第6章 图

计算机工程与科学学院 封卫兵

6.4.4 平面图

平面图与平面嵌入

平面图的面及其次数

极大平面图

欧拉公式

库拉图斯基定理

平面图的对偶图

着色与四色定理

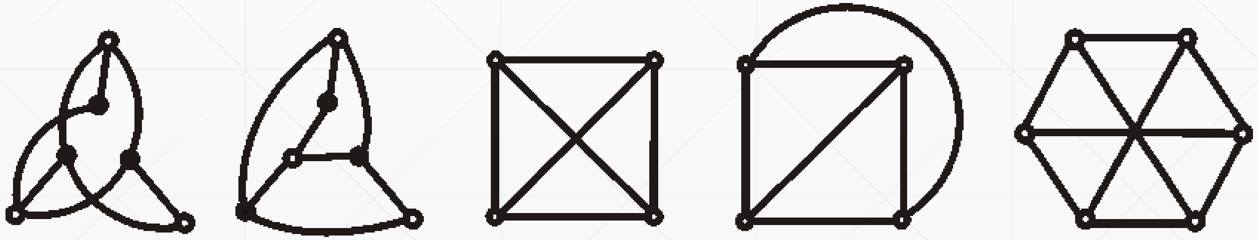
6.4.4 平面图

平面图与非平面图

定义6.22 如果能将图 G 除顶点外边不相交地画在平面上，则称 G 是平面图．这个画出的无边相交的图称作 G 的平面嵌入.

没有平面嵌入的图称作非平面图.

例： 下图中 (1), (2), (3), (4) 是平面图， (2) 是 (1) 的平面嵌入， (4) 是 (3) 的平面嵌入． (5) 是非平面图.



(1) (2) (3) (4) (5)

6.4.4 平面图

平面图中的术语（设 G 是一个平面嵌入）

G 的面：由 G 的边将平面划分成的每一个区域；

无限面(外部面)：面积无限的面，用 R_0 表示；

有限面(内部面)：面积有限的面，用 $R_1, R_2, \ldots, R_k$ 表示；

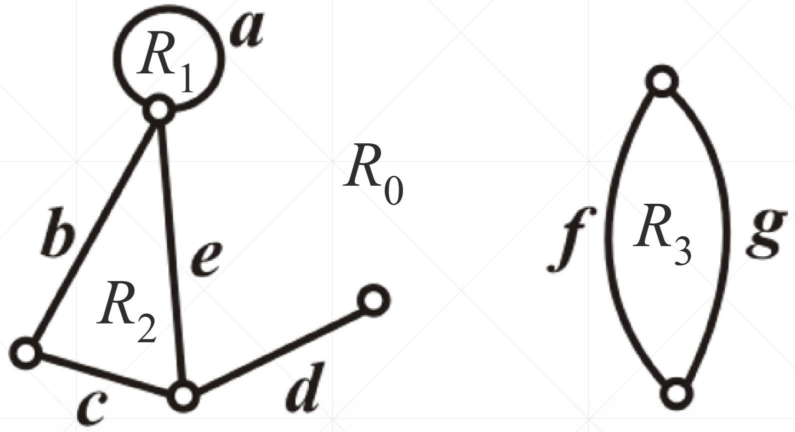
面 R_i 的边界：包围 R_i 的所有边构成的回路组；

面 R_i 的次数：R_i 边界的长度，用 $\deg(R_i)$ 表示 .

注： 构成一个面的边界的回路组可能是初级回路，简单回路，也可能是复杂回路，甚至还可能是非连通的回路之并 .

6.4.4 平面图

例： 右图有 4 个面



R_1 的边界: a, 初级回路

R_2 的边界: bce, 初级回路

R_3 的边界: fg, 初级回路

R_0 的边界: $abcdde, fg$, 复杂回路，非连通

$\deg(R_1) = 1$ $\deg(R_2) = 3$

$\deg(R_3) = 2$ $\deg(R_0) = 8$

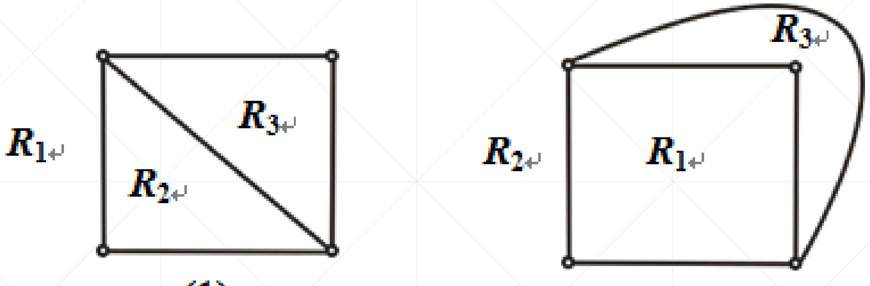
6.4.4 平面图

例： 右边 2 个图是同一平面图的平面嵌入 .

R_1 在 (1) 中是外部面,

在(2)中是内部面;

R_2 在(1)中是内部面，在(2)中是外部面.



(1) (2)

注:

1) 一个平面图可以有多个不同形式的平面嵌入, 它们都同构;

2) 可以通过变换 (测地投影法) 把平面图的任何一面作为外部面 .

6.4.4 平面图

平面图的面次和

定理6.15 平面图各面的次数之和等于边数的 2 倍，即

$$\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)=2m$$

其中，r 为 G 的面数，m 为边数 .

证明： 一条边或者是 2 个面的公共边界，或者在一个面的边界中出现 2 次. 在计算各面的次数之和时, 每条边恰好被计算 2 次 .

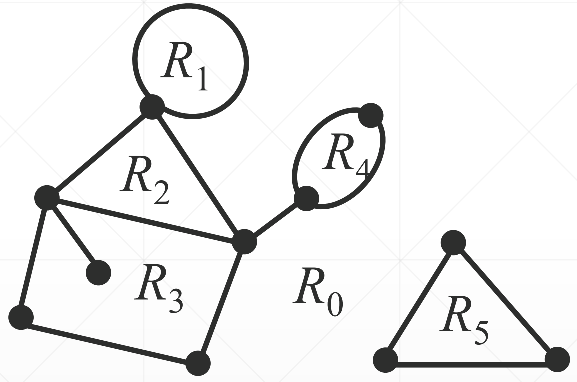
6.4.4 平面图

例： 求图示非连通的平面图各面的次数，并验证各面次数之和等于边数的 2 倍。

解： $\deg(R_1) = 1$， $\deg(R_2) = 3$，

$\deg(R_3) = 6$， $\deg(R_4) = 2$，

$\deg(R_5) = 3$， $\deg(R_0) = 13$，



图中边数 $m = 14$,

$$\sum_{i=0}^{5} \deg(R_i) = 28 = 2 \times 14$$

注： 桥在计算它所在的面的次数时都提供2次 .

6.4.4 平面图

极大平面图

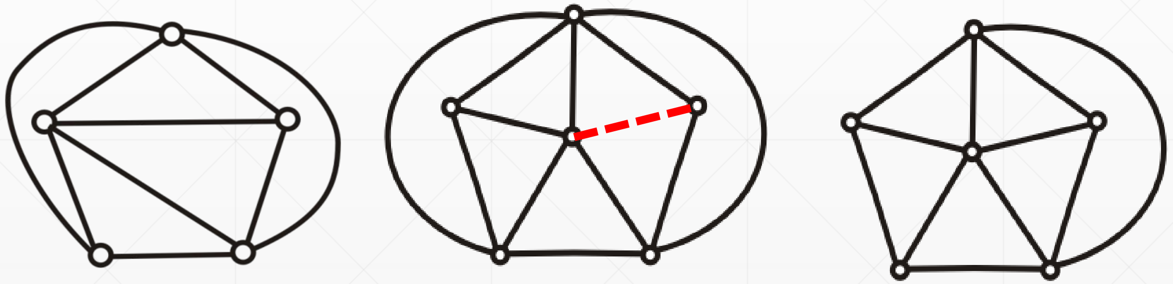
定义6.24 若 G 是简单平面图，且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为极大平面图 .

例： K_1， K_2， K_3， K_4 都是极大平面图？

图(1)是 K_5 删去一条边, 是极大平面图？

图(2)是极大平面图？

图(3)是极大平面图？



(1) (2) (3)

6.4.4 平面图

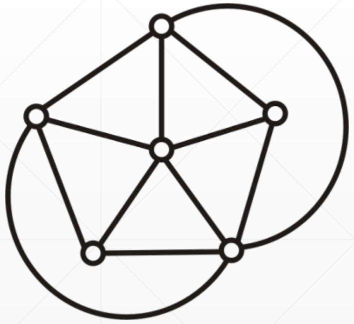
极大平面图的性质

1) 极大平面图是连通的（？）

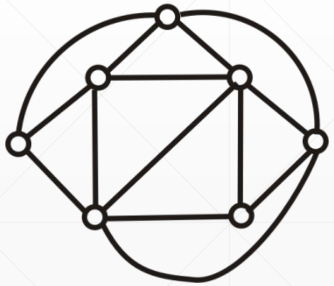
2) 设 G 为 n $(n \geq 3)$ 阶简单图，G 为极大平面图的充分必要条件是，

G 每个面的次数均为 3.

例：



极大平面图



外部面的次数为 4
非极大平面图

6.4.4 平面图

欧拉公式

定理6.16　设 G 为 n 阶 m 条边 r 个面的连通平面图，则

$$n - m + r = 2 .$$

证明： 对边数 m 做归纳证明 .

1）$m = 0$，G 为平凡图，结论成立；

2）设 $m = k\ (k \geq 0)$ 时结论成立，即 n 阶 k 条边 r 个面的连通平面图，有 $n - k + r = 2$ ；

6.4.4 平面图

欧拉公式（续）

3）对 $m = k + 1$，若 G 中无圈，则 G 必有一个度数为 1 的顶点 v，

删除 v 及关联的边，记作 G'，则

G' 连通，有 $n-1$ 个顶点，k 条边和 r 个面 .

由归纳假设，$(n-1)-k+r=2$，即 $n-(k+1)+r=2$，得证 .

否则，删除一个圈上的一条边，记作G'，则

G' 连通，有 n 个顶点，k 条边和 $r-1$ 个面 .

再由归纳假设，$n-k+(r-1)=2$，即 $n-(k+1)+r=2$. **证毕**.

6.4.4 平面图

欧拉公式（续）

推论　设平面图 G 有 $p\ (p \geq 2)$ 个连通分支，则

$$n - m + r = p + 1\ .$$

其中 n，m，r 分别是 G 的阶数、边数和面数 .

证明： 设第 i 个连通分支有 n_i 个顶点，m_i 条边和 r_i 个面 .

对各连通分支用欧拉公式，

$$n_i - m_i + r_i = 2\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

求和，由于 $r = r_1 + \ldots + r_p - p + 1\ (\ ?\ )$， 外部面被重复计算

即得 $n - m + r + p - 1 = 2p \Rightarrow\ n - m + r = p + 1$.

6.4.4 平面图

欧拉公式（续）

定理6.17 设 G 为 n 阶连通平面图，有 m 条边，且每个面的次数不小于 l $(l \geq 3)$，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

证明： 设 G 有 r 个面，则各面次数之和不小于 $l\,r$.

因为，平面图各面的次数之和等于边数的 2 倍，所以，$2m \geq l\,r$ ，

又因为，G 为连通平面图，由欧拉公式得：$n - m + r = 2$，

所以，$2m \geq l\,(2 + m - n)$，即得证 .

6.4.4 平面图

欧拉公式（续）

注：这是个必要条件!

n 阶连通平面图，则 $m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$ ✔

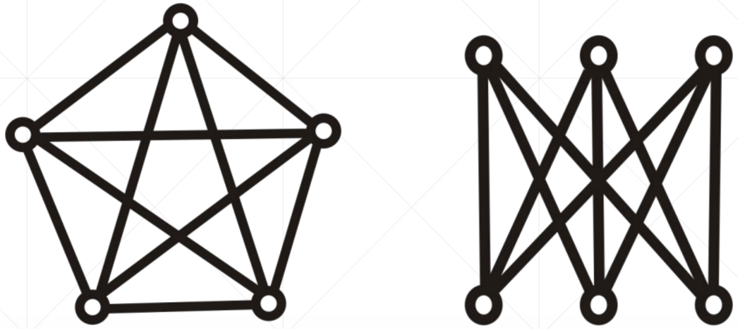
不满足 $m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$，则不是 n 阶连通平面图 ✔

满足 $m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$，则是 n 阶连通平面图 ✘

6.4.4 平面图

例： 证明 K_5 和 $K_{3,3}$ 不是平面图 .

证明：



$K_5 : n = 5 , m = 10 , l = 3$

$K_{3,3} : n = 6 , m = 9 , l = 4$

不满足定理 6.17 的条件 .

注： 1）在 3 阶以上的简单平面图中，$l \geq 3$；

2）K_5 和 $K_{3,3}$ 是基本的非平面图，在平面图的判断上起很大作用 .

6.4.4 平面图

例： 设简单连通平面图有 $n\ (n \geq 3)$个顶点、m 条边, 则

$$m \leq 3n - 6$$

证明： 由于至少 3 条边才能围成一个面，所以 3 阶以上的简单连通平面图每个面的次数至少为 3 .

设图 $G = (V, E)$，其中边数 m，结点数 n，面数 r .

方法一： 由面次和定理：$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i)$

因为每个面的次数均大于等于 3，所以 $2m \geq 3r$

由欧拉定理 $n - m + r = 2$ 有：$m \leq 3n - 6$.

6.4.4 平面图

例：设简单连通平面图有 $n\ (n \geq 3)$个顶点、m 条边, 则

$$m \leq 3n - 6$$

证明：由于至少 3 条边才能围成一个面，所以 3 阶以上的简单连通平面图每个面的次数至少为 3 .

设图 $G = (V, E)$，其中边数 m，结点数 n，面数 r .

方法二：由定理6.17有：$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$，由于

$\frac{l}{l-2} = 1 + \frac{2}{l-2}$ 在 $l = 3$ 时达到最大值，于是

$$m \leq \frac{3}{3-2}(n-2) = 3n - 6$$

6.4.4 平面图

例： 已知 7 阶连通平面图 G 有 6 个面，试求 G 的边数 m .

解： 由于 G 是连通平面图，所以 G 的阶数 n、边数 m、面数 r 满足欧拉公式：

$$n - m + r = 2$$

已知，$n = 7, r = 6,$ 所以，$m = n + r - 2 = 7 + 6 - 2 = 11$.

6.4.4 平面图

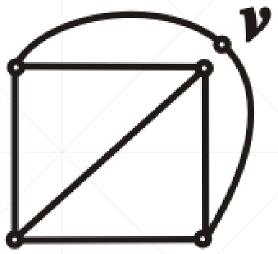
同胚与收缩

消去 2 度顶点 v 如图从(1)到(2)；

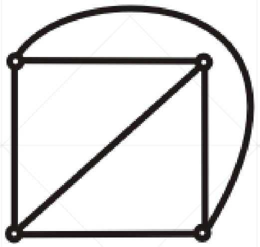
插入 2 度顶点 v 如图从(2)到(1)；

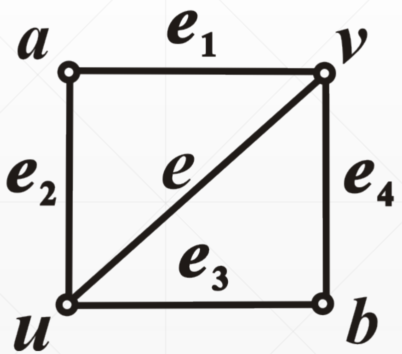
G_1 与 G_2 同胚：G_1 与G_2 同构，或经过反复插入、或消去 2 度顶点后同构；

收缩边e：若删除图中边 $e=(u,v)$，并将 u 与 v 重合，所得顶点记为 u (或 v)，使 u 关联除边 (u,v) 外，原来 u 与 v 关联的一切边，如图从(3)到(4) .

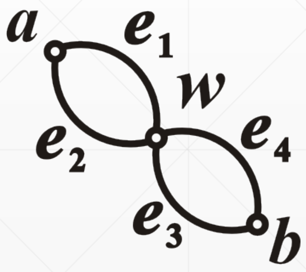


(1)


(2)



(3)



(4)

6.4.4 平面图

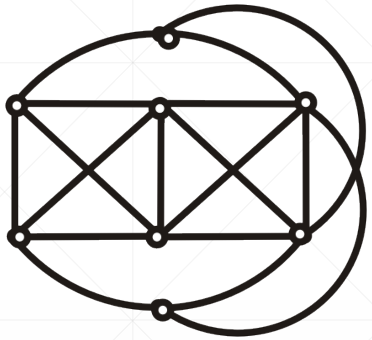
库拉图斯基(Kuratowski)定理

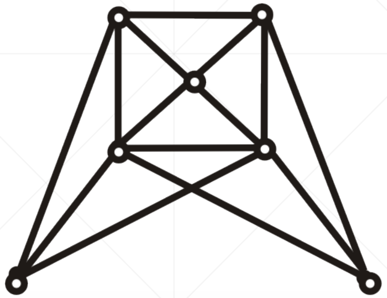
定理6.18 一个图是平面图当且仅当它既不含与 K_5 同胚的子图，也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

定理6.19 一个图是平面图当且仅当它既无可收缩为 K_5 的子图，也无可收缩为 $K_{3,3}$ 的子图.

6.4.4 平面图

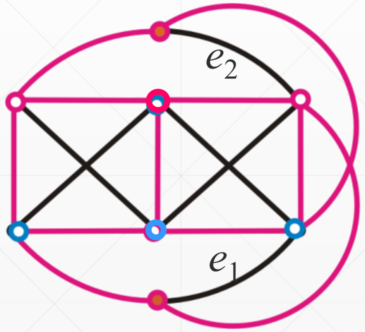
例：证明下面 2 个图均为非平面图 .





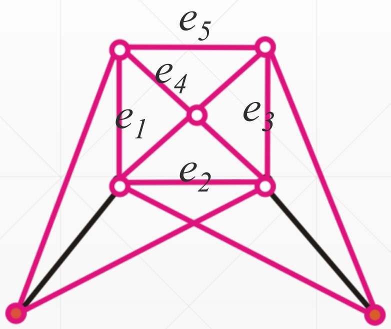
注：若 G 中有 5 个以上的 4 度点，可以尝试 K_5；

若有 6 个以上的 3 度点，可以尝试$K_{3,3}$.



与 $K_{3,3}$ 同胚

也可收缩到 $K_{3,3}$



与 K_5 同胚

也可收缩到 K_5

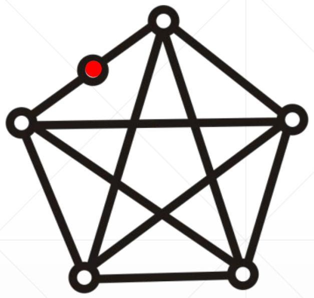
也可收缩到 $K_{3,3}$

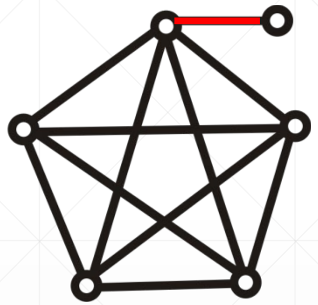
6.4.4 平面图

例： 画出所有非同构的 6 阶 11 条边的简单连通非平面图

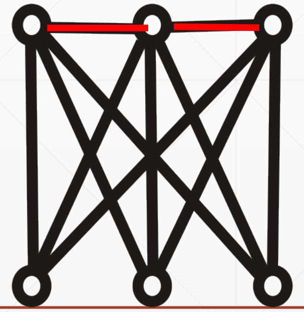
解：

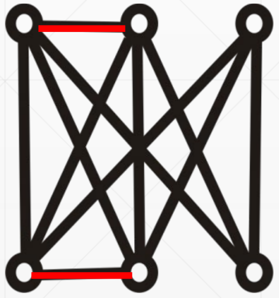
在 K_5 (5 阶 10 条边) 上
加一个顶点和一条边





在$K_{3,3}$ (6 阶 9 条边)
上加 2 条边





6.4.4 平面图

对偶图

定义6.28 设平面图 G 有 n 个顶点，m 条边和 r 个面，

G 的对偶图 $G^*=<V^*, E^*>$ 构造如下:

在 G 的每一个面 R_i 中任取一个点 v_i^* 作为 G^* 的顶点，

$$V^* = \{ v_i^* \mid i = 1, 2, \ldots, r \}.$$

对 G 每一条边 e_k，若 e_k 在 G 面 R_i 与 R_j 的公共边界上，

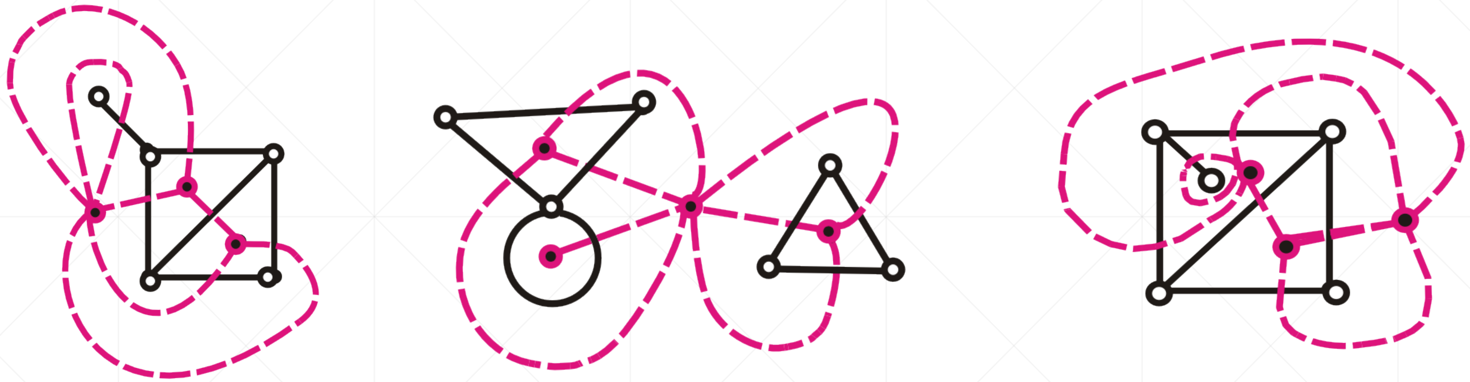
则作边 $e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$，且与 e_k 相交，若 e_k 只在面 R_i 的边界上，

则作环 $e_k^* = (v_i^*, v_i^*)$.

$$E^* = \{ e_k^* \mid k=1, 2, \ldots, m \}.$$

6.4.4 平面图

例：



(1)　　(2)　　(3)

性质

1） G^* 是平面图，而且是平面嵌入；

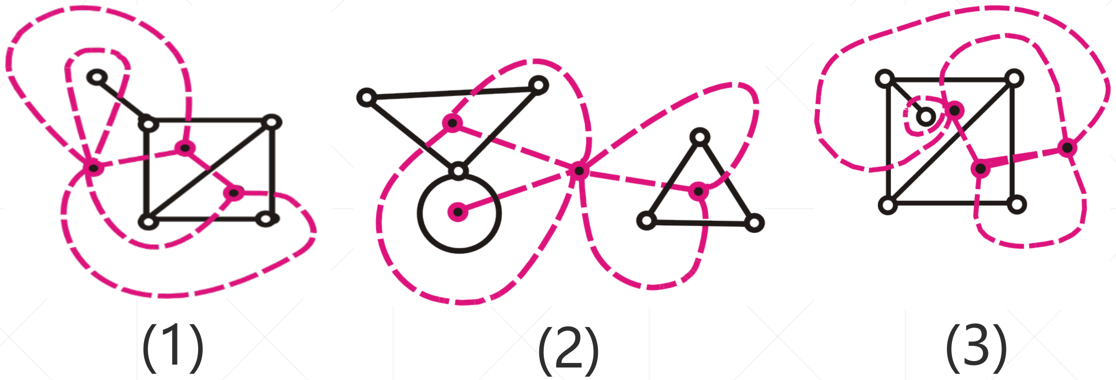
2） G^*是连通的；

3） 若 e 为 G 中的环，则 G^* 中 e^* 为桥，若 e 为桥，则 G^* 中 e^* 为环；

4） 同构的平面图的对偶图不一定同构，如(1)和(3) .

6.4.4 平面图

对偶图（续）



定理6.20　设 G^* 是连通平面图 G 的对偶图，n^*，m^*，r^* 和 n，m，r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

1) $n^* = r$；

2) $m^* = m$；

3) $r^* = n$；

4) 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中，则 $d(v_i^*) = \deg(R_i)$；

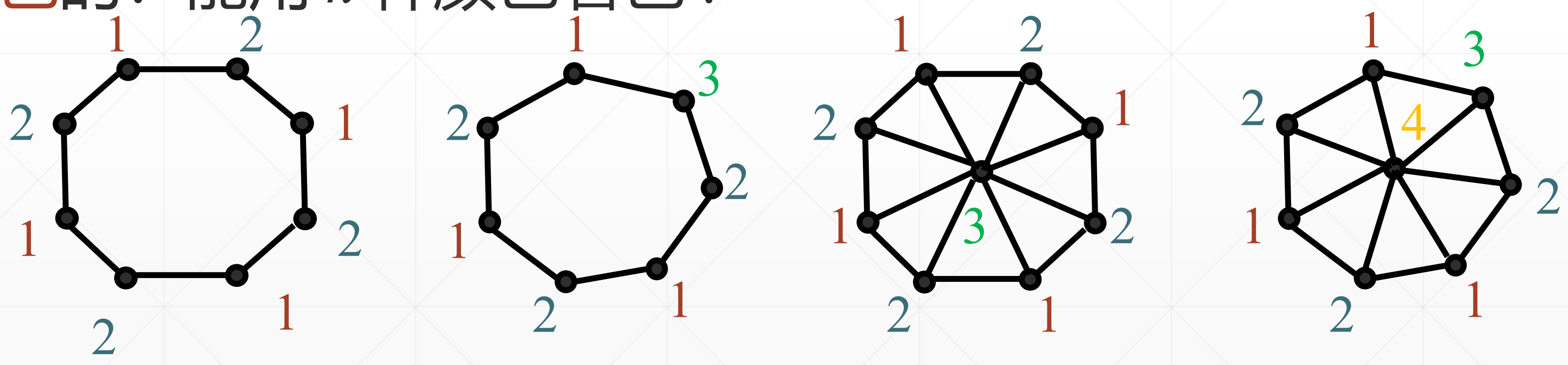
5)*若 G 是具有 $k\ (k \geq 2)$ 个连通分支的平面图，则 $r^* = n - k + 1$.

6.4.4 平面图

着色

点着色(简称着色)：对无环无向图的每个顶点涂一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色.(用尽可能少的颜色)

k-可着色的：能用 k 种颜色着色 .

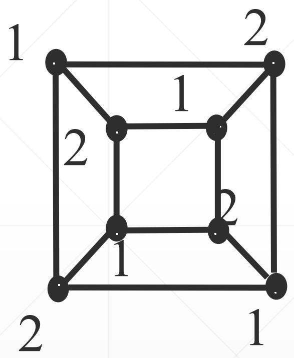


注： (1) 偶圈用 2 种颜色; (2) 奇圈要 3 种颜色;

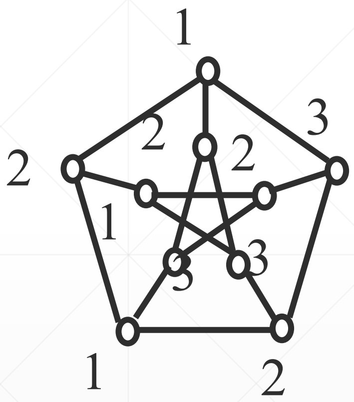
(3) 奇阶轮图要 3 种颜色; (4) 偶阶轮图要 4 种颜色 .

6.4.4 平面图

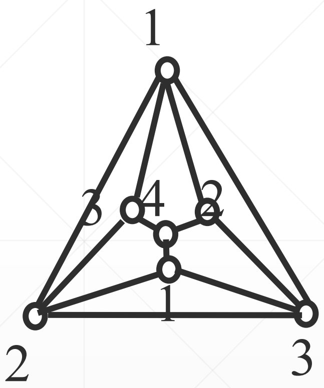
例：给出颜色尽可能少的着色



二部图



彼得松图



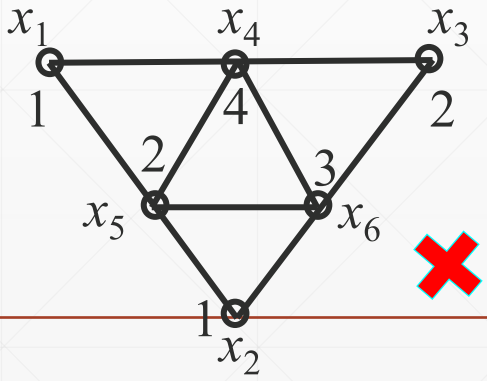
着色问题与哈密顿回路问题，至今还没有有效的算法

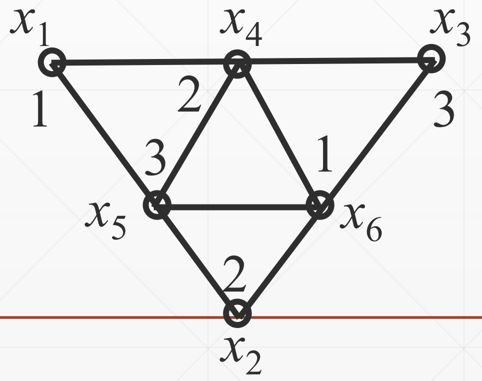
6.4.4 平面图

例： 一个程序有 6 个变量 x_i， $i = 1, 2, \ldots, 6$, 其中 x_1 与 x_4, x_1 与 x_5, x_2 与 x_5, x_2 与 x_6, x_3 与 x_4, x_3 与 x_6, x_4 与 x_5, x_4 与 x_6, x_5 与 x_6 要同时使用. 给每一个变量分配一个寄存器. 要同时使用的两个变量不能分配同一个寄存器. 问: 至少要使用几个寄存器？如何分配？

解：做无向图 $G = \langle V, E \rangle$，其中 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$,

$$E = \{(x_i, x_j) \mid x_i\text{与}x_j\text{要同时使用}, i \neq j, i, j = 1,2,\ldots,6\}$$





至少用 3 个寄存器

x_1 与 x_6，x_2 与 x_4，x_3与x_5，分配同一个寄存器

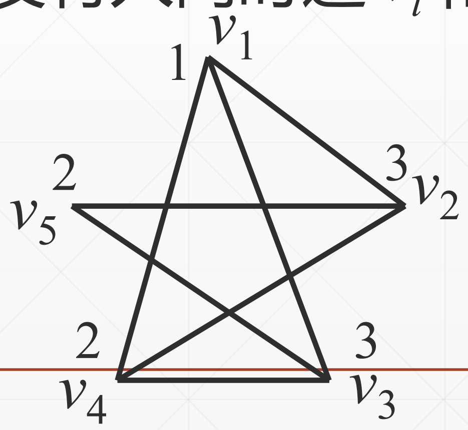
6.4.4 平面图

例：某大学计算机专业三年级有 5 门选修课，其中课程 1 与 2，1 与 3，1 与 4，2 与 4，2 与 5，3 与 4，3 与 5均有人同时选修，问安排这 5 门课程的考试至少需要几个时间段？？

解：做无向图 $G = <V, E>$, 其中 $V = \{v_i \mid i = 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$E = \{(v_i, v_j) \mid v_i$与 v_j有人同时选, $1 \le i < j \le 5\}$,

显然，课程 v_i与 v_j可以同时考当且仅当没有人同时选 v_i和 v_j，此时 v_i与 v_j可以着同一种颜色。



至少用 3 个时间段才能考完这 5 门课程。

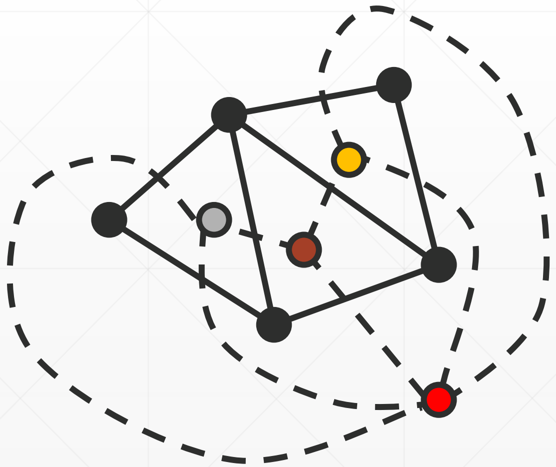
6.4.4 平面图

地图着色

地图：无桥平面图，其对偶图是无环平面图

地图着色(面着色): 每个面着一种颜色, 相邻的面着不同的颜色

地图着色对应对偶图的点着色



6.4.4 平面图

四色定理

四色猜想(19世纪50年代)

—— 五色定理(希伍德, 1890年)

——四色定理(阿佩尔和黑肯, 1976年)

定理(四色定理) 任何平面图都是 4-可着色的.

6.4.4 平面图

例： 一个连通平面图 G 的度数列是：2, 3, 2, 4, 1, 2, 2

试求出 G 的面数和其对偶图边数和面数 .

解： 由连通平面图 G 的度数列知，顶点数 $n = 7$;

由握手定理知，边数 $m = (2 + 3 + 2 + 4 + 1 + 2 + 2) / 2 = 8$;

由欧拉公式：面数 $r = 2 - n + m = 3$;

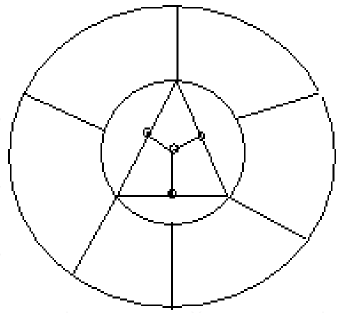
其对偶图边数和面数分别为8和7 .

作 业

- 6.47 (V2: 6.38)
- 6.55 (V2: 6.46)
- 6.56 (V2: 6.47)

研讨题

1）证明所示图不是哈密顿图。



2）证明: 足球是由几个五边形和六边形组成的。

（提示：先用多面体的缺角和为720°求出顶点数。）

3）证明: 6个结点12条边的连通简单平面图中，每个面均有3条边组成。