Fondamenti di Automatica

Davide Calabrò

January 20, 2020

Appunti

0.1 Calcolo esplicito dei movimenti

Sistemi L.T.I. a tempo continuo - Formula di Lagrange

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \tag{1}$$

Sistemi L.T.I. a tempo discreto

$$y(t) = CA^t X_0 + C \sum_{i=1}^{t} A^{t-i} Bu(i-1) + Du(t) \tag{2}$$

0.2 Analisi di stabilità del polinomio caratteristico

0.2.1 Sistemi L.T.I. a tempo continuo

Dato il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n \tag{3}$$

allora

Condizione necessaria perl'asintotica stabilità Tutti gli a_i hanno lo stesso segno (condizione necessaria e sufficiente se $p(\lambda)$ ha ordine 2)

Criterio di Routh-Hurwitz

1. Definizione della tabella di Routh

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & ... \\ a_1 & a_3 & a_5 & ... \\ h_1 & h_2 & h_3 & ... \\ k_1 & k_2 & k_3 & ... \\ l_1 & l_2 & l_3 & ... \end{bmatrix} \tag{4}$$

   Definendo l_i come:

$$l_i = -\frac{1}{k_1} \det\left(\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix}\right) \tag{5}$$

   E' necessario proseguire fino alla riga $n + 1$. Inoltre se $\exists k_1 = 0$ non è possibile definire la riga successiva, dunque la tabella non è ben definita.

2. Il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE sse
   - La tabella di Routh è ben definita
   - Tutti gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno

   Inoltre il numero di cambiamenti di segno è uguale al numero di autovalori con parte reale positiva.

0.2.2 Sistemi L.T.I a tempo discreto

Dato il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + ... + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{6}$$

Teo 1 Condizione necessaria è che $\left|\frac{a_n}{a_0}\right| < 1$ e $\left|\frac{a_1}{a_0}\right| < n$

Teo 2 Condizione necessaria è che $a_0 p_A(\lambda = 1) = a_0(a_0 + ... + a_n) > 0$

Teo 3 Condizione sufficiente è che $a_0 > a_1 > ... > a_{n-1} > a_n$

Teo 4 Condizione sufficiente è che $\sum_{i=1}^{n} |a_i| < |a_0|$

Criterio di Jury E' condizione necessaria e sufficiente

1. Costruzione della tabella

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_{n-1} & a_n \\ h_1 & h_2 & ... & h_\nu & \\ l_1 & l_2 & ... & & \end{bmatrix} \tag{7}$$

   con

$$l_i = \frac{1}{h_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{\nu-i+1} \\ h_\nu & h_i \end{bmatrix} \text{ con } i = 1, ..., \nu - 1 \tag{8}$$

   Da qui ottengo una tabella triangolare. Se inoltre nel calcolo di l_i ho un $h_1 = 0$ allora la tabella non è ben definita. Ci si ferma quando arriviamo a $n + 1$ righe.

2. Il sistema è AS. STABILE sse

   - La tabella è ben definita
   - Gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno

0.3 Sistemi non lineari tempo invarianti

0.3.1 Linearizzazione di sistemi a tempo continuo

1. Definire un movimento di equilibrio intorno al quale linearizzare. Dunque prendiamo $u(t) = \bar{u}$ e cerchiamo i punti $\bar{x}$ per i quali $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

2. Calcolo le matrici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = A(\bar{x}, \bar{u}) \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = B(\bar{x}, \bar{u}) \tag{9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = C(\bar{x}, \bar{u}) \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = D(\bar{x}, \bar{u}) \tag{10}$$

3. Descrivo le dinamiche del sistema, definendo

$$\delta x = x - \bar{x} \qquad \delta y = y - \bar{y} \qquad \delta u = u - \bar{u} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A(\bar{x}, \bar{u})\delta x + B(\bar{x}, \bar{u})\delta u \\ \delta \dot{y} = C(\bar{x}, \bar{u})\delta x + D(\bar{x}, \bar{u})\delta u \end{cases} \tag{12}$$

Stabilità degli equilibri

- Se tutti gli autovalori di $A(\bar{x}, \bar{u})$ hanno $Re(\lambda_i) < 0$ allora il movimento di equilibrio $\bar{x}$ è ASINTOTICAMENTE STABILE (ricordando che si tratta di una stabilità locale).
- Se $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0$ l'equilibrio $\bar{x}$ è instabile
- Se $\forall \lambda_i : Re(\lambda_i) \leq 0$ ed $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) = 0$, non posso concludere nulla. In questo caso uso il metodo grafico, ovvero considero la funzione

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}) = \begin{cases} \text{se } f(x, \bar{u}) > 0 \rightarrow \dot{x} > 0 \\ \text{se } f(x, \bar{u}) < 0 \rightarrow \dot{x} < 0 \end{cases} \tag{13}$$

0.3.2 Linearizzazione di sistemi a tempo discreto

Il procedimento è il medesimo e si ottiene un sistema linearizzato del tipo

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t+1) = A(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + B(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta \dot{y}(t+1) = C(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + D(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases} \tag{14}$$

Stabilità degli equilibri Utilizziamo il criterio degli autovalori.
Detti λ_i per $i = 1, ..., \mu$ autovalori di A

- Se $|\lambda_i| < 1$, allora l'equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è AS. STABILE
- Se $\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1$, l'equilibrio è INSTABILE
- Negli altri casi non si può dire nulla

0.4 Trasformata di Laplace e funzioni di trasferimento

0.4.1 Trasformate notevoli

$\frac{1}{s}$	$sca(t)$
$\frac{1}{s^2}$	$ram(t)$
$\frac{1}{s^3}$	$par(t)$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$sin(\omega t)$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t} sca(t)$

0.4.2 Proprietà dell'antitrasformata

Teorema della risposta finale Data $F(s)$

- grado $D(s) >$ grado $N(s)$
- i poli di $F(s)$ sono o nulli o hanno $Re(s) < 0$

sotto queste ipotesi vale:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{15}$$

Teorema della risposta iniziale Data $F(s)$, se grado $D(s) >$ grado $N(s)$ allora vale:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{16}$$

0.4.3 Applicazione di Laplace e funzione di trasferimento

Dato un generico sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx + Du \end{cases} \tag{17}$$

applicando la trasformata di Laplace otteniamo

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{18}$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}X_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \tag{19}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{20}$$

dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento ed esprime il legame tra il segnale d'ingresso e quello d'uscita.

0.4.4 Schemi a blocchi

Date $G_1(s)$ e $G_2(s)$ funzioni di trasferimento di due sistemi S_1 e S_2, in base a come questi sono collegati, otteniamo un $G_{eq}(s)$ che è pari a

- Collegamento in serie: $G_{eq}(s) = G_1(s)G_2(s)$

- Collegamento in parallelo: $G_{eq}(s) = G_1(s) + G_2(s)$
- Retroazione: $G_{eq}(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{\text{f. di andata}}{1+L(s)}$

0.5 Tracciamento dei diagrammi di Bode

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)} \frac{\prod_i (1 + 2\xi_i \frac{s}{\alpha_{ni}} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{\prod_i (1 + 2\xi_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})} \tag{21}$$

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i)}{\prod_i (1 + j\omega T_i)} \frac{\prod_i (1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2})}{\prod_i (1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2})} \tag{22}$$

0.5.1 Diagramma del modulo

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|\mu| - 20\log_{10}|\omega| + \\ \sum_i 20\log_{10}|1 + j\omega\tau_i| - \sum_i 20\log_{10}|1 + j\omega T_i| + \\ \sum_i 20\log_{10}\left|1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right| - 20\log_{10}\left|1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right| \end{aligned}$$

Regole di tracciamento

1. Tratto iniziale (prima di qualsiasi polo o zero) è una retta avente pendenza $-20g\ dB/dec$, che nel punto $\omega_0 = 1$ assume il valore $20log_{10}|\mu|$
2. In corrispondenza di:
   - $\omega = \frac{1}{\tau_i}$ (zeri), la pendenza $\uparrow\ m * 20\ dB/dec$
   - $\omega = \frac{1}{T_i}$ (poli), la pendenza $\downarrow\ m * 20\ dB/dec$
   - $\omega = \omega_n$ (zeri C/C), la pendenza $\uparrow\ 2 * m * 20\ dB/dec$
   - $\omega = \omega_n$ (poli C/C), la pendenza $\downarrow\ 2 * m * 20\ dB/dec$

0.5.2 Diagramma della fase

$$\begin{aligned} \measuredangle G(j\omega) = \measuredangle\mu - g90^o \\ + \sum_i \measuredangle(1 + j\omega\tau_i) - \sum_i \measuredangle(1 + j\omega T_i) \\ + \sum_i \measuredangle(1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}) - \sum_i \measuredangle(1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}) \end{aligned}$$

Regole di tracciamento

1. Il tratto iniziale, fino al primo zero e polo, ha valore $\sphericalangle \mu - g90^o$

2. çLa fase, in corrispondenza di:

   - Polo reale:
     $T_i > 0 \implies \downarrow 90^o$
     $T_i < 0 \implies \uparrow 90^o$
   - Zero reale:
     $\tau_i > 0 \implies \uparrow 90^o$
     $\tau_i < 0 \implies \downarrow 90^o$
   - Poli C/C:
     $\xi > 0 \implies \downarrow 180^o$
     $\xi < 0 \implies \uparrow 180^o$
   - Zeri C/C:
     $\xi > 0 \implies \uparrow 180^o$
     $\xi < 0 \implies \downarrow 180^o$

0.6 Stabilità dei sistemi retroazionati

Criterio di Nyquist Si definisca P come il numero di poli di $L(s)$ con $Re > 0$. Si tracci il diagramma di Nyquist di $L(s)$ e si definisca con N il numero di giri che il diagramma compie intorno al punto -1:

- positivamente se compiuti in senso antiorario
- negativamente se compiuti in senso orario

Se il diagramma passa per il punto -1, N non è ben definita.
Il sistema è AS. STABILE sse $N = P$

Criterio di Bode Sotto le ipotesi

1. L strettamente propria
2. $P = 0$
3. Il diagramma di Bode attraversa una e una sola volta l'asse a $0dB$, da sopra a sotto perche per l'asintotica stabilità deve valere $\lim_{\omega \to \infty} L(j\omega) = -\infty$

il sistema ad anello chiuso è AS. STABILE sse

$$\begin{cases} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{cases} \tag{23}$$

0.7 Prestazioni dei sistemi di controllo

0.7.1 Prestazioni statiche

Definiamo le funzioni

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \qquad S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \qquad Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)}$$

otteniamo una tabella per la relazione tra i vari segnali

$y(t)$	$F(s)$	$S(s)$	$-F(s)$
$e(t)$	$S(s)$	$-S(s)$	$F(s)$
$u(t)$	$Q(s)$	$-Q(s)$	$-Q(s)$
/	$y^o(t)$	$d(t)$	$n(t)$

0.7.2 Prestazioni dinamiche

Se vogliamo dei requisiti su

$$T_{ass} = T_s \qquad S\% \leq s$$

otteniamo delle specifiche su φ_m e ω_c

Esempio pratico Se voglio una $S\% \leq s$ calcolo

$$100e^{\frac{-\xi_F \pi}{\sqrt{1-\xi_F}}} \implies \xi_F \geq \sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}} \qquad \text{dove } \rho = \frac{\ln^2(\frac{s}{100})}{\pi^2} \tag{24}$$

Considero poi due casi, in modo da distinguere i casi di approssimazione di ordine 1 e quella di ordine 2

- Se $\varphi_m \leq 75^o$

$$T_{ass} \cong \frac{5}{\xi_F \omega_c} \leq T_s \implies \omega_c \cdot \varphi_m \geq \frac{5 \cdot 100}{s} \tag{25}$$

- Se $\varphi_m > 75^o$

$$T_{ass} \cong \frac{5}{\omega_c} \leq s \implies \omega_c \geq \frac{s}{5} \tag{26}$$

0.8 Regolatore discretizzato

Passaggio da R(s) a R*(s) Ci sono tre modi per passare da una funzione di un regolatore a tempo continuo a una a tempo discreto:

- Eulero Esplicito
$$s = \frac{z-1}{T_s} \tag{27}$$
- Eulero Implicito
$$s = \frac{z-1}{zT_s} \tag{28}$$
- Tustin
$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \tag{29}$$

Variazione del margine di fase

$$\Delta\varphi_m = -\frac{T_s}{2} \cdot \omega_c \cdot \frac{180}{\pi} \tag{30}$$

Calcolo del tempo di campionamento per il rispetto di un margine di fase reale Considerando:

- Il ritardo corrispondente alla cascata campionatore+mantenitore pari a $\tau_S = T_S/2$, il corrispondente contributo al margine di fase (in gradi) è $-\tau_S \cdot \omega_c \cdot \frac{180}{\pi}$
- Il contributo del margine di fase (in gradi) dato dal ritardo di elaborazione è pari a $-\tau_{EL}\omega_c\frac{180}{\pi}$
- Il filtro passabasso antialiasing ha banda $[0, \omega_{AA}]$ con $\omega_{AA} >> \omega_c$. Lo sfasamento conferito dal filtro al margine di fase è pari a $-\arctan(\omega_c/\omega_{AA})$

Da qui otteniamo

$$\varphi_m^{REALE} = \varphi_m^o - (\frac{T_S}{2} + \tau_{EL}) \cdot \omega_c \frac{180}{\pi} - \arctan(\omega_c/\omega_{AA}) \tag{31}$$

Sostituendo tutti i valori e quindi anche il margine di fase reale desiderato si ottiene il valore T_S.