

第三节 随机变量的分布函数

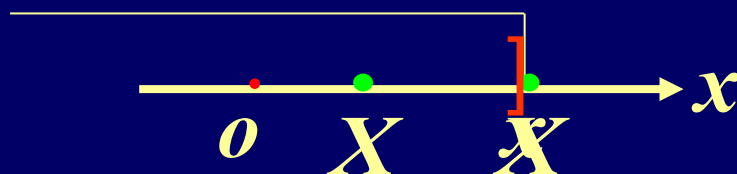
- 随机变量分布函数的定义
- 分布函数的性质
- 小结 布置作业

一、分布函数的定义

设 X 是一个 $r.v.$, 称

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

为 X 的分布函数, 记作 $F(x)$.



如果将 X 看作数轴上随机点的坐标, 那么分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X 落在区间 $(-\infty, x]$ 内的概率.



请注意：

- (1) 在分布函数的定义中, X 是随机变量, x 是参变量.
- (2) $F(x)$ 是 $r.v$ X 取值不大于 x 的概率.
- (3) 对任意实数 $x_1 < x_2$, 随机点落在区间 $(x_1, x_2]$ 内的概率为:

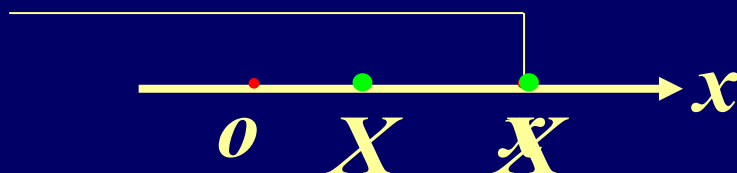
$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$



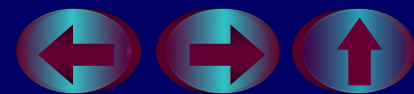
因此, 只要知道了随机变量 X 的分布函数, 它的统计特性就可以得到全面的描述.



$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$



分布函数是一个普通的函数，
正是通过它，我们可以用高等数
学的工具来研究随机变量。



例1 设 随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	$1/3$	$1/6$	$1/2$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

解 $F(x) = P(X \leq x)$

当 $x < 0$ 时, $\{X \leq x\} = \phi$, 故 $F(x) = 0$

当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P(X=0) = \frac{1}{3}$$



当 $1 \leq x < 2$ 时,

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

当 $x \geq 2$ 时,

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = 1$$



故

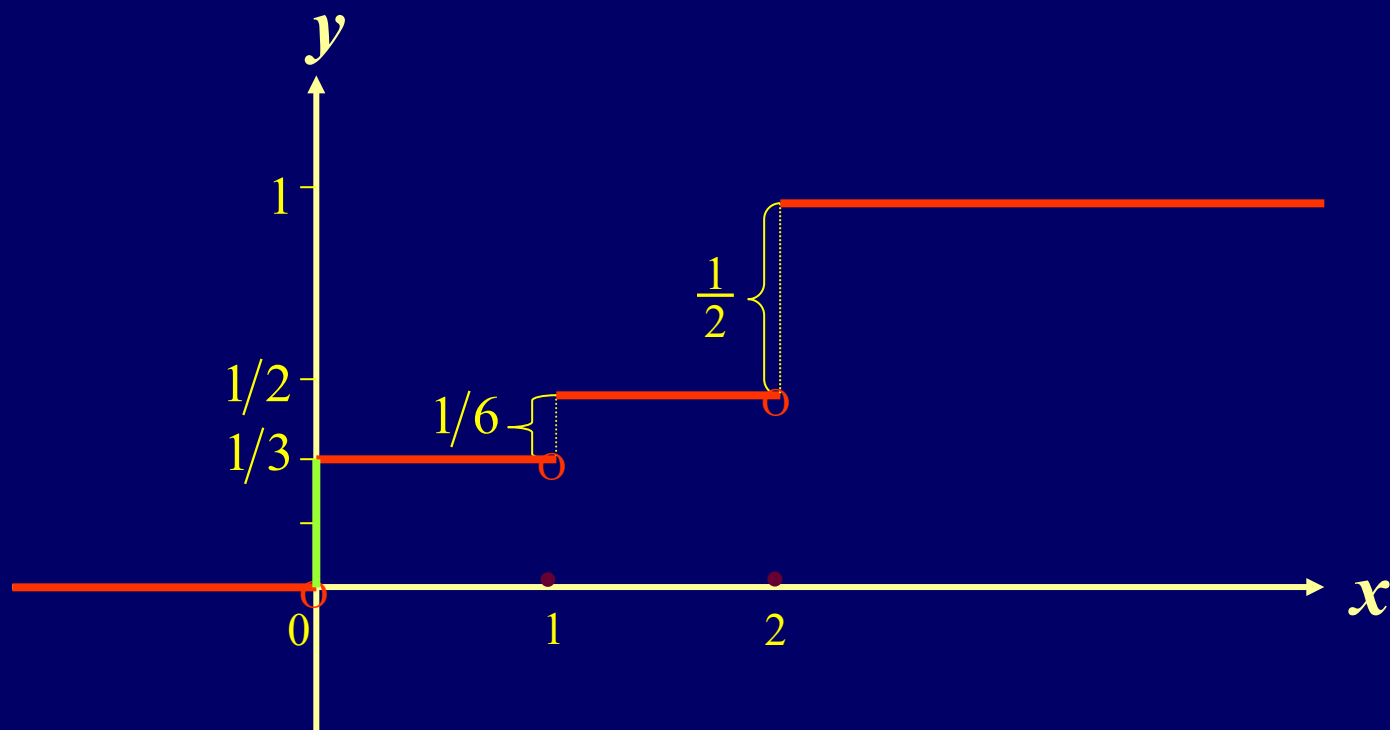
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

注意右连续

下面我们从图形上来看一下.



$F(x)$ 的分布函数图



一般地

设离散型 r.v X 的分布律是

$$P\{X=x_k\} = p_k, \quad k=1,2,3,\dots$$

则其分布函数

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

即 $F(x)$ 是 X 取 $\leq x$ 的诸值 x_k 的概率之和.



二、分布函数的性质

(1) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一个不减函数, 即对 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 都有 $F(x_1) \leq F(x_2)$;

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$$



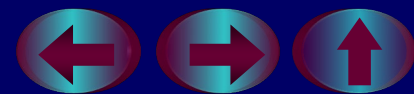
$$(2) F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$



$$(3) F(x) \text{ 右连续, 即 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

如果一个函数具有上述性质, 则一定是某个 $r.v$ X 的分布函数. 也就是说, 性质(1)--(3)是鉴别一个函数是否是某 $r.v$ 的分布函数的充分必要条件.



例2 设有函数 $F(x)$

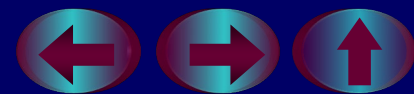
$$F(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试说明 $F(x)$ 能否是某个 $r.v$ 的分布函数.

解 注意到函数 $F(x)$ 在 $[\pi/2, \pi]$ 上下降, 不满足性质(1), 故 $F(x)$ 不能是分布函数.

或者
$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

不满足性质(2), 可见 $F(x)$ 也不能是 $r.v$ 的分布函数.



例3 在区间 $[0, a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标. 设这个质点落在 $[0, a]$ 中意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比，试求 X 的分布函数.

解 设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，

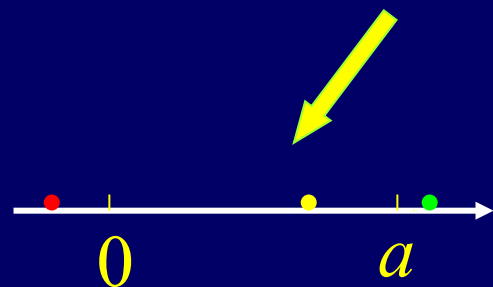
当 $x < 0$ 时， $F(x) = P(X \leq x) = 0$

当 $x > a$ 时， $F(x) = 1$

当 $0 \leq x \leq a$ 时， $P(0 \leq X \leq x) = kx$ (k 为常数)

由于 $P(0 \leq X \leq a) = 1 \implies ka = 1, k = 1/a$

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X < 0) + P(0 \leq X \leq x) = x / a$$



故

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{a}, & 0 \leq x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

这就是在区间 $[0, a]$ 上服从均匀分布的连续型随机变量的分布函数.



三、小结

在这一节中，我们学习了随机变量的分布函数，以及分布函数的性质。



练习题

一. 设在 15 只同类型零件中有 3 只是次品, 在其中取三次, 每次任取一只, 作不放回抽样, 以 X 表示取出次品的只数, (1) 求 X 的分布函数, (2) 画出分布函数的图形。

?

二. 一袋中有 6 只乒乓球, 编号为 1、2、3、4、5、6, 在其中同时取三只, 以 X 表示取出的三只球中的最小号码, 写出随机变量 X 的分布律及分布函数。

?

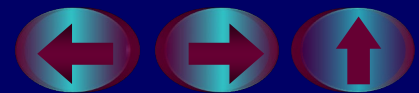


一. 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，(1) 求 X 的分布函数，(2) 画出分布函数的图形。

解： X 的所有可能取值为： $X = 0, 1, 2$

$$P\{X = 0\} = \frac{C_{13}^3}{C_{15}^3} = \frac{22}{35} \quad P\{X = 1\} = \frac{C_{13}^2 C_2^1}{C_{15}^3} = \frac{12}{35}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_{13}^1 C_2^2}{C_{15}^3} = \frac{1}{35}$$



$$P\{X = 0\} = \frac{22}{35} \quad P\{X = 1\} = \frac{12}{35} \quad P\{X = 2\} = \frac{1}{35}$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

当 $x < 0$ 时, $F(x) = P\{X \leq x\} = 0$

当 $0 \leq x < 1$ 时, $F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} = \frac{22}{35}$

当 $1 \leq x < 2$ 时, $F(x) = P\{X \leq x\}$
 $= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$
 $= \frac{34}{35}$

当 $x \geq 2$ 时, $F(x) = 1$



故

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{22}{35}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{34}{35}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



二. 一袋中有 6 只乒乓球, 编号为 1、2、3、4、5、6, 在其中同时取三只, 以 X 表示取出的三只球中的最小号码, 写出随机变量 X 的分布律及分布函数。

解: X 的所有可能取值为: $X = 1, 2, 3, 4$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{1}{2} \quad P\{X = 2\} = \frac{C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{10}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{C_3^2}{C_6^3} = \frac{3}{20} \quad P\{X = 4\} = \frac{C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{20}$$



$$P\{X = 1\} = \frac{1}{2} \quad P\{X = 2\} = \frac{3}{10}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{3}{20} \quad P\{X = 4\} = \frac{1}{20}$$

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

当 $x < 1$ 时, $F(x) = P\{X \leq x\} = 0$

当 $1 \leq x < 2$ 时, $F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$

当 $2 \leq x < 3$ 时, $F(x) = P\{X \leq x\}$

$$= P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$$

$$= \frac{4}{5}$$



四、布置作业

习题2-3 (p44) : 2、3、5

