1 组合数学概论

1.1 组合数学与生活

组合数学 Combinatorics

上海大学
计算机工程与科学学院
王冰

纪律要求

1.不许迟到 2*迟到=1*缺席
2.不许无故缺席
3.不许玩手机和做本教学无关的事情

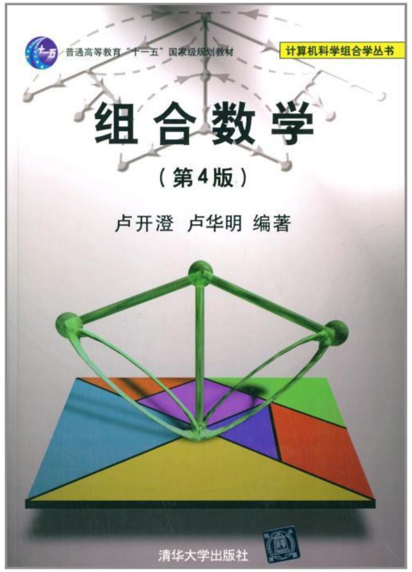
基本要求

- 平时成绩：30分：出勤+作业+课堂表现。
- 作业要求：
  - 时间：每周日中午12:00之前。
  - 地点：计1027楼，王冰
  - 注意：序号+学号+姓名

- 教材：郁松年，《组合数学》，电子版。

  百度网盘共享:
  链接：https://pan.baidu.com/s/1S1wsikoxDUeG9GXE8ndGhg 密码：xzzi

- 参考教材：卢开澄《组合数学》（第4版），清华大学出版社。
- 主要内容:
- **第一章 基本计数原理**
- **第二章 母函数**
- **第三章 递归关系**
- **第四章 容斥原理及其应用**
- **第五章 polya计数定理**
- **第六章 鸽舍原理和Ramsey理论**
- 第七章 组合算法
- 第八章 图的算法
- **第九章 图的网络算法**



教学安排

（一）__基本计数工具__________（__3__学时）

1. 基本计数工具：排列与组合（可重、不重排列与组合）
2. 二项式系数与若干等式
3. 等式的组合解释（重点、难点）

（二）__母函数与形式幂级数__________（__6__学时）

1. 母函数与形式幂级数
2. 组合型母函数（重点）
3. 指数型母函数 （难点）
4. 母函数应用举例

（三）__递归关系__________（__3__学时）

1. 递归关系的模型（重点、难点）
2. 常系数线性递归关系（齐次、非齐次）
3. 常系数线性递归关系的基本解法

教学安排5-10

（四） 容斥原理及应用 （ 3 学时）

1. 容斥原理及其推广 （Jordan公式是难点）
2. 错排、棋盘多项式及容斥原理的应用 （重点）

（五） Polya计数定理及应用 （ 6 学时）

1. 群、置换群与等价类
2. Burnside引理 （重点、难点）
3. Polya计数定理 （重点、难点）

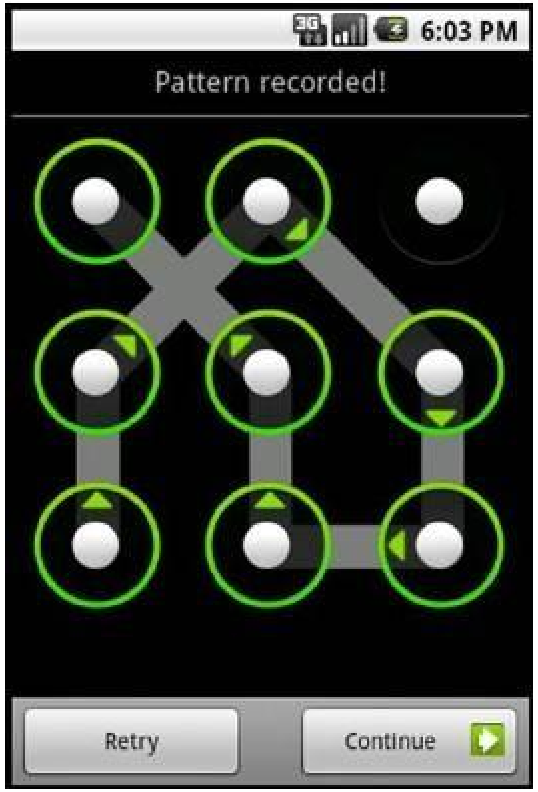
（六） 鸽舍原理与Ramsey理论 （ 3 学时）

1. 鸽舍原理及其应用举例 （重点）
2. Ramsey数、定理及应用 （难点）

（七） 组合算法 （ 6 学时）

1. 组合算法、问题、复杂性（重点、难点）
2. 若干著名的组合算法
3. 网络流算法

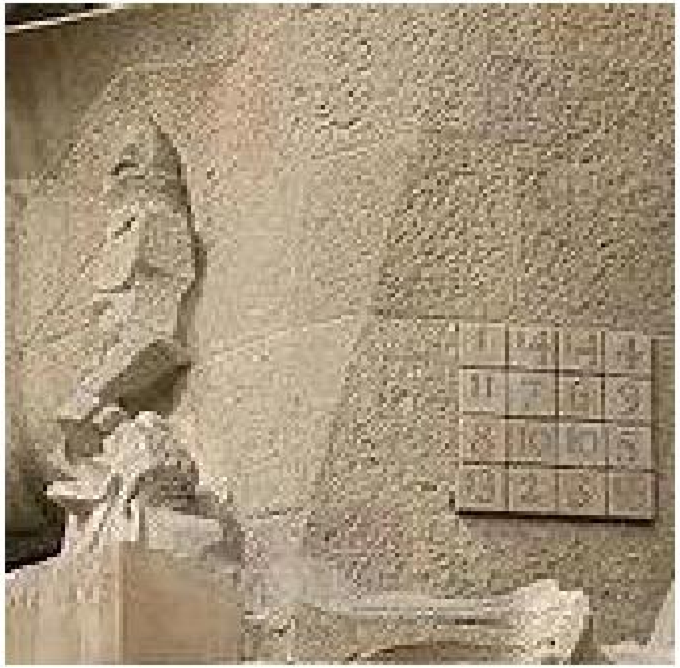
手机密码



- $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

幻方的神秘力量

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



Albrecht Dürer （丢勒）《忧伤》
（1514年）

幻方蕴含着宇宙的法则

例:幻方

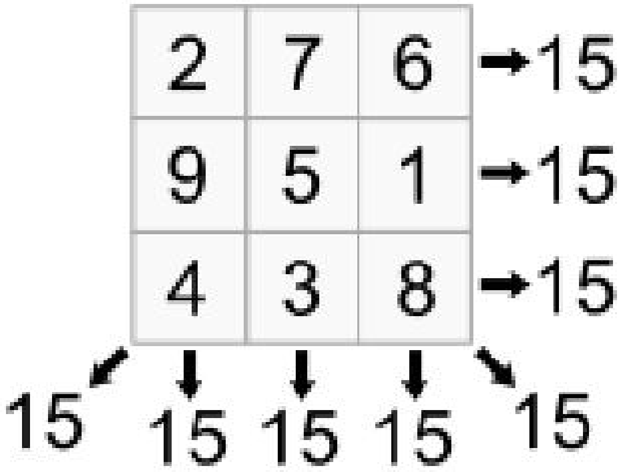
一个n阶幻方是由整数1,2,3...n^2按下述方式组成的n*n方阵：该方阵每行上整数之和、每列上整数之和、以及两条对角线中每条对角线上整数和都等于同一数。

- **定义**：行/列的整数和为该幻方的幻和。
  - $\{1, 2, 3\ldots.\ n^2\}$整数和为

    $$1+2+3+\ldots+n^2=n^2\times(n^2+1)/2$$

  - n阶幻方共有n行，每行的和为s

    $$ns=n^2\times(n^2+1)/2\rightarrow s=n\times(n^2+1)/2$$



存在性问题

- 是不是所有1到n^2的数字都可以构成幻方呢?
- 是否存在2阶幻方?
  - 假设存在2阶幻方
  - 2阶幻方的幻和为5

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a, b, c, d是[1，4]的各不相同的整数

$n*(n^2+1)/2 = 2 \times 5/2=5$

$$\begin{aligned} a+b&=5 \\ c+d&=5 \\ a+d&=5 \\ c+b&=5 \end{aligned} \longrightarrow b-d=0;$$ 与假设矛盾。

不存在2阶幻方!

大约30年前德国数学家L. Bieberbach证明了:
「对于任意大于等于3的数n，都存在一个n阶的幻方。」

幻方的构造

- 17世纪de la Loubere提出了n阶幻方构造方法，其中n为奇数
  - 将1放在最上一行的中间，然后按照
    自左下到右上的对角线顺序来放置，
    同时遵循如下规则：
    - 到达顶行，则下一个数放在底行，位置相应错过去
    - 到达最右边一列，下一个整数放在最左边，位置相应错位
    - 如果要放的位置上已经填好了整数，或者已经放到了右上角，
      则放在紧挨着该位置的下方。

幻方的构造

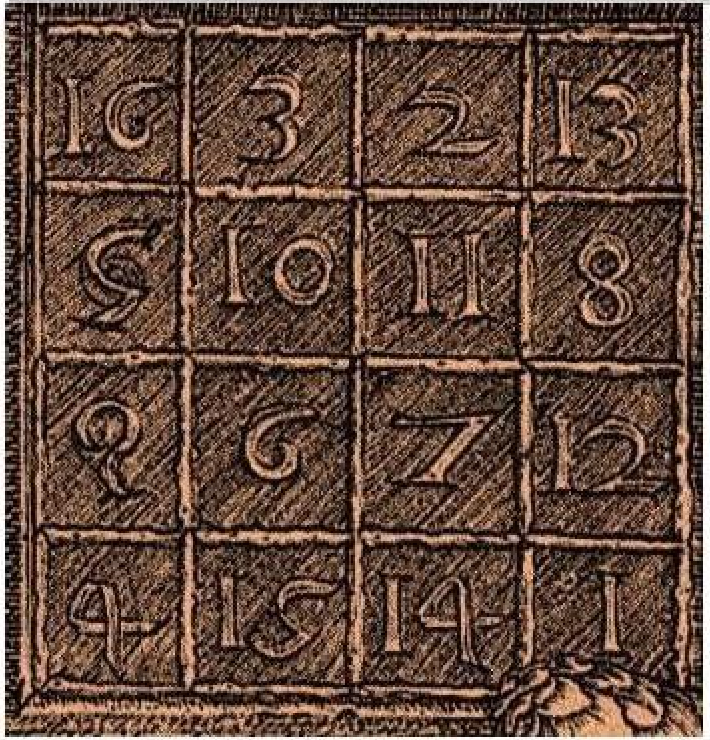
- 将1放在最上一行的中间，然后按照自左下到右上的对角线顺序来放置，同时遵循如下规则：
  - 到达顶行，则下一个数放在底行，位置相应错过去；
  - 到达最右边一列，下一个整数放在最左边，位置相应错位；
  - 如果要放的位置上已经填好了整数，或者已经放到了右上角，则放在紧挨着该位置的下方。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

三阶幻方的个数

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6



*n*阶普通幻方有多少个呢?

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

幻方的计数

- 弗兰尼克尔（Bernard Frenicle de Bessy）在1693 年得出结论，
- 认为4 阶幻方总共有 880 个基本形式，通过旋转与镜面反射，总共有 7040 个幻方。
- 对于 5 阶幻方总数的估计， 理查德• 许洛泼尔（Richard Schroeppel) 利用计算机编程运算得出结论，认为 5 阶幻方的基本形式有 275305224 个，即2 亿7 千5 百多万个。
- 对 6 阶幻方，皮恩（K.Pinn） 和维茨考夫斯基（C. Wieczerkowski) 利用蒙特卡洛模拟和统计学方法，得出一个大概的数值估计，其数量在1.774310×10^19 至1.776610×10^19 之间。
- 由此可见，其他阶幻方的多少将是一个多么难以置信的庞大数字.

组合数学 Combinatorics

1 组合数学概论

1.2 组合数学的

历史与发展

定义与内容

组合数学 [编辑]

维基百科，自由的百科全书

本条目**需要编修，以确保文法、用词、语气、格式、标点等使用恰当。** *（2012年12月7日）*
请帮助编辑这个条目，请参见校对指引中的说明指引。（帮助、讨论）

组合数学（combinatorics），亦称**组合论**、**组合学**，数学的一个分支，亦即离散数学中的排列组合研究，所研究的是计数的技巧[1]。

目录 [隐藏]

广义与狭义的组合数学 [编辑]

广义的组合数学就是离散数学，狭义的组合数学是图论、代数结构、数理逻辑等的总称。但这只是不同学者在叫法上的区别。总之，组合数学是一门研究离散对象的科学
着计算机科学的日益发展，组合数学的重要性也日渐凸显，因为计算机科学的核心内容是使用算法处理离散数据。

组合数学

- **研究内容**:
事物按照某种规则的安排，存在性问题、计数性问题和对已知安排的研究
—— Richard A. Brualdi 所著《Introductory Combinatorics》

- **研究内容**：离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科 ——高洁《浅谈组合数学的应用与教学》

组合数学中的三(四)大问题

- 存在 (existence problem)
  - 是否存在合理的解?
- 计数 (counting problem)
  - 有多少种解的可能? 原则: 不重复、不遗漏!
- 优化 (optimization problem)
  - 依照某种标准，所有解中那个是最优的?
- 构造 (constructive problem)
  - 在实际应用中，往往需要某个具体的(特定的)解。

组合数学 Combinatorics

1 组合数学概论

1.1.3 暴力枚举和抽象转换

抽象转换

- **例**　世界杯复赛中十六支球队进行单场淘汰赛，直至决出冠军，请问一共需要踢多少场比赛？

  如果全世界224个国家和地区都参加，一共要踢多少场比赛呢？

- **解**　一种常见的思路是按轮计场，费事。
  - 淘汰的选手与比赛(按场计)集一一对应。
- **模型转换**：世界杯复赛和决赛共15场比赛。
- 全世界都来参加的话需要223场比赛。

n-1

哥尼斯堡七桥问题

- 18世纪，哥尼斯堡是东普鲁士的一座景色迷人的城市，普莱格尔河横贯城区，并且这条河在城区形成了两条支流，把城市分成了4块，因此人们建造了7座各具特色的桥，每到傍晚，人们都会来此散步。
- 而这座美丽的城市人杰地灵，数学家哥德巴赫，哲学家康德都出生在这里，这里的人民长期漫步在这座桥之间，久而久之，萌发了这样一个问题，能不能不重复的走遍所有的桥，最终回到出发点?

哥尼斯堡七桥问题

- 欧拉的拓扑抽象

桥的连接 ⟹ 图 ⟹ 一笔画? ⟹ 充要条件

节点要连通

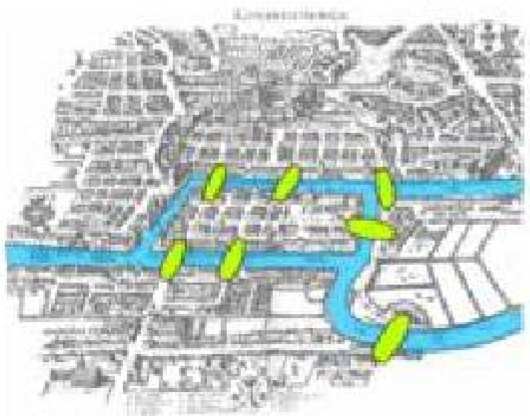
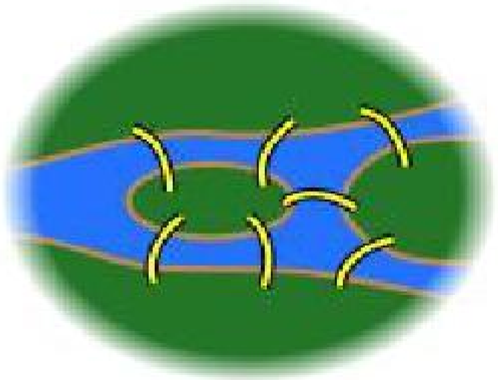
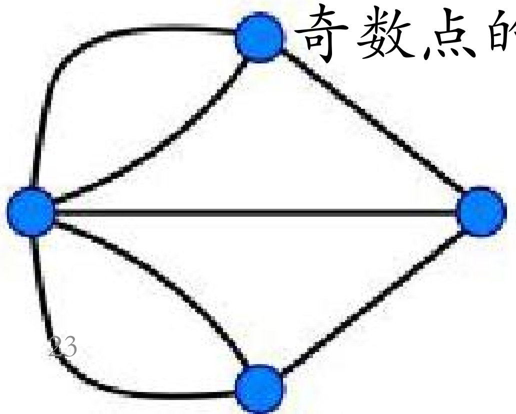
奇数点的个数为0或者2

1736年欧拉发表的有关图论的第一篇论文《哥尼斯堡七桥问题》

1. 凡是由偶点组成的连通图，一定可以一笔画成。画时可以把任一偶点为起点，最后一定能以这个点为终点画完此图。

2. 凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点），一定可以一笔画成。画时必须把一个奇点为起点，另一个奇点为终点。

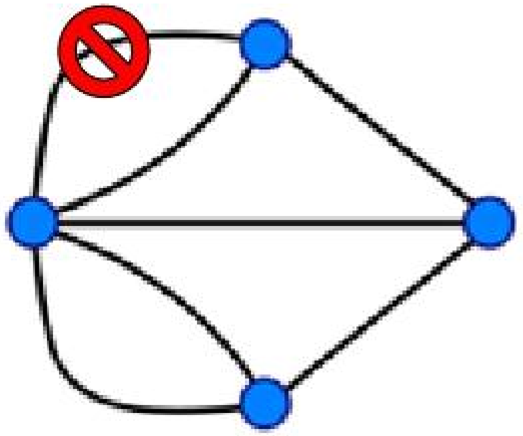
3. 其他情况的图都不能一笔画出。(奇点数除以二便可算出此图需几笔画成。)

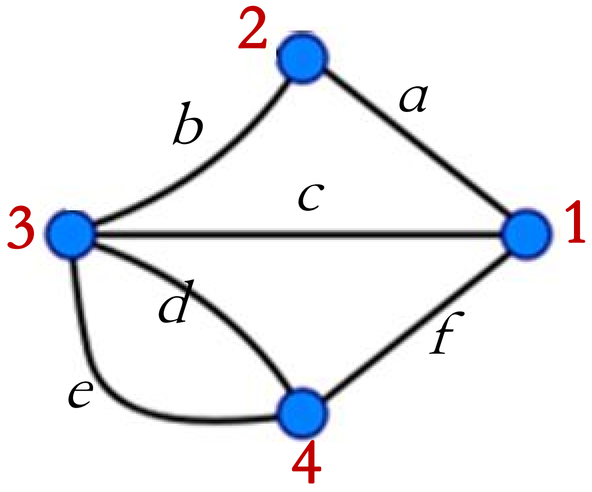

→

→


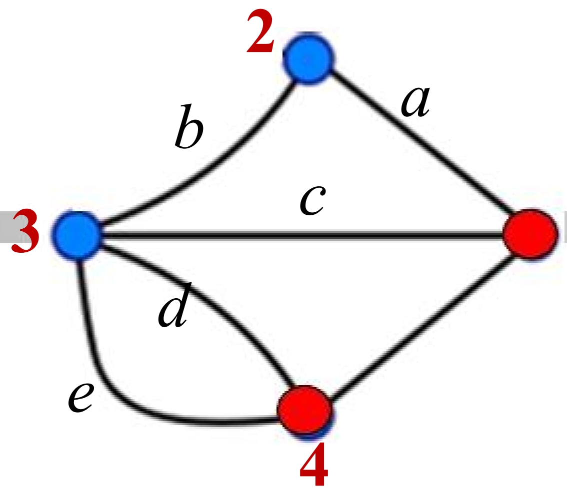
奇数点的个数为4

故事还在继续……

- 七座桥由于年代久远要分别进行封闭修缮的时候，人们惊奇地发现原先这项消遣活动又变得有趣起来了。
  - 任意去掉一座桥，便可去掉两个奇点，剩下的奇点数为2，因此不论去掉那座桥，均可构成“一笔画”。
- “六桥问题”可解就又带来了新困扰，到底有多少种走法？
  - 奇点数为2，必是从一个奇点到另一个奇点完成连通







无重复地遍历所有的边形成的轨迹是欧拉路

无重复地遍历所有的边又回到原点，形成的轨迹是欧拉回路

总结

- 组合数学：计数
  - 无重复
  - 无遗漏
- 计数不是那么简单
  - 量大
  - 错综复杂
  - 数不清
- 组合数学经常使用的方法并不高深复杂
  - 计数时的合理分类
  - 组合模型的转换

组合数学 Combinatorics

组合数学 Combinatorics

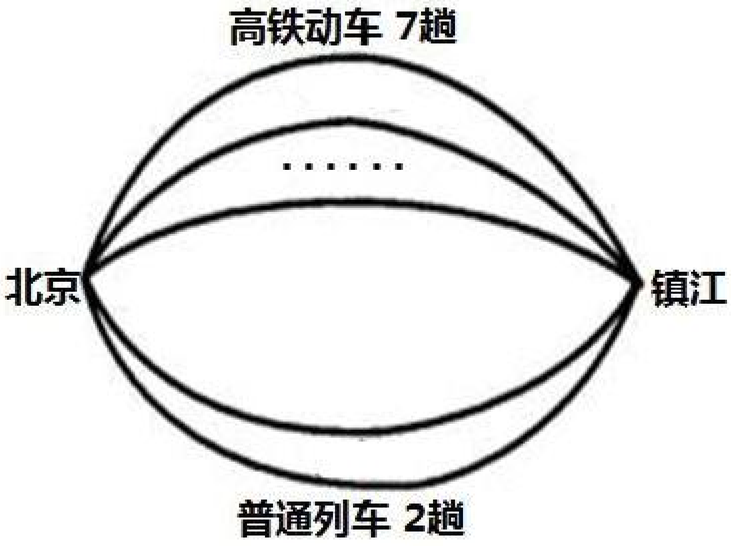
2 小乒乓球的组合之旅

2-1 基本计数原理

行程规划

北京-镇江

- 高铁动车 7趟；其他列车 2趟
- 7+2=9 种不同行程
- 分类 加法



- 北京-镇江
  - 飞机：北京-南京 上午5趟航班
    动车：南京-镇江 下午6趟
  - 5×6=30 种不同行程
  - 分步 乘法

1.1 加法法则与乘法法则

[加法法则 The Sum Rule] 设事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则事件A或B之一有$m+n$种产生方式。

集合论语言：

若 $|A| = m$, $|B| = n$, $A \cap B = \phi$，则 $|A \cup B| = m + n$

1.1 加法法则与乘法法则

[乘法法则 The Product Rule] 设事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则事件A与B有 $m*n$种产生方式。

集合论语言：

若 $|A| = m$, $|B| = n$， $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$

则 $|A\times B| = m\times n$ 。

例： 男生25人，女生5人，如果选一个男生做班长，一个女生做团支部书记，请问多少种不同的组合呢?

第一步，选班长，25种

第二步，选支部书记 5种

$$25 \times 5 = 125$$

1.1 加法法则与乘法法则

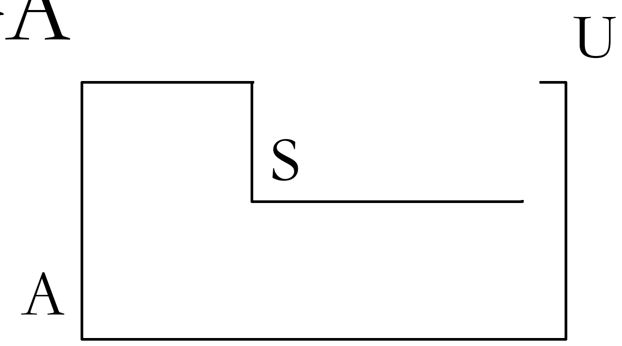
加法法则：分类

乘法法则：分步

注意: 加法法则和乘法法则，注意事件的独立性。

- 减法法则：A表示解的集合，U是包含A的一个全集
  - 定义A的补集：The complement of A in U : $\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$
  - 计算A的个数就是

    $|A| = |U| - |\bar{A}|$



组合数学 Combinatorics

2 小乒乓球的组合之旅

2-2 排列组合定义

排列和组合

- 无重复排列
- 无重复组合
- 可重复排列
- 可重复组合

乒乓球放盒子

- 排列和组合
- 编号的乒乓球：
  - 4个乒乓球：1号，2号，3号，4号
  - 取出其中的3个
  - 如果考虑顺序，则称之为排列数 P(4,3) 无重排列
    - $P(4,3)=4\times3\times2 = 24$
  - 如果不考虑顺序，则称之为组合数 C(4,3)无重组合
    - $C(4,3)=P(4,3)/3! =4$

排列与组合

定义 [排列 Permutation]从n个不同的元素中，取r个不重复的元素，按次序排列，称为从n个中取r个的无重排列。排列的个数用$P(n,r)$表示。当$r=n$时称为全排列。$(n \geq r)$

定义 [组合 Combination]从n个不同元素中取r个不重复的元素组成一个子集，而不考虑其元素的顺序，称为从n个中取r个的无重组合。（$n \geqslant r$）

组合的个数用$C(n,r)$表示或者C_n^r。

排列的模型

[排列 Permutation]从n个中取r个排列的典型例子:
从n个不同的球中,取出r个,放入r个不同的盒子里,每盒1个。($n \geqslant r$)

第1个盒子有n种选择，第2个有n-1种选择，……，第r个有n-r+1种选择。故有:

$$P(n,r) = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

则全排列:　$P(n,n) = n!$

例 问有多少个数字不重复，不取零且4和5不相邻的5位数？

解：第一步：

数字不重复，不取零的5位数：{1,2,3,4,5,6,7,8,9}上的5-排列，共：P(9,5).

第二步：4和5相邻的情形：

把4和5看成整体，————— 5位数上有4种放置方法；

其余3位数字从{1,2,3,6,7,8,9}七个数字中选3个排列： P(7,3). 4和5相邻的五位数：2*4*P(7,3).

第三步：减法

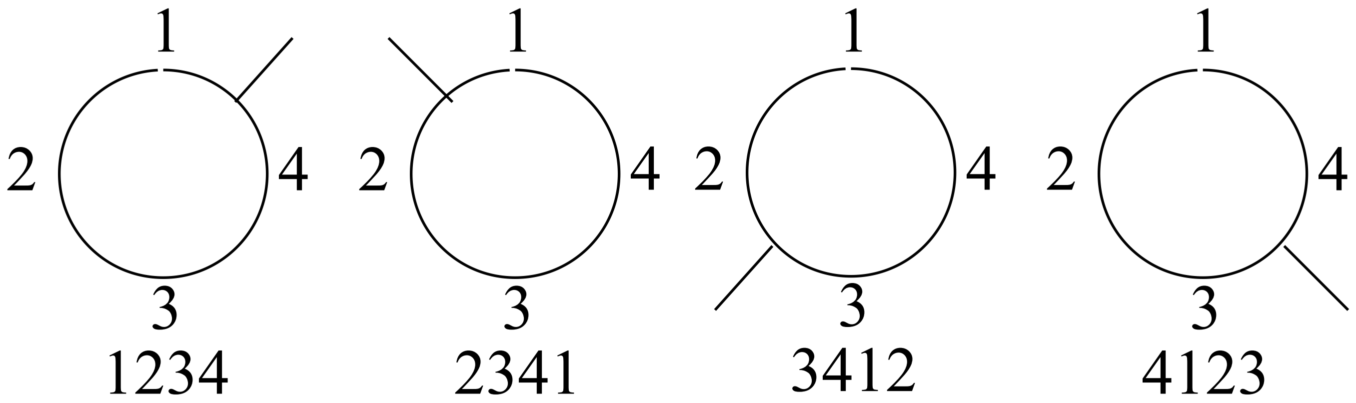
P(9,5) – 2*4*P(7,3).

例：n个有区别的球任取r个（$r \le n$）放入r个有标志的盒子中，每盒1球，共有多少种方式?

例：10只不同的黑球和5只不同的白球排成一行，要求两只白球不排在一起，问有多少种排法？若要求把球围成圆圈，有多少种排法？

圆排列

- **圆排列**：从n个中取r个的圆排列的排列数为：$P(n,r)/r$，$2 \leqslant r \leqslant n$
- 以4个元素为例



特别地：从n个中取 n 个的圆排列的排列数为：$P(n,n)/n=(n-1)!$.

- 例：10只不同的黑球和5只不同的白球排成一行，要求两只白球不排在一起，问有多少种排法？若要求把球围成圆圈，有多少种排法？

组合的模型

若球不同，盒子相同，则是从n个球中取r个球的组合模型。

若放入盒子后再将盒子标号区别，则又回到排列模型。

每一个组合可有$r!$个标号方案。

故有
$$C(n,r)\cdot r! = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

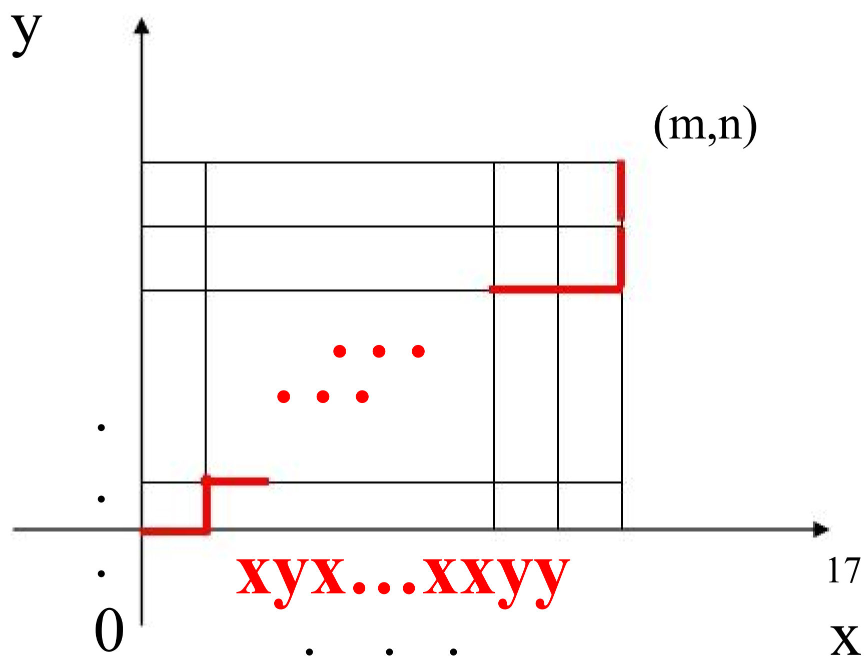
$$C(n,r)=C(n,n-r)$$

意义：n个球中选出r个的方法自然等于剩下$n-r$个的方法。

例 在一个凸n边形($n\geqslant 3$)M内部,假设没有3条对角线共点，求M内对角线交点的个数。

路径问题：

从(0,0)点出发沿x轴或y轴的正方向每步走一个单位，最终走到(m,n)点，其路径数是$C(m+n,n)$



$$\frac{(m+n)!}{m!n!}=C(m+n,n)$$

不相邻组合

描述：从 $A=\{1,2,...,n\}$ 中取r个不相邻的数进行组合，其组合数为：　$C(n+r-1,r)$

证明：

排列和组合

- 无重复排列
- 无重复组合
- 可重复排列
- 可重复组合

r-重复排列

- **定义**：从n个元素中允许重复地选取r个元素排成一行，称为r-重复排列。
- **重复度**：元素a出现的次数。
- 从n个不同元素中重复度无限制的r-重复排列个数为：n^r.

- 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是n元集，$a_1,a_2,\ldots,a_n$的重复度分别为$k_1,k_2,\ldots,k_n$ 的重复排列称为A的一个$(k_1,k_2,\ldots,k_n)$-重复排列。
- k个元素的全排列$k=k_1+k_2+\ldots k_n$，取k_1个a_1，k_2个$a_2,\ldots,$ k_n个a_n的排列：

$$\frac{(k1+k2+\ldots+kn)!}{k1!k2!\ldots kn!}$$

可重排列举例

例：26个英文字母能组成多少4位数的字符串？

例：26个英文字母能组成多少4位数的字符串？其中每位字母都不相同.

例：26个英文字母能组成多少4位数的字符串？其中每位字母都不相同且b和d不相邻？

例 有2只红球，2只蓝球，3只黄球，4只白球，把这11只球排成一行，问有多少种排法？

例 证明$(k!)!$能被$(k!)^{(k-1)}$整除。

排列和组合

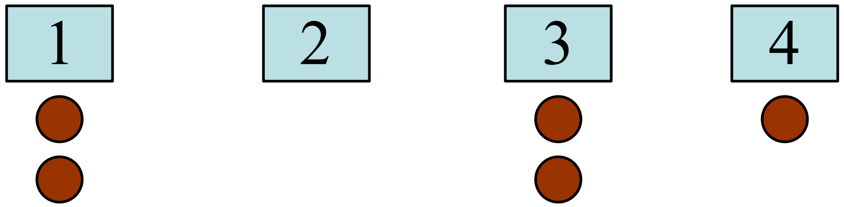
- 无重复排列
- 无重复组合
- 可重复排列
- 可重复组合

可重组合

- 定义：从n个不同元素中允许重复地选取r个元素的组合。

例：$A=\{1,2,3,4\}$中取5个元素构成组合，元素可以重复，如：

$\{1\ 1\ 3\ 3\ 4\}$



证明：从n个不同元素中允许重复地选取r个元素的组合数是C(n+r-1,r)。

组合数学 Combinatorics

2 小乒乓球的组合之旅

2-5 组合恒等式

组合恒等式

Combinatorial Indentities

- 等式1 $C(n, r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$

考虑某一特定元素a1。组合分成两类：包含a1, C(n-1, r-1);
不包含a1, C(n-1,r).

恒等式

- 等式2 $C(n,l)C(l,r)=C(n,r)C(n-r,l-r)$

左边：从n个元素中取l个，再从l个元素中取r个。不同的l组合，可能对应相同的r个元素，被重复计算。
重复的次数：从剩下的n-r个元素里取l-r个元素次数：$C(n-r,l-r)$

恒等式

- 等式3 $C(n+r+1,r) = C(n+r,r) + C(n+r-1,r-1)+\dots + C(n+1,1)+C(n,0)$.

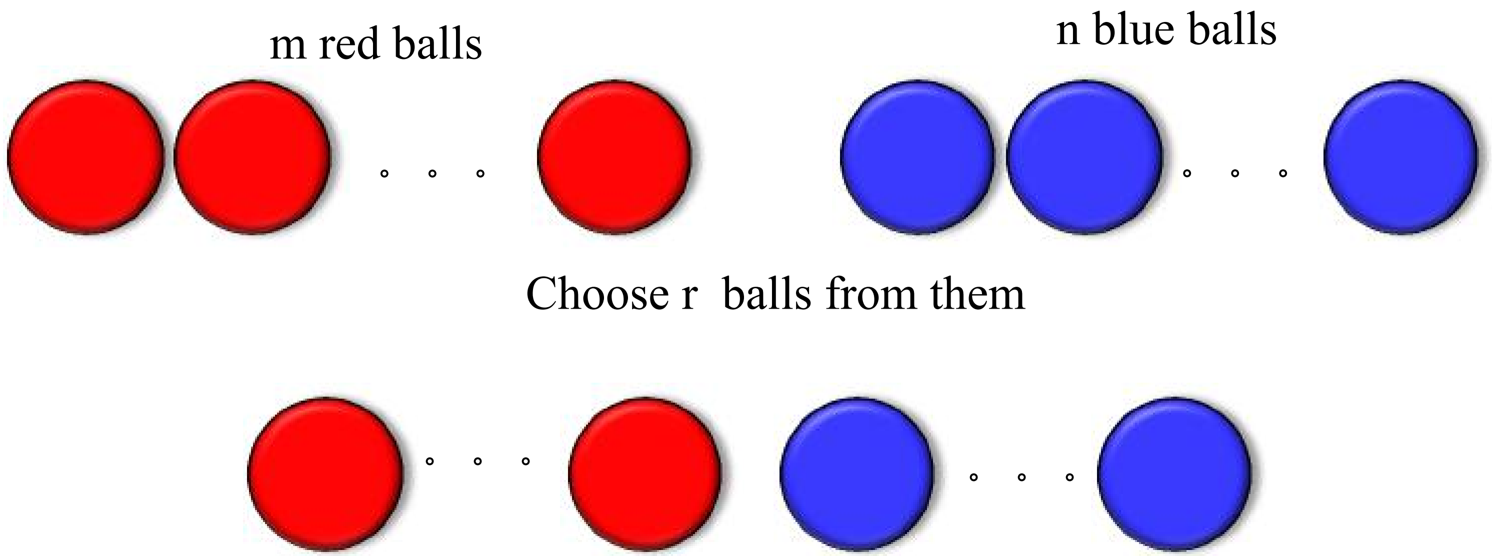
恒等式

等式 4 $\mathbf{C}(m+n, r)=C(m,0)\mathrm{C}(n, r)+C(m, 1)\, C(n,r\text{-}1)+ \cdots+C(m, r)\, C(n, 0$

- 即Vandermonde恒等式**Vandermonde's identity**
- Alexandre-Théophile Vandermonde (28 February 1735 – 1 January 1796) 法国音乐家，数学家

乒乓球来证明恒等式

- C(m+n,r)=C(m,0)C(n,r)+C(m,1)C(n,r-1)+ ⋯+C(m,r)C(n,0)
- C(m,0)C(n,r)+C(m,1)C(n,r-1)+⋯+C(m,r)C(n,0)



乒乓球来证明恒等式

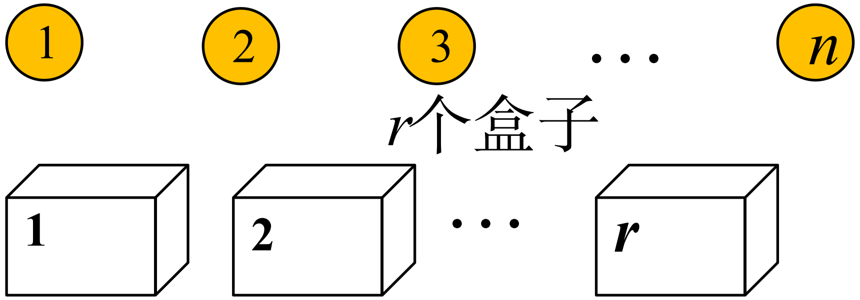
等式5 $C(m+n,m)=C(m,0)C(n,0)+C(m,1)C(n,1)+\cdots+C(m,m)C(n,m)$, $m\leqslant n$

排列$P(n, r)$的递推关系

等式6 $P(n,r) = P(n\text{-}1,r) + rP(n\text{-}1,r\text{-}1)$

分类递推

- 不选第一个球?
  - $P(n\text{-}1,r)$
- 选择第一个球?
  - $rP(n\text{-}1,r\text{-}1)$

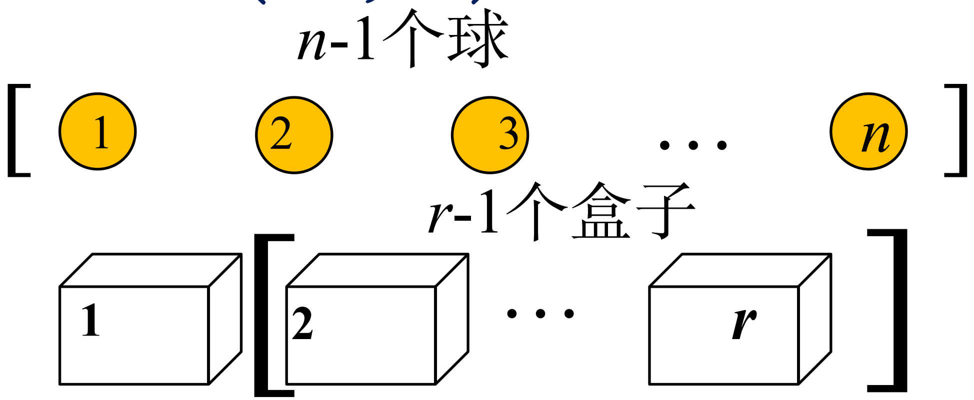


排列$P(n, r)$的递推关系

等式7 $P(n,r) = nP(n-1,r-1)$

分步递推

- 选No.1盒子内的乒乓球
  - n种选择
- 从n-1个球中选出r-1个放入r-1个盒子内的排列
  - $P(n-1,r-1)$



二项式定理

- $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)x^i$
- 其中C(n,i)称为二项式系数。
- 令x=1，则有：
- $\boxed{C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n.\ \text{等式8}}$
- 令x=-1，则有：

$\boxed{\text{等式9}\ \ C(n,0)-C(n,1)+\ldots+(-1)^n C(n,n)=0.}$

- 等式10 $C(n,0)^2 + C(n,1)^2 + \ldots + C(n, i)^2 + \ldots + C(n,n)^2 = C(2n,n)$.

等式11 $C(n,1) + 2C(n,2) + \ldots + iC(n, i) + \ldots + nC(n,n) = n\, 2^{(n-1)}$.

类型	例子	是否排列	允许重复?	计数
无重组合	从n个球中取r个	No	No	$C(n, r)$
无重排列	从n个人中找r个排队	Yes	No	$P(n, r)$
可重组合	从n种水果中选r个拼果篮	No	Yes	$C(n+r-1, r)$
可重排列	n个字母组成的r位串	Yes	Yes	$n^\wedge r$
多重全排列	r_1个a, r_2个b组成的n位串	Yes	Yes	$n!/(r_1!\ r_2!)$

作业

1. m个男生，n个女生，排成一行，其中m,n都是正整数，若 (a)男生不相邻$(m \le n+1)$；(b)n个女生形成一个整体；(c)男生A和女生B排在一起；分别讨论有多少方案?
2. n+m位由m个0，n个1组成的符号串(n≤m+1),试问不存在两个1相邻的符号串的数目。
3. 6位男宾，5位女宾围一圆桌而坐，(1)女宾不相邻有多少种方案? (2)所有女宾在一起有多少种方案? (3)一女宾A和两位男宾相邻又有多少种方案?

4. 用组合方法证明 $\frac{(2n)!}{2^n}$ 和 $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$ 是整数。
5. 证明nC(n-1,r)= (r+1)C(n,r+1),并给予组合解释.