1. (a) A partir de l'expressió

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

que podem escriure com

$$k = m\omega^2 = m(2\pi f)^2 = m(2\pi f)^2$$

la k representa la constant elàstica de l'oscil·lador i no depèn de la massa que vibra. Dit d'una altra manera, si la massa canvia també ho farà la freqüència. D'aquesta manera, i per les dues situacions que planteja l'exercici tenim

$$k = m_a(2\pi f_a)^2 \qquad k = (m_a + m_i)(2\pi f_{a+i})^2$$

d'on

$$m_a(2\pi f_a)^2 = (m_a + m_i)(2\pi f_{a+i})^2$$

simplificant

$$m_a \cancel{4\pi^2} f_a^2 = (m_a + m_i)\cancel{4\pi^2} f_{a+i}^2$$

reordenant termes i traient factor comú

$$m_a f_a^2 = (m_a + m_i) f_{a+i}^2 = m_a f_{a+i}^2 + m_i f_{a+i}^2$$

$$m_a f_a^2 - m_a f_{a+i}^2 = m_i f_{a+i}^2$$

$$m_a = m_i \cdot \frac{f_{a+i}^2}{f_a^2 - f_{a+i}^2} = 1,00 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{12^2 - 10^2} = 2,273 \cdot 10^{-3}\, kg$$

(b) Amb

$$k = m_a(2\pi f_a)^2 = 2,273 \cdot 10^{-3} \cdot (2\pi \cdot 12)^2 = 12,92\, N/m$$

La màxima velocitat en l'oscil·lador harmònic s'assoleix al punt d'equilibri. La màxima acceleració en els extrems del moviment.

2. (a) A la gràfica es veu que, per una amplitud de $15\,cm$, l'energia potencial elàstica màxima val $2,0\,J$. Llavors podem calcular la constant elàstica amb

$$E_{pel_{max}} = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow k = \frac{2E_{pel_{max}}}{A^2} = \frac{2 \cdot 2}{0,15^2} = 177,8\,N/m$$

Per trobar la massa de l'objecte calculem primer la freqüència. Amb la informació de l'apartat

$$f = \frac{10}{6,52} = 1,534\,Hz$$

llavors a partir de

$$k = m\omega^2$$

trobem

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2} = \frac{177,8}{(2\pi \cdot 1,534)^2} = 1,914\,kg$$

(b) A un oscil·lador de $10\,cm$ d'amplitud (i suposant la mateixa constant elàstica) li correspon una energia mecànica de

$$E_{pel_{max}} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 177,8 \cdot 0,1^2 = 0,889\,J$$

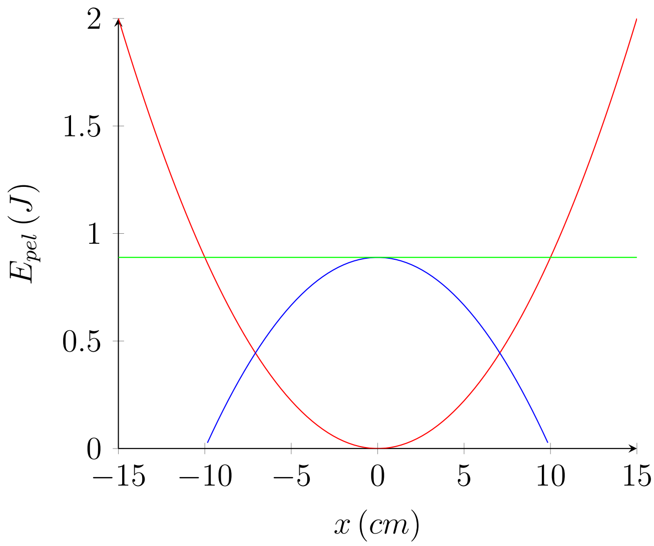
Com la relació entre l'energia mecànica, la potencial elàstica i la cinètica és

$$E_M = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

a la gràfica original on es representava l'energia potencial elàstica, podem representar l'energia cinètica com

$$E_c \equiv \frac{1}{2}mv^2 = E_M - \frac{1}{2}kx^2 = 0.889 - \frac{1}{2} \cdot 177.8x^2$$

i també l'energia mecànica



N'hi ha prou de veure que quan l'energia potencial elàstica és màxima, la cinètica ha de ser zero i a l'inrevés. També és clar que l'energia mecànica és constant, donat que es conserva.

3. (a) Després de penjar la massa i quan s'ha arribat a l'equilibri podem escriure

$$mg = kx$$

d'on

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{10 \cdot 9,8}{0,098} = 1000\,N/m$$

(b) La pulsació o freqüència angular ω, es pot calcular com

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = \sqrt{100} = 10\,rad/s$$

(c) L'equació del moviment serà de la forma

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

per una banda, l'amplitud val $2\,cm$ ja que és la distància que es desplaça (cap avall) la massa de la posició d'equilibri per tant $y(0) = -A$, d'on

$$-\cancel{A} = \cancel{A}\cos\varphi_0 \rightarrow -1 = \cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \pi$$

finalment

$$y(t) = 0,02\cos(10 \cdot t + \pi)$$

(d) L'acceleració màxima val

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm 0,02 \cdot 10^2 = 2\, m/s^2$$

4. A partir de la relació

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

si la velocitat val $(A\omega)/2$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{((A\omega)/2)^2}{(A\omega)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{(A\omega)^2/4}{(A\omega)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} = 1 - \frac{1}{4} \rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \frac{3}{4}$$

d'on

$$x = \pm \frac{A}{2}\sqrt{3}$$