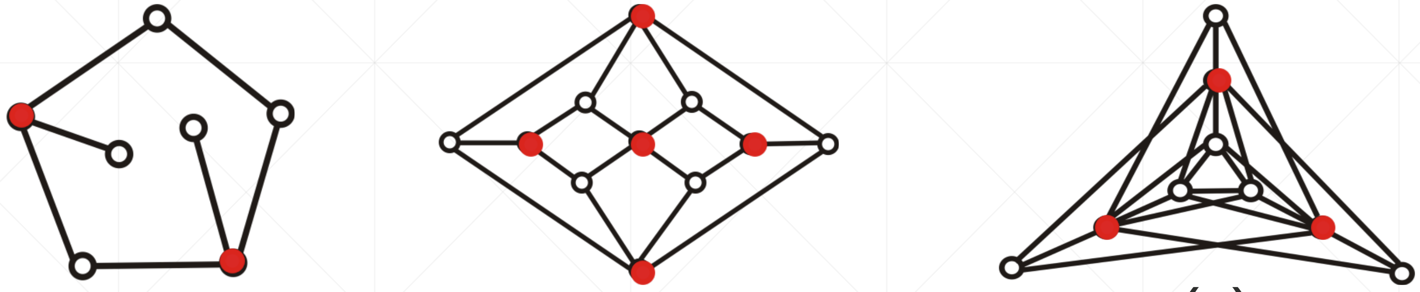
由定理6.12，$G$ 不是哈密顿图。

## 6.4.3 哈密顿图

**例：**证明下述各图不是哈密顿图：

发现 $V_1$ 的原则：

以最大度顶点为目标



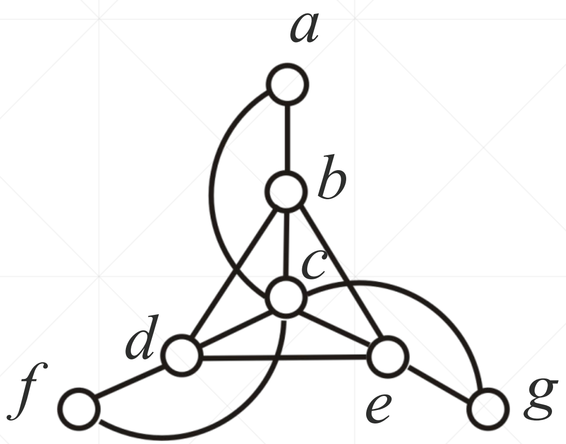
(a) (b) (c)

(a)：存在割点；

(b)：$|V_1| = 5$，$p(G - V_1) = 6 > |V_1|$；

(c)：$|V_1| = 3$，$p(G - V_1) = 4 > |V_1|$，存在哈密顿通路 .

## 6.4.3 哈密顿图




**例：** 证明右图不是哈密顿图 .

**证明：** 假设存在一条哈密顿回路, $a, f, g$ 是 2 度顶点, 边 $(a, c)$, $(f, c)$ 和 $(g, c)$必在这条哈密顿回路上, 从而点 $c$ 出现 3 次, **矛盾** .

**注：** 1）该图满足定理6.12的条件(若无向图 $G = <V, E>$ 是哈密顿图, 则对于 $V$ 的任意非空真子集 $V_1$ 均有 $p(G - V_1) \le |V_1|$.), 这表明此条件是必要、而不充分的;

2）该图有哈密顿通路, 如 $a\ c\ f\ d\ b\ e\ g$

# 6.4.3 哈密顿图

## 存在哈密顿回路(通路)的充分条件

**定理6.13** 设 $G$ 是 $n$ $(n \geq 3)$ 阶无向简单图, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于 $n-1$, 则 $G$ 中存在哈密顿通路;

若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于 $n$, 则 $G$ 中存在哈密顿回路，即 $G$ 为哈密顿图 .

**推论** 设 $G$ 是 $n$ $(n \geq 3)$ 阶无向简单图, 若 $\delta(G) \geq n/2$, 则 $G$ 是哈密顿图 .

**例：** 当 $n \geq 3$ 时，$K_n$ 是哈密顿图? ✔

当 $r = s \geq 2$ 时, $K_{r,s}$ 是哈密顿图? ✔　当 $r \neq s$ 时? ✘

# 6.4.3 哈密顿图

**存在哈密顿回路(通路)的充分条件**

**定理6.14** 设 $D$ 是 $n\ (n \geq 2)$ 阶有向图, 若略去所有边的方向后所得无向图中含子图 $K_n$ , 则 $D$ 中有哈密顿通路 .

**推论** 设 $D$ 是 $n\ (n \geq 3)$ 阶有向完全图, 则 $D$ 是哈密顿图 .

**证明：** 由定理6.14可知，任意有向完全图 $D\ (n \geq 3)$ 中存在哈密顿通路.
设 $\Gamma$ 为从 $u$ 到 $v$ 的一条哈密顿通路，由于 $D$ 是有向完全图,
所以有向边 $e = \langle v, u \rangle \in E$，于是 $\Gamma \cup e$ 为 $D$中的哈密顿回路,
故 $D$ 是哈密顿图.

**注：** 没有判断哈密顿图的充要条件!

## 6.4.3 哈密顿图

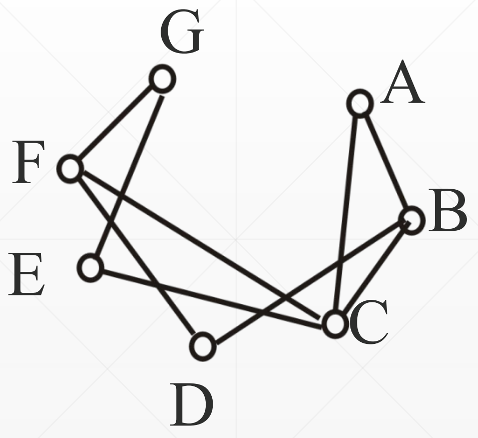
**例：** 有 7 个人，A 会讲英语，B 会讲英语和汉语，C 会讲英语、意大利语和俄语，D 会讲日语和汉语，E 会讲德语和意大利语，F 会讲法语、日语和俄语，G 会讲法语和德语．问能否将他们沿圆桌安排就坐成一圈，使得每个人都能与两旁的人交谈?

**解：** 作无向图，每人是一个顶点，

2人之间有边 $\Leftrightarrow$ 他们会讲同一种语言.

ACEGFDBA是一条哈密顿回路，

按此顺序就坐即可.



# 实例

**例：** 某公司有 6 个部门要招聘员工，限定每位应聘者至多申请 2 个部门，考核结果有 10 人符合条件，根据这 10 人的申请，每个部门至少有2人申请。问：这6个部门是否都能招聘到人？为什么？

**解：** 作二部图 $G = <V_1, V_2, E>$，其中 $V_1$ 是 6 个部门，$V_2$ 是 10 位应聘者，部门 $u$ 与应聘者 $v$ 相邻当且仅当应聘者 $v$ 申请部门 $u$ .

根据题设，$V_1$ 的每个顶点至少关联 2 条边，$V_2$ 的每个顶点至多关联 2 条边，$G$ 满足 $t$ 条件（$t$=2），存在 $V_1$ 到 $V_2$ 的完备匹配。

故这 6 个部门都能招到人 .

# 实例

**例：** 1) 什么条件下无向完全图 $K_n$ 为欧拉图?

2) 什么条件下有向完全图为欧拉图?

3) 什么条件下轮图 $W_n$ 为欧拉图?

4) 什么条件下完全二部图 $K_{r,s}$ 为欧拉图?

**解：** 1) $n$ 为奇数时， $K_n$ 为欧拉图，此时 $K_n$ 的各顶点度数均为偶数;

2) 任何阶有向完全图都是欧拉图;

3) 任何轮图都不是欧拉图，因为轮图的轮上都是 3 度顶点;

4) 当 $r \geq 2, s \geq 2$, 且 $r, s$ 都为偶数时， $K_{r,s}$ 为欧拉图 .

# 实例

**例：** 1) 什么条件下无向完全图 $K_n$ 为哈密顿图?

2) 什么条件下有向完全图为哈密顿图?

3) 什么条件下轮图 $W_n$ 为哈密顿图?

4) 什么条件下完全二部图 $K_{r,s}$ 为哈密顿图?

**解：** 1) $K_n\,(n \neq 2)$ 全是哈密顿图。 注意：平凡图是哈密顿图，所以 $K_1$ 为哈密顿图，当 $n \geq 3$ 时，$K_n$ 中均有长度为 $n$ 的圈，这些圈都是 $K_n$ 中的哈密顿回路;

2) 任何阶有向完全图都是有向哈密顿图，平凡有向图是哈密顿图;

3) 任何轮图都是哈密顿图，轮图规定 $n \geq 4$，所以在 $W_n$ 中都存在 $n$ 阶圈，所以 $W_n$ 都是哈密顿图;

4) 当 $r = s \geq 2$ 时，$K_{r,s}$ 为哈密顿图 .

# 研讨题

1）说一说：有向图的邻接矩阵与关系矩阵之间的联系，并阐明为何可达矩阵可以用计算传递闭包的Warshall算法计算（举例说明）。

2）在 8×8 黑白相间的棋盘上，按照国际象棋规则跳动一只马，要使这只马完成每一种可能跳动恰好一次，并跳遍所有的棋格，问这样的跳动是否可能。

3）已知连通图 $G$ 至少要 $k\ (k > 1)$ 笔才能画成，若去掉一条边后得图 $G'$，问 $G'$ 至少要几笔才能画成？试举例加以说明。