振動と線型代数

いか（GitHub: calamari-dev）

2022 年 4 月 10 日

目次

1 2 自由度系の振動

質量 m の質点 P，Q を，ばね定数 k のばねで図 1 のように繋いだ．ただし，床はなめらかであり，ばねは初め自然長であるとする．各質点に初速を与えてから，P の変位 x_1，Q の変位 x_2 がどう変化するか考える．

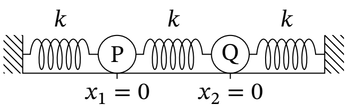

図 1　ばねで繋がれた 2 つの質点

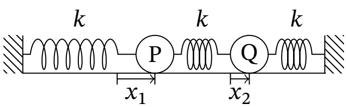

図 2　各質点に初速を与えた後の様子

P，Q の運動方程式は

$$ma_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = k(-2x_1 + x_2), \tag{1}$$
$$ma_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = k(x_1 - 2x_2) \tag{2}$$

であるが，このままでは x_1 と x_2 が入り組んでいて解きにくい．そこで，質点 P，Q の重心 G を質量 $2m$ の質点とみなして，質点 G の変位 $(x_1+x_2)/2$ の運動方程式を調べる．これは式 (1) と式 (2) を足せば得られて

$$2m\frac{a_1+a_2}{2} = -2k\frac{x_1+x_2}{2} \tag{3}$$

となる．式 (3) は角振動数 $\sqrt{2k/(2m)}$ の単振動の式だから

$$\frac{x_1+x_2}{2} = c\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (c \text{ は振幅}) \tag{4}$$

である．

次に，質点 P 上にいる観測者から見た，質点 Q の運動方程式を立てる．質点 P の加速度は 0 とは限らないので，この座標系は非慣性系である．よって，運動方程式には慣性力の項 $-ma_1$ が加わり，次のようになる．

$$m(a_2-a_1) = (-k(x_2-x_1)-kx_2)+(-ma_1) = -3k(x_2-x_1) \tag{5}$$

式 (5) は角振動数 $\sqrt{3k/m}$ の単振動の式だから

$$x_2-x_1 = d\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \quad (d \text{ は振幅}) \tag{6}$$

である．

式 (4)，式 (6) から，x_1 と x_2 は以下のようになる．ただし $c_1 = c$，$c_2 = d/2$ は，質点の初期速度から決まる t によらない数である．

$$x_1 = c_1\sin(\omega t) - c_2\sin(\sqrt{3}\omega t), \quad x_2 = c_1\sin(\omega t) + c_2\sin(\sqrt{3}\omega t) \quad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{7}$$

以上の解法によって，質点 P，Q の運動は計算できることが分かった．以下では，この解法を異なる視点から考察する．

2 重心運動・相対運動と座標系の回転

$(c_1,c_2) = (1,0)$ のときの (x_1,x_2) を $\vec{u}_1$，$(c_1,c_2) = (0,1)$ のときの (x_1,x_2) を $\vec{u}_2$ としよう．このとき，$\vec{x} = (x_1,x_2)$ は式 (7) から $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ と表せる．

ある時刻における $\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$ は図 3，図 4 のようになり，xy 平面上で単振動する．また，図 5 を見ると，$\vec{x}$ の各成分を表す式は複雑だが，$\vec{x}$ を左回りに $\pi/4$

だけ回転したベクトル $\vec{y}$ は

$$\vec{y} = \sqrt{2}(-c_1 \sin(\omega t), c_2 \sin(\sqrt{3}\omega t))$$

という，ごく簡単な式で表せることがわかる．

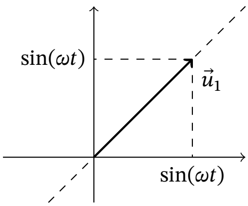

図 3　$\vec{u}_1$

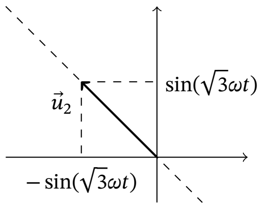

図 4　$\vec{u}_2$

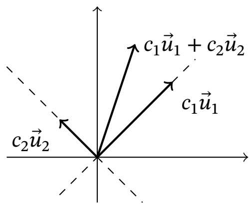

図 5　$\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$

$\vec{y} = (y_1, y_2)$ とおく．$y_1 + y_2 i$ は，$\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$ を $x_1 + x_2 i$ に掛けた値なので

$$y_1 + y_2 i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(x_1 + x_2 i) = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}i$$

である．したがって

$$\vec{y} = \frac{(x_1 - x_2, x_1 + x_2)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1, 0) + \sqrt{2}\left(0, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

となる．この式によれば，$\vec{y}$ の第 1 成分は相対運動を，第 2 成分は重心運動をそれぞれ表している．

つまり，$\vec{x}$ の運動は $\vec{u}_1$ の単振動と $\vec{u}_2$ の単振動の和であり，相対運動と重心運動の運動方程式が単振動の式になったのは，それが $\vec{x}$ を左方向に $\pi/4$ 回転するのと同等であるからといえる．

ここまで $\vec{u}_i$ を運動方程式の一般解から定義して議論を進めてきたが，逆に $\vec{u}_i$ を運動方程式から直接計算して，x_1 と x_2 を式 $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ から求めることもできる．次節ではこちらの解法について，線型代数の観点から説明する．

3　固有ベクトルとの関係

以下に，質点 P，Q の運動方程式 (1)，(2) を再掲する．

$$ma_1 = k(-2x_1 + x_2), \quad ma_2 = k(x_1 - 2x_2)$$

これは，行列を用いれば

$$m\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\frac{k}{m}\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

と書き直せる．また，$a_1=(d^2/dt^2)x_1$，$a_2=(d^2/dt^2)x_2$ だから

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t)=A\boldsymbol{x}(t)\quad \left(A=\left(\begin{smallmatrix}-2k/m&k/m\\k/m&-2k/m\end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{x}(t)={}^t(x_1(t)\quad x_2(t)),\ \boldsymbol{x}(0)=\mathbf{0}\right) \tag{8}$$

である．ただし，$\boldsymbol{x}(0)=\mathbf{0}$ は「ばねは初め自然長であるとする」という仮定に対応する．

ここで，次式を満たす t に依存しない λ_i，$\boldsymbol{e}_i\neq\mathbf{0}$ が得られたとする．

$$A\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i\quad (i=1,2,\ 0>\lambda_1>\lambda_2) \tag{9}$$

このとき

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin(\sqrt{-\lambda_i}t)\boldsymbol{e}_i)=-(\sqrt{-\lambda_i})^2\sin(\sqrt{-\lambda_i}t)\boldsymbol{e}_i=\sin(\sqrt{-\lambda_i}t)(\lambda_i\boldsymbol{e}_i)=\sin(\sqrt{-\lambda_i}t)(A\boldsymbol{e}_i)$$

なので，$\boldsymbol{u}_i(t)=\sin(\sqrt{-\lambda_i}t)\boldsymbol{e}_i$ は式 (8) の解になっている．したがって，式 (9) を満たす λ_i，$\boldsymbol{e}_i$ の組を見つけられれば，式 (8) の単振動する解が得られる．

まず，λ_i の条件を調べよう．

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i &\iff (\lambda_iE-A)\boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i+2k/m&-k/m\\-k/m&\lambda_i+2k/m\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_i=\mathbf{0}\\ &\iff {}^t\big(\lambda_i+2k/m\quad -k/m\big)\perp\boldsymbol{e}_i \text{ かつ } {}^t\big(-k/m\quad \lambda_i+2k/m\big)\perp\boldsymbol{e}_i\\ &\implies {}^t\big(\lambda_i+2k/m\quad -k/m\big)\mathbin{/\!/}{}^t\big(-k/m\quad \lambda_i+2k/m\big)\end{aligned}$$

だから，ベクトルの平行条件より，λ_i は $(\lambda_i+2k/m)^2-(-k/m)^2=0$ を満たす必要がある．この 2 次方程式の解は $\lambda_i=-k/m,-3k/m$ であり，$\lambda_1>\lambda_2$ なので $\lambda_1=-k/m$，$\lambda_2=-3k/m$ である．

次に，$A\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$ を満たす $\boldsymbol{e}_i$ を計算する．$i=1$ のとき

$$(\lambda_1E-A)\boldsymbol{e}_i=\frac{k}{m}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_1=\mathbf{0}\iff \boldsymbol{e}_1\mathbin{/\!/}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

なので，$\lambda_1=-k/m$，$\boldsymbol{e}_1={}^t(1\quad 1)$ とすれば，λ_1，$\boldsymbol{e}_1$ は式 (9) を満たす．

同様に計算すると，$\lambda_2=-3k/m$，$\boldsymbol{e}_2={}^t(-1\quad 1)$ は式 (9) を満たすことが確かめられる．こうして，式 (8) の単振動する 2 解

$$\boldsymbol{u}_1(t)=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2(t)=\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

が得られた．

図 3，図 4 を見ると，$\boldsymbol{u}_i(t)$ は前節で定義した $\vec{u}_i$ と等しいことがわかる．よって，式 (8) の一般解は $\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t)$ となるはずである．

実際に，式 (8) の一般解が $\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t)$ であることを確かめよう．$\boldsymbol{r}(t)$ は式 (8) の解であるとする．$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立だから，$\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = y_1(t)\boldsymbol{e}_1 + y_2(t)\boldsymbol{e}_2$ と表せる．また，$A\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i$ なので

$$A\boldsymbol{r}(t) = y_1(t)A\boldsymbol{e}_1 + y_2(t)A\boldsymbol{e}_2 = y_1(t)(\lambda_1\boldsymbol{e}_1) + y_2(t)(\lambda_2\boldsymbol{e}_2)$$

である．一方，$y_1(t)$ と $y_2(t)$ が 2 階微分できれば

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) = \frac{d^2y_1(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{d^2y_2(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}_2$$

だから，$\boldsymbol{r}(t)$ が式 (8) の解ならば

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{d^2y_2(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}_2 = \lambda_1 y_1(t)\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 y_2(t)\boldsymbol{e}_2$$

となる．$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立だから

$$\frac{d^2y_i(t)}{dt^2} = \lambda_i y_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

が成立する．$\lambda_i < 0$ なので，これは角振動数 $\sqrt{-\lambda_i}$ の単振動の式である．また，$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$ なので $y_1(0) = y_2(0) = 0$ である．したがって，$y_i(t)$ は $y_i(t) = c_i\sin(\sqrt{-\lambda_i}t)$ と表せて

$$\boldsymbol{r}(t) = c_1\sin(\sqrt{-\lambda_1}t)\boldsymbol{e}_1 + c_2\sin(\sqrt{-\lambda_2}t)\boldsymbol{e}_2 = c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t)$$

である．

以上により，式 (8) を満たす任意の $\boldsymbol{r}(t)$ は，定数 c_1，c_2 を用いて $\boldsymbol{r}(t) = c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t)$ と表せる．一方，$c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t)$ は c_1，c_2 の値によらず式 (8) の解なので，$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t)$ は式 (8) の一般解である．

実は，方程式 $(\lambda + 2k/m)^2 - (-k/m)^2 = 0$ は A の「**固有方程式**」に，$\boldsymbol{e}_i$ は A の「**固有ベクトル**」に相当する．最後に，これらの事項を既知とすれば，質点の個数を増やしても運動が解析できることを示す．

4　3 自由度系の振動

図 1 に質量 m の質点 R を追加し，図 6 のように，すべてのばねが自然長になるよう繋いだ．

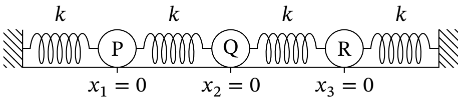

図 6　ばねで繋がれた 3 つの質点

各質点に初速を与えると，P の変位 x_1，Q の変位 x_2，R の変位 x_3 はどう変化するか考える．P，Q，R の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) = k(-2x_1 + x_2),\\
m\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = k(x_1 - 2x_2 + x_3),\\
m\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} &= -k(x_3 - x_2) - kx_3 = k(x_2 - 2x_3)
\end{aligned}
$$

であり，行列を用いれば

$$
\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t) \quad (\boldsymbol{x}(t) = {}^t(x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)),\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0})
$$

と書き直せる．右辺を $(k/m)A\boldsymbol{x}(t)$ とおく．A の固有値は

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix}\\
&= (\lambda+2)((\lambda+2)^2 - 1) - (\lambda+2) = (\lambda+2)((\lambda+2)^2 - 2)
\end{aligned}
$$

より $-2-\sqrt{2}$，-2，$-2+\sqrt{2}$ である．これらを順に λ_1，λ_2，λ_3 とおく．A の固有値 λ_i に属する固有空間を根気強く計算すると

$$
\boldsymbol{e}_1 = {}^t\left(1 \quad -\sqrt{2} \quad 1\right), \quad \boldsymbol{e}_2 = {}^t(-1 \quad 0 \quad 1), \quad \boldsymbol{e}_3 = {}^t\left(1 \quad \sqrt{2} \quad 1\right)
$$

が，それぞれ A の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 に属する固有ベクトルであることがわかる[1]．したがって，式

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (P = (\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3))$$

が成立する．$(d^2/dt^2)\boldsymbol{x}(t) = (k/m)A\boldsymbol{x}(t)$ の両辺に左から P^{-1} を掛けると

$$\frac{d^2}{dt^2}P^{-1}\boldsymbol{x}(t) = \frac{k}{m}P^{-1}A\boldsymbol{x}(t) = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$$

となるので，$\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t) = {}^t(y_1(t) \quad y_2(t) \quad y_3(t))$ は

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2y_i(t)}{dt^2} = -\frac{-\lambda_i k}{m}y_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

を満たす．よって，各 $y_i(t)$ は角振動数 $\sqrt{-\lambda_i k/m}$ で単振動する．また，$\boldsymbol{y}(0) = P^{-1}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ なので，$y_i(t)$ は

$$y_i(t) = c_i \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda_i k}{m}}t\right) \quad (i = 1, 2, 3)$$

と表せる．したがって

$$\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{3} y_i(t)\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} c_i \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda_i k}{m}}t\right)\boldsymbol{e}_i$$

である．

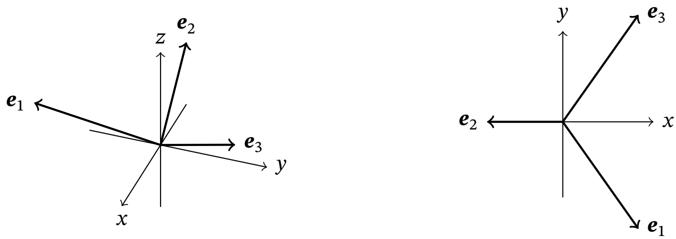

図 7　$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$

---

1)　よく見ると，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ はどの 2 つも互いに直交している．これは A が対称行列であることに起因する．