

# 信号解析の数理

線型代数で信号を理解するために

calamari\_dev





# はじめに

準備中.

2022 年〇月

calamari\_dev



# 目次

はじめに	iii
記号について	vii
<b>第 1 章 数ベクトル空間</b>	<b>1</b>
1.1 行列とベクトル空間	1
ベクトル空間／基底／線型写像と表現行列／固有値と固有空間／対角化	
1.2 直交射影	8
直交射影／直交補空間／スペクトル定理	
1.3 最小二乗問題	8
最小二乗問題／特異値分解／擬似逆行列	
1.4 離散フーリエ変換	8
1.5 多重解像度解析	8
1.A 主成分分析	8
1.B 低ランク近似	8
1.C 窓関数	8
演習問題	8
<b>第 2 章 ヒルベルト空間</b>	<b>11</b>
2.1 無限次元の線型空間	13
距離空間／ノルム線型空間／内積空間／ヒルベルト空間	
2.2 直交射影	13
直交射影／直交補空間／正規直交列	
2.3 フーリエ級数展開	13
フーリエ級数展開／フーリエ変換	
2.4 多重解像度解析	13
多重解像度解析／ウェーブレット変換	

2.A	半ノルムと $L^p$ 空間	13
	演習問題	13
<b>第 3 章</b>	<b>確率空間</b>	<b>15</b>
3.1	確率空間	15
3.2	ウィナーフィルタ	15
3.3	カルマンフィルタ	15
3.A	カルーネン・レーベ変換	15
	演習問題	15
<b>索引</b>		<b>17</b>

# 記号について

書籍ごとに異なることが多い記号について，記号と定義の組を示します．これら以外の記号については，巻末の索引を参照してください．

記号	定義
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{K}$	実数の全体集合 $\mathbb{R}$ か複素数の全体集合 $\mathbb{C}$
$S^c$	集合 $S$ の補集合
$\text{cl } S$	集合 $S$ の閉包
$\delta_{ij}$	クロネッカーのデルタ
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	ベクトル $\mathbf{u}$ , $\mathbf{v}$ の内積
$\ \mathbf{v}\ $	ベクトル $\mathbf{v}$ のノルム
$\mathbf{I}$	単位行列
$\mathbf{O}$	零行列
$\mathbf{M}^\top$	行列 $\mathbf{M}$ の転置行列
$\mathbf{M}^\text{H}$	行列 $\mathbf{M}$ のエルミート転置
$\ \mathbf{M}\ _\text{F}$	行列 $\mathbf{M}$ のフロベニウスノルム
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	平均 $m$ , 分散 $\sigma^2$ の正規分布
$\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$	平均 $\mathbf{m}$ , 分散共分散行列 $\Sigma$ の多変量正規分布
$\hat{f}_n$	関数 $f$ のフーリエ係数
$\mathcal{F} f$	関数 $f$ のフーリエ変換





# 第 1 章 数ベクトル空間

第 1 章で書く予定のことを並べておく．

## 1.1 行列とベクトル空間

信号解析に関連する議論へに移る前に，有限次元の線型代数について大まかに説明しておく．以下の解説はかなり大雑把なので，必要に応じて線型代数の教科書を参照してほしい．

### 1.1.1 ベクトル空間

以下，集合  $\mathbb{K}$  は実数の全体集合  $\mathbb{R}$  か，複素数の全体集合  $\mathbb{C}$  であるとする．

**定義 1.1.1 (ベクトル空間)**  $V$  を空でない集合とする．また，任意の  $x, y \in V$ ,  $s \in \mathbb{K}$  について，和  $x + y \in V$  とスカラー倍  $sx \in V$  が定義されているとする．任意の  $x, y, z \in V$ ,  $s, t \in \mathbb{K}$  に対する以下の条件を満たすとき， $V$  は  $\mathbb{K}$  上の**ベクトル空間** (vector space) であるという．

1.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
2.  $x + y = y + x$
3. ある  $0 \in V$  が存在し，任意の  $v \in V$  に対して  $v + 0 = v$  を満たす
4. 各  $v \in V$  に対し，ある  $w \in V$  が一意に存在して  $v + w = 0$  を満たす
5.  $(s + t)x = sx + tx$
6.  $s(x + y) = sx + sy$
7.  $(st)x = s(tx)$
8.  $1x = x$

定義 1.1.1 の  $0$  を**零ベクトル** (zero vector)， $w$  を  $v$  の**加法逆元** (additive inverse) という．通常， $v$  の加法逆元は  $-v$  と表される．

**ノート** 定義 1.1.1 はごてごてしているように見えるが、それは和とスカラー倍について、 $\mathbb{K}^n$  と同様に計算できるよう、ルールをつけ加えていった結果といえる。◇

### 1.1.2 基底

任意のベクトル  $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^\top \in \mathbb{K}^n$  は、第  $i$  成分が 1、他の成分が 0 のベクトル  $\mathbf{e}_i$  を用いて  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$  と表せる。すなわち、集合  $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  は「 $\mathbb{K}^n$  のすべての元を  $\mathcal{S}_n$  の元の線型結合で書ける」という性質を持つ。

一般に、ベクトル空間  $V$  の部分集合  $S$  に対して、 $S$  の元の線型結合で書けるベクトルの全体集合を  $S$  が**生成する部分空間** (generated subspace) といい、 $\text{span } S$  と表記する。この記法を使えば、先述した  $\mathcal{S}_n$  が持つ性質を「 $\text{span } \mathcal{S}_n = \mathbb{K}^n$  が成り立つ」と言い換えられる。

$\text{span } S = \mathbb{K}^n$  を満たす集合  $S \subset \mathbb{K}^n$  は、 $\mathcal{S}_n$  以外にも無数にある。たとえば  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^2$  のとき、集合  $T = \{[1 \ 1]^\top, [2 \ -1]^\top, [-1 \ 0]^\top\}$  が生成する部分空間は  $\mathbb{R}^2$  である。しかし、 $\mathcal{S}_2 = \{[1 \ 0]^\top, [0 \ 1]^\top\}$  の元の線型結合で  $\mathbb{R}^2$  の元を表す方法はただ 1 通りであるのに対して、 $T$  はこの性質を持たない (図 1.1)。

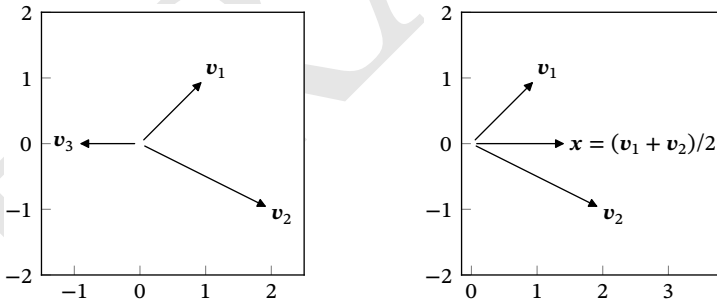


図 1.1  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in T$  の線型結合で  $\mathbf{x} = [3/2 \ 0]^\top$  を表した様子。明らかに  $\mathbf{x} = (-3/2)\mathbf{v}_3$  である一方、 $\mathbf{x} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2 = (1/2)\mathbf{v}_1 + (1/2)\mathbf{v}_2$  も成り立つ。

$S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき、任意の  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{v}_i \in S$  について

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_i \implies (a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k) \quad (1.1)$$

が成立する.  $c_i = a_i - b_i$  とおくと, 式 (1.1) は

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies c_1 = \cdots = c_k = 0 \quad (1.2)$$

と同値である.

任意の  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  に対して式 (1.2) が成立するとき,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  は**線型独立**であるという. 特に,  $V = \text{span } S$  かつ,  $S$  の元からなる有限個のベクトルの組が常に線型独立であるとき,  $S$  は  $V$  の**基底**であるという. 以上を定義 1.1.2, 1.1.3 にまとめておく.

**定義 1.1.2 (生成系・線型独立・線型従属)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $S$  を  $V$  の部分集合とする.

1.  $V = \text{span } S$  であるとき,  $S$  を  $V$  の**生成系** (generating set) という
2.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  が  $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies c_1 = \cdots = c_k = 0$  を満たすとき,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  は**線型独立** (linearly independent) であるという
3.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  が線型独立でないとき,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  は**線型従属** (linearly dependent) であるという

**定義 1.1.3 (基底)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $\mathcal{B}$  を  $V$  の部分集合とする.  $\mathcal{B}$  が  $V$  の生成系かつ,  $\mathcal{B}$  に属する有限個のベクトル  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  が常に線型独立であるとき,  $\mathcal{B}$  は  $V$  の**基底** (basis) であるという.

**例 1.1.4 (標準基底)**  $S_n$  は  $\mathbb{K}^n$  の基底である.  $S_n$  を  $\mathbb{K}^n$  の**標準基底** (standard basis) という. ◇

さきほどの議論によれば,  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき, 任意の  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  について式 (1.2) が成立する. すなわち,  $S$  は  $\text{span } S$  の基底である. 実はこの逆も示せるので, 次の命題が成立する.

**命題 1.1.5**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $S$  を  $V$  の部分集合とする. このとき, 次の命題は同値である.

1.  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せる

## 2. $S$ は $\text{span } S$ の基底である

$V$  の基底で有限集合のものがあるとき、 $V$  は**有限次元** (finite-dimensional) であるという。 $V$  が有限次元なら、 $V$  の基底はすべて有限集合で、その元の個数は等しい。すなわち、元の個数  $\#B$  は基底  $B$  のとりかたによらず定まる。 $\#B$  を  $V$  の**次元** (dimension) といい、 $\dim V$  と表記する<sup>1)</sup>。

### 1.1.3 線型写像と表現行列

以下、 $V$  は有限次元であるとする。命題 1.1.5 によれば、 $V$  の基底  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  ( $m = \dim V$ ) をとることで、任意の  $\mathbf{x} \in V$  を

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m \quad (c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}) \quad (1.3)$$

の形で一意に表せる。言い換えると、 $V$  の各元  $\mathbf{x}$  に式 (1.3) の  $[c_1 \ \dots \ c_m]^\top$  を割り当てる写像  $\phi: V \rightarrow \mathbb{K}^m$  を定義でき、それは単射<sup>2)</sup>である。この写像  $\phi$  は、次に定義する「線型写像」の1例である。

**定義 1.1.6 (線型写像)**  $V$  と  $W$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする。写像  $f: V \rightarrow W$  が以下の条件を満たすとき、 $f$  は**線型写像** (linear mapping) であるという。

1. 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
2. 任意の  $\mathbf{x} \in V$ ,  $c \in \mathbb{K}$  に対して  $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$

$W$  を  $\mathbb{K}$  上の有限次元ベクトル空間とする。 $W$  の基底  $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  ( $n = \dim W$ ) をとると、 $\phi$  と同様

$$\mathbf{y} = d_1 \mathbf{w}_1 + \dots + d_n \mathbf{w}_n \iff \psi(\mathbf{y}) = [d_1 \ \dots \ d_n]^\top$$

を満たす線型写像  $\psi: W \rightarrow \mathbb{K}^n$  が定義できる。

1)  $V$  が有限次元でないときも基底は存在し、濃度は基底の選び方に依存しない (証明は文献 [3])。

2) 写像  $f$  の定義域に属する任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  について、命題「 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 」が成立するとき、 $f$  は**単射** (injection) であるという。

$\phi$  と  $\psi$  を利用すると,  $V$  から  $W$  への任意の線型写像  $f$  を, 対応する行列によって表現できる.  $\mathbf{x} \in V$  を任意にとる.  $\phi(\mathbf{x}) = [c_1 \ \cdots \ c_m]^T$  とおくと

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i f(\mathbf{v}_i)$$

であるから

$$\psi(f(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^m c_i \psi(f(\mathbf{v}_i)) = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \ \cdots \ \psi(f(\mathbf{v}_m))] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

となる. よって,  $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \ \cdots \ \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  とおくと, 式

$$\psi(f(\mathbf{x})) = T(\phi(\mathbf{x})) \quad (T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

が成り立つ.

ここまでの議論をまとめると, 次のようになる.  $V$  の基底  $\mathcal{B}$  と,  $W$  の基底  $\mathcal{B}'$  をとるごとに,  $n \times m$  行列  $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \ \cdots \ \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  を定義でき,  $\mathbf{A}$  は式 (1.4) を満たす. この  $\mathbf{A}$  を, 基底  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{B}'$  に関する  $f$  の**表現行列** (representation matrix) という.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{T} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

なお,  $\mathcal{B}$  の元を並べる順序に応じて, 式 (1.3) の  $c_1, \dots, c_n$  の順序も変化する.  $\phi$  は  $\mathcal{B}$  に対して一意ではない.  $\phi$  は  $\mathcal{B}$  の元を並べる順序を決めて初めて定まる. 本書では,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  のような書き方をしたとき,  $\mathcal{B}$  には  $\mathbf{v}_i$  の添え字  $i$  について昇順の順序が定まっているとみなす.

**例 1.1.7 (形式的な微分)**  $n$  次以下の 1 変数多項式全体  $V_n = \{c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \mid c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$  は,  $n+1$  次元ベクトル空間である. また, 写像  $D: V_3 \rightarrow V_2$  を

$$D(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_1 + 2c_2x \quad (c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

で定義すると, これは線型写像になる.  $V_n$  の基底として  $\mathcal{B}_n = \{1, x^1, \dots, x^n\}$  をとったとき, 基底  $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2$  に関する  $D$  の表現行列は  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  である.  $\diamond$

### 1.1.4 固有値と固有空間

**定義 1.1.8 (固有値, 固有空間)**  $A$  を  $n$  次正方行列とする. 複素数  $\lambda$  と  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  が式  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  を満たすとき,  $\lambda$  を  $A$  の **固有値** (eigenvalue) という. また,  $\mathbf{x}$  を  $A$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有ベクトル** (eigenvector) という.

**定義 1.1.9 (固有空間)** 定義 1.1.8 の  $A$ ,  $\lambda$  について, 集合

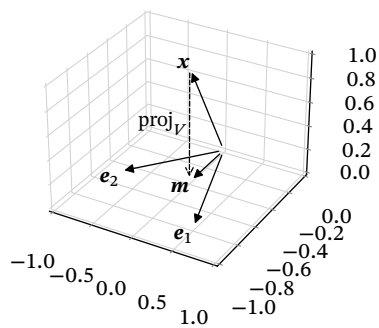
$$E_\lambda(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間になる. 部分空間  $E_\lambda(A)$  を,  $A$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有空間** (eigenspace) という.

固有空間は次の性質を持つ.

**命題 1.1.10**  $\lambda_1, \lambda_2$  を  $n$  次正方行列  $A$  の固有値とする.

1.  $\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(A) \implies A\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(A)$
2.  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A) = \{\mathbf{0}\}$



### 1.1.5 対角化

## 1.2 直交射影

### 1.2.1 直交射影

### 1.2.2 直交補空間

### 1.2.3 スペクトル定理

## 1.3 最小二乗問題

### 1.3.1 最小二乗問題

### 1.3.2 特異値分解

### 1.3.3 擬似逆行列

## 1.4 離散フーリエ変換

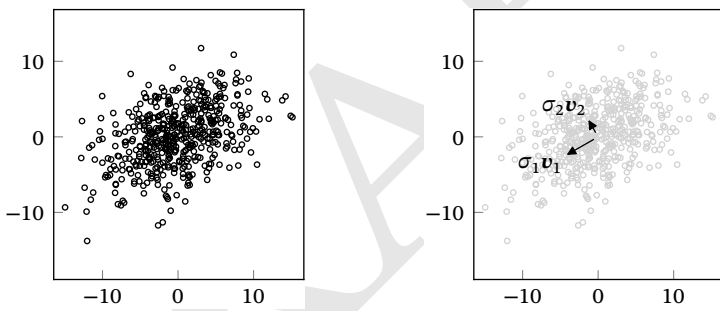
## 1.5 多重解像度解析

## 1.A 主成分分析

## 1.B 低ランク近似

## 1.C 窓関数







## 第 2 章 ヒルベルト空間

第 2 章で書く予定のことを並べておく.

DRAFT

DRAFT

## 2.1 無限次元の線型空間

### 2.1.1 距離空間

### 2.1.2 ノルム線型空間

### 2.1.3 内積空間

### 2.1.4 ヒルベルト空間

## 2.2 直交射影

### 2.2.1 直交射影

### 2.2.2 直交補空間

### 2.2.3 正規直交列

## 2.3 フーリエ級数展開

### 2.3.1 フーリエ級数展開

### 2.3.2 フーリエ変換

## 2.4 多重解像度解析

### 2.4.1 多重解像度解析

### 2.4.2 ウェーブレット変換

### 2.4.3 半ノルム空間



## 第 3 章 確率空間

第 3 章で書く予定のことを並べておく.

### 3.1 確率空間

### 3.2 ウィナーフィルタ

### 3.3 カルマンフィルタ

### 3.A カルーネン・レーベ変換

### 演習問題

## 参考文献

- [1] 齋藤正彦. 線型代数入門. 東京大学出版会, 2020, 274p., (基礎数学, 1).
- [2] 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 2018, 329p.
- [3] 雪江明彦. 環と体とガロア理論. 日本評論社, 2019, 300p., (代数学, 2).



## 索引

	【記号】						【は】	
$\dim V$		4	固有ベクトル	6			表現行列	5
$\text{span } S$		2	【さ】				標準基底	3
$E_\lambda(A)$		6	次元	4			部分空間	
	【か】		零ベクトル	1			生成する—	2
加法逆元		1	線型写像	4			ベクトル空間	1
基底		3	線型従属	3				
固有空間		6	線型独立	3			【や】	
固有値		6	【た】				有限次元	4
			単射	4				