① n球有区别，m个盒子有区别，有空盒

每个球有m种放法，$\therefore m^n$

② n球有区别，m个盒子有区别，无空盒

容斥原理：设 A_i 第i个盒子为空盒 $(i \le m)$

$$\therefore |\bar{A_1} \cap \bar{A_2} \cap \cdots \cap \bar{A_m}| = m^n - C_m^1 (m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n \cdots$$

$$|S| = m^n \qquad = \sum_{h=0}^{m} C(m,h)(-1)^n (m-h)^n$$

$$|A_1| = (m-1)^n \qquad 也为\ m!\, S(n,m)$$

$\vdots$

③ n球有区别，m个盒子无区别，无空盒

第二类 Strling数

$$S(n,m) = m\,S(n-1,m) + S(n-1,m-1)$$

$$由②,\ S(n,m) = \frac{\sum_{h=0}^{m} C(m,h)(-1)^m (m-h)^n}{m!}$$

④ n球有区别，m个盒子无区别，有空盒

由③，1个空盒都无 + 1个空盒 + 2个空盒 + ⋯ + m-1个空盒.

$$\therefore S(n,m) + S(n,m-1) + \cdots + S(n,1)$$

⑤ n球无区别，m个盒子有区别，有空盒.

隔板法，补m个球，分别放入m个盒子，最后取走。

$$C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}$$

⑥ n球无区别，m个盒子有区别，无空盒

隔板法 C_{n-1}^{m-1}

⑦ n球无区别，m个盒子无区别，有空盒

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

为$G(x)$的x^n项系数

⑧ n球无区别，m个盒子无区别，无空盒

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

为$G(x)$的x^{n-m}项系数

综上，总结如下图所示：

n 个球	m 个盒	是否允许空盒	方案数	解释
不同	不同	空盒	m^n	每个球有 m 种可能
		不空	$\mathrm{m!S(n,m)}$	类比盒无区别时，再乘以盒的可能排列
	相同	空盒	$S(n,1)+S\,(n,2)+\ldots+S\,(n,m)$	枚举有球盒的数量，斯特林数
		不空	$\mathrm{S(n,m)}$	第二类斯特林数
相同	不同	空盒	$C\,(m+n-1,n)$	隔板法
		不空	$C\,(n-1,m-1)$	先给每盒放一球，则转化为隔板法
	相同同	空盒	$G(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$ 中 x^n 的系数	母函数
		不空	$G(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$ 中 x^{n-m} 的系数	母函数