

振動と線型代数

いか (GitHub: calamari-dev)

2022 年 4 月 10 日

目次

1	2 自由度系の振動	1
2	重心運動・相対運動と座標系の回転	2
3	固有ベクトルとの関係	3
4	3 自由度系の振動	6

1 2 自由度系の振動

質量 m の質点 P, Q を, ばね定数 k のばねで図 1 のように繋いだ. ただし, 床はなめらかであり, ばねは初め自然長であるとする. 各質点に初速を与えてから, P の変位 x_1 , Q の変位 x_2 がどう変化するか考える.

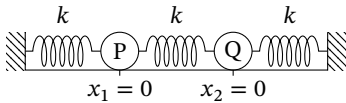


図 1 ばねで繋がれた 2 つの質点

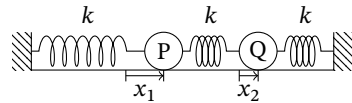


図 2 各質点に初速を与えた後の様子

P, Q の運動方程式は

$$ma_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = k(-2x_1 + x_2), \quad (1)$$

$$ma_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = k(x_1 - 2x_2) \quad (2)$$

であるが、このままでは x_1 と x_2 が入り組んでいて解きにくい。そこで、質点 P、Q の重心 G を質量 $2m$ の質点とみなして、質点 G の変位 $(x_1 + x_2)/2$ の運動方程式を調べる。これは式 (1) と式 (2) を足せば得られて

$$2m \frac{a_1 + a_2}{2} = -2k \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3)$$

となる。式 (3) は角振動数 $\sqrt{2k/(2m)}$ の単振動の式だから

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = c \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (c \text{ は振幅}) \quad (4)$$

である。

次に、質点 P 上にいる観測者から見た、質点 Q の運動方程式を立てる。質点 P の加速度は 0 とは限らないので、この座標系は非慣性系である。よって、運動方程式には慣性力の項 $-ma_1$ が加わり、次のようになる。

$$m(a_2 - a_1) = (-k(x_2 - x_1) - kx_2) + (-ma_1) = -3k(x_2 - x_1) \quad (5)$$

式 (5) は角振動数 $\sqrt{3k/m}$ の単振動の式だから

$$x_2 - x_1 = d \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t\right) \quad (d \text{ は振幅}) \quad (6)$$

である。

式 (4)、式 (6) から、 x_1 と x_2 は以下ようになる。ただし $c_1 = c$ 、 $c_2 = d/2$ は、質点の初期速度から決まる t によらない数である。

$$x_1 = c_1 \sin(\omega t) - c_2 \sin(\sqrt{3}\omega t), \quad x_2 = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \sin(\sqrt{3}\omega t) \quad (\omega = \sqrt{k/m}) \quad (7)$$

以上の解法によって、質点 P、Q の運動は計算できることが分かった。以下では、この解法を異なる視点から考察する。

2 重心運動・相対運動と座標系の回転

$(c_1, c_2) = (1, 0)$ のときの (x_1, x_2) を \vec{u}_1 、 $(c_1, c_2) = (0, 1)$ のときの (x_1, x_2) を \vec{u}_2 としよう。このとき、 $\vec{x} = (x_1, x_2)$ は式 (7) から $c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2$ と表せる。

ある時刻における \vec{u}_1 、 \vec{u}_2 は図 3、図 4 のようになり、 xy 平面上で単振動する。また、図 5 を見ると、 \vec{x} の各成分を表す式は複雑だが、 \vec{x} を左回りに $\pi/4$

だけ回転したベクトル \vec{y} は

$$\vec{y} = \sqrt{2}(-c_1 \sin(\omega t), c_2 \sin(\sqrt{3}\omega t))$$

という、ごく簡単な式で表せることがわかる。

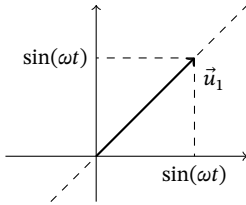


図 3 \vec{u}_1

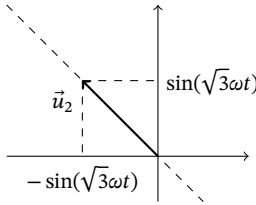


図 4 \vec{u}_2

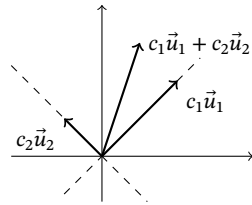


図 5 $\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2$

$\vec{y} = (y_1, y_2)$ とおく． $y_1 + y_2 i$ は, $\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)$ を $x_1 + x_2 i$ に掛けた値なので

$$y_1 + y_2 i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) (x_1 + x_2 i) = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} i$$

である．したがって

$$\vec{y} = \frac{(x_1 - x_2, x_1 + x_2)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1, 0) + \sqrt{2}\left(0, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

となる．この式によれば, \vec{y} の第 1 成分は相対運動を, 第 2 成分は重心運動をそれぞれ表している．

つまり, \vec{x} の運動は \vec{u}_1 の単振動と \vec{u}_2 の単振動の和であり, 相対運動と重心運動の運動方程式が単振動の式になったのは, それが \vec{x} を左方向に $\pi/4$ 回転するのと同等であるからといえる．

ここまで \vec{u}_i を運動方程式の一般解から定義して議論を進めてきたが, 逆に \vec{u}_i を運動方程式から直接計算して, x_1 と x_2 を式 $\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2$ から求めることもできる．次節ではこちらの解法について, 線型代数の観点から説明する．

3 固有ベクトルとの関係

以下に, 質点 P, Q の運動方程式 (1), (2) を再掲する．

$$ma_1 = k(-2x_1 + x_2), \quad ma_2 = k(x_1 - 2x_2)$$

これは、行列を用いれば

$$m \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書き直せる。また、 $a_1 = (d^2/dt^2)x_1$, $a_2 = (d^2/dt^2)x_2$ だから

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = A \mathbf{x}(t) \quad (A = \begin{pmatrix} -2k/m & k/m \\ k/m & -2k/m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = {}^t(x_1(t) \ x_2(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}) \quad (8)$$

である。ただし、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ は「ばねは初め自然長であるとする」という仮定に対応する。

ここで、次式を満たす t に依存しない λ_i , $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$ が得られたとする。

$$A \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \quad 0 > \lambda_1 > \lambda_2) \quad (9)$$

このとき

$$\frac{d^2}{dt^2} (\sin(\sqrt{-\lambda_i} t) \mathbf{e}_i) = -(\sqrt{-\lambda_i})^2 \sin(\sqrt{-\lambda_i} t) \mathbf{e}_i = \sin(\sqrt{-\lambda_i} t) (\lambda_i \mathbf{e}_i) = \sin(\sqrt{-\lambda_i} t) (A \mathbf{e}_i)$$

なので、 $\mathbf{u}_i(t) = \sin(\sqrt{-\lambda_i} t) \mathbf{e}_i$ は式 (8) の解になっている。したがって、式 (9) を満たす λ_i , \mathbf{e}_i の組を見つけれれば、式 (8) の単振動する解が得られる。

まず、 λ_i の条件を調べよう。

$$\begin{aligned} A \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i &\iff (\lambda_i E - A) \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i + 2k/m & -k/m \\ -k/m & \lambda_i + 2k/m \end{pmatrix} \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \\ &\iff {}^t(\lambda_i + 2k/m \quad -k/m) \perp \mathbf{e}_i \text{ かつ } {}^t(-k/m \quad \lambda_i + 2k/m) \perp \mathbf{e}_i \\ &\implies {}^t(\lambda_i + 2k/m \quad -k/m) \parallel {}^t(-k/m \quad \lambda_i + 2k/m) \end{aligned}$$

だから、ベクトルの平行条件より、 λ_i は $(\lambda_i + 2k/m)^2 - (-k/m)^2 = 0$ を満たす必要がある。この 2 次方程式の解は $\lambda_i = -k/m, -3k/m$ であり、 $\lambda_1 > \lambda_2$ なので $\lambda_1 = -k/m$, $\lambda_2 = -3k/m$ である。

次に、 $A \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ を満たす \mathbf{e}_i を計算する。 $i = 1$ のとき

$$(\lambda_1 E - A) \mathbf{e}_1 = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \iff \mathbf{e}_1 \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので、 $\lambda_1 = -k/m$, $\mathbf{e}_1 = {}^t(1 \ 1)$ とすれば、 λ_1 , \mathbf{e}_1 は式 (9) を満たす。

同様に計算すると、 $\lambda_2 = -3k/m$, $\mathbf{e}_2 = {}^t(-1 \ 1)$ は式 (9) を満たすことが確かめられる。こうして、式 (8) の単振動する 2 解

$$\mathbf{u}_1(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られた。

図3, 図4を見ると, $\mathbf{u}_i(t)$ は前節で定義した $\bar{\mathbf{u}}_i$ と等しいことがわかる。よって, 式(8)の一般解は $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t)$ となるはずである。

実際に, 式(8)の一般解が $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t)$ であることを確かめよう。 $\mathbf{r}(t)$ は式(8)の解であるとする。 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は1次独立だから, $\mathbf{r}(t)$ は $\mathbf{r}(t) = y_1(t)\mathbf{e}_1 + y_2(t)\mathbf{e}_2$ と表せる。また, $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ なので

$$A\mathbf{r}(t) = y_1(t)A\mathbf{e}_1 + y_2(t)A\mathbf{e}_2 = y_1(t)(\lambda_1 \mathbf{e}_1) + y_2(t)(\lambda_2 \mathbf{e}_2)$$

である。一方, $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が2階微分でできれば

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} \mathbf{e}_2$$

だから, $\mathbf{r}(t)$ が式(8)の解ならば

$$\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} \mathbf{e}_2 = \lambda_1 y_1(t) \mathbf{e}_1 + \lambda_2 y_2(t) \mathbf{e}_2$$

となる。 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は1次独立だから

$$\frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = \lambda_i y_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

が成立する。 $\lambda_i < 0$ なので, これは角振動数 $\sqrt{-\lambda_i}$ の単振動の式である。また, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ なので $y_1(0) = y_2(0) = 0$ である。したがって, $y_i(t)$ は $y_i(t) = c_i \sin(\sqrt{-\lambda_i} t)$ と表せて

$$\mathbf{r}(t) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda_1} t) \mathbf{e}_1 + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda_2} t) \mathbf{e}_2 = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t)$$

である。

以上により, 式(8)を満たす任意の $\mathbf{r}(t)$ は, 定数 c_1, c_2 を用いて $\mathbf{r}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t)$ と表せる。一方, $c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t)$ は c_1, c_2 の値によらず式(8)の解なので, $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t)$ は式(8)の一般解である。

実は, 方程式 $(\lambda + 2k/m)^2 - (-k/m)^2 = 0$ は A の「固有方程式」に, \mathbf{e}_i は A の「固有ベクトル」に相当する。最後に, これらの事項を既知とすれば, 質点の個数を増やしても運動が解析できることを示す。

4 3 自由度系の振動

図 1 に質量 m の質点 R を追加し, 図 6 のように, すべてのばねが自然長になるよう繋いだ.

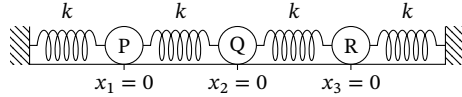


図 6 ばねで繋がれた 3 つの質点

各質点に初速を与えると, P の変位 x_1 , Q の変位 x_2 , R の変位 x_3 はどう変化するか考える. P, Q, R の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) = k(-2x_1 + x_2), \\ m \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = k(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ m \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} &= -k(x_3 - x_2) - kx_3 = k(x_2 - 2x_3) \end{aligned}$$

であり, 行列を用いれば

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\mathbf{x}(t) = {}^t(x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{0})$$

と書き直せる. 右辺を $(k/m)A\mathbf{x}(t)$ とおく. A の固有値は

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2)((\lambda + 2)^2 - 1) - (\lambda + 2) = (\lambda + 2)((\lambda + 2)^2 - 2) \end{aligned}$$

より $-2 - \sqrt{2}$, -2 , $-2 + \sqrt{2}$ である. これらを順に λ_1 , λ_2 , λ_3 とおく. A の固有値 λ_i に属する固有空間を根気強く計算すると

$$\mathbf{e}_1 = {}^t(1 \ -\sqrt{2} \ 1), \quad \mathbf{e}_2 = {}^t(-1 \ 0 \ 1), \quad \mathbf{e}_3 = {}^t(1 \ \sqrt{2} \ 1)$$

が, それぞれ A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に属する固有ベクトルであることがわかる¹⁾. したがって, 式

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (P = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3))$$

が成立する. $(d^2/dt^2)\mathbf{x}(t) = (k/m)A\mathbf{x}(t)$ の両辺に左から P^{-1} を掛けると

$$\frac{d^2}{dt^2}P^{-1}\mathbf{x}(t) = \frac{k}{m}P^{-1}A\mathbf{x}(t) = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{x}(t)$$

となるので, $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t) = {}^t(y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t))$ は

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = -\frac{\lambda_i k}{m} y_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

を満たす. よって, 各 $y_i(t)$ は角振動数 $\sqrt{-\lambda_i k/m}$ で単振動する. また, $\mathbf{y}(0) = P^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ なので, $y_i(t)$ は

$$y_i(t) = c_i \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda_i k}{m}} t\right) \quad (i = 1, 2, 3)$$

と表せる. したがって

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^3 c_i \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda_i k}{m}} t\right) \mathbf{e}_i$$

である.

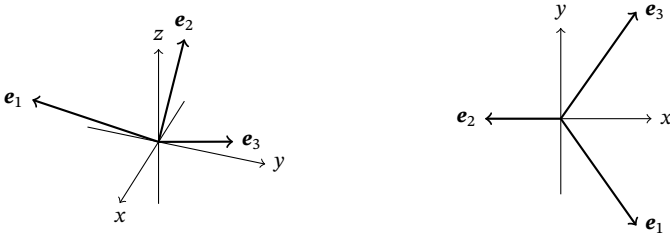


図7 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

1) よく見ると, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ はどの2つも互いに直交している. これは A が対称行列であることに起因する.