概率论与数理统计第23讲

本讲义可在网址http://math.shekou.com
或
ftp://math.shekou.com
下载

§7.3 双正态总体的假设检验

设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$为取自总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的一个样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$为取自总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的一个样本并且两个样本相互独立，记$\bar{X}$与$S_1^2$分别为样本$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$的均值和方差，$\bar{Y}$和$S_2^2$分别为样本$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$的均值和方差.

一，正态总体均值差的假设检验

1. 方差σ_1^2,σ_2^2已知情形

(1) 检验假设 $H_0:\mu_1-\mu_2=\mu_0$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mu_0$，其中μ_0为已知常数. 则当H_0为真时,

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1), \qquad (3.1)$$

故选取 U 作为检验统计量，记其观察值为 u.
称相应的检验法为 ***u* 检验法**.

可推出拒绝域为

$$|u| = \left| \frac{\overline{x} - \overline{y} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \right| > u_{\alpha/2} \qquad (3.2)$$

若$|u|>u_{\alpha/2}$, 则拒绝原假设H_0. 特别地, 当$\mu_0=0$时即认为总体均值μ_1与μ_2有显著差异; 若$|u|<u_{\alpha/2}$, 则接受原假设H_0, 当$\mu_0=0$时即认为总体均值μ_1与μ_2无显著差异.

(2) 右侧检验: 检验假设H_0:$\mu_1-\mu_2\le\mu_0$, H_1: $\mu_1-\mu_2>\mu_0$. 其中μ_0为已知常数. 得拒绝域为

$$u=\frac{\overline{x}-\overline{y}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}>u_\alpha \qquad (3.3)$$

(3) 左侧检验: 检验假设H_0:$\mu_1-\mu_2\geq\mu_0$, H_1: $\mu_1-\mu_2<\mu_0$. 其中μ_0为已知常数. 得拒绝域为

$$u=\frac{\overline{x}-\overline{y}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<-u_\alpha \qquad (3.4)$$

2. 方差σ_1^2,σ_2^2未知，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

(1) 检验假设 $H_0:\mu_1-\mu_2=\mu_0$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mu_0$.其中μ_0为已知常数．当H_0为真时

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2). \quad (3.5)$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

故选T为检验统计量，观测值为t，相应的检验法称为t**检验法**.

由此得拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\overline{x} - \overline{y} - \mu_0}{s_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2),$$

类似地,对单侧检验有

(2) 右侧检验: 检验假设H_0:$\mu_1-\mu_2\le\mu_0$, H_1:$\mu_1-\mu_2>\mu_0$. 其中μ_0为已知常数. 得拒绝域为

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-\mu_0}{s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}>t_\alpha(n_1+n_2-2) \qquad (3.7)$$

(3) 右侧检验: 检验假设H_0:$\mu_1-\mu_2\geq\mu_0$, H_1:$\mu_1-\mu_2<\mu_0$. 其中μ_0为已知常数. 得拒绝域为

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}-\mu_0}{s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}<-t_\alpha(n_1+n_2-2) \quad (3.8)$$

3. 方差σ_1^2, σ_2^2未知，但$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(1) 检验假设 $H_0 := \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$. 其中$\mu_0$为已知常数. 当 H_0 为真时,

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_0}{\sqrt{S_1^2 / n + S_2^2 / n}} \qquad (3.9)$$

近似地服从 $T(f)$, 其中

$$f=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)}+\frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}},\qquad(3.10)$$

故选取T作为检验统计量. 记其观察值为t. 可得拒绝域为

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}-\mu_0}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}\right|>t_{\alpha/2}(f)\qquad(3.11)$$

类似地,

(2) 检验假设H_0:$\mu_1-\mu_2\le\mu_0$, H_1:$\mu_1-\mu_2>\mu_0$. 其中μ_0为已知常数. 得拒绝域为

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-\mu_0}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}>t_\alpha(f) \qquad (3.12)$$

(2) 检验假设$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$, $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$. 其中$\mu_0$为已知常数. 得拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2}} < -t_\alpha(f) \qquad (3.13)$$

注: 当n_1,n_2充分大时, $(n_1+n_2 \geq 50)$

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_0}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}$$

近似服从$N(0,1)$. 上述拒绝域的临界点可分别改换为$u_{\alpha/2}$; u_{α}; $-u_{\alpha}$.

二，双正态总体方差相等的假设检验

设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$为取自总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的一个样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$为取自总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的一个样本并且两个样本相互独立，记$\overline{X}$与$S_1^2$分别为样本$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$的均值和方差，$\overline{Y}$和$S_2^2$分别为样本$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$的均值和方差.

(1) 检验假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$

当 H_0 为真时,

$$F=S_1^2/S_2^2\sim F(n_1-1,n_2-1), \qquad (3.14)$$

故选取 F 为检验统计量, 相应的检验法称为 F 检验法.

可推出拒绝域为

$$F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) \text{或} F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) \qquad (3.15)$$

类似地，对单侧检验有:

(2) 检验假设$H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.得拒绝域为

$$F > F_\alpha(n_1-1, n_2-1) \qquad (3.16)$$

(3) 检验假设$H_0:\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.得拒绝域为

$$F < F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1) \qquad (3.17)$$

§7.4 关于一般总体数学期望的假设检验

本节讨论一般总体的假设检验问题, 此类问题可借助一些统计量的极限分布近似地进行假设检验, 属于大样本统计范畴. 其理论依据是中心极限定理.

一，一般总体数学期望的假设检验

1. 一个总体均值的大样本假设检验

设非正态总体 X 的均值为μ，方差为σ^2，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为 X 的一个样本，样本均值为$\bar{X}$，样本方差为 S^2，则当 n 充分大时，由中心极限定理知，$U_n=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$近似服从 $N(0,1)$. 所以对μ的假设检验可以用前面讲过的 u 检验法. 所不同的是拒绝域是近似的.

(1) 对于双侧检验: $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$, 可得近似的拒绝域为$|U_n|>u_{\alpha/2}$;

(2) 对于右侧检验: $H_0:\mu\leq\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$, 可得近似的拒绝域为$U_n>u_{\alpha}$;

(3) 对于左侧检验: $H_0:\mu\geq\mu_0$, $H_1:\mu<\mu_0$, 可得近似的拒绝域为$U_n<-u_{\alpha}$;

注： 若标准差σ未知，可用样本标准差 S 来代替. 即当 n 充分大时，由中心极限定理知，

$$T_n = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

近似地服从 $N(0,1)$. 只需将上述的σ用 S 代替, U_n用 T_n代替，可得到类似的结论.

2，两个总体均值的大样本假设检验

设有两个独立的总体 X,Y，其均值分别为 μ_1,μ_2，方差分别为σ_1^2,σ_2^2，均值和方差均未知，现从两个总体中分别抽取样本容量 $n_1,n_2(n_1,n_2$均大于100)的大样本$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，$\bar{X}$与$\bar{Y}$及S_1^2与S_2^2分别为这两个样本的样本均值及样本方差.

记S_w^2是S_1^2与S_2^2的加权平均

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

检验假设　(1)$H_0:\mu_1=\mu_2, H_1:\mu_1\neq\mu_2.$

(2)$H_0:\mu_1\leq\mu_2, H_1:\mu_1>\mu_2,$

(3)$H_0:\mu_1\geq\mu_2, H_1:\mu_1<\mu_2.$

若$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，则当$\mu_1=\mu_2$时近似有

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2}}$$近似地服从 $N(0,1)$，

若$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，当$\mu_1=\mu_2$时近似有

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{1 / n_1 + 2 / n_2}}$$近似地服从 $N(0,1)$，

对于给定的显著性水平α, 有

(1) 对假设(1), 拒绝域为$|U|>u_{\alpha/2}$;

(2) 对假设(2), 拒绝域为$U>u_{\alpha}$;

(3) 对假设(3), 拒绝域为$U<-u_{\alpha}$.

二, (0-1)分布总体数学期望的假设检验

在实际问题中, 常常需要对一个事件A发生的概率p进行假设检验. 从而可以设总体是服从(0-1)分布的情况.

1. 一个0-1分布总体参数的检验

设总体$X \sim b(1,p)$, $X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自X的一个样本, p为未知参数. 关于参数p的检验问题有三类:

检验假设 (1)$H_0: p=p_0$, $H_1: p\neq p_0$.

(2)$H_0: p\leq p_0$, $H_1: p>p_0$.

(3)$H_0: p\geq p_0$, $H_1: p<p_0$.

借助于中心极限定理进行假设检验. 因

$$E(\bar{X}) = p, D(\bar{X}) = p(1-p)/n$$

当n充分布($n \geq 30$)时, 如$p=p_0$, 则有

$$U = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

近似服从$N(0,1)$.

$$U=\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

因此以U为检验统计量, 对显著性水平α,

(1) 对假设(1), 拒绝域为$|U|>u_{\alpha/2}$;

(2) 对假设(2), 拒绝域为$U>u_{\alpha}$;

(3) 对假设(3), 拒绝域为$U<-u_{\alpha}$.

2. 两个0-1分布总体参数的检验

对两个独立0-1总体X与Y, 我们要检验的是两个总体参数p_1,p_2的差异性. 故给出检验假设

$$(1) H_0: p_1=p_2,\ H_1: p_1\neq p_2,$$

$$(2) H_0: p_1\le p_2,\ H_1: p_1>p_2,$$

$$(3) H_0: p_1\ge p_2,\ H_1: p_1<p_2.$$

由中心极限定理, 当H_0为真且n_1,n_2充分大(n_1,n_2均大于100)时, 有

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{Y})(1/n_1+1/n_2)}}$$

近似服从$N(0,1)$.

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{Y})(1/n_1+1/n_2)}}$$

因此以U为检验统计量, 对显著性水平α,

(1) 对假设(1), 拒绝域为$|U|>u_{\alpha/2}$;

(2) 对假设(2), 拒绝域为$U>u_{\alpha}$;

(3) 对假设(3), 拒绝域为$U<-u_{\alpha}$.

§7.5 分布拟合检验

在实际问题中, 有时我们并不能确切预知总体服从何种分布, 这时就需要根据来自总体的样本对总体的分布进行推断, 以判断总体服从何种分布. 这类统计检验称为**非参数检验**. 解决这类问题的工具之一是英国统计学家K.皮尔逊在1900年发表的一篇文章中引进的χ^2检验法, 不少人把此项工作视为近代统计学的开端.

一, 引例

例如, 从1500到1931年的432年间, 每年爆发战争的次数可以看作一个随机变量, 据统计, 这432年间共爆发了299次战争, 具体数据如下:

表7-5-1

战争次数X	发生X次战争的年数
0	223
1	142
2	48
3	15
4	4

根据所学知识和经验，每年爆发战争的次数X，可以用一个泊松随机变量来近似描述，即可以假设每年爆发战争次数X的分布近似泊松分布．于是问题归结为：如何利用上述数据检验X服从泊松分布的假设．

又如, 某工厂制造一批骰子, 声称它是均匀的. 即在抛掷试验中, 出现1点,2点,…,6点的概率都应是1/6.

为检验骰子是否均匀, 要重复地进行抛掷骰子的试验, 并统计各点出现的频率与1/6的差距.

问题归结为: 如何利用得到的统计数据对"骰子均匀"的结论进行检验. 即检验抛掷骰子的点数服从6点均匀分布.

二, χ^2检验法的基本思想

χ^2检验法是在总体X的分布未知时, 根据来自总体的样本, 检验总体分布的假设的一种检验方法. 具体进行检验时, 先提出原假设: H_0:总体X的分布函数为$F(x)$

然后根据样本的经验分布和所假设的理论分布之间的吻合程度来决定是否接受原假设.

这种检验通常称作**拟合优度检验**.

对于任何一个给定的区间$(a,b]$, 在总体X的分布已知的情况下, 能够计算出X落在这个区间的概率$P\{a<X\leq b\}=p$, 这被称为X落在此区间概率的理论值. 而当试验了n次, 假设落在此区间的次数为F次, 则F也是一个随机变量, $F\sim b(n, p)$, 因此F的数学期望和方差为$E(F)=np$, $D(F)=np(1-p)$. 而当p特别微小,接近于0时, $1-p$接近于1, 这个时候近似有$D(F)\approx np$.

$F \sim b(n,p)$, $E(F)=np$, $D(F)\approx np$,
根据中心极限定理, 当n很大的时候F近似服从正态分布$N(np, np)$, 因此, 近似有

$$\frac{F-np}{\sqrt{np}} \sim N(0,1), \frac{(F-np)^2}{np} \sim \chi^2(1)$$

三, χ^2检验法的基本原理和步骤

(1) 提出原假设:

H_0: 总体X的分布函数为$F(x)$

在具体的原假设中视X为离散型和连续型假设其分布律或概率密度函数.

(2) 将总体X的取值范围分成k个互不相交的小区间, 记为$A_1,A_2,\ldots,A_k$, 如可取为 $(a_0,a_1], (a_1,a_2],\ldots,(a_{k-2},a_{k-1}], (a_{k-1},a_k]$;

其中a_0可取$-\infty$, a_k可取$+\infty$. 区间的划分应使每个小区间的样本值个数不小于5. 区间个数k不要太大也不要太小.

(3) 把落入第i个小区间A_k的样本值个数记作f_i, 称为组频数, 所有组频数之和$f_1+f_2+\ldots+f_k$等于样本容量n;

(4) 当H_0为真时, 根据所假设的总体理论分布, 可算出总体X的值落入第i个小区间A_i的概率p_i, 于是np_i就是落入第i个小区间A_i的样本值的理论频数.

(3) 当 H_0 为真时, n 次试验中样本值落入第 i 个区间 A_i 的频率 f_i/n 与概率 p_i 应很接近, 当 H_0 不真时, 则 f_i/n 与概率 p_i 相差较大. 基于这种思想, 皮尔逊引进如下检验统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}.$$ 并证明了如下结论.

定理 1 当 n 充分大($n \geq 50$)时, 则统计量 χ^2 近似服从 $\chi^2(k-1)$ 分布.

(6) 根据该定理, 对给定的显著性水平α, 确定l值, 使

$$P\{\chi^2>l\}=\alpha,$$

查χ^2分布表得, $l=\chi_\alpha^2(k-1)$, 所得拒绝域为

$$\chi^2>\chi_\alpha^2(k-1).$$

(7) 若由给出的样本值$x_1,x_2,\ldots,x_n$算得统计量χ^2的实测值落入拒绝域, 则拒绝原假设H_0, 否则就认为差异不显著而接受原假设H_0.

四, 总体含未知参数的情形

在对总体分布的假设检验中, 有时只知道总体X的分布函数的形式, 但其中还含有未知参数, 即分布函数为

$$F(x,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r),$$

其中$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r$为未知参数. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体$X$的样本, 现要用此样本来检验假设:

H_0: 总体X的分布函数为$F(x,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)$,

(1) 利用样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，求出 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_r$,

(2) 在 $F(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$ 中用 $\hat{\theta}_i$ 代替 $q_i(i=1,2,\ldots,r)$，则

$$F(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r),$$

就变成完全的已知分布函数 $F(x, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_r)$

(3) 利用 $F(x, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_r)$ 计算 p_i 的估计值

$$\hat{p}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

(4) 计算要检验的统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}(f_i - n\hat{p}_i)^2 / n\hat{p}_i,$$

当n充分大时, 统计量χ^2近似服从$\chi^2(k-r-1)$分布;

(5) 对给定的显著性水平α, 得拒绝域

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}(f_i - n\hat{p}_i)^2 / n\hat{p}_i > \chi^2_\alpha(k-r-1).$$

注: 在使用皮尔逊χ^2检验法时, 要求$n\geq 50$, 以及每个理论频数$np_i\geq 5(i=1,\ldots,k)$, 否则应适当地合并相邻的小区间, 使np_i满足要求.

例1 将一颗骰子掷120次, 所得数据见下表.

点数i	1	2	3	4	5	6
出现次数f_i	23	26	21	20	15	16

问这颗骰子是否均匀,对称?(取$\alpha=0.05$)

解 若这颗骰子是均匀, 对称的, 则1~6点中每点出现的可能性相同, 都为1/6. 如果用A_i表示第i点出现, i=1,2,…,6, 则待检假设为

$$H_0:P(A_i)=1/6,\ i=1,2,\dots,6.$$

在H_0成立的条件下, 理论概率$p_i=P(A_i)=1/6$, 由n=120得频率

$$np_i=20,\ i=1,2,\dots,6$$

计算结果如下表:

i	f_i	p_i	np_i	$(f_i-np_i)^2/(np_i)$
1	23	1/6	20	9/20
2	26	1/6	20	36/20
3	21	1/6	20	1/20
4	20	1/6	20	0
5	15	1/6	20	25/20
6	15	1/6	20	25/20
合计	120			4.8

因此分布不含未知参数, 又k=6, α=0.05, 查表得

$$\chi_{\alpha}^{2}(k-1)=\chi_{0.05}^{2}(5)=11.071,$$

由上表知

$$\chi^{2}=\sum_{i=1}^{6}\frac{(f_i-np_i)^2}{np_i}=4.8<11.071$$

故接受H_0, 认为这颗骰子是均匀对称的.

习题7-3 第245页开始
第9题