

# 信号解析の数理

線型代数で信号を理解するために

calamari\_dev





# はじめに

準備中.

2022 年〇月

calamari\_dev



# 目次

はじめに	iii
記号について	vii
<b>第 1 章 数ベクトル空間</b>	<b>1</b>
1.1 行列とベクトル空間	1
ベクトル空間／基底／内積／線型写像と表現行列／核と像／固有値と固有空間／対角化	
1.2 直交射影	10
直交射影／直交補空間／スペクトル定理	
1.3 最小二乗問題	11
最小二乗問題／特異値分解／擬似逆行列	
1.4 離散フーリエ変換	11
1.5 多重解像度解析	11
1.A 主成分分析	11
1.B 低ランク近似	12
1.C 窓関数	12
演習問題	12
<b>第 2 章 ヒルベルト空間</b>	<b>13</b>
2.1 無限次元の線型空間	15
距離空間／ノルム線型空間／内積空間／ヒルベルト空間	
2.2 直交射影	15
直交射影／直交補空間／正規直交列	
2.3 フーリエ級数展開	15
フーリエ級数展開／フーリエ変換	
2.4 多重解像度解析	15
多重解像度解析／ウェーブレット変換	

2.A	半ノルムと $L^p$ 空間	15
	演習問題	15
<b>第 3 章</b>	<b>確率空間</b>	<b>17</b>
3.1	確率空間	17
3.2	ウィナーフィルタ	17
3.3	カルマンフィルタ	17
3.A	カルーネン・レーベ変換	17
	演習問題	17
<b>付録 A</b>	<b>プログラム例</b>	<b>19</b>
A.1	C 言語	19
<b>索引</b>		<b>23</b>

# 記号について

書籍ごとに異なることが多い記号について，記号と定義の組を示す．表になる記号については，巻末の索引を参照のこと．

記号	定義
$\mathbb{N}$	自然数の全体集合 $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	整数の全体集合 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{K}$	実数の全体集合 $\mathbb{R}$ か複素数の全体集合 $\mathbb{C}$
$S^c$	集合 $S$ の補集合
$\text{cl} S$	集合 $S$ の閉包
$\delta_{ij}$	クロネッカーのデルタ
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	ベクトル $\mathbf{u}$ , $\mathbf{v}$ の内積
$\ \mathbf{v}\ $	ベクトル $\mathbf{v}$ のノルム
$\mathbf{I}$	単位行列
$\mathbf{O}$	零行列
$\mathbf{M}^T$	行列 $\mathbf{M}$ の転置行列
$\mathbf{M}^H$	行列 $\mathbf{M}$ のエルミート転置
$\ \mathbf{M}\ _F$	行列 $\mathbf{M}$ のフロベニウスノルム
$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n} x$	信号 $x$ の離散フーリエ変換
$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} x$	信号 $x$ の離散時間フーリエ変換
$\hat{f}_n$	関数 $f$ のフーリエ係数
$\mathcal{F} f$	関数 $f$ のフーリエ変換





# 第 1 章 数ベクトル空間

第 1 章で書く予定のことを並べておく．

## 1.1 行列とベクトル空間

信号解析に関連する議論へに移る前に，有限次元の線型代数について大まかに説明しておく．以下の解説はかなり大雑把なので，必要に応じて線型代数の教科書を参照してほしい．また，先を急ぐ読者は，この節を読み飛ばして構わない．

### 1.1.1 ベクトル空間

以下，集合  $\mathbb{K}$  は実数の全体集合  $\mathbb{R}$  か，複素数の全体集合  $\mathbb{C}$  であるとする． $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とは次のように定義される，加法とスカラー乗法が備わった集合のことである．

**定義 1.1.1 (ベクトル空間)**  $V$  を空でない集合とする．また，任意の  $x, y \in V$ ,  $s \in \mathbb{K}$  について，和  $x + y \in V$  とスカラー倍  $sx \in V$  が定義されているとする．任意の  $x, y, z \in V$ ,  $s, t \in \mathbb{K}$  に対する以下の条件を満たすとき， $V$  は  $\mathbb{K}$  上の**ベクトル空間** (vector space) であるという．

1.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
2.  $x + y = y + x$
3. ある  $0 \in V$  が存在し，任意の  $v \in V$  に対して  $v + 0 = v$  を満たす
4. 各  $v \in V$  に対し，ある  $w \in V$  が一意に存在して  $v + w = 0$  を満たす
5.  $(s + t)x = sx + tx$
6.  $s(x + y) = sx + sy$
7.  $(st)x = s(tx)$

8.  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ 

定義 1.1.1 の  $\mathbf{0}$  を**零ベクトル** (zero vector),  $\mathbf{w}$  を  $\mathbf{v}$  の**加法逆元** (additive inverse) という. 通常,  $\mathbf{v}$  の加法逆元は  $-\mathbf{v}$  と表される.

**ノート** 定義 1.1.1 はごてごてしているように見えるが, それは和とスカラー倍について,  $\mathbb{K}^n$  と同様に計算できるよう, ルールをつけ加えていった結果といえる. ◇

ついで, ベクトル空間にかかわる概念を 2 つ定義する (これらの関係については, すぐ後で説明する).

**定義 1.1.2 (線型結合)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  を  $V$  の元とする.  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$  ( $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ ) という形をした  $V$  の元を,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  の**線型結合** (linear combination) という.

**定義 1.1.3 (部分空間)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W$  を  $V$  の空でない部分集合とする.  $W$  が  $V$  の加法とスカラー乗法について定義 1.1.1 の条件をすべて満たすとき,  $W$  は  $V$  の**部分ベクトル空間** (vector subspace), あるいは単に**部分空間** (subspace) であるという.

ある部分集合  $W \subset V$  が  $V$  の部分空間かどうか調べるには, 命題 1.1.4 を使うとよい.

**命題 1.1.4**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W$  を  $V$  の空でない部分集合とする. このとき, 次の命題は同値である.

1.  $W$  は  $V$  の部分空間である
2. 任意の  $s \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$  に対して  $s\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$  である

**例 1.1.5**  $V$  が  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間なら,  $V$  自身と  $\{\mathbf{0}\}$  は  $V$  の部分空間である. ◇

**例 1.1.6** 集合  $\mathbb{K}^n = \{[s_1 \ \dots \ s_n]^T \mid s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}\}$  は, 通常の加法とスカラー乗法によって,  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間になる. ◇

### 1.1.2 基底

任意のベクトル  $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^\top \in \mathbb{K}^n$  は、第  $i$  成分が 1、他の成分が 0 のベクトル  $\mathbf{e}_i$  を用いて  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$  と表せる．すなわち、集合  $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  は「 $\mathbb{K}^n$  のすべての元を  $\mathcal{S}_n$  の元の線型結合で書ける」という性質を持つ．

一般に、ベクトル空間  $V$  の部分集合  $S$  に対して、 $S$  の元の線型結合で書けるベクトルの全体集合を  $S$  が**生成する部分空間** (generated subspace) といい、 $\text{span } S$  と表記する．この記法を使えば、先述した  $\mathcal{S}_n$  が持つ性質を「 $\text{span } \mathcal{S}_n = \mathbb{K}^n$  が成り立つ」と言い換えられる．

$\text{span } S = \mathbb{K}^n$  を満たす集合  $S \subset \mathbb{K}^n$  は、 $\mathcal{S}_n$  以外にも無数にある．たとえば  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^2$  のとき、集合  $T = \{[1 \ 1]^\top, [2 \ -1]^\top, [-1 \ 0]^\top\}$  が生成する部分空間は  $\mathbb{R}^2$  である．しかし、 $\mathcal{S}_2 = \{[1 \ 0]^\top, [0 \ 1]^\top\}$  の元の線型結合で  $\mathbb{R}^2$  の元を表す方法はただ 1 通りであるのに対して、 $T$  はこの性質を持たない (図 1.1)．

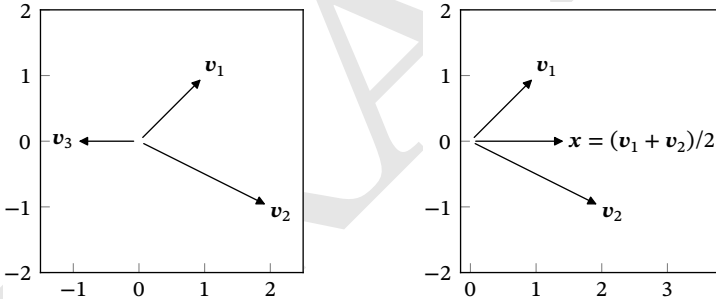


図 1.1  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in T$  の線型結合で  $\mathbf{x} = [3/2 \ 0]^\top$  を表した様子．明らかに  $\mathbf{x} = (-3/2)\mathbf{v}_3$  である一方、 $\mathbf{x} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2 = (1/2)\mathbf{v}_1 + (1/2)\mathbf{v}_2$  も成り立つ．

$S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき、任意の  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{v}_i \in S$  について

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_i \implies [a_1 \ \cdots \ a_k] = [b_1 \ \cdots \ b_k]$$

が成立する.  $b_1 = \dots = b_k = 0$  とすると

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies a_1 = \dots = a_k = 0 \quad (1.1)$$

が得られる.

任意の  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  に対して式 (1.1) が成立するとき,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  は**線型独立**であるという. 特に,  $V = \text{span } S$  かつ,  $S$  の元からなる有限個のベクトルの組が常に線型独立であるとき,  $S$  は  $V$  の**基底**であるという. 以上を定義 1.1.7, 1.1.8 にまとめておく.

**定義 1.1.7 (生成系・線型独立・線型従属)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $S$  を  $V$  の部分集合とする. また,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  を  $V$  の元とする.

1.  $V = \text{span } S$  であるとき,  $S$  を  $V$  の**生成系** (generating set) という
2.  $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$  を満たす  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  の組が  $c_1 = \dots = c_k = 0$  しかないとき,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  は**線型独立** (linearly independent) であるという
3.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  が線型独立でないとき,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  は**線型従属** (linearly dependent) であるという

**定義 1.1.8 (基底)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $\mathcal{B}$  を  $V$  の部分集合とする.  $\mathcal{B}$  が  $V$  の生成系かつ,  $\mathcal{B}$  に属する有限個のベクトル  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  が常に線型独立であるとき,  $\mathcal{B}$  は  $V$  の**基底** (basis) であるという.

**例 1.1.9 (標準基底)**  $S_n$  は  $\mathbb{K}^n$  の基底である.  $S_n$  を  $\mathbb{K}^n$  の**標準基底** (standard basis) という. ◇

さきほどの議論によれば,  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき, 任意の  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  について式 (1.1) が成立する. すなわち,  $S$  は  $\text{span } S$  の基底である. 実はこの逆も示せるので, 次の命題が成立する.

**命題 1.1.10**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $S$  を  $V$  の部分集合とする. このとき, 次の命題は同値である.

1.  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せる

2.  $S$  は  $\text{span } S$  の基底である

$V$  の基底で有限集合のものがあるとき、 $V$  は**有限次元** (finite-dimensional) であるという。  $V$  が有限次元なら、 $V$  の基底はすべて有限集合で、その元の個数は等しい。すなわち、元の個数  $\#B$  は基底  $B$  のとりかたによらず定まる。 $\#B$  を  $V$  の**次元** (dimension) といい、 $\dim V$  と表記する<sup>1)</sup>。

### 1.1.3 内積

$\mathbb{R}^3$  において、ベクトルの長さとなす角はドット積  $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$  から計算できた。定義 1.1.11 は、こうした幾何的な考察を、より多くのベクトル空間へと適用可能にする。

**定義 1.1.11 (内積)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする。  $\langle *, * \rangle$  が  $V$  の**内積** (inner product) であるとは、任意の  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  に対し、  $\langle *, * \rangle$  が以下の条件を満たすことをいう。

1.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
2.  $\langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
3.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ ,  $[\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}]$

また、 $V$  に内積が定義されているとき、 $V$  は**内積空間** (inner product space) であるという。

**例 1.1.12 (標準内積)**  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \mathbf{v}_1^T \overline{\mathbf{v}_2}$  ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{K}^n$ ) とすると、  $\langle *, * \rangle$  は  $\mathbb{K}^n$  の内積になる。  $\langle *, * \rangle$  を  $\mathbb{K}^n$  の**標準内積**という。  $\diamond$

$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$  であるとき、ベクトル  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{w}$  は**直交**するという。

**定義 1.1.13 (正規直交基底)**  $V$  を内積空間とする。  $V$  の基底  $B$  が**正規直**

1)  $V$  が有限次元でないときも基底は存在し、濃度は基底の選び方に依存しない (証明は文献 [3])。

**交基底** (orthonormal basis) であるとは、任意の  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathcal{B}$  が条件

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \begin{cases} 1 & (\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2), \\ 0 & (\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{e}_2) \end{cases}$$

を満たすことをいう。

### 1.1.4 線型写像と表現行列

以下、 $V$  は有限次元であるとする。命題 1.1.10 によれば、 $V$  の基底  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  ( $m = \dim V$ ) をとることで、任意の  $\mathbf{x} \in V$  を

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m \quad (c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}) \quad (1.2)$$

の形で一意に表せる。言い換えると、 $V$  の各元  $\mathbf{x}$  に式 (1.2) の  $[c_1 \ \dots \ c_m]^\top$  を割り当てる写像  $\phi: V \rightarrow \mathbb{K}^m$  を定義でき、それは単射<sup>2)</sup>である。この写像  $\phi$  は、次に定義する「線型写像」の 1 例である。

**定義 1.1.14 (線型写像)**  $V$  と  $W$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする。写像  $f: V \rightarrow W$  が以下の条件を満たすとき、 $f$  は**線型写像** (linear mapping) であるという。

1. 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
2. 任意の  $\mathbf{x} \in V, c \in \mathbb{K}$  に対して  $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$

$W$  を  $\mathbb{K}$  上の有限次元ベクトル空間とする。 $W$  の基底  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  ( $n = \dim W$ ) をとると、 $\phi$  と同様

$$\mathbf{y} = d_1 \mathbf{w}_1 + \dots + d_n \mathbf{w}_n \iff \psi(\mathbf{y}) = [d_1 \ \dots \ d_n]^\top$$

を満たす線型写像  $\psi: W \rightarrow \mathbb{K}^n$  が定義できる。

$\phi$  と  $\psi$  を利用すると、 $V$  から  $W$  への任意の線型写像  $f$  を、対応する行列によって表現できる。 $\mathbf{x} \in V$  を任意にとる。 $\phi(\mathbf{x}) = [c_1 \ \dots \ c_m]^\top$  とおくと

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i f(\mathbf{v}_i)$$

2) 写像  $f$  の定義域に属する任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  について、命題「 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 」が成立するとき、 $f$  は**単射** (injection) であるという。

であるから

$$\psi(f(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^m c_i \psi(f(\mathbf{v}_i)) = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\mathbf{v}_m))] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

となる. よって,  $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  とおくと, 式

$$\psi(f(\mathbf{x})) = T(\phi(\mathbf{x})) \quad (T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

が成り立つ.

ここまでの議論をまとめると, 次のようになる.  $V$  の基底  $\mathcal{B}$  と,  $W$  の基底  $\mathcal{B}'$  をとるごとに,  $n \times m$  行列  $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  を定義でき,  $\mathbf{A}$  は式 (1.3) を満たす. この  $\mathbf{A}$  を, 基底  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{B}'$  に関する  $f$  の表現行列 (representation matrix) という.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{T} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

なお,  $\mathcal{B}$  の元を並べる順序に応じて, 式 (1.2) の  $c_1, \dots, c_n$  の順序も変化する.  $\phi$  は  $\mathcal{B}$  に対して一意ではない.  $\phi$  は  $\mathcal{B}$  の元を並べる順序を決めて初めて定まる. 本書では,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  のような書き方をした場合,  $\mathcal{B}$  の元を  $\mathbf{v}_i$  の添え字  $i$  について昇順に並べると決めておく.

**例 1.1.15 (形式的な微分)**  $n$  次以下の 1 変数多項式全体  $V_n = \{c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \mid c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$  は,  $\mathbb{R}$  上の  $n+1$  次元ベクトル空間である. また, 写像  $D: V_3 \rightarrow V_2$  を

$$D(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_1 + 2c_2x \quad (c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

で定義すると, これは線型写像になる.  $V_n$  の基底として  $\mathcal{B}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$  をとったとき, 基底  $\mathcal{B}_3$  と  $\mathcal{B}_2$  に関する  $D$  の表現行列は  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  である.  $\diamond$

### 1.1.5 核と像

線型写像に付随して, 重要なベクトル空間が 2 つ定まる.

**定義 1.1.16 (核, 像)**  $f: V \rightarrow W$  を線型写像とする.

1. 集合  $\{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$  を  $f$  の核 (kernel) といい,  $\text{Ker } f$  と表す
2. 集合  $\{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$  を  $f$  の像 (image) といい,  $\text{Im } f$  と表す

一般に,  $\text{Ker } f$  と  $\text{Im } f$  はそれぞれ  $V$  と  $W$  の部分空間になる.  $\text{Ker } f$  について, 次の命題が成立する.

**命題 1.1.17**  $f: V \rightarrow W$  を線型写像とする. このとき,  $f$  が単射であることと,  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  が成立することは同値である.

**証明**  $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$  なので,  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  である. よって,  $f$  が単射なら  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$  だから,  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  である.

また,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  が  $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$  を満たせば  $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$  である. よって,  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  なら  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$  である. すなわち,  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  なら  $f$  は単射である.  $\square$

### 1.1.6 固有値と固有空間

**定義 1.1.18 (固有値, 固有ベクトル)**  $A$  を  $n$  次正方行列とする. 複素数  $\lambda$  と  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  が式  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  を満たすとき,  $\lambda$  を  $A$  の**固有値** (eigenvalue) という. また,  $\mathbf{x}$  を  $A$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有ベクトル** (eigenvector) という.

**例 1.1.19**  $\mathbf{x}_1 = [1 + i \ 2]^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = [1 - i \ 2]^T$  は  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  の固有ベクトルである. 実際  $A\mathbf{x}_1 = i\mathbf{x}_1$ ,  $A\mathbf{x}_2 = -i\mathbf{x}_2$  である.  $\diamond$

定義 1.1.18 を満たす  $\lambda$  を見つけるには, 次の命題 1.1.20 を利用するとよい.

**命題 1.1.20**  $\lambda$  が正方行列  $A$  の固有値であることと,  $\det(\lambda I - A) = 0$  であることは同値である. ただし,  $\det A$  は  $A$  の行列式である.

$n$  次多項式  $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  を  $A$  の**固有多項式** (characteristic polynomial) という. 命題 1.1.20 から, 集合  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) = 0\}$  は  $A$  の固有値の全体集合である.

**系 1.1.21** 任意の  $n$  次正方行列  $A$  は, 相異なる固有値を少なくとも 1 個, 多くとも  $n$  個もつ.



**証明**  $\det(\lambda I - A) = 0$  は  $\lambda$  に関する  $n$  次方程式なので、解は存在しても  $n$  個以下である。また、代数学の基本定理より解は少なくとも 1 つ存在する。  $\square$

**定義 1.1.22 (固有空間)** 定義 1.1.18 の  $A$ ,  $\lambda$  について、集合

$$E_\lambda(A) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間になる。部分空間  $E_\lambda(A)$  を、 $A$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有空間** (eigenspace) という。

固有空間は次の性質を持つ。

**命題 1.1.23**  $\lambda_1, \lambda_2$  を正方行列  $A$  の固有値とする。このとき、次の命題が成立する。

1.  $x \in E_{\lambda_1}(A) \implies Ax \in E_{\lambda_1}(A)$
2.  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A) = \{0\}$

**証明** 後半のみ示す。  $A0 = \lambda_1 0 = \lambda_2 0 = 0$  なので、  $0 \in E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$  である。また、任意に  $x \in E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$  をとると、  $Ax = \lambda_1 x = \lambda_2 x$  だから  $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$  である。  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  なので  $x = 0$  である。よって、  $E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$  は  $0$  以外に元を持たない。  $\square$

**例 1.1.24** 行列  $R = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$  を各  $x \in \mathbb{R}^3$  に左から掛けると、 $x$  があるベクトル  $v$  を軸に角度  $\theta$  だけ回転する。 $v$  と  $\theta$  を求めよう。

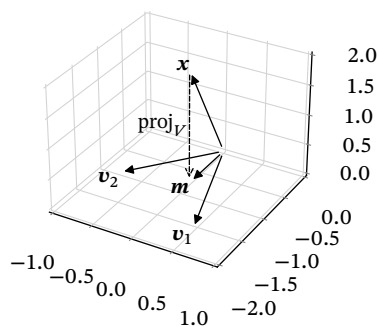
回転軸上にあるベクトルは  $R$  を掛けても回転しないから、 $v$  は  $Rv = v$  を満たす。よって、 $v$  を求めるには、連立 1 次方程式  $(R - I)v = 0$  を解けばよい。この解は不定であり、一般解は  $v = t[1 \ 0 \ 1]^T$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) となる。

以下では特に、 $v$  の長さが 1 となる  $v_1 = [1 \ 0 \ 1]^T/\sqrt{2}$  の場合について考える。 $v_1$  と直交する 2 ベクトル  $v_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ ,  $v_3 = [-1 \ 0 \ 1]^T/\sqrt{2}$  をとると、集合  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の基底になる。  $\diamond$

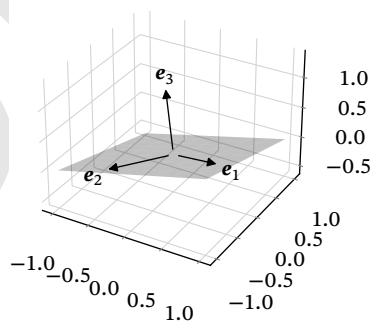
### 1.1.7 対角化

## 1.2 直交射影

### 1.2.1 直交射影



### 1.2.2 直交補空間



### 1.2.3 スペクトル定理

## 1.3 最小二乗問題

### 1.3.1 最小二乗問題

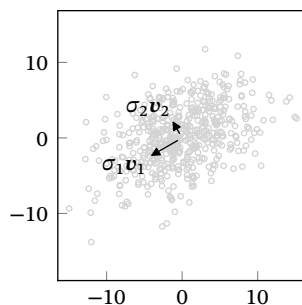
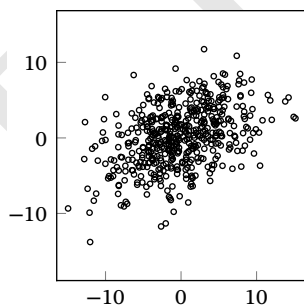
### 1.3.2 特異値分解

### 1.3.3 擬似逆行列

## 1.4 離散フーリエ変換

## 1.5 多重解像度解析

### 1.A 主成分分析



## 1.B 低ランク近似

## 1.C 窓関数

### 演習問題

## 第 2 章 ヒルベルト空間

第 2 章で書く予定のことを並べておく.

DRAFT

DRAFT

## 2.1 無限次元の線型空間

### 2.1.1 距離空間

### 2.1.2 ノルム線型空間

### 2.1.3 内積空間

### 2.1.4 ヒルベルト空間

## 2.2 直交射影

### 2.2.1 直交射影

### 2.2.2 直交補空間

### 2.2.3 正規直交列

## 2.3 フーリエ級数展開

### 2.3.1 フーリエ級数展開

### 2.3.2 フーリエ変換

## 2.4 多重解像度解析

### 2.4.1 多重解像度解析

### 2.4.2 ウェーブレット変換

### 2.4.3 半ノルム空間





## 第 3 章 確率空間

第 3 章で書く予定のことを並べておく.

### 3.1 確率空間

### 3.2 ウィナーフィルタ

### 3.3 カルマンフィルタ

### 3.A カルネン・レーベ変換

### 演習問題



# 付録 A プログラム例

## A.1 C 言語

以下のプログラムは C11 に準拠している。まず、動作はするものの不合法的なプログラムを示す。

```
#include <math.h>
#include <sndfile.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(void) {
    int samplerate = 44100;
    int frames = 4 * samplerate;
    SF_INFO sfinfo = {.format = SF_FORMAT_WAV | SF_FORMAT_PCM_16,
                     .channels = 1,
                     .samplerate = samplerate,
                     .frames = frames};
    SNDFILE *file = sf_open("charp.wav", SFM_WRITE, &sfinfo);
    double *buffer = malloc(sizeof(double) * frames);
    double pi = 3.141592653589793;
    double max_omega = 523.25 * 2.0 * pi / samplerate;

    for (int i = 0; i < frames; i++) {
        buffer[i] = sin(max_omega * i * i / frames);
    }

    sf_write_double(file, buffer, frames);
    sf_close(file);
    free(buffer);
    return 0;
}
```

```
gcc charp.c -lm -lsndfile -std=c11
```

手元でちょっとした実験をしたいだけなら、上のプログラムでも問題ない。しかし、誰かに使われる可能性があるのなら、次のように例外処理をきちんと行うほうがよい。

```
#include <math.h>
#include <sndfile.h>
#include <stdint.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(void) {
    const uint32_t samplerate = 44100;
    const uint32_t frames = 4 * samplerate;
    SNDFILE *const file =
        sf_open("charp.wav", SFM_WRITE,
            &(SF_INFO){.format = SF_FORMAT_WAV | SF_FORMAT_PCM_16,
                .channels = 1,
                .samplerate = samplerate,
                .frames = frames});

    if (file == NULL) {
        fprintf(stderr, "failed to open \"charp.wav\".\n");
        return 1;
    }

    double *const buffer = malloc(sizeof(double) * frames);

    if (buffer == NULL) {
        fprintf(stderr, "malloc failed.\n");
        sf_close(file);
        return 1;
    }

    const double pi = 3.141592653589793;
    const double max_omega = 523.25 * 2.0 * pi / samplerate;

    for (uint32_t i = 0; i < frames; i++) {
        buffer[i] = sin(max_omega * i * i / frames);
    }

    if (sf_write_double(file, buffer, frames) != frames) {
        fprintf(stderr, "%s\n", sf_strerror(file));
        sf_close(file);
    }
}
```

```
    free(buffer);  
    return 1;  
}  
  
sf_close(file);  
free(buffer);  
return 0;  
}
```

## 参考文献

- [1] 齋藤正彦. 線型代数入門. 東京大学出版会, 2020, 274p., (基礎数学, 1).
- [2] 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 2018, 329p.
- [3] 雪江明彦. 環と体とガロア理論. 日本評論社, 2019, 300p., (代数学, 2).

## 索引

<b>【記号】</b>		固有値	8	<b>【な】</b>	
$\dim V$	5	固有ベクトル	8	内積	5
$\operatorname{Im} f$	7	<b>【さ】</b>		内積空間	5
$\langle *, * \rangle$	5	次元	5	<b>【は】</b>	
$\operatorname{Ker} f$	7	正規直交基底	5	表現行列	7
$\operatorname{span} S$	3	零ベクトル	2	標準基底	4
$E_\lambda(A)$	9	線型結合	2	標準内積	5
<b>【か】</b>		線型写像	6	部分空間	2
核	7	線型従属	4	生成する—	3
加法逆元	2	線型独立	4	ベクトル空間	1
基底	4	像	7	部分—	→ 部分空間
行列式	8	<b>【た】</b>		<b>【や】</b>	
固有空間	9	単射	6	有限次元	5
固有多項式	8	直交	5		