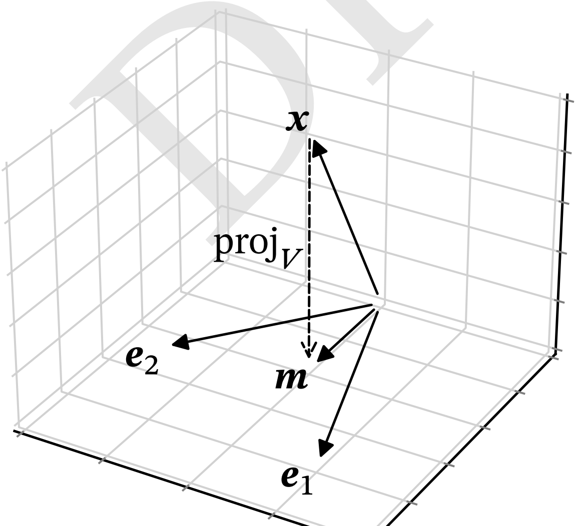
Mathematics of
Signal Analysis

信号解析の数理

線型代数で信号を理解するために

calamari_dev



はじめに

準備中.

2022 年〇月

calamari_dev

目次

記号について

書籍ごとに異なることが多い記号について，記号と定義の組を示します．これら以外の記号については，巻末の索引を参照してください．

記号	定義
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{K}$	実数の全体集合 $\mathbb{R}$ か複素数の全体集合 $\mathbb{C}$
S^{c}	集合 S の補集合
$\mathrm{cl}\, S$	集合 S の閉包
δ_{ij}	クロネッカーのデルタ
$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$	ベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ の内積
$\\|\boldsymbol{v}\\|$	ベクトル $\boldsymbol{v}$ のノルム
$\boldsymbol{I}$	単位行列
$\boldsymbol{O}$	零行列
$\boldsymbol{M}^{\mathsf{T}}$	行列 $\boldsymbol{M}$ の転置行列
$\boldsymbol{M}^{\mathsf{H}}$	行列 $\boldsymbol{M}$ のエルミート転置
$\\|\boldsymbol{M}\\|_{\mathrm{F}}$	行列 $\boldsymbol{M}$ のフロベニウスノルム
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	平均 m，分散 σ^2 の正規分布
$\mathcal{N}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	平均 $\boldsymbol{m}$，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多変量正規分布
$\hat{f}_n$	関数 f のフーリエ係数
$\mathcal{F} f$	関数 f のフーリエ変換

第 1 章　数ベクトル空間

第 1 章で書く予定のことを並べておく.

1.1　行列とベクトル空間

信号解析に関連する議論へと移る前に，有限次元の線型代数について大まかに説明しておく．以下の解説はかなり大雑把なので，必要に応じて線型代数の教科書を参照してほしい.

1.1.1　ベクトル空間

以下，集合 $\mathbb{K}$ は実数の全体集合 $\mathbb{R}$ か，複素数の全体集合 $\mathbb{C}$ であるとする．$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とは次のように定義される，加法とスカラー乗法が備わった集合のことである.

定義 1.1.1 (ベクトル空間)　V を空でない集合とする．また，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，$s \in \mathbb{K}$ について，和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ とスカラー倍 $s\boldsymbol{x} \in V$ が定義されているとする．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$，$s, t \in \mathbb{K}$ に対する以下の条件を満たすとき，V は $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間**（vector space）であるという.

1. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
3. ある $\boldsymbol{0} \in V$ が存在し，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ を満たす
4. 各 $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，ある $\boldsymbol{w} \in V$ が一意に存在して $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ を満たす
5. $(s + t)\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x}$
6. $s(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = s\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y}$
7. $(st)\boldsymbol{x} = s(t\boldsymbol{x})$
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

定義 1.1.1 の $\mathbf{0}$ を**零ベクトル**（zero vector），$\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{v}$ の**加法逆元**（additive inverse）という．通常，$\boldsymbol{v}$ の加法逆元は $-\boldsymbol{v}$ と表される．

ノート　定義 1.1.1 はごてごてしているように見えるが，それは和とスカラー倍について，$\mathbb{K}^n$ と同様に計算できるよう，ルールをつけ加えていった結果といえる． ♢

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を V の元とする．$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ $(c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K})$ という形をした V の元を，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の**線型結合**（linear combination）という．

1.1.2　基底

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^\top \in \mathbb{K}^n$ は，第 i 成分が 1，他の成分が 0 のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を用いて $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と表せる．すなわち，集合 $\mathcal{S}_n = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ は「$\mathbb{K}^n$ のすべての元を $\mathcal{S}_n$ の元の線型結合で書ける」という性質を持つ．

一般に，ベクトル空間 V の部分集合 S に対して，S の元の線型結合で書けるベクトルの全体集合を S が**生成する部分空間**（generated subspace）といい，$\operatorname{span} S$ と表記する．この記法を使えば，先述した $\mathcal{S}_n$ が持つ性質を「$\operatorname{span} \mathcal{S}_n = \mathbb{K}^n$ が成り立つ」と言い換えられる．

$\operatorname{span} S = \mathbb{K}^n$ を満たす集合 $S \subset \mathbb{K}^n$ は，$\mathcal{S}_n$ 以外にも無数にある．たとえば $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^2$ のとき，集合 $T = \{[1 \ \ 1]^\top, [2 \ \ -1]^\top, [-1 \ \ 0]^\top\}$ が生成する部分空間は $\mathbb{R}^2$ である．しかし，$\mathcal{S}_2 = \{[1 \ \ 0]^\top, [0 \ \ 1]^\top\}$ の元の線型結合で $\mathbb{R}^2$ の元を表す方法はただ 1 通りであるのに対して，T はこの性質を持たない（図 1.1）．

S の元の線型結合で $\operatorname{span} S$ の元を一意に表せるとき，任意の $a_i, b_i \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{v}_i \in S$ について

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} b_i\boldsymbol{v}_i \implies (a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k) \tag{1.1}$$

が成立する．$c_i = a_i - b_i$ とおくと，式 (1.1) は

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \implies c_1 = \cdots = c_k = 0 \tag{1.2}$$

と同値である．

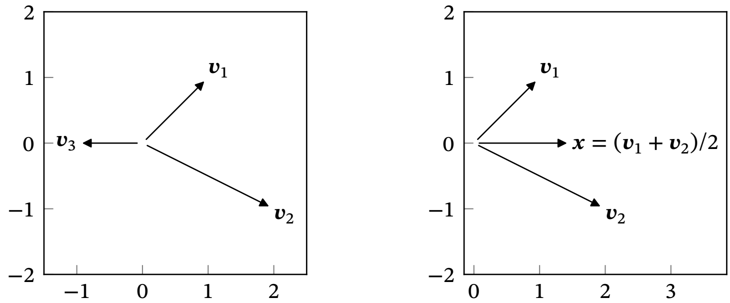


図 1.1　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in T$ の線型結合で $\boldsymbol{x} = [3/2 \quad 0]^\mathsf{T}$ を表した様子．明らかに $\boldsymbol{x} = (-3/2)\boldsymbol{v}_3$ である一方，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)/2 = (1/2)\boldsymbol{v}_1 + (1/2)\boldsymbol{v}_2$ も成り立つ．

任意の $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ に対して式 (1.2) が成立するとき，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は**線型独立**であるという．特に，$V = \operatorname{span} S$ かつ，S の元からなる有限個のベクトルの組が常に線型独立であるとき，S は V の**基底**であるという．以上を定義 1.1.2, 1.1.3 にまとめておく．

定義 1.1.2（生成系・線型独立・線型従属）　V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，S を V の部分集合とする．

1. $V = \operatorname{span} S$ であるとき，S を V の**生成系**（generating set）という
2. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が $\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \implies c_1 = \cdots = c_k = 0$ を満たすとき，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は**線型独立**（linearly independent）であるという
3. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が線型独立でないとき，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は**線型従属**（linearly dependent）であるという

定義 1.1.3（基底）　V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，$\mathcal{B}$ を V の部分集合とする．$\mathcal{B}$ が V の生成系かつ，$\mathcal{B}$ に属する有限個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が常に線型独立であるとき，$\mathcal{B}$ は V の**基底**（basis）であるという．

例 1.1.4（標準基底）　$\mathcal{S}_n$ は $\mathbb{K}^n$ の基底である．$\mathcal{S}_n$ を $\mathbb{K}^n$ の**標準基底**（standard basis）という．　◇

さきほどの議論によれば，S の元の線型結合で $\operatorname{span} S$ の元を一意に表せるとき，任意の $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ について式 (1.2) が成立する．すなわち，S は $\operatorname{span} S$

の基底である．実はこの逆も示せるので，次の命題が成立する．

> **命題 1.1.5**　V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，S を V の部分集合とする．このとき，次の命題は同値である．
>
> 1. S の元の線型結合で $\operatorname{span} S$ の元を一意に表せる
> 2. S は $\operatorname{span} S$ の基底である

V の基底で有限集合のものがあるとき，V は**有限次元**（finite-dimensional）であるという．V が有限次元なら，V の基底はすべて有限集合で，その元の個数は等しい．すなわち，元の個数 $\#\mathcal{B}$ は基底 $\mathcal{B}$ のとりかたによらず定まる．$\#\mathcal{B}$ を V の**次元**（dimension）といい，$\dim V$ と表記する[1]．

1.1.3　線型写像と表現行列

以下，V は有限次元であるとする．命題 1.1.5 によれば，V の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$（$m = \dim V$）をとることで，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ を

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m \quad (c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}) \tag{1.3}$$

の形で一意に表せる．言い換えると，V の各元 $\boldsymbol{x}$ に式 (1.3) の $[c_1 \ \cdots \ c_m]^\top$ を割り当てる写像 $\phi\colon V \to \mathbb{K}^m$ を定義でき，それは単射[2]である．この写像 ϕ は，次に定義する「線型写像」の 1 例である．

> **定義 1.1.6（線型写像）**　V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $f\colon V \to W$ が以下の条件を満たすとき，f は**線型写像**（linear mapping）であるという．
>
> 1. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
> 2. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$，$c \in \mathbb{K}$ に対して $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．W の基底 $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$

---

1)　V が有限次元でないときも基底は存在し，濃度は基底の選び方に依存しない（証明は文献 [3]）．

2)　写像 f の定義域に属する任意の x, y について，命題「$f(x) = f(y) \implies x = y$」が成立するとき，$f$ は**単射**（injection）であるという．

（$n = \dim W$）をとると，ϕ と同様

$$\boldsymbol{y} = d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{w}_n \iff \psi(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_n \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

を満たす線型写像 $\psi\colon W \to \mathbb{K}^n$ が定義できる．

ϕ と ψ を利用すると，V から W への任意の線型写像 f を，対応する行列によって表現できる．$\boldsymbol{x} \in V$ を任意にとる．$\phi(\boldsymbol{x}) = [c_1 \quad \cdots \quad c_m]^{\mathsf{T}}$ とおくと

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i f(\boldsymbol{v}_i)$$

であるから

$$\psi(f(\boldsymbol{x})) = \sum_{i=1}^{m} c_i\psi(f(\boldsymbol{v}_i)) = \begin{bmatrix} \psi(f(\boldsymbol{v}_1)) & \cdots & \psi(f(\boldsymbol{v}_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

となる．よって，$\boldsymbol{A} = [\psi(f(\boldsymbol{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\boldsymbol{v}_m))]$ とおくと，式

$$\psi(f(\boldsymbol{x})) = T(\phi(\boldsymbol{x})) \quad (T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \tag{1.4}$$

が成り立つ．

ここまでの議論をまとめると，次のようになる．V の基底 $\mathcal{B}$ と，W の基底 $\mathcal{B}'$ をとるごとに，$n \times m$ 行列 $\boldsymbol{A} = [\psi(f(\boldsymbol{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\boldsymbol{v}_m))]$ を定義でき，$\boldsymbol{A}$ は式 (1.4) を満たす．この $\boldsymbol{A}$ を，基底 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ に関する f の**表現行列**（representation matrix）という．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & W \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{K}^m \arrow[r, "T"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

なお，$\mathcal{B}$ の元を並べる順序に応じて，式 (1.3) の $c_1, \ldots, c_n$ の順序も変化するので，ϕ は $\mathcal{B}$ に対して一意ではない．ϕ は $\mathcal{B}$ の元を並べる順序を決めて初めて定まる．本書では，$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ のような書き方をしたとき，$\mathcal{B}$ には $\boldsymbol{v}_i$ の添え字 i について昇順の順序が定まっているとみなす．

例 1.1.7（形式的な微分）　n 次以下の 1 変数多項式全体 $V_n = \{c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \mid c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$ は，$\mathbb{R}$ 上の $n+1$ 次元ベクトル空間である．また，写像 $D\colon V_3 \to V_2$ を

$$D(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_1 + 2c_2x \quad (c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

で定義すると，これは線型写像になる．V_n の基底として $\mathcal{B}_n = \{1, x, \ldots, x^n\}$ をとったとき，基底 $\mathcal{B}_3$ と $\mathcal{B}_2$ に関する D の表現行列は $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ である．　◇

1.1.4　固有値と固有空間

定義 1.1.8（固有値，固有ベクトル）　$\boldsymbol{A}$ を n 次正方行列とする．複素数 λ と $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ が式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすとき，λ を $\boldsymbol{A}$ の**固有値**（eigenvalue）という．また，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{A}$ の（固有値 λ に属する）**固有ベクトル**（eigenvector）という．

例 1.1.9　$\boldsymbol{x}_1 = [1+\mathrm{i} \quad 2]^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{x}_2 = [1-\mathrm{i} \quad 2]^{\mathsf{T}}$ は $\boldsymbol{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ の固有ベクトルである．実際 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \mathrm{i}\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = -\mathrm{i}\boldsymbol{x}_2$ である．　♢

定義 1.1.8 を満たす λ を見つけるには，次の命題 1.1.10 を利用するとよい．

命題 1.1.10　λ が正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値であることと，$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ であることは同値である．ただし，$\det \boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の行列式である．

n 次多項式 $P(\lambda) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ を $\boldsymbol{A}$ の**固有多項式**（characteristic polynomial）という．命題 1.1.10 から，集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) = 0\}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有値の全体集合である．

系 1.1.11　任意の n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ は，相異なる固有値を少なくとも 1 個，多くとも n 個もつ．

証明　$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ は λ に関する n 次方程式なので，解は存在しても n 個以下である．また，代数学の基本定理より解は少なくとも 1 つ存在する．　□

定義 1.1.12（固有空間）　定義 1.1.8 の $\boldsymbol{A}$，λ について，集合

$$E_\lambda(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の部分空間になる．部分空間 $E_\lambda(\boldsymbol{A})$ を，$\boldsymbol{A}$ の（固有値 λ に属する）**固有空間**（eigenspace）という．

固有空間は次の性質を持つ．

命題 1.1.13　λ_1，λ_2 を正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値とする．このとき，次の命題が成立する．

1. $\boldsymbol{x} \in E_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}) \implies \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in E_{\lambda_1}(\boldsymbol{A})$
2. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies E_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}) \cap E_{\lambda_2}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{0}\}$

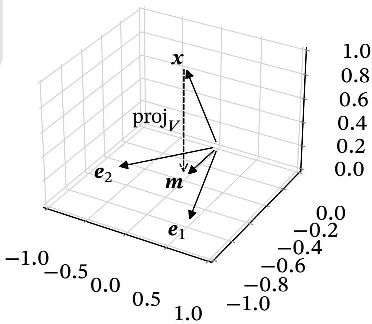
証明　後半のみ示す．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{0} = \lambda_1\boldsymbol{0} = \lambda_2\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{0} \in E_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}) \cap E_{\lambda_2}(\boldsymbol{A})$ である．また，任意に $\boldsymbol{x} \in E_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}) \cap E_{\lambda_2}(\boldsymbol{A})$ をとると，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x} = \lambda_2\boldsymbol{x}$ だから $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．$\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．よって，$E_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}) \cap E_{\lambda_2}(\boldsymbol{A})$ は $\boldsymbol{0}$ 以外に元を持たない． □

例 1.1.14　行列 $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に左から掛けると，$\boldsymbol{x}$ を z 軸周りに $\pi/2$ 回転させたベクトルが得られる．一方で，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{R}$ の固有ベクトルならば，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{R}$ を掛けても回転しないはずである．直感的には，そのような $\boldsymbol{x}$ は z 軸に平行なものしかない． ♢

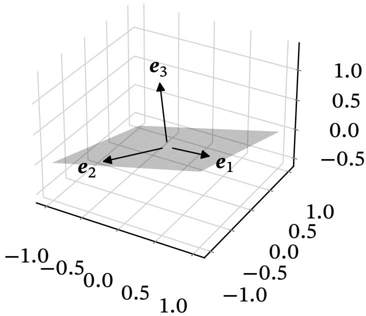
1.1.5　対角化

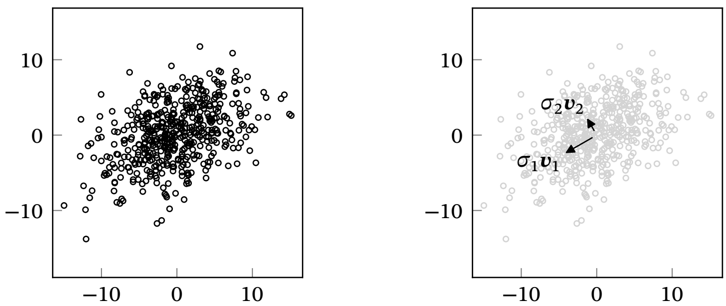
1.2　直交射影

1.2.1　直交射影



1.2.2　直交補空間




10
0
−10
−10
0
10
$\sigma_2 \boldsymbol{v}_2$
$\sigma_1 \boldsymbol{v}_1$

1.2.3　スペクトル定理

1.3　最小二乗問題

1.3.1　最小二乗問題

1.3.2　特異値分解

1.3.3　擬似逆行列

1.4　離散フーリエ変換

1.5　多重解像度解析

1.A　主成分分析

1.B　低ランク近似

1.C　窓関数

演習問題

第 2 章　ヒルベルト空間

第 2 章で書く予定のことを並べておく.

2.1　無限次元の線型空間

2.1.1　距離空間

2.1.2　ノルム線型空間

2.1.3　内積空間

2.1.4　ヒルベルト空間

2.2　直交射影

2.2.1　直交射影

2.2.2　直交補空間

2.2.3　正規直交列

2.3　フーリエ級数展開

2.3.1　フーリエ級数展開

2.3.2　フーリエ変換

2.4　多重解像度解析

2.4.1　多重解像度解析

2.4.2　ウェーブレット変換

2.A　半ノルムと L^p 空間

第 3 章　確率空間

第 3 章で書く予定のことを並べておく.

3.1　確率空間

3.2　ウィナーフィルタ

3.3　カルマンフィルタ

3.A　カルーネン・レーベ変換

演習問題

付録 A　プログラム例

```c
#include <stdio.h>

int main(void) {
  printf("Hello World!\n");
  return 0;
}
```

参考文献

[1] 齋藤正彦. 線型代数入門. 東京大学出版会, 2020, 274p., (基礎数学, 1).

[2] 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 2018, 329p.

[3] 雪江明彦. 環と体とガロア理論. 日本評論社, 2019, 300p., (代数学, 2).

索引