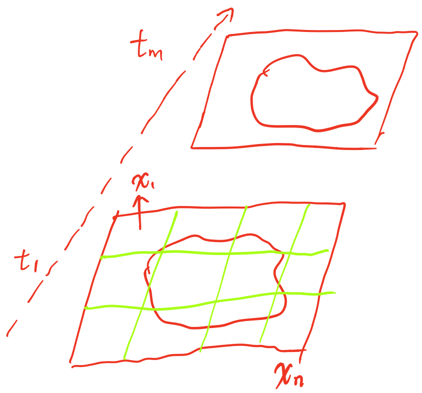


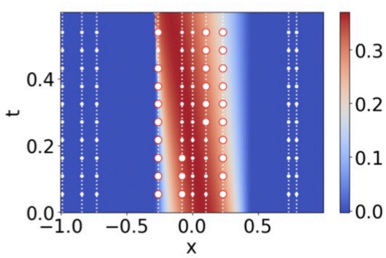
$$\begin{cases} u_t = -\mathcal{L}u & \Omega\times[0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \Omega \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & u_t & \text{dictionary} & \text{coefficient.} \\ & & x \quad u \quad u_x \quad xu \; --- & \\ \begin{array}{c} t_1\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ t_m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array} & \begin{bmatrix} u_t(x_1,t_1) \\ \vdots \\ u_t(x_n,t_1) \\ \vdots \\ u_t(x_1,t_m) \\ \vdots \\ u_t(x_n,t_m) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} x_1 & & & \\ \vdots & & & \\ x_n & & & \\ \vdots & & & \\ x_1 & & & \\ \vdots & & & \\ x_n & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix} \\ & b & A & x \end{array}$$

Challenges

1) 空间中每点放传感器(sensor)不现实,代价太高

2) 对于一些很平滑的轨迹,数据用得越多,A就越可能病态



(c)

常系数偏微分方程.

用DFT,则无需计算 u_x, u_{xx}---

$$\begin{bmatrix} u_t(x_1,\tau) \\ \vdots \\ u_t(x_s,\tau) \end{bmatrix} = \begin{array}{c} x \quad u \quad xu \; --- \\ \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}$$

☆不同微分算子($\mathcal{L}$) + 初始数据 $\Longrightarrow \mathcal{L}$

$\begin{cases} \text{1> data space 有多大(放多少个sensor才能正确刻画A)} \\ \text{2> data selecting strategy (在哪些地方放sensor)} \end{cases}$

chap 2 强椭圆微分算子 $(|\log\varepsilon|^2)$

存在线性空间 $V\subset L^2(\Omega)$，维度 $C_1|\log\varepsilon|^2$，使得

$\|u(\cdot,t)-P_V u(\cdot,t)\|\le C_2\varepsilon\|u_0\|$，$\forall t\in[0,T]$

一阶双曲微分算子 $\left(\begin{array}{l} u_t+\vec{c}\cdot\nabla u=0 \\ u(x,0)=u_0(x)\end{array}\right)$ 初始数据对解的影响很大，u_0

u_0 正则性越差（越不光滑），越包含更多 Fourier mode，解越容易识别）

$$\int_0^T \|u(\cdot,t)-P_{V_K^k}u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt=\int_\Omega \|u(x,\cdot)-P_{V_G^k}u(x,\cdot)\|^2_{L^2[0,T]}dt=\sum_{j=k+1}^\infty \lambda_j$$

$\sim O(k^{-p})$

$K(x,y):=\int_0^T u(x,s)u(y,s)ds$，$(x,y)\in\Omega^2$，$(s,t):=\int_\Omega u(x,t)u(x,s)dx$ $(s,t)\in[0,T]^2$

对称半正紧积分算子 symmetric semi-positive compact integral operator

有相同特征值.

V_K^k 由 $K(x,y)$ 前 k 个特征函数张成的空间，V_G^k，$\vec{c}(x)\in C^p(\Omega)$

chap 3 Indentifiability & Stability

给出常系数偏微分方程的解的稳定性，DFT解法

给出了 $\|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}$

Remark:

$P_{V_0}u\sim u$ 是可行的；初始数据 + $\vec{c}$ 的特性对解出 $\vec{c}$ 有较大影响.

Chap 4

Consistent and Spare Local Regression. (CaSLR)

$$u_t = \sum_{k=1}^{K} C_k(x,t)\underbrace{f_k(x,t)}_{\text{candidate function.}} \qquad \hat{C}_j = (\hat{C}_1^j \dots \hat{C}_k^j)$$

估计

$$\mathcal{E}_{loc}^j(\hat{c}_j) = \sum_{(x_{j,m},\, t_{j,m})\in\Omega_j} \left(u_t(x_{j,m}, t_{j,m}) - \sum_{k=1}^{K} \hat{C}_k^j f_k(x_{j,m}, t_{j,m})\right)^2$$

$$\mathcal{E}(\hat{c}) = \sum_{j} \mathcal{E}_{loc}^j(\hat{c}_j), \quad \hat{c} = (\hat{c}_1, \dots \hat{c}_J)$$

$$\hat{c}^{\ell} = \arg\min_{\hat{c}} \mathcal{E}(\hat{c}) \qquad \tilde{C}_k = (\hat{C}_k^1 \dots \hat{C}_k^J)$$

subject to: $\|(\|\tilde{c}_1\|, \dots, \|\tilde{c}_K\|)\|_0 = \ell$

对于某个 t

$u_t(x_1,t)$ Ω_1 $\quad \hat{C}_1^1 f_1(x_1,t) + \hat{C}_2^1 f_2(x_1,t) + \hat{C}_3^1 f_3(x_1,t) + \dots + \hat{C}_k^1 f_k(x_1,t) \to \mathcal{E}_{loc}^1$

$\vdots$

$u_t(x_J,t)$ Ω_J $\quad \hat{C}_1^J f_1(x_J,t) + \dots + \hat{C}_k^J f_k(x_J,t) \to \mathcal{E}_{loc}^J \to \mathcal{E}$

绝对值之和 ... 绝对值之和

⇓

至少有个为 ℓ（且为最大值）

$$S^{\ell} := \mathcal{E}(\hat{c}^{\ell}) + \rho \frac{\ell}{K}$$ → dictionary 的大小

⇓

找 $S^{\ell^*} = \min_{\ell=1,\dots,K} S^{\ell}$

4.2 理论分析上述做法的可行性

定义了 K_B^p 解的条件数，$B \subset \Omega$，p 表在 $L^p(\Omega)$ 空间中.

对于常系数偏微算子，若 $K_B^2 > 0$，则是有解且稳定的.

⇓ + 线性微分算子、初始条件有更多的 Fourier mode

变系数，也有同样的结果.

4.3 提供筛选数据的办法

$$\beta(x_j, t_j) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{m=1}^{m_J} \sum_{p=1}^{p_{max}} \left(\partial_x^p u(x_{j,m}, t_{j,m})\right)^2}$$

（无干扰）
只要在 $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ 中的数据.

（高斯干扰下如何选择）