

# 信号解析の数理

線型代数で信号を理解するために

calamari\_dev





# はじめに

準備中.

2022 年〇月

calamari\_dev



# 目次

はじめに	iii
記号について	vii
<b>第 1 章 準備と前提知識</b>	<b>1</b>
1.1 行列とベクトル空間	1
ベクトル空間／基底／内積／線型写像と表現行列／核と像／固有値と固有空間／対角化	
演習問題	10
<b>第 2 章 数ベクトル空間</b>	<b>11</b>
2.1 直交射影	11
直交射影／直交補空間／スペクトル定理	
2.2 最小二乗問題	13
最小二乗問題／特異値分解／擬似逆行列	
2.3 離散フーリエ変換	13
2.4 多重解像度解析	13
2.A 主成分分析	13
2.B 低ランク近似	13
2.C 窓関数	13
演習問題	13
<b>第 3 章 ヒルベルト空間</b>	<b>15</b>
3.1 無限次元の線型空間	15
距離空間／ノルム線型空間／内積空間／ヒルベルト空間	
3.2 直交射影	16
直交射影／直交補空間／正規直交列	

3.3	フーリエ級数展開	17
	フーリエ級数展開／フーリエ変換	
3.4	多重解像度解析	17
	多重解像度解析／ウェーブレット変換	
3.A	半ノルムと $l^p$ 空間	18
	演習問題	18
<b>第 4 章</b>	<b>確率空間</b>	<b>19</b>
4.1	確率空間	19
4.2	ウィナーフィルタ	19
4.3	カルマンフィルタ	19
4.A	カルーネン・レーベ変換	19
	演習問題	19
<b>付録 A</b>	<b>プログラム例</b>	<b>21</b>
A.1	C 言語	21
<b>索引</b>		<b>25</b>

# 記号について

書籍ごとに異なることが多い記号について、記号と定義の組を示す。表にない記号については、巻末の索引を参照のこと。

記号	定義
$\mathbb{N}$	自然数の全体集合 $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	整数の全体集合 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{K}$	実数の全体集合 $\mathbb{R}$ か複素数の全体集合 $\mathbb{C}$
$S^c$	集合 $S$ の補集合
$\text{cl } S$	集合 $S$ の閉包
$\delta_{ij}$	クロネッカーのデルタ
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	ベクトル $\mathbf{u}$ , $\mathbf{v}$ の内積
$\ \mathbf{v}\ $	ベクトル $\mathbf{v}$ のノルム
$\mathbf{I}$	単位行列
$\mathbf{O}$	零行列
$\mathbf{M}^T$	行列 $\mathbf{M}$ の転置行列
$\mathbf{M}^H$	行列 $\mathbf{M}$ のエルミート転置
$\ \mathbf{M}\ _F$	行列 $\mathbf{M}$ のフロベニウスノルム
$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n} x$	信号 $x$ の離散フーリエ変換
$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} x$	信号 $x$ の離散時間フーリエ変換
$\hat{f}_n$	関数 $f$ のフーリエ係数
$\mathcal{F} f$	関数 $f$ のフーリエ変換





## 準備と前提知識

第1章では、素朴集合論・線型代数学・微分積分学で有名な事実を、本書で必要となるものに限って概観する。

## 1.1 行列とベクトル空間

## 1.1.1 ベクトル空間

以下、集合  $\mathbb{K}$  は実数の全体集合  $\mathbb{R}$  か、複素数の全体集合  $\mathbb{C}$  であるとする。 $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とは次のように定義される、加法とスカラー乗法が備わった集合のことである。

**定義 1.1.1 (ベクトル空間)**  $V$  を空でない集合とする。また、任意の  $x, y \in V$ ,  $s \in \mathbb{K}$  について、和  $x + y \in V$  とスカラー倍  $sx \in V$  が定義されているとする。任意の  $x, y, z \in V$ ,  $s, t \in \mathbb{K}$  に対する以下の条件を満たすとき、 $V$  は  $\mathbb{K}$  上の**ベクトル空間** (vector space) であるという。

- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + y = y + x$
- ある  $0 \in V$  が存在し、任意の  $v \in V$  に対して  $v + 0 = v$  を満たす
- 各  $v \in V$  に対し、ある  $w \in V$  が一意に存在して  $v + w = 0$  を満たす
- $(s + t)x = sx + tx$
- $s(x + y) = sx + sy$
- $(st)x = s(tx)$
- $1x = x$

しばしば  $V$  の元をベクトル、 $\mathbb{K}$  の元をスカラーと呼ぶ。また、定義 1.1.1 の

$\mathbf{0}$  を零ベクトル (zero vector),  $\mathbf{w}$  を  $\mathbf{v}$  の加法逆元 (additive inverse) という. 通常,  $\mathbf{v}$  の加法逆元は  $-\mathbf{v}$  と表される.

**ノート** 定義 1.1.1 はごてごてしているように見えるが, それは和とスカラー倍について,  $\mathbb{K}^n$  と同様に計算できるよう, ルールをつけ加えていった結果といえる. ◇

ついで, ベクトル空間にかかわる概念を 2 つ定義する. これらの関係については, すぐ後で説明する.

**定義 1.1.2 (線型結合)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  を  $V$  の元とする.  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$  ( $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ ) という形をした  $V$  の元を,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  の**線型結合** (linear combination) という.

**定義 1.1.3 (部分空間)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W$  を  $V$  の空でない部分集合とする.  $W$  が  $V$  の加法とスカラー乗法について定義 1.1.1 の条件をすべて満たすとき,  $W$  は  $V$  の**部分ベクトル空間** (vector subspace), あるいは単に**部分空間** (subspace) であるという.

ある部分集合  $W \subset V$  が  $V$  の部分空間かどうか調べるには, 命題 1.1.4 を使うとよい.

**命題 1.1.4**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W$  を  $V$  の空でない部分集合とする. このとき, 次の命題は同値である.

1.  $W$  は  $V$  の部分空間である
2. 任意の  $s \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$  に対して  $s\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$  である

**例 1.1.5**  $V$  が  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間なら,  $V$  自身と  $\{\mathbf{0}\}$  は  $V$  の部分空間である. ◇

**例 1.1.6** 集合  $\mathbb{K}^n = \{[s_1 \ \dots \ s_n]^T \mid s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}\}$  は, 通常の加法とスカラー乗法によって,  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間になる. ◇

また, 2 つの部分空間  $W_1, W_2 \subset V$  があれば, それらを含むより大きな部分空間を作れる.

**定義 1.1.7 (部分空間の和)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $W_1, W_2 \subset V$  を部分空間とする. このとき, 集合  $W = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$  は  $V$  の部分空間になる.  $W$  を  $W_1$  と  $W_2$  の**和** (sum) といい,  $W_1 + W_2$  と表記する.

特に  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  であるとき,  $W_1 + W_2$  を  $W_1$  と  $W_2$  の**直和** (direct sum) という. 直和であることを強調したいときは, 和  $W_1 + W_2$  を  $W_1 \oplus W_2$  と書く.

## 1.1.2 基底

任意のベクトル  $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{K}^n$  は, 第  $i$  成分が 1, 他の成分が 0 のベクトル  $\mathbf{e}_i$  を用いて  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$  と表せる. すなわち, 集合  $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  は「 $\mathbb{K}^n$  のすべての元を  $\mathcal{S}_n$  の元の線型結合で書ける」という性質を持つ.

一般に, ベクトル空間  $V$  の部分集合  $S$  に対して,  $S$  の元の線型結合で書けるベクトルの全体集合を  $S$  が**生成する部分空間** (generated subspace) といい,  $\text{span } S$  と表記する. この記法を使えば, 先述した  $\mathcal{S}_n$  が持つ性質を「 $\text{span } \mathcal{S}_n = \mathbb{K}^n$  が成り立つ」と言い換えられる.

$\text{span } S = \mathbb{K}^n$  を満たす集合  $S \subset \mathbb{K}^n$  は,  $\mathcal{S}_n$  以外にも無数にある. たとえば  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^2$  のとき, 集合  $T = \{[1 \ -1]^T, [2 \ -1]^T, [-1 \ 0]^T\}$  が生成する部分空間は  $\mathbb{R}^2$  である. しかし,  $\mathcal{S}_2 = \{[1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T\}$  の元の線型結合で  $\mathbb{R}^2$  の元を表す方法はただ 1 通りであるのに対して,  $T$  はこの性質を持たない (図 1.1).

$S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき, 任意の  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{v}_i \in S$  について

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_i \implies [a_1 \ \cdots \ a_k] = [b_1 \ \cdots \ b_k]$$

が成立する.  $b_1 = \cdots = b_k = 0$  とすると

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \implies a_1 = \cdots = a_k = 0 \quad (1.1)$$

が得られる.

任意の  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  に対して式 (1.1) が成立するとき,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  は**線型独立**であるという. 特に,  $V = \text{span } S$  かつ,  $S$  の元からなる有限個のベクトルの

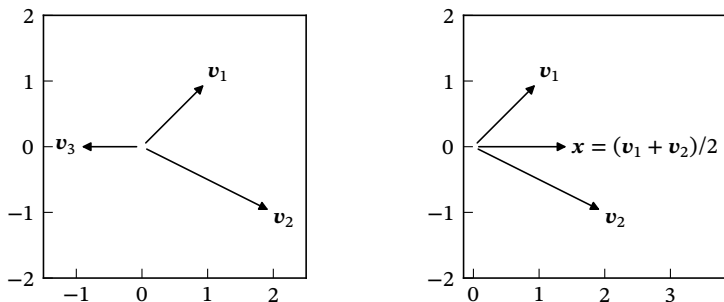


図 1.1  $v_1, v_2, v_3 \in T$  の線型結合で  $x = [3/2 \ 0]^T$  を表した様子. 明らかに  $x = (-3/2)v_3$  である一方,  $x = (v_1 + v_2)/2 = (1/2)v_1 + (1/2)v_2$  も成り立つ.

組が常に線型独立であるとき,  $S$  は  $V$  の**基底**であるという. 以上を定義 1.1.8, 1.1.9 にまとめておく.

**定義 1.1.8 (生成系・線型独立・線型従属)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $S$  を  $V$  の部分集合とする. また,  $v_1, \dots, v_k$  を  $V$  の元とする.

1.  $V = \text{span } S$  であるとき,  $S$  を  $V$  の**生成系** (generating set) という
2.  $\sum_{i=1}^k c_i v_i = \mathbf{0}$  を満たす  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  の組が  $c_1 = \dots = c_k = 0$  しかないとき,  $v_1, \dots, v_k$  は**線型独立** (linearly independent) であるという
3.  $v_1, \dots, v_k$  が線型独立でないとき,  $v_1, \dots, v_k$  は**線型従属** (linearly dependent) であるという

**定義 1.1.9 (基底)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $\mathcal{B}$  を  $V$  の部分集合とする.  $\mathcal{B}$  が  $V$  の生成系かつ,  $\mathcal{B}$  に属する有限個のベクトル  $v_1, \dots, v_k$  が常に線型独立であるとき,  $\mathcal{B}$  は  $V$  の**基底** (basis) であるという.

**例 1.1.10 (標準基底)**  $\mathcal{S}_n$  は  $\mathbb{K}^n$  の基底である.  $\mathcal{S}_n$  を  $\mathbb{K}^n$  の**標準基底** (standard basis) という. ◇

さきほどの議論によれば,  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せるとき, 任意の  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  について式 (1.1) が成立する. すなわち,  $S$  は  $\text{span } S$  の基底である. 実はこの逆も示せるので, 次の命題が成立する.

**命題 1.1.11**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間,  $S$  を  $V$  の部分集合とする. このとき, 次の命題は同値である.

1.  $S$  の元の線型結合で  $\text{span } S$  の元を一意に表せる
2.  $S$  は  $\text{span } S$  の基底である

$V$  の基底で有限集合のものがあるとき,  $V$  は**有限次元** (finite-dimensional) であるという.  $V$  が有限次元なら,  $V$  の基底はすべて有限集合で, その元の個数は等しい. すなわち, 元の個数  $\#B$  は基底  $B$  のとりかたによらず定まる.  $\#B$  を  $V$  の**次元** (dimension) といい,  $\dim V$  と表記する<sup>1)</sup>.

基底に関連して, 次の命題が成り立つ.

**命題 1.1.12 (基底の延長)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上の  $n$  次元ベクトル空間とする.  $k < n$  個のベクトル  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  が線型独立なら, 集合  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  が  $V$  の基底になる  $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  が存在する.

### 1.1.3 内積

$\mathbb{R}^3$  において, ベクトルの長さとなす角はドット積  $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$  から計算できた. 定義 1.1.13 は, こうした幾何的な考察を, より多くのベクトル空間へと適用可能にする.

**定義 1.1.13 (内積)**  $V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする.  $\langle \_, \_ \rangle$  が  $V$  の**内積** (inner product) であるとは, 任意の  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  に対し,  $\langle \_, \_ \rangle$  が以下の条件を満たすことをいう.

1.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
2.  $\langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
3.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ ,  $[\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}]$

内積が備わっているベクトル空間のことを**内積空間** (inner product space) という. また,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$  であるとき, ベクトル  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{w}$  は**直交**するという.

1)  $V$  が有限次元でないときも基底は存在する (証明は文献 [3]).

**ノート** 定義により,  $\mathbf{0}$  は任意のベクトルと直交する. この事実は直感にそぐわないかもしれないが,  $\mathbf{0}$  だけを特別扱いするとかえって面倒である. ◇

**例 1.1.14 (標準内積)**  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \mathbf{v}_1^T \overline{\mathbf{v}_2}$  ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{K}^n$ ) とすると,  $\langle \_, \_ \rangle$  は  $\mathbb{K}^n$  の内積になる.  $\langle \_, \_ \rangle$  を  $\mathbb{K}^n$  の **標準内積** という. ◇

定義 1.1.15 は, 本書の中核をなす重要な概念である.

**定義 1.1.15 (正規直交系, 正規直交基底)**  $V$  を内積空間とする. 集合  $B \subset V$  が **正規直交系** (orthonormal system; ONS) であるとは, 任意の  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in B$  が条件

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \begin{cases} 1 & (\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2), \\ 0 & (\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{e}_2) \end{cases}$$

を満たすことをいう. また,  $B$  が  $V$  の基底であるとき,  $B$  は **正規直交基底** (orthonormal basis; ONB) であるという.

$B$  が正規直交系なら, 有限個の  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in B$  は常に線型独立である. よって,  $B$  が基底であることを見るには,  $V = \text{span } B$  だけ確認すればよい.

### 1.1.4 線型写像と表現行列

$V$  は有限次元であるとする. 命題 1.1.11 によれば,  $V$  の基底  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  ( $m = \dim V$ ) をとることで, 任意の  $\mathbf{x} \in V$  を

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m \quad (c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}) \quad (1.2)$$

の形で一意に表せる. 言い換えると,  $V$  の各元  $\mathbf{x}$  に式 (1.2) の  $[c_1 \ \dots \ c_m]^T$  を割り当てる写像  $\phi: V \rightarrow \mathbb{K}^m$  を定義でき, それは単射<sup>2)</sup>である. この写像  $\phi$  は, 次に定義する「線型写像」の 1 例である.

**定義 1.1.16 (線型写像)**  $V$  と  $W$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする. 写像  $f: V \rightarrow W$  が以下の条件を満たすとき,  $f$  は **線型写像** (linear mapping) であるという.

2) 写像  $f$  の定義域に属する任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  について, 命題「 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 」が成立するとき,  $f$  は **単射** (injection) であるという.

1. 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  に対して  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
2. 任意の  $\mathbf{x} \in V, c \in \mathbb{K}$  に対して  $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$

$W$  を  $\mathbb{K}$  上の有限次元ベクトル空間とする.  $W$  の基底  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  ( $n = \dim W$ ) をとると,  $\phi$  と同様

$$\mathbf{y} = d_1 \mathbf{w}_1 + \dots + d_n \mathbf{w}_n \iff \psi(\mathbf{y}) = [d_1 \ \dots \ d_n]^\top$$

を満たす線型写像  $\psi: W \rightarrow \mathbb{K}^n$  が定義できる.

$\phi$  と  $\psi$  を利用すると,  $V$  から  $W$  への任意の線型写像  $f$  を, 対応する行列によって表現できる.  $\mathbf{x} \in V$  を任意にとる.  $\phi(\mathbf{x}) = [c_1 \ \dots \ c_m]^\top$  とおくと

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i f(\mathbf{v}_i)$$

であるから

$$\psi(f(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^m c_i \psi(f(\mathbf{v}_i)) = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \ \dots \ \psi(f(\mathbf{v}_m))] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

となる. よって,  $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \ \dots \ \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  とおくと, 式

$$\psi(f(\mathbf{x})) = T(\phi(\mathbf{x})) \quad (T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

が成り立つ.

ここまでの議論をまとめると, 次のようになる.  $V$  の基底  $\mathcal{B}$  と,  $W$  の基底  $\mathcal{B}'$  をとるごとに,  $n \times m$  行列  $\mathbf{A} = [\psi(f(\mathbf{v}_1)) \ \dots \ \psi(f(\mathbf{v}_m))]$  を定義でき,  $\mathbf{A}$  は式 (1.3) を満たす. この  $\mathbf{A}$  を, 基底  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{B}'$  に関する  $f$  の**表現行列** (representation matrix) という.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{T} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

なお,  $\mathcal{B}$  の元を並べる順序に応じて, 式 (1.2) の  $c_1, \dots, c_n$  の順序も変化するので,  $\phi$  は  $\mathcal{B}$  に対して一意ではない.  $\phi$  は  $\mathcal{B}$  の元を並べる順序を決めて初めて定まる. 本書では,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  のような書き方をした場合,  $\mathcal{B}$  の元を  $\mathbf{v}_i$  の添え字  $i$  について昇順に並べると決めておく.

**例 1.1.17 (形式的な微分)**  $n$  次以下の 1 変数多項式全体  $V_n = \{c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \mid c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$  は,  $\mathbb{R}$  上の  $n+1$  次元ベクトル空間である. また, 写像

$D: V_3 \rightarrow V_2$  を

$$D(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_1 + 2c_2x \quad (c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

で定義すると、これは線型写像になる。 $V_n$  の基底として  $\mathcal{B}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$  をとったとき、基底  $\mathcal{B}_3$  と  $\mathcal{B}_2$  に関する  $D$  の表現行列は  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  である。◇

### 1.1.5 核と像

線型写像に付随して、重要なベクトル空間が2つ定まる。

**定義 1.1.18 (核, 像)**  $f: V \rightarrow W$  を線型写像とする。

1. 集合  $\{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$  を  $f$  の**核** (kernel) といい、 $\text{Ker } f$  と表す
2. 集合  $\{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$  を  $f$  の**像** (image) といい、 $\text{Im } f$  と表す

一般に、 $\text{Ker } f$  と  $\text{Im } f$  はそれぞれ  $V$  と  $W$  の部分空間になる。 $\text{Ker } f$  について、次の命題が成立する。

**命題 1.1.19**  $f: V \rightarrow W$  を線型写像とする。このとき、 $f$  が単射であることと、 $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  が成立することは同値である。

**証明**  $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$  なので、 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  である。よって、 $f$  が単射なら  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$  だから、 $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  である。

また、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  が  $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$  を満たせば  $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$  である。よって、 $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  なら  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$  である。すなわち、 $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  なら  $f$  は単射である。□

### 1.1.6 固有値と固有空間

対角化に向けて、固有値に関連する事項を整理する。

**定義 1.1.20 (固有値, 固有ベクトル)**  $A$  を  $n$  次正方行列とする。複素数  $\lambda$  と  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  が式  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  を満たすとき、 $\lambda$  を  $A$  の**固有値** (eigenvalue) という。また、 $\mathbf{x}$  を  $A$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有ベ**



**クトル** (eigenvector) という。

**例 1.1.21**  $\mathbf{x}_1 = [1 + i \ 2]^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = [1 - i \ 2]^T$  は  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  の固有ベクトルである。実際  $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = i\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = -i\mathbf{x}_2$  である。◇

定義 1.1.20 を満たす  $\lambda$  をを見つけるには、次の命題 1.1.22 を利用するとよい。

**命題 1.1.22**  $\lambda$  が正方行列  $\mathbf{A}$  の固有値であることと、 $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  であることは同値である。ただし、 $\det \mathbf{A}$  は  $\mathbf{A}$  の行列式である。

$n$  次多項式  $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$  を  $\mathbf{A}$  の**固有多項式** (characteristic polynomial) という。命題 1.1.22 から、集合  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) = 0\}$  は  $\mathbf{A}$  の固有値の全体集合である。

**系 1.1.23** 任意の  $n$  次正方行列  $\mathbf{A}$  は、相異なる固有値を少なくとも 1 個、多くとも  $n$  個もつ。

**証明**  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  は  $\lambda$  に関する  $n$  次方程式なので、解は存在しても  $n$  個以下である。また、代数学の基本定理より解は少なくとも 1 つ存在する。□

**定義 1.1.24 (固有空間)** 定義 1.1.20 の  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda$  について、集合

$$E_\lambda(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間になる。部分空間  $E_\lambda(\mathbf{A})$  を、 $\mathbf{A}$  の (固有値  $\lambda$  に属する) **固有空間** (eigenspace) という。

固有空間は次の性質を持つ。

**命題 1.1.25**  $\lambda_1, \lambda_2$  を正方行列  $\mathbf{A}$  の固有値とする。このとき、次の命題が成立する。

1.  $\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \implies \mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(\mathbf{A})$
2.  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies E_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \cap E_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$

**証明** 後半のみ示す.  $A\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{0} = \lambda_2\mathbf{0} = \mathbf{0}$  なので,  $\mathbf{0} \in E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$  である. また, 任意に  $\mathbf{x} \in E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$  をとると,  $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}$  だから  $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  である.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  なので  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  である. よって,  $E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$  は  $\mathbf{0}$  以外に元を持たない.  $\square$

### 1.1.7 対角化

適当な  $n$  次正則行列  $P$ , 対角行列  $\Lambda$  の組を見つけて,  $n \times n$  行列  $A$  を  $A = P\Lambda P^{-1}$  の形で書くことを  $A$  の**対角化** (diagonalization) という.  $A$  が対角化可能である必要十分条件は, 次の命題 1.1.26 で与えられる.

**命題 1.1.26**  $n$  次正方行列  $A$  の固有値全体を  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  とおく. ただし,  $i \neq j$  ならば  $\lambda_i \neq \lambda_j$  とする. このとき, 次の命題は同値である.

1.  $A$  の固有ベクトルのみからなる  $\mathbb{K}^n$  の基底が存在する
2.  $\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(A)$  が成立する
3.  $n$  次正則行列  $P$ , 対角行列  $\Lambda$  が存在して  $\Lambda = P^{-1}AP$  を満たす

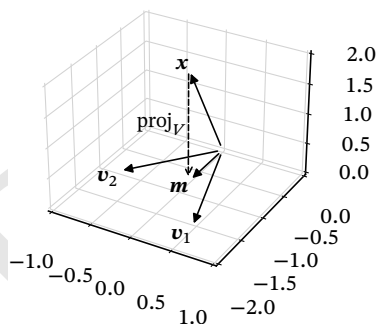
### 演習問題

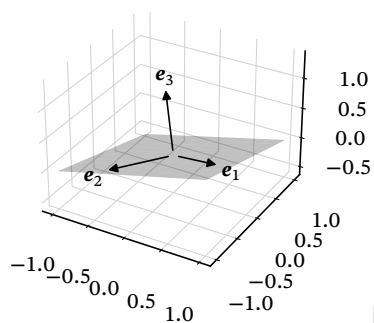
## 数ベクトル空間

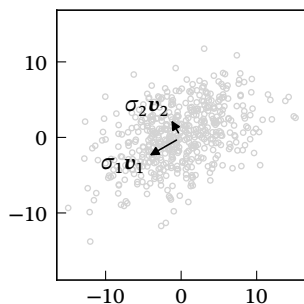
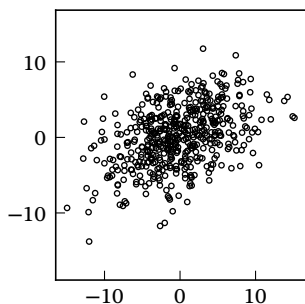
第 2 章で書く予定のことを並べておく。

## 2.1 直交射影

## 2.1.1 直交射影







### 2.1.2 直交補空間

### 2.1.3 スペクトル定理

## 2.2 最小二乗問題

### 2.2.1 最小二乗問題

### 2.2.2 特異値分解

### 2.2.3 擬似逆行列

## 2.3 離散フーリエ変換

## 2.4 多重解像度解析

## 2.A 主成分分析

## 2.B 低ランク近似

## 2.C 窓関数

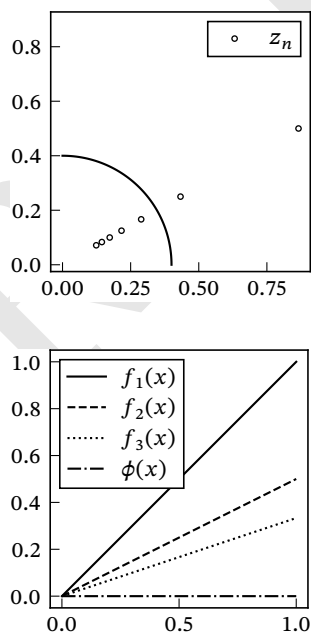


# ヒルベルト空間

第 3 章で書く予定のことを並べておく。

## 3.1 無限次元の線型空間

### 3.1.1 距離空間



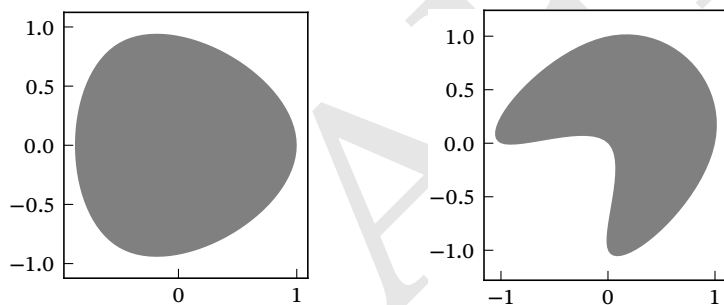
### 3.1.2 ノルム線型空間

### 3.1.3 内積空間

### 3.1.4 ヒルベルト空間

## 3.2 直交射影

### 3.2.1 直交射影





### 3.2.2 直交補空間

### 3.2.3 正規直交列

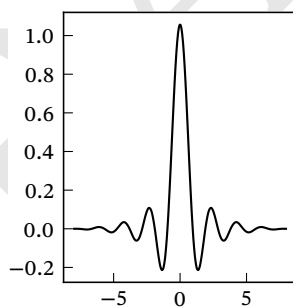
## 3.3 フーリエ級数展開

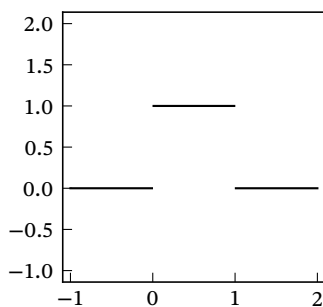
### 3.3.1 フーリエ級数展開

### 3.3.2 フーリエ変換

## 3.4 多重解像度解析

### 3.4.1 多重解像度解析





### 3.4.2 ウェーブレット変換

## 3.A 半ノルムと $L^p$ 空間

### 演習問題

## 第 4 章

# 確率空間

第 4 章で書く予定のことを並べておく.

### 4.1 確率空間

### 4.2 ウィナーフィルタ

### 4.3 カルマンフィルタ

### 4.A カルーネン・レーベ変換

### 演習問題



# プログラム例

## A.1 C 言語

以下のプログラムは C11 に準拠している。まず、動作はするものの不合法的なプログラムを示す。

```
#include <math.h>
#include <sndfile.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(void) {
    int samplerate = 44100;
    int frames = 4 * samplerate;
    SF_INFO sinfo = {.format = SF_FORMAT_WAV | SF_FORMAT_PCM_16,
                    .channels = 1,
                    .samplerate = samplerate,
                    .frames = frames};
    SNDFILE *file = sf_open("charp.wav", SFM_WRITE, &sinfo);
    double *buffer = malloc(sizeof(double) * frames);
    double pi = 3.141592653589793;
    double max_omega = 523.25 * 2.0 * pi / samplerate;

    for (int i = 0; i < frames; i++) {
        buffer[i] = sin(max_omega * i * i / (2.0 * frames));
    }

    sf_write_double(file, buffer, frames);
    sf_close(file);
    free(buffer);
    return 0;
}
```

```
gcc charp.c -lm -lsndfile -std=c11
```

手元でちょっとした実験をしたいだけなら、上のプログラムでも問題ない。しかし、誰かに使われる可能性があるのなら、次のように例外処理をきちんと行うほうがよい。

```
#include <math.h>
#include <sndfile.h>
#include <stdint.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(void) {
    const uint32_t samplerate = 44100;
    const uint32_t frames = 4 * samplerate;
    SNDFILE *const file =
        sf_open("charp.wav", SFM_WRITE,
            &(SF_INFO){.format = SF_FORMAT_WAV | SF_FORMAT_PCM_16,
                .channels = 1,
                .samplerate = samplerate,
                .frames = frames});

    if (file == NULL) {
        fprintf(stderr, "failed to open \"charp.wav\".\n");
        return 1;
    }

    double *const buffer = malloc(sizeof(double) * frames);

    if (buffer == NULL) {
        fprintf(stderr, "malloc failed.\n");
        sf_close(file);
        return 1;
    }

    const double pi = 3.141592653589793;
    const double max_omega = 523.25 * 2.0 * pi / samplerate;

    for (uint32_t i = 0; i < frames; i++) {
        buffer[i] = sin(max_omega * i * i / (2.0 * frames));
    }
}
```

```
if (sf_write_double(file, buffer, frames) != frames) {  
    fprintf(stderr, "%s\n", sf_strerror(file));  
    sf_close(file);  
    free(buffer);  
    return 1;  
}  
  
sf_close(file);  
free(buffer);  
return 0;  
}
```

## 参考文献

- [1] 齋藤正彦. 線型代数入門. 東京大学出版会, 2020, 274p., (基礎数学, 1).
- [2] 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 2018, 329p.
- [3] 雪江明彦. 環と体とガロア理論. 日本評論社, 2019, 300p., (代数学, 2).



## 索引

<b>【記号】</b>		固有値	8	<b>【な】</b>	
$\dim V$	5	固有ベクトル	8	内積	5
$\operatorname{Im} f$	8	<b>【さ】</b>		内積空間	5
$\langle \_, \_ \rangle$	5	次元	5	<b>【は】</b>	
$\operatorname{Ker} f$	8	正規直交基底	6	表現行列	7
$\operatorname{span} S$	3	正規直交系	6	標準基底	4
$E_\lambda(A)$	9	零ベクトル	2	標準内積	6
$W_1 + W_2$	3	線型結合	2	部分空間	2
$W_1 \oplus W_2$	3	線型写像	6	生成する—	3
<b>【か】</b>		線型従属	4	—の直和	3
核	8	線型独立	4	—の和	3
加法逆元	2	像	8	ベクトル空間	1
基底	4	<b>【た】</b>		部分—	→ 部分空間
行列式	9	対角化	10	<b>【や】</b>	
固有空間	9	単射	6	有限次元	5
固有多項式	9	直交	5		