

# 信号解析の数理

線型代数で信号を理解するために

calamari\_dev





# はじめに

準備中.

本書は [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) の下で配布しており，最新版は <https://github.com/calamari-dev/sigproc> から入手できる.

2022 年〇月

calamari\_dev



# 目次

はじめに	iii
記号について	vii
第 1 章 準備と前提知識	1
1.1 行列とベクトル空間	1
ベクトル空間／基底／内積／線型写像と表現行列／核と像／固有値と固有空間／対角化	
第 2 章 数ベクトル空間	13
2.1 直交射影	13
直交射影／直交補空間／分析と合成／スペクトル定理	
2.2 最小 2 乗問題	21
最小 2 乗問題／特異値分解／擬似逆行列	
2.3 離散フーリエ変換	21
2.4 多重解像度解析	21
2.5 主成分分析	21
2.A 低ランク近似	22
演習問題	22
第 3 章 ヒルベルト空間	23
3.1 無限次元のベクトル空間	23
距離空間／ノルム空間	
3.2 ヒルベルト空間	27
3.3 直交射影	28
直交射影／正規直交列	
3.4 $L^p$ 空間	32

3.5	フーリエ級数展開 .....	33
3.6	多重解像度解析 .....	33
	演習問題 .....	33
<b>第 4 章</b>	<b>確率空間</b> .....	<b>35</b>
4.1	確率空間 .....	35
4.2	ウィナーフィルタ .....	35
4.3	カルマンフィルタ .....	35
4.A	カルーネン・レーベ変換 .....	35
	演習問題 .....	35
<b>付録 A</b>	<b>プログラム例</b> .....	<b>37</b>
A.1	C 言語 .....	37
<b>索引</b>		<b>41</b>

# 記号について

書籍ごとに異なることが多い記号について、記号と定義の組を示す。表にない記号については、巻末の索引を参照のこと。

記号	定義
$\mathbb{N}$	自然数の全体集合 $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	整数の全体集合 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{K}$	実数の全体集合 $\mathbb{R}$ か複素数の全体集合 $\mathbb{C}$
$S^c$	集合 $S$ の補集合
$\text{cl } S$	集合 $S$ の閉包
$\delta_{ij}$	クロネッカーのデルタ
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	ベクトル $\mathbf{u}$ , $\mathbf{v}$ の内積
$\ \mathbf{v}\ $	ベクトル $\mathbf{v}$ のノルム
$\mathbf{I}$	単位行列
$\mathbf{O}$	零行列
$\mathbf{M}^T$	行列 $\mathbf{M}$ の転置行列
$\mathbf{M}^H$	行列 $\mathbf{M}$ のエルミート転置
$\ \mathbf{M}\ _F$	行列 $\mathbf{M}$ のフロベニウスノルム
$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n} x$	信号 $x$ の離散フーリエ変換
$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} x$	信号 $x$ の離散時間フーリエ変換
$\hat{f}_n$	関数 $f$ のフーリエ係数
$\mathcal{F} f$	関数 $f$ のフーリエ変換





## 第1章

# 準備と前提知識

第1章では、素朴集合論・線型代数学・微分積分学で有名な事実を、本書で必要となるものに限って概観する。

## 1.1 行列とベクトル空間

### 1.1.1 ベクトル空間

以下、集合  $\mathbb{K}$  は実数の全体集合  $\mathbb{R}$  か、複素数の全体集合  $\mathbb{C}$  であるとする。 $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とは次のように定義される、加法とスカラー乗法が備わった集合のことである。

**定義 1.1.1 (ベクトル空間)**  $V$  を空でない集合とする。また、任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,  $s \in \mathbb{K}$  について、和  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$  とスカラー倍  $s\mathbf{x} \in V$  が定義されているとする。任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ ,  $s, t \in \mathbb{K}$  に対する以下の条件を満たすとき、 $V$  は  $\mathbb{K}$  上の**ベクトル空間** (vector space) であるという。

- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- ある  $\mathbf{0} \in V$  が存在し、任意の  $\mathbf{v} \in V$  に対して  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$  を満たす
- 各  $\mathbf{v} \in V$  に対し、ある  $\mathbf{w} \in V$  が一意に存在して  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$  を満たす
- $(s + t)\mathbf{x} = s\mathbf{x} + t\mathbf{x}$
- $s(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = s\mathbf{x} + s\mathbf{y}$
- $(st)\mathbf{x} = s(t\mathbf{x})$
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

しばしば  $V$  の元をベクトル、 $\mathbb{K}$  の元をスカラーと呼ぶ。また、定義 1.1.1 の

$\mathbf{0}$  を零ベクトル (zero vector),  $\mathbf{w}$  を  $\mathbf{v}$  の加法逆元 (additive inverse) という. 通常,  $\mathbf{v}$  の加法逆元は  $-\mathbf{v}$  と表される.

**ノート** 定義 1.1.1 はごてごてしているように見えるが, それは和とスカラー倍について,  $\mathbb{K}^n$  と同様に計算できるよう, ルールをつけ加えていった結果といえる. ◇

ついで, ベクトル空間にかかわる概念を 2 つ定義する. これらの関係については, すぐ後で説明する.

**定義 1.1.2 (線型結合)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  を  $V$  の元とする.  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$  ( $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ ) という形をした  $V$  の元を,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  の**線型結合** (linear combination) という.

**定義 1.1.3 (部分空間)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W$  を  $V$  の空でない部分集合とする.  $W$  が  $V$  の加法とスカラー乗法について定義 1.1.1 の条件をすべて満たすとき,  $W$  は  $V$  の**部分ベクトル空間** (vector subspace), あるいは単に**部分空間** (subspace) であるという.

ある部分集合  $W \subset V$  が  $V$  の部分空間かどうか調べるには, 命題 1.1.4 を使うとよい.

**命題 1.1.4**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W$  を  $V$  の空でない部分集合とする. このとき, 次の命題は同値である.

1.  $W$  は  $V$  の部分空間である
2. 任意の  $s \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$  に対して  $s\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$  である

**例 1.1.5**  $V$  が  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間なら,  $V$  自身と  $\{\mathbf{0}\}$  は  $V$  の部分空間である. ◇

**例 1.1.6** 集合  $\mathbb{K}^n = \{[s_1 \ \dots \ s_n]^\top \mid s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}\}$  は, 通常の加法とスカラー乗法によって,  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間になる. ただし,  $\mathbf{A}^\top$  は行列  $\mathbf{A}$  の転置行列を意味する. ◇

また, 2 つの部分空間  $W_1, W_2 \subset V$  があれば, それらを含むより大きな部分

空間を作れる。

**定義 1.1.7 (部分空間の和)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W_1, W_2 \subset V$  を部分空間とする. このとき, 集合  $W = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$  は  $V$  の部分空間になる.  $W$  を  $W_1$  と  $W_2$  の**和** (sum) といい,  $W_1 + W_2$  と表記する.

特に  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  であるとき,  $W_1 + W_2$  を  $W_1$  と  $W_2$  の**直和** (direct sum) という. 直和であることを強調したいときは, 和  $W_1 + W_2$  を  $W_1 \oplus W_2$  と書く.

## 1.1.2 基底

任意のベクトル  $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^\top \in \mathbb{K}^n$  は, 第  $i$  成分が 1, 他の成分が 0 のベクトル  $\mathbf{e}_i$  を用いて  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$  と表せる. すなわち, 集合  $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  は「 $\mathbb{K}^n$  のすべての元を  $\mathcal{S}_n$  の元の線型結合で書ける」という性質を持つ.

一般に, ベクトル空間  $V$  の部分集合  $S$  に対して,  $S$  の元の線型結合で書けるベクトルの全体集合を  $S$  が**生成する部分空間** (generated subspace) といい,  $\text{span } S$  と表記する. この記法を使えば, 先述した  $\mathcal{S}_n$  が持つ性質を「 $\text{span } \mathcal{S}_n = \mathbb{K}^n$  が成り立つ」と言い換えられる.

$\text{span } S = \mathbb{K}^n$  を満たす集合  $S \subset \mathbb{K}^n$  は,  $\mathcal{S}_n$  以外にも無数にある. たとえば  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^2$  のとき, 集合  $T = \{[1 \ 1]^\top, [2 \ -1]^\top, [-1 \ 0]^\top\}$  が生成する部分空間は  $\mathbb{R}^2$  である. しかし,  $\mathcal{S}_2 = \{[1 \ 0]^\top, [0 \ 1]^\top\}$  の元の線型結合で  $\mathbb{R}^2$  の元を表す方法はただ 1 通りであるのに対して,  $T$  はこの性質を持たない (図 1.1).

$S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき, 任意の  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{v}_i \in S$  について

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_i \implies [a_1 \ \cdots \ a_k] = [b_1 \ \cdots \ b_k]$$

が成立する.  $b_1 = \cdots = b_k = 0$  とすると

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \implies a_1 = \cdots = a_k = 0 \quad (1.1)$$

が得られる.

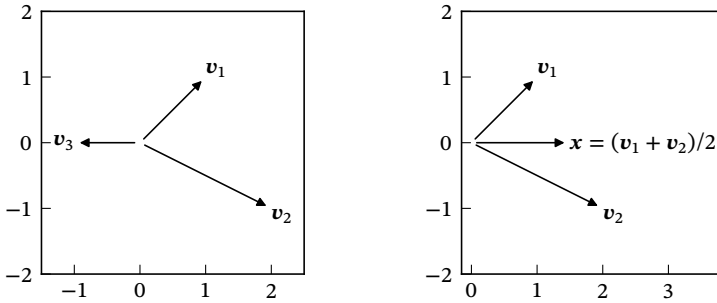


図 1.1  $v_1, v_2, v_3 \in T$  の線型結合で  $x = [3/2 \ 0]^T$  を表した様子. 明らかに  $x = (-3/2)v_3$  である一方,  $x = (v_1 + v_2)/2 = (1/2)v_1 + (1/2)v_2$  も成り立つ.

任意の  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  に対して式 (1.1) が成立するとき,  $v_1, \dots, v_k$  は**線型独立**であるという. 特に,  $V = \text{span } S$  かつ,  $S$  の元からなる有限個のベクトルの組が常に線型独立であるとき,  $S$  は  $V$  の**基底**であるという. 以上を定義 1.1.8, 1.1.9 にまとめておく.

**定義 1.1.8 (生成系・線型独立・線型従属)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $S$  を  $V$  の部分集合とする. また,  $v_1, \dots, v_k$  を  $V$  の元とする.

1.  $V = \text{span } S$  であるとき,  $S$  を  $V$  の**生成系** (generating set) という
2.  $\sum_{i=1}^k c_i v_i = \mathbf{0}$  を満たす  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  の組が  $c_1 = \dots = c_k = 0$  しかないとき,  $v_1, \dots, v_k$  は**線型独立** (linearly independent) であるという
3.  $v_1, \dots, v_k$  が線型独立でないとき,  $v_1, \dots, v_k$  は**線型従属** (linearly dependent) であるという

**定義 1.1.9 (基底)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $B$  を  $V$  の部分集合とする.  $B$  が  $V$  の生成系かつ,  $B$  に属する有限個のベクトル  $v_1, \dots, v_k$  が常に線型独立であるとき,  $B$  は  $V$  の**基底** (basis) であるという.

**例 1.1.10 (標準基底)**  $\mathcal{S}_n$  は  $\mathbb{K}^n$  の基底である.  $\mathcal{S}_n$  を  $\mathbb{K}^n$  の**標準基底** (standard basis) という.  $\diamond$

さきほどの議論によれば,  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき, 任意の  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  について式 (1.1) が成立する. すなわち,  $S$  は

$\text{span } S$  の基底である。実はこの逆も示せるので、次の命題が成立する。

**命題 1.1.11**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間、 $S$  を  $V$  の部分集合とする。このとき、次の命題は同値である。

1.  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せる
2.  $S$  は  $\text{span } S$  の基底である

$V$  の基底で有限集合のものがあるとき、 $V$  は**有限次元** (finite-dimensional) であるという。 $V$  が有限次元なら、 $V$  の基底はすべて有限集合で、その元の個数は等しい。すなわち、元の個数  $\#B$  は基底  $B$  のとりかたによらず定まる。 $\#B$  を  $V$  の**次元** (dimension) といい、 $\dim V$  と表記する<sup>1)</sup>。

基底に関連して、次の命題が成り立つ。

**命題 1.1.12**  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$  とする。このとき、次の命題は同値である。

1. 集合  $\{v_1, \dots, v_n\}$  は  $\mathbb{K}^n$  の基底である
2. 行列  $[v_1 \ \dots \ v_n]$  は正則である

**命題 1.1.13 (基底の延長)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上の  $n$  次元ベクトル空間とする。 $k < n$  個のベクトル  $v_1, \dots, v_k \in V$  が線型独立なら、集合  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  が  $V$  の基底になる  $v_{k+1}, \dots, v_n \in V$  が存在する。

### 1.1.3 内積

$\mathbb{R}^3$  において、ベクトルの長さとなす角はドット積  $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$  から計算できた。定義 1.1.14 は、こうした幾何的な考察を、より多くのベクトル空間へと適用可能にする。

**定義 1.1.14 (内積)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする。 $\langle \_, \_ \rangle$  が  $V$  の**内積** (inner product) であるとは、任意の  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x, y, z \in V$  に対し、 $\langle \_, \_ \rangle$  が

1)  $V$  が有限次元でないときも基底は存在する (証明は文献 [6])。

以下の条件を満たすことをいう。

1.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
2.  $\langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
3.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, [\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}]$

内積が備わっているベクトル空間のことを**内積空間** (inner product space) という。また、 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$  であるとき、ベクトル  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{w}$  は**直交**するという。

**ノート** 定義により、 $\mathbf{0}$  は任意のベクトルと直交する。この事実は直感にそぐわないかもしれないが、 $\mathbf{0}$  だけを特別扱いするとかえって面倒である。◇

**例 1.1.15 (標準内積)**  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \mathbf{v}_1^T \overline{\mathbf{v}_2}$  ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{K}^n$ ) とすると、 $\langle \_, \_ \rangle$  は  $\mathbb{K}^n$  の内積になる。 $\langle \_, \_ \rangle$  を  $\mathbb{K}^n$  の**標準内積**という。◇

定義 1.1.16 は、本書の中核をなす重要な概念である。

**定義 1.1.16 (正規直交系, 正規直交基底)**  $V$  を内積空間とする。集合  $\mathcal{B} \subset V$  が**正規直交系** (orthonormal system; ONS) であるとは、任意の  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathcal{B}$  が条件

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \begin{cases} 1 & (\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2), \\ 0 & (\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{e}_2) \end{cases}$$

を満たすことをいう。また、 $\mathcal{B}$  が  $V$  の基底であるとき、 $\mathcal{B}$  は**正規直交基底** (orthonormal basis; ONB) であるという。

$\mathcal{B}$  が正規直交系なら、有限個の  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathcal{B}$  は常に線型独立である。よって、 $\mathcal{B}$  が基底であることを見るには、 $V = \text{span } \mathcal{B}$  だけ確認すればよい。

また、内積空間に属する線型独立なベクトルの組があれば、それらから正規直交系を作れる。

**命題 1.1.17**  $V$  を内積空間とする。 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  が線型独立なら、式

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_j \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle} \mathbf{u}_j \quad (i = 2, \dots, n)$$

でベクトル  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  を定義すると、集合  $\{\mathbf{u}_i / \sqrt{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mid i = 1, \dots, n\}$  は正

規直交系になる。

正規直交系を作る命題 1.1.17 の方法を**グラム・シュミットの直交化法** (Gram-Schmidt orthogonalization) という。命題 1.1.17 から、有限次元の内積空間は常に正規直交基底を持つ。

### 1.1.4 線型写像と表現行列

$V$  は有限次元であるとする。命題 1.1.11 によれば、 $V$  の基底  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  ( $m = \dim V$ ) をとることで、任意の  $\mathbf{x} \in V$  を

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m \quad (c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}) \quad (1.2)$$

の形で一意に表せる。言い換えると、 $V$  の各元  $\mathbf{x}$  に式 (1.2) の  $[c_1 \ \dots \ c_m]^\top$  を割り当てる写像  $\phi: V \rightarrow \mathbb{K}^m$  を定義でき、それは単射<sup>2)</sup>である。この写像  $\phi$  は、次に定義する「線型写像」の 1 例である。

**定義 1.1.18 (線型写像)**  $V$  と  $W$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする。写像  $f: V \rightarrow W$  が以下の条件を満たすとき、 $f$  は**線型写像** (linear mapping) であるという。

1. 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$  である
2. 任意の  $\mathbf{x} \in V, c \in \mathbb{K}$  に対して  $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$  である

$W$  を  $\mathbb{K}$  上の有限次元ベクトル空間とする。 $W$  の基底  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  ( $n = \dim W$ ) をとると、 $\phi$  と同様

$$\mathbf{y} = d_1 \mathbf{w}_1 + \dots + d_n \mathbf{w}_n \iff \psi(\mathbf{y}) = [d_1 \ \dots \ d_n]^\top$$

を満たす線型写像  $\psi: W \rightarrow \mathbb{K}^n$  が定義できる。

$\phi$  と  $\psi$  を利用すると、 $V$  から  $W$  への任意の線型写像  $f$  を、対応する行列によって表現できる。 $\mathbf{x} \in V$  を任意にとる。 $\phi(\mathbf{x}) = [c_1 \ \dots \ c_m]^\top$  とおくと

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i f(\mathbf{v}_i)$$

2) 写像  $f$  の定義域に属する任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  について、命題「 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 」が成立するとき、 $f$  は**単射** (injection) であるという。

であるから

$$\psi(f(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^m c_i \psi(f(\mathbf{v}_i)) = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\mathbf{v}_m))] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

となる．よって、 $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  とおくと、式

$$\psi(f(\mathbf{x})) = T(\phi(\mathbf{x})) \quad (T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

が成り立つ．

ここまでの議論をまとめると、次のようになる． $V$  の基底  $\mathcal{B}$  と、 $W$  の基底  $\mathcal{B}'$  をとるごとに、 $n \times m$  行列  $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \quad \cdots \quad \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  を定義でき、 $\mathbf{A}$  は式(1.3)を満たす．この  $\mathbf{A}$  を、基底  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{B}'$  に関する  $f$  の表現行列 (representation matrix) という．

なお、 $\mathcal{B}$  の元を並べる順序に応じて、式(1.2)の  $c_1, \dots, c_n$  の順序も変化するので、 $\phi$  は  $\mathcal{B}$  に対して一意ではない． $\phi$  は  $\mathcal{B}$  の元を並べる順序を決めて初めて定まる．本書では、 $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  のような書き方をした場合、 $\mathcal{B}$  の元を  $\mathbf{v}_i$  の添え字  $i$  について昇順に並べると決めておく．

**例 1.1.19 (形式的な微分)**  $n$  次以下の1変数多項式全体  $V_n = \{c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \mid c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$  は、 $\mathbb{R}$  上の  $n+1$  次元ベクトル空間である．また、写像  $D: V_3 \rightarrow V_2$  を

$$D(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_1 + 2c_2x \quad (c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

で定義すると、これは線型写像になる． $V_n$  の基底として  $\mathcal{B}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$  をとったとき、基底  $\mathcal{B}_3$  と  $\mathcal{B}_2$  に関する  $D$  の表現行列は  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  である．◇

### 1.1.5 核と像

線型写像に付随して、重要なベクトル空間が2つ定まる．

**定義 1.1.20 (核, 像)**  $f: V \rightarrow W$  を線型写像とする．

1. 集合  $\{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$  を  $f$  の核 (kernel) といい、 $\ker f$  と表す
2. 集合  $\{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$  を  $f$  の像 (image) といい、 $\operatorname{im} f$  と表す



一般に,  $\ker f$  と  $\operatorname{im} f$  はそれぞれ  $V$  と  $W$  の部分空間になる.  $\ker f$  について, 次の命題が成立する.

**命題 1.1.21**  $f: V \rightarrow W$  を線型写像とする. このとき,  $f$  が単射であることと,  $\ker f = \{\mathbf{0}\}$  が成立することは同値である.

**証明**  $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$  なので,  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  である. よって,  $f$  が単射なら  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$  だから,  $\ker f = \{\mathbf{0}\}$  である.

また,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  が  $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$  を満たせば  $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$  である. よって,  $\ker f = \{\mathbf{0}\}$  なら  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$  である. すなわち,  $\ker f = \{\mathbf{0}\}$  なら  $f$  は単射である.  $\square$

### 1.1.6 固有値と固有空間

対角化に向けて, 固有値に関連する事項を整理する.

**定義 1.1.22 (固有値, 固有ベクトル)**  $A$  を  $n$  次正方行列とする. 複素数  $\lambda$  と  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  が式  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  を満たすとき,  $\lambda$  を  $A$  の**固有値** (eigenvalue) という. また,  $\mathbf{x}$  を  $A$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有ベクトル** (eigenvector) という.

**例 1.1.23**  $\mathbf{x}_1 = [1 + i \ 2]^\top$ ,  $\mathbf{x}_2 = [1 - i \ 2]^\top$  は  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  の固有ベクトルである. 実際  $A\mathbf{x}_1 = i\mathbf{x}_1$ ,  $A\mathbf{x}_2 = -i\mathbf{x}_2$  である.  $\diamond$

定義 1.1.22 を満たす  $\lambda$  を見つけるには, 次の命題 1.1.24 を利用するとよい.

**命題 1.1.24**  $\lambda$  が正方行列  $A$  の固有値であることと,  $\det(\lambda I - A) = 0$  であることは同値である. ただし,  $\det A$  は  $A$  の行列式である.

$n$  次多項式  $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  を  $A$  の**固有多項式** (characteristic polynomial) という. 命題 1.1.24 から, 集合  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) = 0\}$  は  $A$  の固有値の全体集合である.

**系 1.1.25** 任意の  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  は、相異なる固有値を少なくとも 1 個、多くとも  $n$  個もつ。

**証明**  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  は  $\lambda$  に関する  $n$  次方程式なので、解は存在しても  $n$  個以下である。また、代数学の基本定理より解は少なくとも 1 つ存在する。  $\square$

**定義 1.1.26 (固有空間)** 定義 1.1.22 の  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda$  について、集合

$$E_{\lambda}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間になる。部分空間  $E_{\lambda}(\mathbf{A})$  を、 $\mathbf{A}$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有空間** (eigenspace) という。

固有空間は次の性質を持つ。

**命題 1.1.27**  $\lambda_1, \lambda_2$  を正方行列  $\mathbf{A}$  の固有値とする。このとき、次の命題が成立する。

1.  $\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \implies \mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(\mathbf{A})$
2.  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies E_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \cap E_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$

**証明** 2 のみ示す。任意に  $\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \cap E_{\lambda_2}(\mathbf{A})$  をとる。  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}$  より  $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  であり、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$  なので  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  である。よって、 $E_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \cap E_{\lambda_2}(\mathbf{A})$  は  $\mathbf{0}$  以外に元を持たない。  $\square$

### 1.1.7 対角化

適当な  $n$  次正則行列  $\mathbf{P}$ , 対角行列  $\mathbf{\Lambda}$  の組を見つけて、 $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  を  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$  の形で書くことを  $\mathbf{A}$  の**対角化** (diagonalization) という。 $\mathbf{A}$  が対角化可能である必要十分条件は、次の命題 1.1.28 で与えられる。

**命題 1.1.28**  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  の固有値全体を  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  とおく。ただし、 $i \neq j$  ならば  $\lambda_i \neq \lambda_j$  とする。このとき、次の命題は同値である。

1.  $\mathbf{A}$  の固有ベクトルのみからなる  $\mathbb{K}^n$  の基底が存在する
2.  $\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(\mathbf{A})$  が成立する
3.  $n$  次正則行列  $\mathbf{P}$ , 対角行列  $\mathbf{\Lambda}$  が存在して  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$  を満たす

以下, 対角行列  $\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$  を  $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  と略記する.

**証明** 1 と 3 の同値性のみ示す.  $\mathbf{A}$  の固有ベクトルのみからなる  $\mathbb{K}^n$  の基底  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  があるとき,  $\mathbf{A}$  は対角化可能であることを示す.  $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$  とおく. このとき, 各  $\mathbf{v}_i$  に対応する固有値を  $\lambda_i$  とおくと  $\mathbf{A}\mathbf{P} = [\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{A}\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{v}_n]$  であるから,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  とおくと  $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$  となる. ただし,  $\mathbf{P}$  の逆行列が存在することは命題 1.1.12 による.

逆に,  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$  を満たす  $n$  次正則行列  $\mathbf{P}$ , 対角行列  $\mathbf{\Lambda}$  が存在したとする.  $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  とおく. このとき  $[\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{A}\mathbf{v}_n] = \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda} = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{v}_n]$  なので, 各  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  は  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$  を満たす. また,  $\mathbf{P}$  は正則だから  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  である. よって,  $\mathbf{v}_i$  は  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_i$  に属する固有ベクトルである. したがって, 命題 1.1.12 より  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  は  $\mathbf{A}$  の固有ベクトルのみからなる  $\mathbb{K}^n$  の基底である. □



# 数ベクトル空間

第2章では、数ベクトル空間における直交性と最良近似の関係を説明する。

## 2.1 直交射影

本節では、あるベクトルを他のベクトルの線型結合で近似する手法を説明する。特に断りのない限り、第2章において  $\mathbb{K}$  は  $\mathbb{R}$  か  $\mathbb{C}$  を意味し、 $\langle \_, \_ \rangle$  は  $\mathbb{K}^n$  の標準内積を意味する。また

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \quad (\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{K}^n)$$

とする。

### 2.1.1 直交射影

$\mathbb{K}^n$  のベクトル  $\mathbf{x}$ ，部分空間  $V$  が与えられたとき、 $V$  の元で  $\mathbf{x}$  に最も近いベクトル、すなわち、距離  $\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$  を最小にする  $\mathbf{m} \in V$  について考えよう。

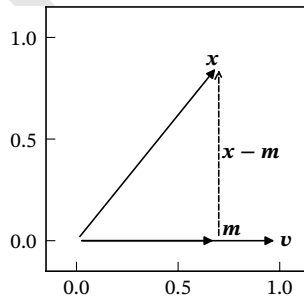


図 2.1  $V = \text{span}\{\mathbf{v}\}$  の元で  $\mathbf{x}$  に最も近いベクトル  $\mathbf{m}$  の様子。

$\mathbb{K}^n$  が平面  $\mathbb{R}^2$  で、 $V$  があるベクトル  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  により生成される直線  $\text{span}\{\mathbf{v}\}$  の場合について、 $\mathbf{m}$  を図示したのが図 2.1 である。図 2.1 を見ると、 $\mathbf{x} - \mathbf{m}$  は

$\mathbf{v}$  と直交しているのが分かる.

一般の部分空間  $V \subset \mathbb{K}^n$  についても, 直交性は最良近似を特徴づける. 証明へと入る前に, 便利な記法を2つ定義しておく.

**定義 2.1.1** ( $\arg \min$ ,  $\arg \max$ )  $X$  を集合とする. 集合  $S \subset X$  と関数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $S$  の部分集合  $\arg \min_{x \in S} f(x)$ ,  $\arg \max_{x \in S} f(x)$  を以下の通り定義する.

$$\arg \min_{x \in S} f(x) = \{x \in S \mid y \in S \implies f(y) \geq f(x)\},$$

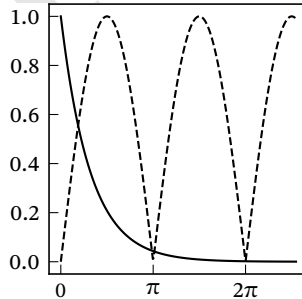
$$\arg \max_{x \in S} f(x) = \{x \in S \mid y \in S \implies f(y) \leq f(x)\}$$

定義 2.1.1 からただちに, 次のことが分かる.

**命題 2.1.2**  $S$  の元  $a$  に関する以下の条件は同値であり, 同様のことが  $\arg \max$  についても成り立つ.

1.  $a \in \arg \min_{x \in S} f(x)$  である
2. 関数  $f$  は  $S$  上で最小値に達して, その値は  $f(a)$  である

**例 2.1.3**  $\arg \min_{x \in [0, \infty)} \exp(-x) = \arg \max_{x \in [0, \infty)} \exp(x) = \emptyset$  である. また  $\arg \min_{x \in \mathbb{R}} |\sin(x)| = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$  である.  $\diamond$



**図 2.2**  $\exp(-x)$  と  $|\sin(x)|$  のグラフ.  $\exp(-x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) であるが,  $\exp(-x) = 0$  となる実数  $x$  は存在しないことに注意.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  の場合も同様に証明できるので, 命題 2.1.6 まで証明では  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  を

仮定する．また，部分空間が  $\{0\}$  でないことも仮定する．

**命題 2.1.4**  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  かつ， $V$  は  $\mathbb{K}^n$  の部分空間とする．このとき， $\arg \min_{\mathbf{y} \in V} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  はただ 1 つの元からなる集合である．

**証明**  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  を  $V$  の正規直交基底とすると， $V$  は  $\{z_1\mathbf{e}_1 + \dots + z_m\mathbf{e}_m \mid z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}\}$  と書ける．したがって， $f(z_1, \dots, z_m) = \|\mathbf{x} - (z_1\mathbf{e}_1 + \dots + z_m\mathbf{e}_m)\|$  ( $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ ) とおくと

$$\arg \min_{\mathbf{y} \in V} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left\{ z_1\mathbf{e}_1 + \dots + z_m\mathbf{e}_m \mid [z_1 \ \dots \ z_m]^T \in \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m} f(\mathbf{z}) \right\}$$

である．

$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m} f(\mathbf{z})$  を求める． $\mathcal{B}$  は正規直交基底だから

$$\left\| \sum_{i=1}^m z_i \mathbf{e}_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m z_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^m z_j \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m z_i \bar{z}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m z_i \bar{z}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^m |z_i|^2$$

となる．したがって ( $\sum_{k=1}^m$  を  $\sum$  と略記すると)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z})^2 &= \left\| \mathbf{x} - \sum z_k \mathbf{e}_k \right\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \sum z_k \mathbf{e}_k \rangle + \left\| \sum z_k \mathbf{e}_k \right\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \sum \operatorname{Re} [\bar{z}_k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle] + \sum |z_k|^2 \end{aligned}$$

である．よって， $f(\mathbf{z})^2$  は  $s_k = \operatorname{Re} z_k$  と  $t_k = \operatorname{Im} z_k$  の式で

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z})^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \sum (-2 \operatorname{Re} [(s_k - it_k) \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle] + s_k^2 + t_k^2) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \sum (-2(s_k \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle + t_k \operatorname{Im} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle) + s_k^2 + t_k^2) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \sum ((s_k - \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle)^2 + (t_k - \operatorname{Im} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle)^2 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle|^2) \end{aligned}$$

と書けるので，次式が成立する．

$$f(\mathbf{z})^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{k=1}^m |z_k - \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^m |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle|^2 \quad (2.1)$$

式 (2.1) より  $\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m} f(\mathbf{z}) = \{[\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \ \dots \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle]^T\}$  であるから， $\arg \min_{\mathbf{y} \in V} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \mathbf{e}_m\}$  である．  $\square$

なお，命題 2.1.4 は部分空間よりも少し広い対象（閉凸集合）へと一般化できるのだが，そのことは第 3 章であらためて扱う．

**命題 2.1.5**  $x \in \mathbb{K}^n$  かつ,  $V$  は  $\mathbb{K}^n$  の部分空間とする.  $V$  のある元  $m$  が任意の  $y \in V$  に対して  $\langle x - m, y \rangle = 0$  を満たすとき,  $m \in \arg \min_{y \in V} \|x - y\|$  である.

**証明** 任意の  $y \in V$  について,  $y - m \in V$  だから

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|(x - m) - (y - m)\|^2 \\ &= \|x - m\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - m, y - m \rangle + \|y - m\|^2 \\ &= \|x - m\|^2 + \|y - m\|^2 \geq \|x - m\|^2\end{aligned}$$

である. よって  $\|x - m\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$  である. □

命題 2.1.5 からは, 仮定「任意の  $y \in V$  に対して  $\langle x - m, y \rangle = 0$ 」を満たす  $m \in V$  が存在するかどうかは分からない. しかし実は, 仮定を満たす  $m$  は一意に定まり, それは  $\arg \min_{y \in V} \|x - y\|$  のただ 1 つの元である.

**命題 2.1.6**  $x \in \mathbb{K}^n$  かつ,  $V$  は  $\mathbb{K}^n$  の部分空間とする. このとき,  $V$  の元  $m$  に関する以下の条件は同値であり, 条件を満たす  $m$  はただ 1 つ存在する.

1.  $m \in \arg \min_{y \in V} \|x - y\|$  である
2. 任意の  $y \in V$  に対して  $\langle x - m, y \rangle = 0$  である

**証明** 命題 2.1.4 より,  $n \in \arg \min_{y \in V} \|x - y\|$  を満たす  $n$  がただ 1 つ存在する. そして命題 2.1.5 より,  $m \in V$  が任意の  $y \in V$  に対して  $\langle x - m, y \rangle = 0$  を満たすなら  $m = n$  である.

したがって,  $n$  がすべての  $v \in V$  に対して  $\langle x - n, v \rangle = 0$  を満たすことを示せばよい. それには  $\|v\| = 1$  のときについて示せば十分である.  $n$  の定義から, 関数  $e(z) = \|x - (n + zv)\|^2 - \|x - n\|^2$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) は負の値をとらない. 一方,  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  とおくと

$$\begin{aligned}e(z) &= \|x - n - zv\|^2 - \|x - n\|^2 = -2 \operatorname{Re}[(x - n) \langle x - n, v \rangle] + |z|^2 \|v\|^2 \\ &= -2(x \operatorname{Re} \langle x - n, v \rangle + y \operatorname{Im} \langle x - n, v \rangle) + x^2 + y^2 \\ &= (x - \operatorname{Re} \langle x - n, v \rangle)^2 + (y - \operatorname{Im} \langle x - n, v \rangle)^2 - |\langle x - n, v \rangle|^2 \\ &= |z - \langle x - n, v \rangle|^2 - |\langle x - n, v \rangle|^2\end{aligned}$$



なので  $e(\langle \mathbf{x} - \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle) = -|\langle \mathbf{x} - \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle|^2 \geq 0$ , よって  $\langle \mathbf{x} - \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$  である.  $\square$

**定義 2.1.7 (直交射影)** 命題 2.1.6 の  $\mathbf{m}$  を  $\mathbf{x}$  の  $V$  への**直交射影** (orthogonal projection) といい,  $\text{proj}_V(\mathbf{x})$  と表す.

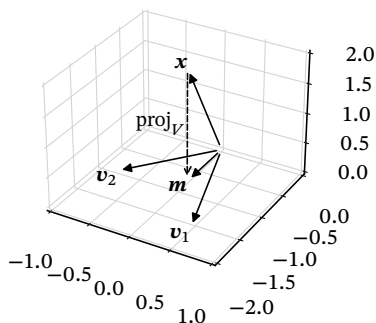


図 2.3  $\mathbf{x}$  の  $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  への直交射影  $\mathbf{m} = \text{proj}_V(\mathbf{x})$  の模式図.

**例 2.1.8**  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = [2 \ -1 + i\sqrt{3} \ -1 - i\sqrt{3}]^T$  とし,  $\mathbb{C}^3$  の部分空間  $V$  を  $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  で定義する. このとき  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ ,  $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}$ ,  $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{12}$  だから, 集合  $\{\mathbf{v}_1/\sqrt{3}, \mathbf{v}_2/\sqrt{12}\}$  は  $V$  の正規直交基底である. よって

$$\text{proj}_V(\mathbf{x}) = \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{3}} + \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{12}} \right\rangle \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{12}} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle}{3} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle}{12} \mathbf{v}_2$$

である.  $\diamond$

**命題 2.1.9**  $\mathbb{K}^n$  の任意の部分空間  $V$  について, 写像  $\text{proj}_V: \mathbb{K}^n \rightarrow V$  は線型写像である.

**証明**  $s, t \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$  を任意にとり,  $\mathbf{m} = s \text{proj}_V(\mathbf{x}) + t \text{proj}_V(\mathbf{y})$  とおく. このとき, 任意の  $\mathbf{v} \in V$  に対して  $\langle s\mathbf{x} + t\mathbf{y} - \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle = s\langle \mathbf{x} - \text{proj}_V(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle + t\langle \mathbf{y} - \text{proj}_V(\mathbf{y}), \mathbf{v} \rangle = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$  となるので,  $\text{proj}_V(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = \mathbf{m}$  である. よって,  $\text{proj}_V$  は線型写像である.  $\square$

## 2.1.2 直交補空間

**定義 2.1.10 (直交補空間)**  $V$  は  $\mathbb{K}^n$  の部分空間とする.  $W$  が  $V$  の部分空間なら, 集合  $X = \{x \in V \mid y \in W \implies \langle x, y \rangle = 0\}$  も  $V$  の部分空間になる.  $X$  を ( $V$  における)  $W$  の**直交補空間** (orthogonal complement) といひ,  $W^\perp$  と表記する. 誤解のおそれがないければ,  $W^\perp$  を  $W^\perp$  と書く.

**例 2.1.11**  $W = \text{span}\{e_1, e_2\}$  を  $\mathbb{R}^3$  の2次元部分空間とする. このとき,  $\mathbb{R}^3$  における  $W$  の直交補空間は  $e_1$  と  $e_2$  に直交する  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $e_3$  で生成される直線  $\text{span}\{e_3\}$  である. 特に  $e_1$  と  $e_2$  が直交するとき, 集合  $\{e_1, e_2, e_3\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底である.  $\diamond$

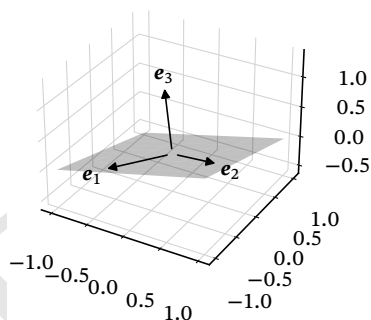


図 2.4  $W$  と  $e_1, e_2, e_3$  の様子.

**命題 2.1.12**  $V$  は  $\mathbb{K}^n$  の部分空間で,  $W$  は  $V$  の部分空間とする. このとき  $V = W \oplus W^\perp$  である.

**証明**  $x \in W \cap W^\perp$  なら  $\langle x, x \rangle = 0$  なので  $x = \mathbf{0}$ , よって  $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$  である. 命題 2.1.6 より, 各  $x \in V$  について  $x - \text{proj}_W(x) \in W^\perp$  であるから,  $x = \text{proj}_W(x) + (x - \text{proj}_W(x)) \in W \oplus W^\perp$  である. したがって  $V = W \oplus W^\perp$  である.  $\square$

### 2.1.3 分析と合成

命題 2.1.4 の証明では,  $\text{proj}_V(\mathbf{x})$  の存在を示すために  $V$  の正規直交基底  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  を 1 つ選び,  $\text{proj}_V(\mathbf{x})$  を  $\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$  と表した. 一方で (特に信号解析では),  $\mathbf{x}$  の性質を調べるのに利用したい  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  があって, そこから部分空間  $V_m = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  ( $m = 1, \dots, n$ ) への直交射影  $\text{proj}_{V_m}(\mathbf{x})$  を作ることも多い. そのような場合, 直交射影は 3 つの操作に分解できる.

**定義 2.1.13 (エルミート転置)**  $A$  を  $m \times n$  複素行列とする.  $n \times m$  行列  $A^H$  を  $A$  のエルミート転置 (Hermitian transpose) といい,  $A^H$  と表す<sup>1)</sup>.

$U = [\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_n]^H$ ,  $\Lambda = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{bmatrix} = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  とおく. このとき, 任意の  $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{C}^n$  に対して

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^H \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \end{bmatrix}, \quad \Lambda \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U^H \mathbf{x} = U^H \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

であるから,  $\text{proj}_{V_m}(\mathbf{x}) = U^H \Lambda U \mathbf{x}$  が成立する. 言い換えれば,  $\text{proj}_{V_m}$  は  $\mathbb{C}^n$  から  $\mathbb{C}^n$  への 3 つの写像  $T(\mathbf{x}) = U\mathbf{x}$ ,  $L(\mathbf{x}) = \Lambda \mathbf{x}$ ,  $T^*(\mathbf{x}) = U^H \mathbf{x}$  を用いて,  $\text{proj}_{V_m} = T^* L T$  と表せる. 実際

$$U^H \Lambda U \mathbf{x} = U^H \Lambda \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \end{bmatrix} = U^H \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i = \text{proj}_{V_m}(\mathbf{x})$$

である.

**定義 2.1.14 (正規行列, ユニタリ行列)**  $A$  を  $n$  次複素正方行列とする.

1.  $A^H A = A A^H$  であるとき,  $A$  を **正規行列** (normal matrix) という
2.  $A^H A = A A^H = I$  であるとき (つまり  $A^H = A^{-1}$  であるとき),  $A$  を **ユ**

1) エルミート転置は**随伴行列** (adjoint matrix) と呼ばれることも多いが, 別の行列を随伴行列と呼ぶ流儀もあり, まぎらわしい. そのため, 本書ではエルミート転置で統一する.

### ユニタリ行列 (unitary matrix) という

定義 2.1.14 から, ユニタリ行列は正規行列である. また, 次の命題が成立する.

**命題 2.1.15 (ユニタリ行列の性質)**  $U = [\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n]$  を  $n$  次複素正方行列とする. このとき, 以下の命題は同値である.

1.  $U$  はユニタリ行列である
2. 集合  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  は  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底である

**証明**  $U^H U = [a_{ij}]$  とおくと

$$U^H U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^H \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^H \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n^H \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

なので  $a_{ij} = \mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle$  である. よって,  $U^{-1} = U^H$  であることと, 各  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  に対して  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$  であることは同値である.  $\square$

### 2.1.4 スペクトル定理

## 2.2 最小 2 乗問題

### 2.2.1 最小 2 乗問題

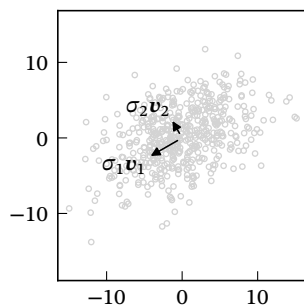
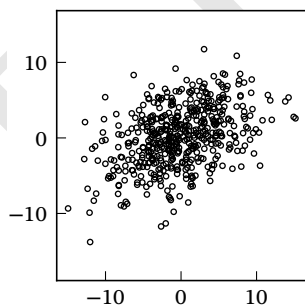
### 2.2.2 特異値分解

### 2.2.3 擬似逆行列

## 2.3 離散フーリエ変換

## 2.4 多重解像度解析

## 2.5 主成分分析



## 2.A 低ランク近似

### 演習問題

DRAFT

## ヒルベルト空間

第 3 章では、数ベクトルに対する議論を関数に対する議論へと拡張する。  
この拡張によって、連続時間の対象についてもベクトル空間の考え方が適用  
可能になる。

## 3.1 無限次元のベクトル空間

## 3.1.1 距離空間

**定義 3.1.1 (距離空間)**  $S$  を集合とする。  $d$  が  $S$  上の**距離** (metric) であるとは、任意の  $x, y, z \in S$  に対して、  $d$  が以下の条件を満たすことをいう。

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $[d(x, y) = 0 \iff x = y]$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

また、集合と距離の組  $(S, d)$  を**距離空間** (metric space) という。

**例 3.1.2**  $S = \mathbb{C}$ ,  $d(z, w) = |z - w|$  とすると、  $(S, d)$  は距離空間になる。 ◇

**例 3.1.3 (離散距離)** 集合  $S$  は空でないとする。 また、各  $x, y \in S$  に対して、  
 $x = y$  のとき  $d(x, y) = 0$ ,  $x \neq y$  のとき  $d(x, y) = 1$  とする。 このとき  $d$  は  $S$   
上の距離になる。 距離  $d$  を**離散距離** (discrete metric), 距離空間  $(S, d)$  を**離  
散空間** (discrete space) という。 ◇

定義 3.1.1 のように抽象的な形で距離を定義する利点の 1 つは、  $\mathbb{K}^n$  以外の  
集合に対しても、点列の極限を定義できることである。

**定義 3.1.4 (点列の収束)**  $(S, d)$  を距離空間とする.  $S$  上の点列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\alpha \in S$  に**収束する** (converge) とは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $N \in \mathbb{N}$  が存在して  $n > N \implies d(x_n, \alpha) < \varepsilon$  を満たすことをいう. このことを次のように表す.

$$x_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\alpha$  に収束するとき,  $\alpha$  を  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の**極限点** (limit point) という. 定義 3.1.4 は要するに「 $N$  の値を十分に大きくとれば, 点  $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$  が点  $\alpha$  から距離  $\varepsilon$  以上離れないようにできる」ことを意味する.

**例 3.1.5**  $(S, d)$  を例 3.1.2 の距離空間とする.  $S$  上の点列  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を  $z_n = (\sqrt{3}+i)/(2n)$  で定義すると,  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は定義 3.1.4 の意味で  $z_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たす.

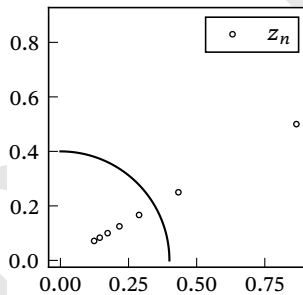


図 3.1  $z_1, \dots, z_7$  の様子

この意味を考えよう.  $d(z, 0) = |z|$  だから, 複素平面上の点  $0$  から距離  $r$  だけ離れた点の集合は  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ , すなわち, 半径  $r$  の円周である. つまり  $z_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) とは, 図 3.1 中にある円周の半径をどのように変えても,  $N$  の値を十分大きくとれば, 点  $z_{N+1}, z_{N+2}, \dots$  をすべて円周の中に入れられることを意味する. ◇

**例 3.1.6 (一様収束)**  $I = [a, b]$  を 1 次元の閉区間とする.  $C^0(I)$  を連続関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  の全体集合とすると,  $d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in I\}$  は  $C^0(I)$  上の距離になる.  $C^0(I)$  上の関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が定義 3.1.4 の意味で  $f \in C^0(I)$  に収束するとき,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $f$  に**一様収束する** (converge uniformly) という.



たとえば  $I = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x/n$  のとき,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は定数関数  $\phi(x) = 0$  に一様収束する. 実際  $d(f_n, \phi) = \max\{|f_n(x)| \mid x \in I\} = 1/n$  なので,  $n$  を十分大きくとれば  $d(f_n, \phi)$  の値を限りなく小さくできる (図 3.2). ◇

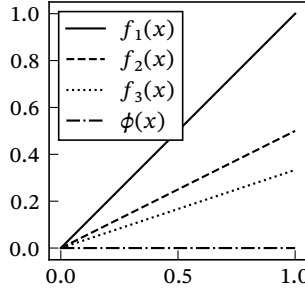


図 3.2  $f_n \rightarrow \phi$  ( $n \rightarrow \infty$ ) の様子

**ノート** 例 3.1.5 において  $|z_n| = 1/n$  であるから,  $d(f_n, \phi) = |z_n|$  である. よって, 図 3.1 は ( $z_n$  を  $f_n$  に書き換えれば)  $f_n \rightarrow \phi$  ( $n \rightarrow \infty$ ) の様子を描いた図とも考えられる. このように, 関数などの一見「点」とは思えないような対象を点とみなして考察するのは, しばしば有用である. ◇

**定義 3.1.7 (閉包)**  $(S, d)$  を距離空間とする. 集合  $A \subset S$  に対して,  $A$  上の収束列すべての極限点からなる集合を  $A$  の**閉包** (closure) といい,  $\text{cl} A$  と書く<sup>1)</sup>.

$A = \text{cl} A$  であるとき,  $A$  は**閉集合** (closed set) であるという. すなわち,  $A$  が閉集合であるとは,  $A$  上の収束列はすべて  $A$  上に極限点を持つということである.

**定義 3.1.8 (コーシー列)**  $(S, d)$  を距離空間とする.  $S$  上の点列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $N \in \mathbb{N}$  が存在して  $m, n > N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$  を満たすことをいう. こ

1) 本書では閉包を  $\text{cl} A$ , 補集合を  $A^c$  で表す.

のことを次のように表す.

$$d(x_m, x_n) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty), \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$$

また,  $S$  上の任意のコーシー列が収束列でもあるとき,  $(S, d)$  は**完備距離空間** (complete metric space) であるという. 一般に収束列はコーシー列でもあるから, 完備距離空間においては収束列とコーシー列は同義である.

**例 3.1.9**  $S = \mathbb{Q}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$  とすると,  $(S, d)$  は距離空間になるが完備距離空間にはならない.  $\diamond$

### 3.1.2 ノルム空間

**定義 3.1.10 (ノルム空間)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする.  $\|\cdot\|$  が  $V$  の**ノルム** (norm) であるとは, 任意の  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して,  $\|\cdot\|$  が以下の条件を満たすことをいう.

1.  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,  $[\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}]$
2.  $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$
3.  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

また,  $V$  にノルムが定義されているとき,  $V$  は**ノルム空間** (normed space) であるという.

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  とおくと,  $d$  は  $V$  の距離になる.  $(V, d)$  が完備距離空間であるとき, ノルム空間  $V$  は**バナッハ空間** (Banach space) であるという.

**例 3.1.11**  $V$  が  $\mathbb{K}$  上の内積空間なら,  $V$  の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から  $V$  のノルムを  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$  で定義できる. つまり, 内積空間はノルム空間でもある.  $\diamond$

**例 3.1.12 ( $\ell^p$  空間)** 複素数列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して,  $\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^p} \in [0, \infty]$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) を

$$\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^p} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

で定義する. 数列空間の部分空間  $\ell^p$  を  $\ell^p = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^p} < \infty\}$  で定義すると,  $\|\cdot\|_{\ell^p}$  は  $\ell^p$  のノルムになり, しかも,  $\ell^p$  はこのノルムについて

バナッハ空間になる．バナッハ空間  $\ell^p$  を  $\ell^p$  空間 ( $\ell^p$  space) という．◇

**例 3.1.13** 例 3.1.6 の集合  $C^0(I)$  は、ノルム  $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in I\}$  についてバナッハ空間になる．ただし、関数の和  $\phi = f + g$  とスカラー倍  $\psi = \lambda f$  はそれぞれ  $\phi(x) = f(x) + g(x)$ ,  $\psi(x) = \lambda f(x)$  で定義する．◇

## 3.2 ヒルベルト空間

**定義 3.2.1 (ヒルベルト空間)** 内積空間  $H$  がヒルベルト空間 (Hilbert space) であるとは、 $H$  の内積  $\langle \_, \_ \rangle$  から定まるノルム  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  について、 $H$  がバナッハ空間であることをいう．

もう少し定義をさかのぼると、ノルム空間  $H$  がバナッハ空間であるとは、距離  $d(x, y) = \|x - y\|$  について  $(H, d)$  が完備距離空間であることをいうのであった．したがって、完備距離空間・ノルム空間・バナッハ空間・内積空間が有する性質はすべて、ヒルベルト空間にも引き継がれる．

**ノート** 以下に述べる命題は、内積空間であればすべて成立する．内積空間がヒルベルト空間であるための条件「完備性」は、条件を満たす点列に対して、極限点の存在を保証するものである．したがって、ヒルベルト空間でないと成立しない定理は、存在を主張する定理であることが多い．本書においても、存在定理である定理 3.3.2 で初めて、完備性が本質的に効いてくる．◇

**定理 3.2.2 (中線定理)**  $V$  を内積空間とすると、任意の  $x, y \in V$  に対して  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  が成立する．

**証明** 実際  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2) + (\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  である．□

**定理 3.2.3 (コーシー・シュワルツの不等式)**  $V$  を内積空間とする．このとき、任意の  $a, b \in V$  について  $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$  が成立する．

**証明**  $b \neq 0$  のときについて示す． $\lambda = \langle a, b \rangle / \|b\|^2$ ,  $a_\perp = a - \lambda b$  とおくと、 $\langle a_\perp, b \rangle = 0$  より  $\|a_\perp\|^2 = \langle a_\perp, a_\perp \rangle = \langle a - \lambda b, a - \lambda b \rangle = \langle a, a \rangle - \lambda \langle b, a \rangle =$

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}_\perp \rangle$  である. よって  $\|\mathbf{a}_\perp\|^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} - \lambda \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 - \bar{\lambda} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 - |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2 / \|\mathbf{b}\|^2$  だから,  $(\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|)^2 - |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2 = (\|\mathbf{a}_\perp\| \|\mathbf{b}\|)^2 \geq 0$  である.  $\square$

**命題 3.2.4 (ノルムの連続性)**  $V$  がノルム空間なら,  $V$  上の任意の収束列  $\{\mathbf{x}_n\}$  について次式が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \right\|$$

**証明**  $\{\mathbf{x}_n\}$  を  $V$  上の収束列とし, 極限点を  $\mathbf{a}$  とおく. このとき  $\|\mathbf{x}_n\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}\|$ ,  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{x}_n\|$  なので  $|\|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{a}\|| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), よって  $\|\mathbf{x}_n\| \rightarrow \|\mathbf{a}\|$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である.  $\square$

**命題 3.2.5 (内積の連続性)**  $V$  が内積空間なら,  $V$  上の任意の収束列  $\{\mathbf{x}_n\}$ ,  $\{\mathbf{y}_n\}$  について次式が成立する.

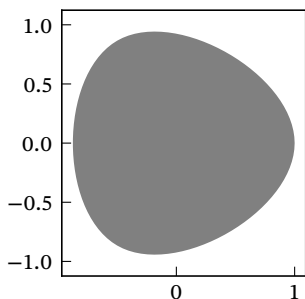
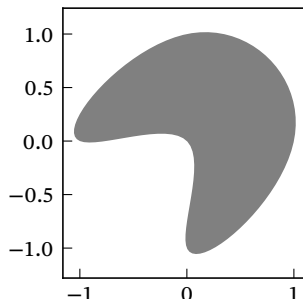
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n \right\rangle$$

**証明**  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{b}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) とする.  $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle = \langle \mathbf{x}_n - \mathbf{a}, \mathbf{y}_n \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_n - \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  だから, コーシー・シュワルツの不等式より  $|\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq |\langle \mathbf{x}_n - \mathbf{a}, \mathbf{y}_n \rangle| + |\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_n - \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| \|\mathbf{y}_n\| + \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{y}_n - \mathbf{b}\|$  である. 命題 3.2.4 より  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| \|\mathbf{y}_n\| \rightarrow 0 \|\mathbf{b}\|$ ,  $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{b}\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) なので,  $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である.  $\square$

### 3.3 直交射影

#### 3.3.1 直交射影

**定義 3.3.1 (線分, 凸集合)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする. 2 点  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して, 集合  $\{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \mid t \in [0, 1]\}$  を  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  を結ぶ**線分** (line segment) という. また, 集合  $S \subset V$  に属する任意の 2 点を結ぶ線分が  $S$  に含まれるとき,  $S$  は**凸集合** (convex set) であるという.

図 3.3  $\mathbb{R}^2$  の凸集合図 3.4  $\mathbb{R}^2$  の凸集合でない部分集合

**定理 3.3.2 (凸射影定理)**  $H$  をヒルベルト空間とする. また,  $\mathbf{x} \in H$  かつ, 集合  $C \subset H$  は空でない閉凸集合とする. このとき,  $\arg \min_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  はただ 1 つの元からなる集合である.

**証明** まず,  $\arg \min_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  が空でないことを示す.  $\delta = \inf \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in C\}$  とおくと, 集合  $A_n = \{\mathbf{y} \in C \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 < \delta^2 + 1/n\}$  は各  $n = 1, 2, \dots$  に対して空ではない. そこで,  $C$  上の点列  $\{\mathbf{a}_n\}$  を各  $n$  に対して  $\mathbf{a}_n \in A_n$  となるようにとれる.

$\{\mathbf{a}_n\}$  がコーシー列であることを示す. 中線定理より, 任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  について

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\|^2 &= \|(\mathbf{a}_m - \mathbf{x}) - (\mathbf{a}_n - \mathbf{x})\|^2 \\ &= 2(\|\mathbf{a}_m - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{a}_n - \mathbf{x}\|^2) - \|(\mathbf{a}_m - \mathbf{x}) + (\mathbf{a}_n - \mathbf{x})\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{a}_m - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{a}_n - \mathbf{x}\|^2 - 4\left\|\frac{\mathbf{a}_m + \mathbf{a}_n}{2} - \mathbf{x}\right\|^2 \end{aligned}$$

が成立する.  $\mathbf{a}_m \in A_m$ ,  $\mathbf{a}_n \in A_n$  かつ,  $C$  は凸集合だから  $(\mathbf{a}_m + \mathbf{a}_n)/2 \in C$  である. したがって

$$\|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\|^2 < 2\left(\delta^2 + \frac{1}{m}\right) + 2\left(\delta^2 + \frac{1}{n}\right) - 4\delta^2 = \frac{2}{m} + \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

である. よって  $\{\mathbf{a}_n\}$  はコーシー列なので, 極限点  $\mathbf{m}$  が存在する.  $C$  は閉集合だから  $\mathbf{m} \in C$  で, ノルムの連続性より  $\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_n\| = \delta$  である.

次に,  $\arg \min_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  の元は 1 つしかないことを示す.  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in$

$\arg \min_{y \in C} \|x - y\|$  とする. このとき, 存在の証明と同様にして

$$\begin{aligned} \|m_1 - m_2\|^2 &= 2\|m_1 - x\|^2 + 2\|m_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{m_1 + m_2}{2} - x\right\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \end{aligned}$$

が得られるから,  $m_1 = m_2$  である. □

**定理 3.3.3 (射影定理)**  $H$  をヒルベルト空間とする. また,  $x \in H$  かつ,  $V$  は  $H$  の閉部分空間とする. このとき,  $m \in V$  に関する次の命題は同値である.

1.  $m \in \arg \min_{y \in V} \|x - y\|$  である
2. 任意の  $y \in V$  に対して  $\langle x - m, y \rangle = 0$  である

**証明** 閉部分空間は閉凸集合だから, **凸射影定理** より  $n \in \arg \min_{y \in V} \|x - y\|$  を満たす  $n$  がただ 1 つ存在する. あとは p.16 の命題 2.1.6 と同様に示せる. □

**定義 3.3.4 (直交射影)** 定理 3.3.3 の  $m$  を  $x$  の  $V$  への**直交射影** (orthogonal projection) といい,  $\text{proj}_V(x)$  と表す.

**命題 3.3.5**  $H$  はヒルベルト空間で,  $V$  は  $H$  の閉部分空間とする. このとき  $H = V \oplus V^{\perp H}$  である.

### 3.3.2 正規直交列

**射影定理** は直交射影  $m$  の存在を示す定理であり, 具体的な式を与えるものではない. しかし,  $V$  が正規直交系によって生成される空間 (正確にはその閉包) であれば,  $m$  の具体的な式が得られる.

**定理 3.3.6 (ベッセルの不等式)**  $H$  をヒルベルト空間とする.  $H$  上の点列

$\{e_n\}$  が正規直交列なら、任意の  $x \in H$  に対して次式が成立する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (3.1)$$

**証明** p.15 の式 (2.1) と同様に計算すると、任意の  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  に対して次式が成り立つと分かる。

$$\|x - (z_1 e_1 + \dots + z_m e_m)\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^m |z_k - \langle x, e_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^m |\langle x, e_k \rangle|^2$$

したがって、特に  $z_k = \langle x, e_k \rangle$  なら

$$\|x\|^2 = \|x - (z_1 e_1 + \dots + z_m e_m)\|^2 + \sum_{k=1}^m |\langle x, e_k \rangle|^2 \geq \sum_{k=1}^m |\langle x, e_k \rangle|^2$$

である。よって、級数  $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2$  は上に有界な正項級数だから収束し、級数の和は式 (3.1) を満たす。  $\square$

定理 3.3.6 の状況で、点列  $\{x_n\}$  を  $x_n = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$  で定義すると、 $\{x_n\}$  は収束列になる。実際、 $m > n$  なら

$$\|x_m - x_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\langle x, e_k \rangle|^2$$

となるので、 $\{x_n\}$  がコーシー列であることと、級数  $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2$  がコーシー列であることは同値である。そして、式 (3.1) の級数は収束しているから、 $\{x_n\}$  はコーシー列である。

**命題 3.3.7**  $H$  をヒルベルト空間とする。  $H$  上の点列  $\{e_n\}$  が正規直交列なら、任意の  $x \in H$  について次式が成立する。

$$\text{proj}_{\text{cl } V}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad (V = \text{span}\{e_1, e_2, \dots\})$$

**証明**  $v \in \text{cl } V$  を任意にとる。閉包の定義から、 $V$  上の点列  $\{v_n\}$  で  $v_n \rightarrow v$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たすものがある。  $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$  ( $V_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ ) なの

で、各  $\mathbf{v}_n$  は次のように表せる.

$$\mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^{d_n} z_{nk} \mathbf{e}_k \quad (d_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{v}_n \in V_k\}, \quad z_{nk} \in \mathbb{C}) \quad (3.2)$$

$\mathbf{p} = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \mathbf{e}_m$  とする. **内積の連続性**から

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle \mathbf{x} - \sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \mathbf{e}_m, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{d_n} z_{nk} \mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{d_n} \overline{z_{nk}} \left\langle \mathbf{x} - \sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{d_n} \overline{z_{nk}} \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle - \sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_m \rangle \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k \rangle \right) \end{aligned}$$

であり、 $\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{mk}$  より  $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle = 0$  である.

$\text{cl } V$  がベクトル空間であることは、 $\text{cl } V$  上の収束列の極限点は  $\text{cl } V$  に属すること、および式 (3.2) から示せる. よって、**射影定理**より  $\mathbf{p} = \text{proj}_{\text{cl } V}(\mathbf{x})$  である.  $\square$

### 3.4 $L^p$ 空間

**定義 3.4.1 ( $L^p$  空間)**  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  とする<sup>2)</sup>. 各  $p = 1, 2, \dots$  に対して、可測関数  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  で

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

の値が有限であるものの全体集合を  $L^p(I)$  とおく. このとき、ほとんど至るところ等しい関数を同一視すれば、 $L^p(I)$  は  $\|\cdot\|_{L^p}$  をノルムとしてバナッハ空間になる. このバナッハ空間を  **$L^p$  空間** ( $L^p$  space) という.

**命題 3.4.2 ( $L^2$  空間の性質)**  $p = 2$  のときのみ  $L^p(I)$  はヒルベルト空間に



なり,  $L^2(I)$  の内積は次の式で表される.

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f, g \in L^2(I))$$

### 3.5 フーリエ級数展開

**定義 3.5.1 (複素フーリエ級数)**  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  とする.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくと, 次式が  $L^2$  収束の意味で成立する.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} = f(t)$$

### 3.6 多重解像度解析

**定義 3.6.1 (多重解像度解析)**  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が以下の条件を満たすとき,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は**多重解像度解析** (multiresolution analysis; MRA) をなすという.

1.  $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$
2.  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$ ,  $\text{cl}(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n) = L^2(\mathbb{R})$
3.  $f(\_) \in V_n \iff f(2\_) \in V_{n+1}$ , ただし  $n$  は任意の整数
4.  $\{\phi(\_ - n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  が  $V_0$  の完全正規直交系となる  $\phi \in V_0$  が存在する

### 演習問題

- 2)  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$  のときもある. たとえば,  $a = -\infty$ ,  $b < \infty$  なら  $I = (-\infty, b]$  である.

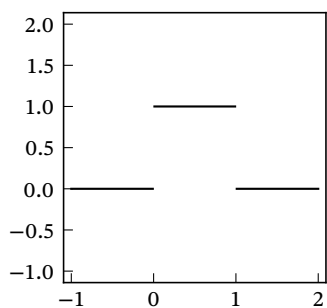


図 3.5 Haar のスケーリング関数

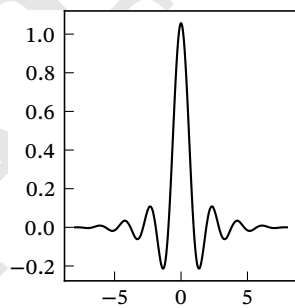


図 3.6 Meyer のスケーリング関数

## 第 4 章

# 確率空間

第 4 章で書く予定のことを並べておく.

### 4.1 確率空間

### 4.2 ウィナーフィルタ

### 4.3 カルマンフィルタ

### 4.A カルネン・レーベ変換

### 演習問題



# プログラム例

## A.1 C 言語

以下のプログラムは C11 に準拠している。まず、動作はするものの不合法的なプログラムを示す。

```
#include <math.h>
#include <sndfile.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(void) {
    int samplerate = 44100;
    int frames = 4 * samplerate;
    SF_INFO sinfo = {.format = SF_FORMAT_WAV | SF_FORMAT_PCM_16,
                    .channels = 1,
                    .samplerate = samplerate,
                    .frames = frames};
    SNDFILE *file = sf_open("charp.wav", SFM_WRITE, &sinfo);
    double *buffer = malloc(sizeof(double) * frames);
    double pi = 3.141592653589793;
    double max_omega = 523.25 * 2.0 * pi / samplerate;

    for (int i = 0; i < frames; i++) {
        buffer[i] = sin(max_omega * i * i / (2.0 * frames));
    }

    sf_write_double(file, buffer, frames);
    sf_close(file);
    free(buffer);
    return 0;
}
```

```
gcc charp.c -lm -lsndfile -std=c11
```

手元でちょっとした実験をしたいだけなら、上のプログラムでも問題ない。しかし、誰かに使われる可能性があるのなら、次のように例外処理をきちんと行うほうがよい。

```
#include <math.h>
#include <sndfile.h>
#include <stdint.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(void) {
    const uint32_t samplerate = 44100;
    const uint32_t frames = 4 * samplerate;
    SNDFILE *const file =
        sf_open("charp.wav", SFM_WRITE,
            &(SF_INFO){.format = SF_FORMAT_WAV | SF_FORMAT_PCM_16,
                .channels = 1,
                .samplerate = samplerate,
                .frames = frames});

    if (file == NULL) {
        fprintf(stderr, "failed to open \"charp.wav\".\n");
        return 1;
    }

    double *const buffer = malloc(sizeof(double) * frames);

    if (buffer == NULL) {
        fprintf(stderr, "malloc failed.\n");
        sf_close(file);
        return 1;
    }

    const double pi = 3.141592653589793;
    const double max_omega = 523.25 * 2.0 * pi / samplerate;

    for (uint32_t i = 0; i < frames; i++) {
        buffer[i] = sin(max_omega * i * i / (2.0 * frames));
    }
}
```

```
if (sf_write_double(file, buffer, frames) != frames) {
    fprintf(stderr, "%s\n", sf_strerror(file));
    sf_close(file);
    free(buffer);
    return 1;
}

sf_close(file);
free(buffer);
return 0;
}
```

## 参考文献

- [1] 新井仁之. ウェーブレット. 共立出版, 2010, 463p., (現代数学の潮流, 10).
- [2] Casazza, Peter G. et al. *Finite Frames: Theory and Applications*. Birkhäuser Boston, 2013, 485p., (online), available from SpringerLink, (accessed 2022-08-09).
- [3] 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 2018, 329p., (松坂和夫 数学入門シリーズ, 1).
- [4] 齋藤正彦. 線型代数入門. 東京大学出版会, 2020, 274p., (基礎数学, 1).
- [5] Yanai, Haruo. et al. *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. Springer New York, 2011, 243p., (online), available from SpringerLink, (accessed 2022-08-22).
- [6] 雪江明彦. 環と体とガロア理論. 日本評論社, 2019, 300p., (代数学, 2).



## 索引

<b>【記号】</b>		グラム・シュミットの直	直交補空間	18	
$(S, d)$	23	交化法	点列の収束	24	
$\arg \max$	14	コーシー・シュワルツの	凸射影定理	29	
$\arg \min$	14	不等式	凸集合	28	
$\text{cl} A$	25	コーシー列			
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	11	固有空間	<b>【な】</b>		
$\dim V$	5	固有多項式	内積	5	
$A^H$	19	固有値	内積空間	6	
$\text{im } f$	8	固有ベクトル	ノルム	26	
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	5		ノルム空間	26	
$\ker f$	8	<b>【さ】</b>			
$W^{\perp V}$	18	次元	5	<b>【は】</b>	
$W^{\perp}$	18	射影定理	30	バナッハ空間	26
$\text{proj}_V(x)$	17, 30	随伴行列	→ エルミート	表現行列	8
$\text{span } S$	3	転置		標準基底	4
$A^T$	2	正規行列	19	標準内積	6
$\ \cdot\ $	13, 26	正規直交基底	6	ヒルベルト空間	27
$A^c$	25	正規直交系	6	複素フーリエ級数	33
$E_{\lambda}(A)$	10	生成する部分空間	3	部分空間	2
$W_1 + W_2$	3	零ベクトル	2	生成する——	3
$W_1 \oplus W_2$	3	線型結合	2	直和	3
		線型写像	7	和	3
<b>【あ】</b>		線型従属	4	閉集合	25
一様収束	24	線型独立	4	閉包	25
$l^p$ 空間	32	線分	28	ベクトル空間	1
$\ell^p$ 空間	27	像	8	ベッセルの不等式	30
エルミート転置	19	<b>【た】</b>		<b>【や】</b>	
<b>【か】</b>		対角化	10	有限次元	5
核	8	多重解像度解析	33	ユニタリ行列	19
加法逆元	2	単射	7		
完備距離空間	26	中線定理	27	<b>【ら】</b>	
基底	4	直和, 部分空間の	3	離散距離	23
行列式	9	直交	6	離散空間	23
極限点	24	直交射影			
距離	23	数ベクトル空間	17	<b>【わ】</b>	
距離空間	23	ヒルベルト空間	30	和, 部分空間の	3