第四节　等可能概型(古典概型)

- 古典概型的定义
- 古典概率的求法举例
- 小结　　布置作业

我们首先引入的计算概率的数学模型，是在概率论的发展过程中最早出现的研究对象，通常称为

古典概型

一、古典概型

假定某个试验有有限个可能的结果

$$e_1, e_2, \dots, e_N,$$

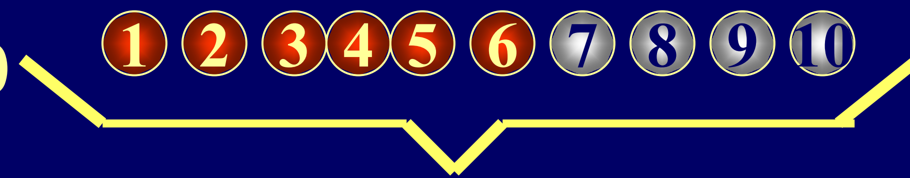
假定从该试验的条件及实施方法上去分析，我们找不到任何理由认为其中某一结果例如 e_i, 比任一其它结果，例如 e_j, 更有优势，则我们只好认为所有结果在试验中有同等可能的出现机会，即 $1/N$的出现机会.

试验结果

$e_1, e_2, \ldots, e_N$

常常把这样的试验结果称为“等可能的”.

例如，一个袋子中装有10个大小、形状完全相同的球．将球编号为1－10．把球搅匀，蒙上眼睛，从中任取一球.

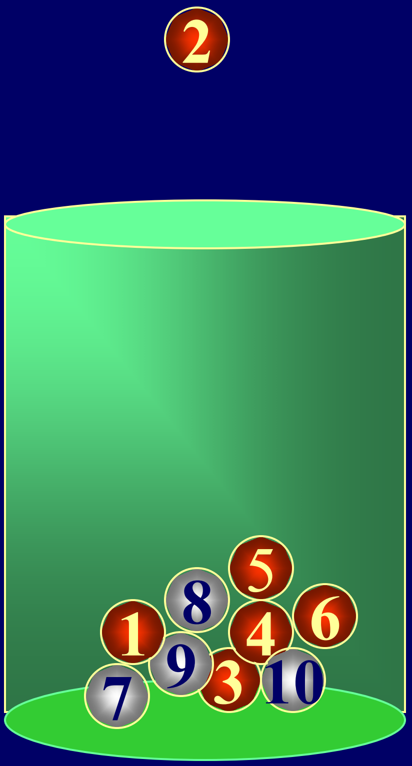


10个球中的任一个被取出的机会都是1/10

因为抽取时这些球是完全平等的，我们没有理由认为10个球中的某一个会比另一个更容易取得．也就是说，10个球中的任一个被取出的机会是相等的，均为1/10.

我们用 i 表示取到 i 号球， $i=1,2,\ldots,10$.

如$i=2$



则该试验的样本空间

$S=\{1,2,\ldots,10\}$,

且每个样本点(或者说基本事件)出现的可能性相同 .

称这样一类随机试验为古典概型.

定义 1

若随机试验满足下述两个条件:

(1) 它的样本空间只有有限多个样本点;

(2) 每个样本点出现的可能性相同.

称这种试验为**等可能随机试验**或**古典概型**.

二、古典概型中事件概率的计算

记 A={摸到2号球}

$P(A)=?$

$P(A)=1/10$

记 B={摸到红球}

$P(B)=?$

$P(B)=6/10$

记 B={摸到红球}　，$P(B)=6/10$

这里实际上是从“比例”

转化为“概率”

当我们要求“摸到红球”的概率时，只要找出它相应的比例.

设古典概率 E 的样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$$

又由于基本事件是两两互不相容的.于是

$$1= P(S)=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})$$

$$=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\})$$

所以 $P(\{e_i\})=\dfrac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n.$

若事件 A 包含 k 个基本事件,即

$$A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{e_{i_k}\}$$

则有

$$P(A) = P(\{e_{i_1}\}) + P(\{e_{i_2}\}) + \cdots + P(\{e_{i_k}\})$$

$$= \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件总数}}$$

例1 将一枚硬币抛掷三次.

(i) 设事件 A_1 为"恰有一次出现正面",求 $P(A_1)$.

(ii) 设事件 A_2 为"至少有一次出现正面",求 $P(A_2)$.

解　此试验的样本空间为:

$$S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}.$$

而 $A_1=\{HTT,THT,TTH\}$, 所以

$$P(A_1)=\frac{3}{8}.$$

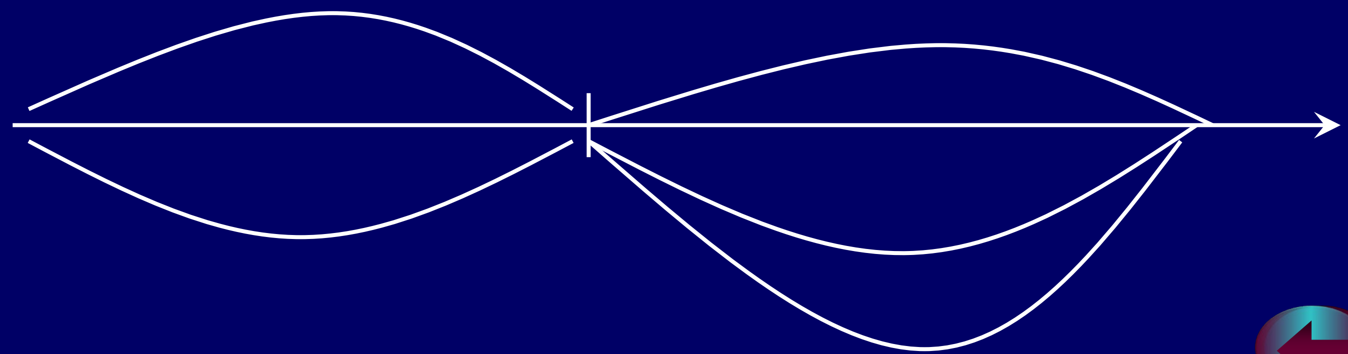
$$A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH\}.$$

$$P(A_2)=\frac{7}{8}.$$

复习：排列与组合的基本概念

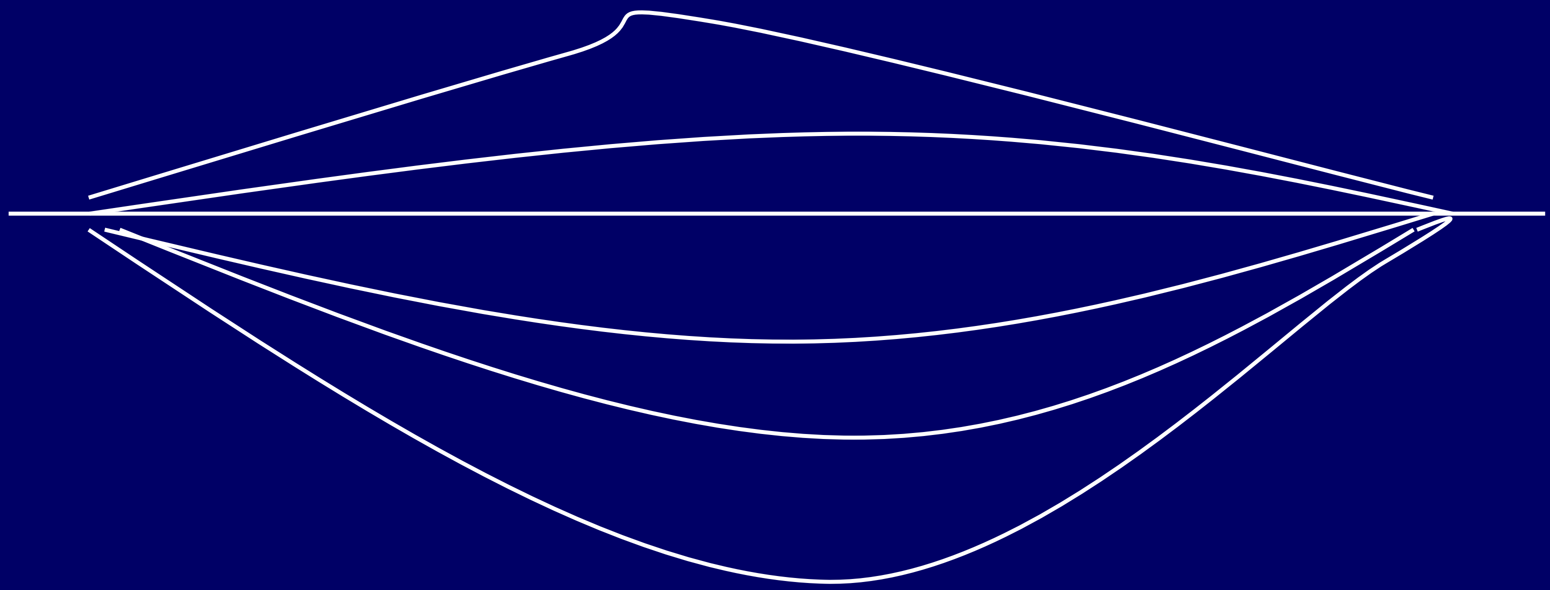
乘法公式

设完成一件事需分两步，第一步有n_1种方法,第二步有n_2种方法，则完成这件事共有$n_1 n_2$种方法



加法公式

设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。



2.排列组合方法

(1) 排列公式

① 从n个不同元素中任取k个$(1\le k\le n)$的不同排列总数为

$$P_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$k=n$时称为全排列:

$$P_n^n = P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\bullet 1 = n!$$

(2) 组合公式

①从n个不同元素中任取k个$(1\le k\le n)$的不同组合总数为

$$C_n^k=\frac{P_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

C_n^k有时记作$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, 称为**组合系数**.

$$P_n^k=C_n^k\bullet k!$$

②将n个不同元素分为k组, 各组元素数目分别为$r_1,r_2,\cdots,r_k(r_1+r_2+\cdots+r_k=n)$, 则分法的总数为

$$C_n^{r_1}\cdot C_{n-r_1}^{r_2}\cdots C_{r_k}^{r_k}=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}.$$

例2 从有 9 件正品、3 件次品的箱子中任取两次，每次取一件，试分别以：

(1) 有放回抽样法：即每次抽取的产品观察后放回；

(2) 不放回抽样法：即每次抽取产品观察后不放回；

两种抽样方式求事件

$A=\{$取得两件正品$\}$，

$B=\{$第一次取得正品，第二次取得次品$\}$，

$C=\{$取得一件正品一件次品$\}$，

的概率.

解 (1)采取有放回抽样.

从箱子中任取两件产品,每次取一件,取法总数为 12^2.

即样本空间中所含的基本事件数为12^2.

事件 A 中所含有的基本事件数为 $C_9^1 C_9^1 = 9^2$.

所以 $$P(A) = \frac{9^2}{12^2} = \frac{9}{16}.$$

事件 B 中所含有的基本事件数为 $C_9^1 C_3^1 = 9 \cdot 3$.

所以 $$P(B) = \frac{9 \cdot 3}{12^2} = \frac{3}{16}.$$

事件 C 中所含有的基本事件数为

$$C_9^1 C_3^1 + C_3^1 C_9^1 = 9 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 54.$$

所以 $P(C)=\dfrac{54}{12^2}=\dfrac{3}{8}.$

(2)采取不放回抽样.

从箱子中任取两件产品,每次取一件,取法总数为 $12\cdot 11.$

即样本空间中所含有的基本事件总数为 $12\cdot 11.$

事件 A 中所含有的基本事件数为 $C_9^1C_8^1=9\cdot 8.$

所以 $P(A)=\dfrac{9\cdot 8}{12\cdot 11}=\dfrac{6}{11}.$

事件 B 中所含有的基本事件数为 $C_9^1C_3^1=9\cdot 3.$

所以 $P(B)=\dfrac{9\cdot 3}{12\cdot 11}=\dfrac{9}{44}.$

事件 C 中所含有的基本事件数为

$$\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_9^1=9\cdot 3+3\cdot 9.$$

所以
$$P(C)=\frac{9\cdot 3+3\cdot 9}{12\cdot 11}=\frac{9}{22}.$$

例3 从有 9 件正品、3件次品的箱子中任取两件产品(即一次抽取两件产品),求事件

$$A=\{取得两件正品\},$$
$$C=\{取得一件正品一件次品\},$$

的概率.

解　从箱子中任取两件产品,取法总数为 C_{12}^2.

即试验的样本空间中所含有的基本事件总数为 C_{12}^2.

事件 A 中所含有的基本事件数为 C_9^2.

所以

$$P(A)=\frac{C_9^2}{C_{12}^2}=\frac{\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}}{\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}}=\frac{6}{11}.$$

事件 C 中所含有的基本事件数为 $C_9^1C_3^1$.

所以

$$P(A)=\frac{C_9^1C_3^1}{C_{12}^2}=\frac{9\cdot 3}{\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}}=\frac{9}{22}.$$

例6 在1~2000的整数中随机地取一个数,问取到的整数既不能被6整除,也不能被8整除的概率是多少?

解 设 $A=\{$取到的数能被6整除$\}$,

$B=\{$取到的数能被8整除$\}$.

所求概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

又 $P(A)=\dfrac{333}{2000}$, $P(B)=\dfrac{250}{2000}$, $P(AB)=\dfrac{83}{2000}$,

故所求概率为 $p=1-\dfrac{333}{2000}-\dfrac{250}{2000}+\dfrac{83}{2000}=\dfrac{3}{4}$.

例7 将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中去, 这 15 名新生中有 3 名是优秀生. 求

(i) 每一个班级各分配到一名优秀生的概率;

(ii) 3 名优秀生分配在同一班级的概率.

解 15 名新生平均分到三个班级的分法总数为

$$\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{15!}{10!5!}\cdot\frac{10!}{5!5!}=\frac{15!}{5!5!5!}.$$

(i) 每一个班级各分到一名优秀生的分法为

$$3!\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}=3!\cdot\frac{12!}{4!4!4!}.$$

于是所求概率为 $p_1 = \dfrac{3!\cdot\dfrac{12!}{4!4!4!}}{\dfrac{15!}{5!5!5!}} = \dfrac{25}{97}$.

(ii)三名优秀生分到同一个班级的分法为

$$3\cdot\binom{12}{2}\binom{10}{5}\binom{5}{5} = 3\cdot\frac{12!}{2!5!5!}.$$

于是所求概率为 $p_2 = \dfrac{3\cdot\dfrac{12!}{2!5!5!}}{\dfrac{15!}{5!5!5!}} = \dfrac{6}{91}$.

例8 某接待站在某一周曾接待过12次来访,已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的.问是否可以推断接待时间是有规定的.

解 假设接待站的接待时间没有规定,而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的.则12次接待来访者都在周二周四的概率为

$$p = \frac{2^{12}}{7^{12}} \approx 0.0000003.$$

这是小概率事件.所以认为接待时间是有规定的.

例2 某城市的电话号码由5个数字组成，每个数字可能是从0–9这十个数字中的任一个，求电话号码由五个不同数字组成的概率.

解 $p = \dfrac{P_{10}^{5}}{10^{5}} = 0.3024$

从10个不同数字中取5个的排列

允许重复的排列

例3 设有N件产品,其中有M件次品,现从这N件中任取n件,求其中恰有k件次品的概率.

解　令B={恰有k件次品}

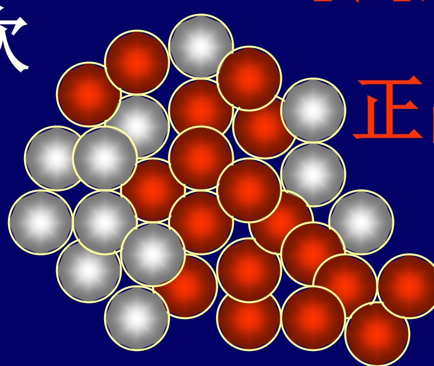
$P(B)$=?

$$P(B)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

这是一种无放回抽样.

次品

正品



四、小结

- 古典概型的定义
- 古典概率的求法

五、 布置作业

习题1-3（p16）：7、9、10