Betrachte $\tilde{\Omega} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Für ein Modell $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ konstruieren wir iterativ Approximationen $s_f^{(n)} : \Omega \to \mathbb{R}^q$.

Sei $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein positiv definiter Kern, sodass $f \in \mathcal{H}_k(\Omega)$. Für iterativ gewählte $X_n := \{x_1, ..., x_n\} \subset \tilde{\Omega}$ konstruieren wir die Approximationen $s_f^{(n)}$ als die orthogonale Projektion in

$$V(X_n) := \operatorname{span}\{k(\cdot, x_1), ..., k(\cdot, x_n)\} \subset \mathcal{H}_k(\Omega).$$

Dies ist die beste Approximation von f bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)}$. Schreibe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bzw. $\|\cdot\|$ für das Skalarprodukt bzw. die Norm in $\mathcal{H}_k(\Omega)$. Gesucht sind also die Koeffizienten a_i, $i = 1, ..., n$ sodass

$$s_f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i k(\cdot, x_i).$$

Diese finden wir mittels einer Orthonormalbasis $(v_1, ..., v_n)$ von $V(X_n)$. Denn dann gilt

$$s_f(x) = \Pi_{V(X_n)}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,$$

wobei die $c_i := \langle f, v_i \rangle$ die Koeffizienten der Linearkombination beschreiben.

Mit $P_{V(X_n)}$ bezeichnen wir die Power Function, die den Approximationsfehler der schlechtesten Funktion $f \in \mathcal{H}_k(\Omega)$ an einer Stelle $x \in \Omega$ im n. Iterationsschritt angibt:

$$P_{V(X_n)}(x) := \sup_{f \in \mathcal{H}_k(\Omega)} \frac{|f(x) - s_f(n)(x)|}{\|f\|}.$$

Lemma 1. *Für alle $x \in \Omega$ gilt*

$$P_{V(X_n)}(x) = \|k(\cdot, x) - \Pi_{V(X_n)}(k(\cdot, x))\|.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{H}_k(\Omega)$, o.B.d.A. sei $\|f\| \leq 1$. Außerdem sei $v_1, ..., v_n$ eine Orthonormalbasis von $V(X_n)$. Für $x \in \Omega$ und $v_x := k(\cdot, x)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
f(x) - \Pi_{V(X_n)}(f)(x) &= \langle v_x, f\rangle - \langle v_x, \sum_{i=0}^{n} \langle f, v_i\rangle v_i\rangle \\
&= \langle v_x, f\rangle - \sum_{i=0}^{n} \langle f, v_i\rangle \langle v_x, v_i\rangle \\
&= \langle v_x, f\rangle - \langle \sum_{i=0}^{n} \langle v_x, v_i\rangle v_i, f\rangle \\
&= \langle v_x - \sum_{i=0}^{n} \langle v_x, v_i\rangle v_i, f\rangle \\
&\leq \|v_x - \sum_{i=0}^{n} \langle v_x, v_i\rangle v_i\| \|f\| \\
&\leq \|v_x - \Pi_{V(X_n)}(v_x)\|
\end{aligned}$$

Also muss für alle $x \in \Omega$

$$P_{V(x_n)}(x) = \sup_{f \in \mathcal{H}_k(\Omega), \|f\| \leq 1} |f(x) - \Pi_{V(X_n)}(f)(x)| \leq \|v_x - \Pi_{V(X_n)}(v_x)\|$$

Da für $f := \frac{v_x - \Pi_{V(X_n)}(v_x)}{\|v_x - \Pi_{V(X_n)}(v_x)\|} \in \mathcal{H}_k(\Omega)$

$$f(x) - \Pi_{V(X_n)}(f)(x) = \langle v_x - \Pi_{V(X_n)}(v_x), f\rangle \; = \|v_x - \Pi_{V(X_n)}(v_x)\|$$

gilt, folgt

$$P_{V(X_n)}(x) = \|v_x - \Pi_{V(X_n)}(v_x)\|.$$

□

Insbesondere gilt also

$$P_{V(X_0)}(x)^2 = \|k(\cdot, x)\|^2 = \langle k(\cdot, x), k(\cdot, x)\rangle = k(x, x),$$

und ist also für translationsinvariant Kern konstant, da $k(x, x) = \phi(x - x) = \phi(0) \, \forall x \in \Omega$.

Außerdem folgt

$$\begin{aligned}
P_{V(X_n)}(x)^2 &= \|k(\cdot, x) - \Pi_{V(X_n)}(k(\cdot, x))\|^2 \\
&= k(x, x) - \sum_{i=1}^{n} v_i(x)^2 \\
&= P_{V(X_0)}(x)^2 - \sum_{i=1}^{n} v_i(x)^2 \\
&= P_{V(X_{n-1})}(x)^2 - v_n(x)^2.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen das Residuum der n. Approximation mit

$$\begin{aligned} r_n(x) &:= f(x) - \Pi_{V(X_n)}(f)(x) \\ &= f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \\ &= r_{n-1}(x) - c_n v_n. \end{aligned}$$

Bei der iterativen Approximation gehen wir nun wie folgt vor. Wir konstruieren eine Orthonormalbasis $(v_1, ..., v_n)$ der $V(X_n)$, die sich in jedem Iterationsschritt erweitern lässt. Dabei wählen wir in der n. Iteration das x_n aus $\tilde{\Omega} \setminus X_{n-1}$ aus, das die Power function $P_{V(X_{n-1})}(x)$ maximiert und orthogonalisieren $k(\cdot, x_n)$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens. Das bedeutet

$$\begin{aligned} x_1 &= \arg\max_{x\in\tilde{\Omega}} \sqrt{k(x,x)} \\ v_1 &= \frac{k(\cdot, x_1)}{\sqrt{k(x_1, x_1)}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_n &= \arg\max_{x\in\tilde{\Omega}\setminus X_{n-1}} P_{V(X_{n-1})}(x) \\ v_n' &= k(\cdot, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \langle k(\cdot, x_n), v_i \rangle v_i \\ &= k(\cdot, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n) v_i \\ v_n &= \frac{v_n'}{\|v_n'\|}. \end{aligned}$$

Lemma 2. *Es gilt*

$$\| v_n' \| = P_{V(X_{n-1})}(x)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|v_n'\|^2 &= \langle k(\cdot, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n) v_i, k(\cdot, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n) v_i \rangle \\ &= k(x_n, x_n) - 2\sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} v_i(x_n) v_j(x_n) \langle v_i, v_j \rangle \\ &= P_{V(X_0)}(x_n)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n)^2 \\ &= P_{V(X_{n-1})}(x_n)^2. \end{aligned}$$

□

Also ist

$$v_n = \frac{k(\cdot, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n) v_i}{P_{V(X_{n-1})}(x_n)}.$$

Lemma 3. *Für die Koeffizienten c_n der Approximation folgt*

$$c_n = \langle f, v_n \rangle = \frac{r_{n-1}(x_n)}{P_{V(X_{n-1})}(x_n)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} c_n &= \langle f, v_n \rangle \\ &= \langle f, \frac{k(\cdot, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n) v_i}{P_{V(X_{n-1})}(x_n)} \rangle \\ &= \frac{f(x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(x_n) \langle f, v_i \rangle}{P_{V(X_{n-1})}(x_n)} \\ &= \frac{f(x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i(x_n)}{P_{V(X_{n-1})}(x_n)} \\ &= \frac{r_{n-1}(x_n)}{P_{V(X_{n-1})}(x_n)} \end{aligned}$$

□

Implementierung

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ und $\tilde{\Omega}$ eine Diskretisierung von Ω. Zur Implementierung notwendige Größe:

- $\tilde{\Omega} = \{x_1, ..., x_N\}$ Menge aller Punkte, aus denen wir $\tilde{N}$ viele auswählen
- $A = (k(x_i, x_j))_{i,j=1,...,N}$
- $f = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times q}$ die Auswertungen der zu approximierenden Funktion an $\tilde{\Omega}$

Dabei wird im k. Schritt gespeichert:

- $X_k := \{x_{j_1}, ..., x_{j_k}\} = X_{k-1} \cup \{x_{j_k}\}$, $J_k := \{j_1, ..., j_k\} = J_{k-1} \cup \{j_k\}$ die Auswahl von x_{j_k} aus $\tilde{\Omega} \setminus X_{k-1}$, sodass

$$x_{j_k} = \underset{x \in \tilde{\Omega} \setminus X_{k-1}}{\arg\max}\, P_{V(X_{k-1})}(x).$$

- Eine Matrix der zu berechnenden Basisvektoren ausgewertet an den ausgewählten Punkten $x_{j_i} \in X_k$, d.h.

$$V = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & \\ v_1(x_{j_3}) & v_2(x_{j_3}) & v_3(x_{j_3}) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ v_1(x_{j_1}) & 0 & & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ v_1(x_{j_2}) & v_2(x_{j_2}) & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times \tilde{N}}$$

wobei $V_{nm} = v_n(x_{j_m})$ für $j_m \in X_k$, $n \leq j_m$. Im k. Schritt wird also die k. Spalte gesetzt:

$$V_{ik} = v_k(x_i) \quad \forall i \in \{1, ..., N\} \setminus X_k$$

Es ist

$$\begin{aligned} v_k(x_i) &= \frac{k(x_i, x_{j_k}) - \sum_{j=1}^{k-1} v_j(x_{j_k}) v_j(x_i)}{P_{V(X_{k-1})}(x_{j_k})} \\ &= \frac{A_{i,j_k} - \sum_{j=1}^{k-1} v_j(x_{j_k}) v_j(x_i)}{P_{V(X_{k-1})}(x_{j_k})} \end{aligned}$$

mit

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j(x_{j_k}) v_j(x_i) = \begin{pmatrix} v_1(x_{j_k}) & \dots & v_{k-1}(x_{j_k}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(x_i) \\ \vdots \\ v_{k-1}(x_i) \end{pmatrix}.$$

V wird mit $V = 0 \in \mathbb{R}^{N \times \tilde{N}}$ initialisiert.

- Die Koeffizienten der Linearkombination von $s_f^{(k)}$:

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{N} \times q}$$

wobei $c_k = \langle f, v_k \rangle = \frac{r_{k-1}(x_{j_k})}{P_{V(X_{k-1})}(x_{j_k})}$. Es wird $c := 0 \in \mathbb{R}^{\tilde{N} \times q}$ gesetzt.

- Das Residuum im k. Schritt ausgewertet an $x_i \in \tilde{\Omega}$, d.h

$$R^{(k)} = \begin{pmatrix} r_k(x_1) \\ \vdots \\ r_k(x_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times q}$$

wobei $r_k(x_{j_i}) = 0 \quad \forall i \in J_k$. Dabei wird wie folgt aktualisiert:

$$r_k(x_i) = r_{k-1}(x_i) - c_k v_k(x_i) \quad \forall i \in \{1, ..., N\} \setminus X_{k-1}.$$

Es wird $R^{(0)} = f \in \mathbb{R}^{N \times q}$ initialisiert.

- Die Power Function ausgewertet an den Punkten $x_i \in \tilde{\Omega}$

$$P^{(k)} = \begin{pmatrix} P_{V(X_k)}(x_1) \\ \vdots \\ P_{V(X_k)(x_N)} \end{pmatrix}$$

, wobei $P_{V(X_k)}(x_i) = 0 \quad \forall i \in J_k$. Dabei wird wie folgt aktualisiert:

$$P_{V(X_k)}(x_i) = \sqrt{P_{V(X_{k-1})}(x_i)^2 - v_{j_k}(x_i)^2} \quad \forall i \in \{1, ..., N\} \setminus X_{k-1}.$$

Es wird

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} P_{V(X_0)}(x_1) \\ \vdots \\ P_{V(X_0)(x_N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x_1, x_1) \\ \vdots \\ k(x_1, x_1) \end{pmatrix}$$

gesetzt.

- Die Basiswechselmatrix $T = (d_{ij})_{i,j=1,...,\tilde{N}}$ von $(v_1, ..., v_{\tilde{N}})$ zu $(k(\cdot, x_{j_1}), ..., k(\cdot, x_{j_{\tilde{N}}}))$, wobei

$$v_j = \sum_{i=0}^{\tilde{N}} d_{ij} k(\cdot, x_{j_i}) = \sum_{i=0}^{j} d_{ij} k(\cdot, x_{j_i}) \quad \forall j = 1, \ldots, \tilde{N}.$$

Im k. Schritt wird also die k. Spalte gesetzt mit

$$\begin{aligned} d_{lk} &= -\frac{1}{P_{V(X_{k-1})}(x_{j_k})} \begin{pmatrix} d_{l1} & \ldots & d_{l,k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(x_{j_k}) \\ \vdots \\ v_{k-1}(x_{j_k}) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{P_{V(X_{k-1})}(x_{j_k})} \sum_{i=1}^{k-1} v_i(x_{j_k}) d_{li} \quad \forall l < k \end{aligned}$$

und $d_{kk} = \frac{1}{P_{V(X_{k-1})}(x_{j_k})}$, $d_{lk} = 0$ falls $l > k$, da

$$\begin{aligned} v_k' &= k(\cdot, x_{j_k}) - \sum_{i=1}^{k-1} v_i(x_{j_k}) v_i \\ &= k(\cdot, x_{j_k}) - \sum_{i=1}^{k-1} v_i(x_{j_k}) \sum_{l=1}^{i} d_{li} k(\cdot, x_{j_l}) \\ &= k(\cdot, x_{j_k}) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} v_i(x_{j_k}) d_{li} k(\cdot, x_{j_l}) \\ &= k(\cdot, x_{j_k}) - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} v_i(x_{j_k}) d_{li} k(\cdot, x_{j_l}) \end{aligned}$$

und

$$v_k = \frac{v_k'}{P_{V(X_{k-1})}(x_{j_k})}.$$

Initialisiert wird T mit

$$T = 0 \in \mathbb{R}^{\tilde{N} \times \tilde{N}}.$$