上海大学 2014～2015 学年冬季学期试卷（A 卷）

成绩	

课程名：概率论与数理统计（B） 课程号：________ 学分：5

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号______________应试人所在院系______________

题号	一	二	三	四	五
得分	10	10	10	60	10

一、是非题 **(每题 2 分，共 10 分)**

1、对满足条件 $P(A) \geq P(B)$ 的任意事件 A 和 B，一定成立 $A \supseteq B$。 （错）

2、随机变量 $X \sim e(\lambda)$，则对任意的 $t, s > 0$，有 $P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t)$。 （对）

3、如果随机变量 $X \sim b(2, p)$，$Y \sim b(3, p)$，且相互独立，则 $X + Y \sim b(5, p)$。 （对）

4、在对参数 θ 区间估计时，增大样本容量就可能同时提高置信度和估计精度。 （对）

5、参数假设检验中，发生第一类错误的概率 α 和发生第二类错误的概率 β 一定满足关系：$\alpha + \beta = 1$。 （错）

二、填空题 **(每格 2 分，共 10 分)**

1、设 $P(A) = 0.3$，$P(B - A) = 0.1$，则 $P(A \cup B) = \underline{P(A) + P(B - A) = 0.3 + 0.1 = 0.4}$。

2、若随机变量 $X \sim N(1, 2^2)$，$Y \sim N(1, 3^2)$，且相互独立，则 $E[(X - Y)^2] = \underline{D(X - Y) + [E(X - Y)]^2 = 13}$。

3、把 **3** 个球独立随机放入 **10** 个盒子内，每个盒子所放球的个数不限，则没有球的盒子个数的数学期望为 $\underline{10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 7.29}$。

4、设 $X_1, \cdots, X_9$ 和 $Y_1, \cdots, Y_9$ 分别是来自相互独立的总体 X 和 Y 的简单样本，且两个总体均服从正态分布 $N(0, 3^2)$，则统计量 $\frac{X_1^2 + \cdots + X_9^2}{Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}$ 服从的分布为 $\underline{F(9,9)}$。

5、设随机变量 $X \sim F(9,12)$，已知 X 相应于 0.05 的上侧分位点 $F_{0.05}(9,12) = 2.80$，则随机变量 $Y = X^{-1}$ 相应于 0.95 的上侧分位点为 $\underline{\frac{1}{2.80} = 0.357}$。

草 稿 纸

三、选择题（每题 **2** 分，共 **10** 分）

1、如果随机变量 X 与 Y 不相关(即相关系数 $\rho_{XY}=0$)，则下面正确的结论是 **C** 。

(A) 一定有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$； **(B)** 一定有 $D(XY)=DXDY$；

(C) 一定有 $E(XY)=EXEY$； **(D)** 以上结论均不一定成立。

2、设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，但不一定独立。一定正确的是 **C** 。

(A) $X+Y$ 服从正态分布； **(B)** X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布； **(D)** $\dfrac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布。

3、对任意两个独立且发生概率均大于零的事件 A 和 B，不正确的是 **B** 。

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 一定独立； **(B)** A 与 B 也可能互不相容；

(C) A 与 $\bar{B}$ 一定独立； **(D)** $\bar{A}$ 与 B 一定独立。

4、如果总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中，μ 未知，σ^2 已知，X_1，X_2，X_3 是取自总体的一个样本，那么不是统计量的是 **B** 。

(A) $X_1+X_2+X_3$； **(B)** $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}-\mu$；

(C) $\min\{X_1,X_2,X_3\}$； **(D)** $\dfrac{1}{\sigma^2}(X_1^2+X_2^2+X_3^2)$。

5、设离散型随机变量 X 与 Y 独立，且都服从相同的分布律。则一定成立的是 **D** 。

(A) $P(X=Y)=\dfrac{1}{2}$； **(B)** $P(X=Y)=1$；

(C) $P(X>Y)=P(X<Y)=\dfrac{1}{2}$； **(D)** $P(X>Y)=P(X<Y)$。

四、计算题（共 **60** 分）

1、（本题 **16** 分）一个顾客准备购买一批产品，共有 **30** 件。这批产品中恰有 **3** 件产品不合格。这位顾客决定用随机抽样方式来决定是否购买：随机抽取 **2** 件产品检验，只要发现有一件不合格，就决定不购买该批产品。检验时，由于条件所限，不合格的产品也可能被判定为合格品，其可能性为 **0.01**。每件产品的检验是独立的。随机变量 X 表示所抽取的 **2** 件产品中的合格品数。

1）（**+6** 分）确定随机变量 X 的分布律；

2）（**+4** 分）计算 EX 和 DX；

3）（**+2** 分）计算如果抽检的两件产品中有一件不合格时，而顾客购买了该批产品的概率；

4）（**+2** 分）计算顾客购买该批产品的概率；

5）（**+2** 分）如果顾客购买了该批产品，计算抽检的 **2** 件产品中有一件是不合格品的概率。

解 **1**） $P(X=0)=\dfrac{C_3^2}{C_{30}^2}=\dfrac{1}{145}\approx 0.69\%$， $P(X=1)=\dfrac{C_{27}^1C_3^1}{C_{30}^2}=\dfrac{27}{145}\approx 18.62\%$

$P(X=2)=\dfrac{C_{27}^2}{C_{30}^2}=\dfrac{117}{145}\approx 80.69\%$。（**2+2+2** 分）

2） $EX=0\times\dfrac{1}{145}+1\times\dfrac{27}{145}+2\times\dfrac{117}{145}=1.8$，（**+2** 分）

$EX^2=0\times\dfrac{1}{145}+1\times\dfrac{27}{145}+4\times\dfrac{117}{145}=3.41$， $DX=0.35-0.09=3.42-1.8^2=0.17$（**1+1** 分）

3）记抽检合格为事件 A，则 $P(A|X=1)=0.01$。（**+2** 分）

4）类似，$P(A|X=0)=0.01^2$，$P(A|X=2)=1$，所以，

$P(A)=P(A|X=0)\times P(X=0)+P(A|X=1)\times P(X=1)++P(A|X=2)\times P(X=2)$
$=80.87\%$（+2 分）

5） $P(X=1|A)=\dfrac{P(A|X=1)\times P(X=1)}{P(A)}=\dfrac{0.01\times 18.62\%}{80.87\%}\approx 0.23\%$

2、（本题 9 分）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-1,1)\\ ax^2, & x\in(-1,1)\end{cases},$$

，

1）（+3 分）确定参数 a；

2）（+6 分）求随机变量 $Y=|X|$ 的分布函数和概率密度函数。

解 1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\frac{2}{3}a$，因此 $a=\frac{3}{2}$；（3 分）

2）$F_Y(y)=\Pr(-y\le X\le y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \int_{-y}^{y} f_X(x)dx, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0\\ y^3, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$（+4 分）

所以概率密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\notin(0,1)\\ 3y^2, & y\in(0,1)\end{cases}$。（**+2** 分）

3、（本题 10 分）设随机变量 X 与 Y 具有联合概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}a, & 0\le x<y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

1）（+2 分）确定常数 a；

2）（+4 分）计算 X 的边际概率密度函数 $f_X(x)$ 及 EX；

3）（+4 分）计算 $\operatorname{cov}(X,Y)$。

解 1）$1=\int_0^1 dx\int_x^1 a dy=a\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}a$，因此 $a=2$（1+1 分）

2）$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_x^1 2dx=2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，（+2 分）

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3}$（+2 分），或 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\frac{1}{3}$

3）$EY=\int_0^1 dx\int_x^1 2ydy=\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}$，$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dx=2\int_0^1 dx\int_x^1 xydy=\frac{1}{4}$（1+2 分）

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}$。（+1 分）

4、（本题 **15** 分）根据以往经验，某家工厂生产的产品的使用寿命 $X\sim N(570,8^2)$。现在更换了生产的原材料，为检验是否由此对产品的质量有影响，做了样本容量 $n=10$ 的抽样检验，得到使用寿命的样本观测值（单位：小时）

578, 572, 570，568, 572, 570, 570, 572, 596, 584。

假如采用新原材料后，产品的寿命仍服从正态分布，但分布的均值和方差可能会有所变化。

（**1**）（本小题 **5** 分）在置信度为 **95%**时，确定用新材料生产的产品使用寿命的均值的区间估计；

（**2**）（本小题 **5** 分）在置信度为 **95%**时，确定用新材料生产的产品使用寿命的方差的区间估计；

（**3**）（本小题 **5** 分）在显著性水平为 $\alpha=0.05$ 时，新材料生产的产品使用寿命的均值是否与原来的使用寿命均值有显著的差异？

解 （**1**）样本均值和方差的观测值为：$\bar{x}=575.2$，$s^2=75.73$。（**1+1** 分）

寿命的均值的区间估计：

$$(\bar{x}-t_{0.025}(9)\frac{s}{\sqrt{10}},\bar{x}+t_{0.025}(9)\frac{s}{\sqrt{10}})=(575.2-2.2622\times\frac{\sqrt{75.73}}{\sqrt{10}},575.2+2.2622\times\frac{\sqrt{75.73}}{\sqrt{10}})$$

$=(568.97,581.42)$。（**+2+1** 分）

（**2**）$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)})=(\frac{9\times 75.73}{19.032},\frac{9\times 75.73}{2.7})=(35.81,252.47)$（**3+2** 分）

（**3**）原假设 $H_0:\mu=750$；备选假设 $H_0:\mu\neq 750$。（**+2** 分）

接受域为

$(\mu_0 - t_{0.025}(9)\frac{s}{\sqrt{10}}, \mu_0 + t_{0.025}(9)\frac{s}{\sqrt{10}}) = (570 - 2.2622 \times \frac{\sqrt{75.73}}{\sqrt{10}}, 570 + 2.2622 \times \frac{\sqrt{75.73}}{\sqrt{10}})$

$= (545.38, 594.77)$，$\bar{x}$ 在接受域内，因此，没有显著差异。（**+2+1** 分）

注：方法正确，计算误差允许 **0.05**

5、（本题 **10** 分）有一枚不知是否均匀的硬币，为确定其正面出现的概率 p，独立进行了 n 次扔硬币试验。定义随机变量 X，当正面出现时，$X=1$；反面出现，则 $X=0$。令 $X_1,\cdots,X_n$ 为相应的简单样本，其观测值为 $x_1,\cdots,x_n$。求参数 p 的矩估计和最大似然估计，并讨论它们的无偏性和相合性。

解 矩估计：$EX = p = \bar{X}$，因此矩估计为 $\hat{p} = \bar{X}$。（**+2** 分），

最大似然函数 $L(\theta; X_1,\ldots,X_n) = p^{n\bar{X}}(1-p)^{n(1-\bar{X})}$，相应的对数最大似然函数为

$\ln L(\theta; X_1,\ldots,X_n) = n\bar{X}\ln p + n(1-\bar{X})\ln(1-p)$（**+2** 分）

因此，$0 = \frac{n\bar{X}}{p} - \frac{n(1-\bar{X})}{1-p}$，得 $\hat{p} = \bar{X}$（**+2** 分）。

这是一个无偏估计：$E\hat{p} = E\bar{X} = p$。（**+2** 分）

同时：$\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\hat{p}-p|>\varepsilon) \le \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0$，也是相合估计。（**1+1** 分）

五、证明题（本大题共 **10** 分）

1、（本题 **5** 分）如果事件 A_i 都满足 $A_i \subseteq A$，其中 $i = 1,2,3$。

(1)(2 分**)**求证 $P(\bar{A}) \le P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3)$；

(2)(3 分 **)**证明 $P(A) \ge P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$.

证：**1**）由已知条件得：$\bar{A} \subseteq \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$，所以

$P(\bar{A}) \le P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3)$ **(2** 分**)**，即 $1 - P(A) \le 1 - P(A_1) + 1 - P(A_2) + 1 - P(A_3)$。即得结论。（**+3** 分）

2、（本题 **5** 分）如果总体 X 与 Y 独立，且服从相同的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，S_1^2 与 S_2^2 为具有相同样本容量（样本容量不小于 **2**）的各自的样本方差。证明：$S_w^2 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2)$ 也是方差 σ^2 的无偏估计，且比用 S_1^2 或 S_2^2 来估计更有效。

证 $ES_1^2 = ES_2^2 = \sigma^2$，（**+1** 分），因此，$ES_w^2 = \frac{1}{2}(ES_1^2 + ES_2^2) = \sigma^2$（**+1** 分）

同时 $DS_w^2 = \frac{1}{4}D(S_1^2 + S_2^2) = \frac{1}{2}DS_1^2 = \frac{1}{2}DS_2^2$（**+3** 分），即更有效。

（附录：$\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$；$\chi^2_{0.05}(10) = 18.307$；$\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$；$\chi^2_{0.95}(10) = 3.940$。

$\chi^2_{0.025}(9) = 19.032$；$\chi^2_{0.025}(10) = 20.483$；$\chi^2_{0.975}(9) = 2.7$；$\chi^2_{0.975}(10) = 3.247$

$u_{0.025} = 1.960$；$u_{0.05} = 1.65$。$t_{0.05}(9) = 1.8331$；$t_{0.05}(10) = 1.8125$；$t_{0.025}(9) = 2.2622$；

$t_{0.025}(10) = 2.2281$）