



Relativitat especial amb aplicacions a l'electrodinàmica clàssica

J. Llosa
A. Molina

2a edició

Publicacions i Edicions





UB

La teoria de la relativitat constitueix, sens dubte, una de les teories que van revolucionar la física del segle XX. En aquest text es presenten els aspectes fonamentals de la teoria especial de la relativitat i s'apliquen a l'estudi d'alguns temes escollits d'electrodinàmica clàssica, dels quals se'n fa un tractament relativista. I no es limita a un desenvolupament formal de la teoria sinó que, a més, es descriuen i s'estudien experiments i observacions que requereixen la relativitat especial per a ser entesos.

El llibre pot ser útil per a la matèria *Electrodinàmica Clàssica* de la llicenciatura de Física. Per facilitar-ne la utilització docent, cada capítol acaba amb una llista de problemes (les solucions s'han agrupat al final del llibre). També pot servir de suport a cursos d'introducció (no elemental) a la relativitat especial.

S'ha suposat que el lector té ja adquirits els coneixements bàsics de matemàtiques i física d'un estudiant que comença el segon cicle d'una llicenciatura de ciències o d'una enginyeria.

www.publicacions.ub.es

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



ISBN 84-475-3013-2



9 788447 530137

La col·lecció UB (Universitat de Barcelona) reuneix les aportacions de caràcter didàctic, científic i d'investigació precises per al desenvolupament dels coneixements de nivell universitari. El seu objectiu és respondre de forma satisfactòria no solament a les necessitats acadèmiques sinó també a les del públic interessat en aquest tipus de coneixements especialitzats. La qualitat de les obres ve avalada pel judici científic d'especialistes en les diferents matèries.

Alfred Molina, doctor en Física per la Universitat de Barcelona el 1976, és professor titular de l'àrea de Física Teòrica de la Universitat de Barcelona.

La seva tasca docent s'ha dedicat entre altres a les matèries de relativitat especial, mecànica clàssica, física quàntica, física general i mètodes matemàtics de la física.

El seu treball de recerca s'ha dispersat en alguns temes de la física de partícules, la mecànica relativista predictiva dels sistemes de partícules i la relativitat general clàssica.

Josep Llosa, doctor en Física per la Universitat de Barcelona el 1978, és professor titular de l'àrea de Física Teòrica de la Universitat de Barcelona.

La seva tasca docent ha abarcat les matèries de relativitat especial i general, mecànica clàssica i mètodes matemàtics de la física.

El seu treball de recerca s'ha concentrat en els camps de la mecànica teòrica, la dinàmica relativista, els sistemes lagrangians no locals i la relativitat general clàssica.

Els mateixos autors han publicat *Relativitat especial i electrodinàmica clàssica* en la col·lecció "Text-Guia" de Publicacions UB. També han estat responsables de l'edició de la *Revista de Física* de la Societat Catalana de Física des del 1992 fins l'actualitat.

- *Técnicas econométricas para el tratamiento de datos espaciales: La econometría espacial*. R. Moreno Serrano y E. Vayá Valcarce.
- *Manual de parasitología*. J. Gállego.
- *Psicologia del desenvolupament: adolescència, maduresa i senectut*. C. Triadó.
- *Les arrels socioculturals de l'art: Una visió interdisciplinària del fenomen artístic*. I. Vallès Rovira.
- *Diseños de series temporales: técnicas de análisis*. J. Arnau.
- *Lecturas de integración económica. La Unión Europea*. J. Muns (ed.).
- *Manual bàsic del sistema fiscal espanyol*. A. Pedrós Abelló.
- *Càlcul integral*. J. Cerdà.
- *Curso de física estadística*. J. Ortín, J. M. Sancho.
- *Estadística Actuarial Vida*. M. Ayuso, H. Corrales, M. Guillén, A.M. Pérez-Marín y J.L. Rojo.
- *Aproximació a la filosofia del llenguatge*. M. Pérez Otero.
- *Tratamiento del lenguaje natural*. M. A. Martí (coord.), J. Llisterri.

- *Teoría y análisis de la entonación*. F. J. Cantero.
- *Análisis gráfico y representación geométrica*. L. Cabezas y L. F. Ortega.
- *Tratado de pintura. Color, pigmentos y ensayo*. A. Palet.
- *Hacia una nueva orientación universitaria. Modelos integrados de acción*. M^a L. Rodríguez Moreno.
- *Personalidad para el siglo XXI*. J. M. Tous.
- *Ideas y formas en la representación pictórica*. V. Furió.
- *PIERT. Tutorial multimedia para el diseño de pruebas de rendimiento (versión con herramientas)*. J. Renom Pinsach (coord.), A. Solanas Pérez, E. Doval Diéguez, M^a I. Núñez Peña.
- *Tecnologías multimedia para la enseñanza y aprendizaje en la universidad. El proyecto TEAM de la Universidad de Barcelona*. J. L. Rodríguez Illera, J. Suau.
- *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann*. C. Currás Bosch.
- *Lexicografía computacional y semántica*. M. A. Martí Antonín, A. Fernández Montraveta, G. Vázquez García (editoras).
- *Sociologia de l'empresa*. M. Domínguez Amorós.
- *Los orígenes de la literatura artúrica*. G. Torres Asensio.
- *Recursos humanos*. A. Casas Romeo.
- *Introductory Semantics and Pragmatics for Spanish Learners of English*. B. Mott.
- *Manual de Parasitología. Morfología y biología de los parásitos de interés sanitario*. J. Gállego Berenguer.
- *Dret d'obligacions*. C.I. Maluquer de Motes (coord.)
- *Protohistoria*. F. Gracia Alonso, G. Munilla.
- *Introducció al món de les assegurances*. L. Bermúdez i Morata, F. Espinosa.
- *Trastorns de conducta i de personalitat. Una psicopatologia per a educadors*. L. Folch i Soler.
- *Al-Mansur y la dawla 'amiriya. Una dinámica de poder y legitimidad en el occidente musulmán medieval*. X. Ballestín Navarro.
- *Intercambio internacional de información tributaria*. T. Rosembuj.

Índex

Prefaci	13
1 Física prerelativista	15
1.1 Sistemes de referència i mesura del temps	15
1.1.1 L'espai	16
1.1.2 El temps	18
1.1.3 Sistemes de referència	20
1.2 Principi de relativitat de Galileu	20
1.2.1 Les transformacions de Galileu	21
1.2.2 Invariància galileiana de la mecànica de Newton	23
1.2.3 Transformacions de Galileu i electromagnetisme	24
1.3 Electrodinàmica dels cossos en moviment	26
1.3.1 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v/c	26
1.3.2 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v^2/c^2	27
1.4 Òptica. La velocitat de la llum	28
1.4.1 La velocitat de la llum en el buit	28
1.4.2 Òptica. Efectes d'ordre v/c	31
1.4.3 Òptica d'ordre v^2/c^2 . L'experiment de Michelson	35
2 Els postulats de la teoria especial de la relativitat	41
2.1 El principi de relativitat de Poincaré i Einstein	41
2.2 Revisió de la cinemàtica	42
2.2.1 La simultaneïtat podria no ser universal	44
2.3 La transformació de Lorentz	45
2.4 Propietats de les transformacions de Lorentz	50
2.4.1 Expressió vectorial de les transformacions de Lorentz	53
2.5 Mesures de longitud i de duracions per a sistemes mòbils	54
2.5.1 Mesures de longituds	55
2.5.2 Mesures del temps	57
2.6 Llei de composició de les velocitats	61
2.6.1 Velocitats paral·leles	62
Apèndix 2.A	63

3	Òptica relativista	69
3.1	Fenòmens ondulatoris	69
3.1.1	Fronts d'ona	69
3.1.2	Ones planes monocromàtiques	70
3.2	Transformació dels fronts d'ona	72
3.2.1	Efecte Doppler	73
3.2.2	L'aberració estel·lar	74
3.2.3	Fórmula de Fresnel	75
3.3	Mesures de l'efecte Doppler relativista	76
3.3.1	L'experiment d'Ives-Stilwell	76
3.3.2	Altres experiments	78
3.3.3	L'efecte Doppler i els espectres d'emissió i absorció	79
3.3.4	Mesures basades en l'efecte Mösbauer	84
3.3.5	L'espectre de SS 433	87
4	L'espai-temps de Minkowski	93
4.1	Introducció	93
4.2	L'espai-temps de Minkowski	94
4.2.1	La mètrica de Minkowski	94
4.3	Classificació dels intervals	96
4.4	Els cons de llum	98
4.5	Línia d'univers d'un punt material	101
4.5.1	Parametrització, orientació i causalitat	101
4.5.2	El temps propi	103
4.6	La paradoxa dels bessons. Realitzacions experimentals	104
4.6.1	Desintegració de muons en vol	105
4.6.2	L'experiment de Hafele i Keating	106
4.7	Velocitat i acceleració pròpies	109
4.8	Moviment uniformement accelerat	111
4.8.1	Moviment hiperbòlic	112
5	Mecànica relativista	115
5.1	El quadrimoment lineal	115
5.1.1	Collisions newtonianes	115
5.1.2	Collisions relativistes	117
5.1.3	Quadrimoment lineal	118
5.1.4	Propietats del quadrimoment lineal	119
5.1.5	Xocs elàstics i xocs inelàstics	120
5.1.6	Fotons	123
5.2	Conversió massa-energia	124
5.2.1	La inèrcia de l'energia	124
5.2.2	Fissió i fusió nuclears	126
5.3	El sistema del centre de massa	127
5.3.1	Hi ha un punt centre de massa relativista?	129

5.4	Dinàmica relativista	131
5.4.1	La inèrcia augmenta amb la velocitat	132
5.5	Quadriment angular	133
5.6	El moment angular intern. Spin	135
5.6.1	El transport de Fermi-Walker	137
5.6.2	La precessió de Thomas	138
5.7	Quadriment angular total d'una partícula amb spin \uparrow	140
5.8	Formalismes lagrangiana i hamiltoniana	141
5.8.1	Lagrangiana d'una partícula lliure	141
5.8.2	Invariància per reparametrització	142
5.8.3	Formalisme hamiltoniana	143
6	Dinàmica relativista: partícules en interacció\uparrow	147
6.1	Introducció	147
6.2	Transformacions canòniques	148
6.2.1	Transformacions canòniques infinitesimals	149
6.2.2	L'operador generador infinitesimal	151
6.3	Transformacions de Poincaré infinitesimals	151
6.4	Partícula lliure i invariància de Poincaré	152
6.4.1	Les funcions generatrius	153
6.4.2	L'àlgebra de Poisson del grup de Poincaré	154
6.4.3	Els generadors infinitesimals de Poincaré	155
6.5	Sistema de diverses partícules	156
6.5.1	Partícules sense interacció	158
6.5.2	Partícules en interacció	159
6.6	Sistemes predictius invariants pel grup de Poincaré	161
7	Dinàmica relativista de medis continus\uparrow	165
7.1	Lleis de conservació macroscòpiques	165
7.2	Conservació del quadriment lineal	167
7.2.1	El tensor d'energia-moment	168
7.2.2	Llei de conservació local	170
7.2.3	Conservació del quadriment lineal total	171
7.2.4	Lleis de transformació	172
7.3	El moment angular	173
7.3.1	Moment angular orbital i spin	174
7.4	El tensor d'energia-moment de Belinfante	175
7.5	Dinàmica newtoniana de medis continus	177
7.5.1	Equacions del moviment. Tensor d'esforços	177
7.5.2	Equacions constitutives del medi	178
7.6	Equacions constitutives. Cas relativista	179
7.6.1	L'equació d'estat	180

8	Equacions de l'electrodinàmica clàssica	185
8.1	Equacions de Maxwell	185
8.2	Càrregues i corrents	187
8.2.1	Forma covariant de l'equació de continuïtat	187
8.2.2	La càrrega total és un escalar	188
8.3	El tensor de Faraday	190
8.3.1	Transformació dels camps elèctric i magnètic	191
8.3.2	Els invariants del camp electromagnètic	192
8.3.3	Forma covariant de les equacions de Maxwell en el buit	196
8.4	Potencials electromagnètics	197
8.4.1	El quadripotencial electromagnètic	197
8.4.2	Les transformacions de galga	198
8.4.3	Les equacions del potencial electromagnètic	199
8.5	Tensor d'energia-moment i lleis de conservació	199
8.5.1	Conservació de l'energia. Teorema de Poynting	200
8.5.2	Conservació del quadrimoment lineal. Tensor d'energia-moment	201
	Apèndix 8.A	204
9	Càrregues en un camp electromagnètic	211
9.1	Moviment d'una càrrega en un camp uniforme i constant	211
9.1.1	Moviment d'una càrrega en un camp elèctric	212
9.1.2	Moviment en un camp magnètic	213
9.1.3	Moviment en un camp electromagnètic singular	214
9.1.4	Moviment en un camp electromagnètic genèric	215
9.1.5	Acceleradors de càrregues	216
9.2	Moviment en un camp magnètic no uniforme	219
9.3	Formulació lagrangiana i hamiltoniana	221
9.3.1	Lagrangiana d'una càrrega puntual	222
9.3.2	Formalisme hamiltonià	223
9.3.3	Moviment en un camp elèctric central	224
9.4	Partícula amb moment magnètic	226
10	Solució de les equacions de Maxwell	233
10.1	Problema de valors inicials. Funció de Green	233
10.1.1	Solucions de l'equació d'ona	234
10.1.2	La condició de galga	238
10.1.3	Propagadors	239
10.2	El potencial retardat	239
10.3	Camps d'una font sinusoïdal localitzada	240
10.3.1	Camps de radiació lluny de la font	243
10.4	Aproximacions multipolars	244
10.4.1	Radiació dipolar elèctrica	244
10.4.2	Radiació dipolar magnètica	246

10.4.3	Radiació quadrupolar elèctrica	248
11	Radiació per càrregues en moviment	251
11.1	El camp electromagnètic d'una càrrega puntual	251
11.1.1	Els potencials retardats de Liénard-Wiechert	251
11.1.2	Camp electromagnètic retardat	254
11.2	Potència radiada per una càrrega	257
11.2.1	Moment lineal radiat per unitat de temps	258
11.3	Pèrdues radiatives	259
11.4	Distribució angular de la radiació	260
11.4.1	Càrrega en moviment rectilini	262
11.4.2	Moviment circular uniforme	264
11.5	Radiació de sincrotró	265
11.6	La frenada per radiació	269
11.6.1	L'equació d'Abraham-Lorentz-Dirac	270
12	Ones electromagnètiques en el buit	279
12.1	Les ones electromagnètiques en el buit	279
12.1.1	Polarització	282
12.1.2	El tensor d'energia-moment	283
13	Ones electromagnètiques en medis materials	287
13.1	Camps electromagnètics en medis materials	287
13.2	Ones electromagnètiques en un medi dispersiu	289
13.2.1	Ones planes	289
13.2.2	L'índex de refracció	291
13.3	Les velocitats d'una ona	292
13.4	Propagació supralumínica en un medi transparent	297
	Apèndix 13.A	303
	Apèndix 13.B	308
A	Tensors i mètriques	311
A.1	Vectors, escalars i tensors	311
A.1.1	Escalars	311
A.1.2	Vectors i covectors	313
A.1.3	Objectes invariants	315
A.1.4	Tensors	316
A.1.5	Operacions amb tensors	318
A.1.6	Criteris de tensorialitat	319
A.2	Mètriques	320
A.2.1	Mètriques no degenerades	320
A.2.2	La mètrica inversa	321
A.2.3	L'operació de pujar i baixar índexs	322

B	Hipersuperfícies	323
B.1	Element d'hipersuperfície	323
B.2	El teorema de Gauss-Ostrogradski	326
C	Transformada de Fourier i funcions generalitzades	329
C.1	Transformada de Fourier	329
C.2	Funcions generalitzades	332
C.3	Càlcul d'algunes integrals	333
	Bibliografia complementària	335
	Solucions dels problemes	337
	Índex terminològic	345

Prefaci

Aquest llibre estén i completa els apunts que havíem preparat per a les classes d'Electrodinàmica Clàssica i que hem utilitzat al llarg d'uns quants cursos. Pretén sobretot ser una eina docent per a aquesta assignatura de la llicenciatura de Física a la UB, i aquest objectiu es veu reflectit en el contingut del text. Una bona part de l'assignatura consisteix en uns fonaments de relativitat especial, que després s'apliquen a l'estudi de l'electrodinàmica clàssica pròpiament dita.

Dels textos publicats sobre aquests temes no en vàrem trobar cap que ens satisfés prou per seguir-lo com a llibre de text i recomanar-lo als nostres estudiants; sigui perquè el nivell era massa elemental o massa avançat per als nostres propòsits, perquè el formalisme matemàtic era massa antiquat o perquè era massa elaborat, etc. I així vàrem embolicar-nos en aquesta aventura.

La teoria de la relativitat constitueix, sens dubte, una de les teories que van revolucionar la física del segle XX i de ben segur que interessa un públic més ampli, que també hem tingut present en la redacció del text. Tanmateix, aquest no és un llibre elemental sobre la teoria especial de la relativitat. D'aquests ja n'hi ha, i força, tant d'un nivell divulgatiu com d'una dificultat primària.

Hem suposat que el lector té ja adquirits els coneixements bàsics de matemàtiques i física d'un estudiant que comença el segon cicle d'una llicenciatura de ciències o d'una enginyeria.

Per bé que no n'hem fet una separació explícita, en el sumari s'hi distingeixen dues parts: els nou primers capítols es dediquen a la teoria especial de la relativitat i la resta, a l'estudi d'alguns temes escollits d'electrodinàmica clàssica, amb un enfocament relativista.

Alguns apartats, i també alguns capítols sencers, són d'un nivell més avançat que el que correspondria a un text com ara aquest. Els uns i els altres estan indicats amb un † i el lector en pot prescindir si vol, sense que això afecti la lectura ni la comprensió de la resta. Ens hem decidit a afegir-los perquè són interessants per a aquell lector que vulgui aprofundir en la teoria de la relativitat i perquè enllacen amb el contingut del llibre sense cap discontinuïtat. (Per exemple, el capítol 7 serà essencial per a qui vulgui estudiar més endavant la teoria general de la relativitat.)

Hem volgut fugir d'una exposició massa formal amb un llenguatge matemàtic massa complicat, això hauria reduït els nostres lectors als físics teòrics, i hem procurat allà on ha estat possible basar-nos sobretot en raonaments i discussions,

i il·lustrar l'exposició amb exemples i la descripció d'experiments. Així, en aquells passatges que implicaven una deducció matemàtica massa detallada, que restaria fluïdesa a l'exposició principal, hem optat per desplaçar els detalls matemàtics a un apèndix de final de capítol.

A fi de motivar la necessitat del canvi conceptual que representa la transició de la física newtoniana a la relativista, en els capítols inicials hem fet un breu repàs de la física a finals del segle XIX. Tanmateix, no ens hem mantingut fidels al que seria una presentació històrica dels conceptes, ni ho preteníem. Un exemple clar d'aquest fet és l'enfocament que hem donat a la introducció de la força de Lorentz relativista al capítol 8.

Tot i que el to general del llibre és força deductiu, hem volgut anar més enllà d'exposar els principis de la teoria i desenvolupar-ne el formalisme, com es podria esperar de dos físics teòrics. Com que es tracta d'un llibre de física, sempre que ens ha estat avinent hem procurat parlar d'experiments i observacions que requereixen de la relativitat especial per ser entesos. Alguns els hem comentat i explicat amb un cert detall. I aquesta tasca no ha resultat gens fàcil. D'entrada, per les diferències entre el llenguatge dels experimentals i el dels teòrics, però també perquè cada experiment integra coneixements de moltes branques de la física alhora i presentar-los junts, d'una manera comprensible i en un format reduït, no és senzill. Com a exemple, l'explicació i la interpretació de les mesures recents de propagació supralumínica de llum en un medi ens ha obligat a escriure un capítol sencer, el 13, com a preparació.

Per a teòrics com nosaltres descriure experiments és arriscat, en particular perquè és fàcil que se'ns escapi alguna impertinència. Més si es té en compte la varietat dels temes inclosos: astronomia, física nuclear, òptica, etc. És un risc que hem cregut que valia la pena córrer. Per tal d'evitar les imprecisions en allò que fos possible hem procurat l'assessorament de col·legues especialistes en cada tema. Volem agrair a en Robert Estalella, en Josep M. Paredes, en Francesc Salvat, en Gaspar Orriols i en Luis Navarro la paciència de llegir i corregir aquells passatges sobre els quals els hem demanat l'opinió.

Hem de donar les gràcies especialment a en Jaume Carot per haver-se prestat a fer una lectura general del manuscrit. Els seus comentaris, crítiques i suggeriments ens han permès fer el text més llegible i eliminar inconsistències. I finalment també a n'Anton Carrasco i n'Albert Compte pel seu esforç en el mecanografiat i la realització de les figures.

Josep Llosa
Alfred Molina
Universitat de Barcelona
Barcelona, juny de 2004

Capítol 1

Física prerelativista

1.1 Sistemes de referència i mesura del temps

Quan diem: «Quedem a la porta de la facultat demà a les 8 del matí», els companys de feina o els estudiants de la facultat entendran fàcilment la cita i podrem trobar-nos. Si ho hem de fer entendre a un físic japonès que mai no ha vingut a Barcelona haurem de precisar molt més, situar la facultat a Barcelona i fer-li saber la diferència horària entre Barcelona i el Japó. Encara en aquest cas resulta fàcil perquè ja hi ha una sèrie de convencions horàries comunes i estem a la Terra. Però imaginem ara que la cita és amb un extraterrestre que ens visita i ha de venir d'una altra galàxia ja tindriem dificultats per situar-li la Terra dins de la nostra Galàxia, comptant que poguéssim dir-li on és la Via Làctea, car hauríem de buscar un sistema de referència comú. Per dir-li l'hora hauríem de sincronitzar els rellotges i donar-li la durada de l'interval que anomenem segon.

Per poder descriure els fenòmens cal situar-los en l'espai i el temps. Estem acostumats a donar tres quantitats (coordenades) per determinar la posició i una per a l'instant de temps. La correspondència entre aquestes quantitats i la posició i el temps d'un esdeveniment implica una sèrie de protocols, operacions i convenis tàcits que intentarem analitzar al llarg d'aquesta secció. Aquests convenis inclouen l'elecció d'un espai de referència, les mesures en aquest espai (per exemple, per mitjà de fils «inextensibles»), la mesura de duracions per mitjà d'un sistema de rellotges, etc.

Un dels objectius de la física és descriure les lleis d'evolució de determinats fenòmens. En particular la mecànica s'ocupa de les lleis del moviment dels cossos. Quan afirmem que un cos es mou volem dir que canvia la seva posició, però només podem adonar-nos que una cosa canvia si la comparem amb una altra que, per definició, roman invariable. Per aquesta raó, és essencial per a l'estudi de la mecànica disposar d'un cos, o un sistema de cossos, que per convenció considerem invariable i prenem com a referència.

1.1.1 L'espai

El concepte d'espai que tenim i que acostumem a donar per sentat l'hem adquirit a partir de l'experiència quotidiana. Està vinculat a l'escorça terrestre, els edificis, les parets de l'habitació, la taula del laboratori, etc. És a dir cossos o sistemes de cossos amb una configuració relativa rígida, que no canvia. Un sistema de cossos amb aquesta propietat, així com la seva prolongació ideal, constitueix un *espai de referència*.

Per tal de comprendre millor la importància d'aquesta configuració rígida podem fixar-nos, per exemple, en el fet que els objectes que suren sobre l'aigua del mar no mantenen una posició relativa constant i no són, per tant, una bona referència, tampoc ho són els líquids o els gasos. D'aquí que, en l'antiguitat, els navegants haguessin de mantenir la costa a la vista per no perdre's. Posteriorment, amb uns millors coneixements d'astronomia, els estels fixos (anomenats així perquè mantenen la seva posició relativa mentre la volta del cel fa la seva rotació diària) els van proporcionar una referència parcial per a la navegació nocturna: d'una banda, els permetia determinar la latitud, però per conèixer amb fiabilitat la longitud calia a més un rellotge per mesurar la diferència horària entre el meridià del lloc i el meridià origen.¹

L'expressió *repòs relatiu* està íntimament relacionada amb el concepte de *sistema rígid*, ja que si un sistema de punts està en repòs relatiu, les relacions geomètriques entre les seves parts no canvien. En particular, la distància entre qualsevol parella de punts es manté constant. Aquesta és precisament la definició de *sistema rígid* o de *moviment rígid*.

Un *sòlid rígid* és un cos en què les forces de lligam entre les seves parts garanteixen que en qualsevol circumstància aquestes segueixen un moviment rígid. Tanmateix, un conjunt de punts pot seguir un moviment rígid sense que hi hagi cap lligam físic manifest entre ells. Pensem en una esquadra d'avions de vol acrobàtic en què els pilots es conxorxen per mantenir sempre la mateixa formació, amb distàncies constants entre els aparells.

Un *sòlid rígid* és un objecte ideal. A la natura no hi ha cossos rígids, si bé determinats cossos es poden considerar aproximadament rígids, segons el grau de precisió que volguem donar a la descripció. Així, per descriure el moviment d'un giroscopi d'acer, el considerarem rígid, mentre que en l'estudi de la propagació d'ones acústiques en una barra del mateix material haurem de considerar l'acer com un *sòlid elàstic*.

L'espai de referència construït així es regeix per les lleis de la geometria euclidiana. Aquesta és una propietat empírica que se sustenta sobre l'experiència continuada dels constructors, els navegants, els astrònoms, etc.²

¹No es va disposar d'un rellotge prou estable i precís fins a mitjan segle XVIII. Vegeu SOBELL, D., *La longitud. La veritable història d'un geni solitari [...]*, Edicions 62, (Barcelona, 1997).

²La validesa d'aquesta propietat no té res a veure amb la consistència dels postulats d'Euclides, ni amb la qüestió que va romandre oberta fins a començaments del segle XIX referent al postulat

L'any 1821 Gauss va intentar comprovar si l'espai físic responia als axiomes de la geometria euclidiana. L'experiment va consistir a mesurar els angles d'un triangle d'uns 100 km de costat per veure si sumaven 180° . No trobà cap desviació dins de l'error experimental, que era de l'ordre de 0,7 segons d'arc. La seva validesa s'ha d'entendre restringida a la precisió dels aparells de mesura de l'època i també al domini dels fenòmens considerats.

Per fer mesures en l'espai necessitem un patró de longitud que hem de poder considerar invariable. A més, com que hem d'aplicar-lo en qualsevol lloc i amb qualsevol orientació, no haurà de canviar si el sotmetem a moviments de translació i de rotació. La realització d'aquest patró de longitud ha de ser feta doncs d'un material tan rígid com sigui possible (igual que els cossos de referència).

En un espai de referència donat —que ja hem dit que per a la mecànica clàssica serà euclidià— podem assignar a cada punt tres nombres o *coordenades* que ens serviran per identificar-lo. Un sistema de coordenades és una manera d'etiquetar cada punt de l'espai amb una terna de nombres.

Donat l'espai de referència, hi ha molts sistemes de coordenades diferents (cartesianes rectangulars, obliqües, esfèriques, cilíndriques, etc.). El fet d'escollir-ne l'un o l'altre depèn de la conveniència en cada problema concret.

En general, són especialment útils els sistemes de *coordenades cartesianes* perquè estan molt relacionats —per la seva pròpia construcció— amb les propietats mètriques de l'espai euclidià de referència. Un sistema de coordenades cartesianes és definit per tres eixos ortogonals concurrents en un punt O que anomenem *origen de coordenades*. Les coordenades (x, y, z) d'un punt P són les longituds amb el signe corresponent dels segments que van de l'origen O a les projeccions ortogonals de P sobre els tres eixos, OP_x , OP_y i OP_z . (Notem com les nocions mètriques de distància i ortogonalitat intervenen en la determinació dels valors d'aquestes coordenades.)

Entre d'altres propietats, les coordenades cartesianes tenen la virtut que la distància entre dos punts ve donada pel teorema de Pitàgores: *el quadrat de la distància entre dos punts P i Q és igual a la suma dels quadrats de les diferències entre les coordenades*:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}. \quad (1.1)$$

Les coordenades cartesianes (x_1, x_2, x_3) i (x'_1, x'_2, x'_3) d'un mateix punt de l'espai segons dos sistemes de coordenades, \mathcal{K} i \mathcal{K}' , respectivament, estan relacionades per una llei de transformació del tipus:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(x_j - A_j), \quad (1.2)$$

on R_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, és una matriu ortogonal, és a dir una matriu que té la propietat $RR^\top = 1$, i dóna compte de la diferent orientació dels eixos coordenats

de les paral·leles.

de \mathcal{K} i \mathcal{K}' , mentre que A_j són tres nombres reals arbitraris que corresponen al fet d'haver escollit diferents orígens de coordenades en els dos sistemes. El conjunt d'aquestes lleis de transformació és el que s'anomena *grup euclidià*, i inclou totes les transformacions entre sistemes de coordenades per als quals val la llei pitagòrica (1.1), és a dir, que conserven la distància euclidiana.

1.1.2 El temps

El concepte de temps està lligat a la idea de canvi. La forma més primitiva és la de *temps psicològic* o *subjectiu* i correspon a l'ordenació que pot fer un individu de les seves experiències segons l'abans i el després.

Els conceptes de causa i efecte estan molt relacionats amb aquesta ordenació. Si un mateix individu observa que l'esdeveniment F es produeix sempre que s'ha produït E , que petites variacions en les condicions de E repercuten en petites variacions de les condicions de F , i que això mateix observa qualsevol altre individu, llavors s'infereix que E és la *causa* de l'*efecte* F . I aleshores es considera que temporalment E passa abans que F .

Les lleis físiques s'ocupen de descriure d'una manera quantitativa com es produeixen els canvis, a quin ritme, etc. Per això el paràmetre temps és inevitable en la física. Tanmateix es tracta d'un concepte una mica més elaborat que el que acabem de comentar. Cal poder mesurar *duracions* d'interval de temps (d'una manera objectiva, independent de l'individu) i poder decidir, d'entre qualsevol parell d'esdeveniments, que potser s'han produït en llocs diferents, quin és anterior i quin és posterior. El primer requisit es resol amb l'ajut de rellotges patró i el segon per mitjà d'un *protocol de sincronització* o una definició de *simultaneïtat*.

La necessitat d'establir un protocol de sincronització no es planteja en el marc de la física newtoniana, en què el temps és absolut, el mateix per a tothom. Aquesta manera d'entendre les coses és, de fet, fruit d'una experiència continuada que no presentava cap conflicte en el domini d'experiments i observacions de què s'ocupava la física clàssica: si dos esdeveniments són vistos simultàniament per un individu també ho són per a qualsevol altre. L'efecte dels retards diferents que afectarien els diferents senyals lluminosos que informen cada observador del fet que s'ha produït cada un d'aquests dos esdeveniments és negligible per a les velocitats i distàncies de què s'ocupa la física newtoniana i a la precisió amb què s'hi treballa. Deixarem per a més endavant, en el capítol 2, quan sortirem del domini newtonià, la discussió de possibles protocols de sincronització.

Per a la mesura de duracions s'utilitzen els rellotges. Cada rellotge es basa en un sistema cíclic, ja sigui la rotació diària de la volta celeste, el moviment anual de la Terra, les oscil·lacions d'un pèndol, les vibracions d'un diapasó, d'un cristall de quars o d'una determinada transició atòmica. Els cicles d'aquest sistema es van repetint, sempre en les mateixes circumstàncies, de manera que no sembla agosarat prendre la *convenció* que dos cicles diferents duren el mateix. La consistència d'aquesta convenció es basa en la suposició raonable que *les mateixes*

causes produeixen els mateixos efectes. A més, amb les lleis de la mecànica es pot estudiar el moviment ideal d'alguns d'aquests rellotges, o bé les freqüències per a una transició atòmica, i veure si la teoria preveu que el període dels cicles és el mateix.

Diem que la marxa d'un rellotge és *uniforme* quan dos cicles qualssevol del rellotge duren el mateix. Una afirmació com aquesta només té un valor relatiu, és a dir, quan comparem la marxa de dos rellotges basats en sistemes diferents. Comparats entre ells mateixos, tots els períodes d'un mateix rellotge són iguals per convenció.

La rellevància d'aquest comentari ve del fet que si comparem entre ells els diversos rellotges esmentats més amunt, la seva marxa relativa no és uniforme. Això planteja el dilema de preferir l'un a l'altre. De fet, la causa de la discrepància rau en el fet que les circumstàncies que determinen la dinàmica d'un rellotge real són molt variades i no tenim cap manera de garantir que tots els cicles es produeixin en les mateixes condicions. Per exemple, el període d'un rellotge de pèndol depèn de l'amplitud de l'oscil·lació —molt poc, al segon ordre—, l'amortiment degut a la fricció de les diverses parts de la maquinària fa que l'amplitud disminueixi de manera que a la llarga els períodes de les oscil·lacions deixen de ser iguals. O també, si prenem com a sistema cíclic la rotació terrestre, aquesta s'alenteix a causa de la fricció associada al moviment de les mares. I si ens basem en el moviment de translació anual de la Terra al voltant del Sol, les condicions d'aquesta canvien d'un any a l'altre perquè canvia la posició dels planetes veïns que pertorben el moviment de la Terra.

Per corregir els efectes d'aquestes possibles variacions s'utilitza una teoria de la dinàmica del rellotge, la qual es basa en la mecànica de Newton, la relativitat especial o la general segons el sistema que es consideri i la precisió que es vulgui aconseguir.

Aparentment, doncs, el temps físic és un concepte previ a les lleis de la mecànica i de la física, ja que aquestes lleis són enunciats relatius a mesures d'espai, de temps i de forces. Tanmateix la realitat és més complexa, per corregir la marxa dels rellotges *reals* s'utilitzen teories de la seva dinàmica que es basen en les lleis de la física. Per exemple, en el sistema de mesura del temps basat en les efemèrides astronòmiques, s'introdueixen les correccions obtingudes per mitjà de l'anomenada *equació del temps*, que tenia compte de la irregularitat del moviment de la Terra d'acord amb la predicció de la mecànica de Newton. La conseqüència de tot plegat és que de fet, i com va remarcar Poincaré,³ el temps físic es defineix de manera que les lleis de Newton siguin vàlides.

³Vegeu POINCARÉ, H., *La valeur de la Science*, (Capítol II, *La mesure du temps*), Flammarion, (París, 1970).

1.1.3 Sistemes de referència

Un espai de referència junt amb un bon rellotge constitueixen a la mecànica de Newton el que s'anomena *sistema de referència* o també un *observador*.

Quan determinem les relacions entre diversos fenòmens en forma de llei matemàtica, l'expressió que se n'obté és molt diferent segons el sistema de referència triat. N'hi ha uns en què les lleis de la mecànica de Newton són més senzilles, els anomenem *sistemes de referència inercials* i són aquells per als quals valen les lleis de Newton de la mecànica. Newton els va caracteritzar pel fet de tenir un moviment rectilini i uniforme respecte a allò que ell anomenà *espai absolut*. Però com que aquest concepte és impossible de manejar físicament, a la pràctica es fa servir la primera llei de Newton per caracteritzar-los. Així, definim *sistema inercial* amb les dues propietats següents:

- (a) les relacions d'espai determinades amb regles rígids en repòs compleixen les lleis de la geometria euclidiana,
- (b) podem escollir un temps universal en termes del qual una massa puntual no sotmesa a cap acció identificable —de contacte, electromagnètica, gravitacional, etc.— roman en estat de repòs o de moviment rectilini i uniforme.

Els sistemes de referència que s'utilitzen a la pràctica només són aproximadament inercials, segons quin sigui el fenomen que es vulgui estudiar. Així, per a un experiment que duri poc temps (entorn d'una hora) un laboratori fix en la superfície terrestre és un sistema de referència aproximadament inercial. Si l'experiment dura mig dia o més, com per exemple el pèndol de Foucault, els efectes no inercials de la rotació diària de la Terra ja són notables i cal prendre un sistema de referència amb l'origen al centre de la Terra i uns eixos orientats segons tres direccions estacionàries relativament als estels llunyans (el que per raons històriques s'anomena *els estels fixos*). Si l'observació dura mesos, el laboratori aproximadament inercial adient té l'origen en el centre de masses del sistema solar i l'orientació dels eixos és estacionària en els estels fixos, etc.

Si no diem el contrari, tots els sistemes de referència que utilitzarem seran inercials. En tots ells l'espai és homogeni i isòtrop (és a dir, és igual en qualsevol punt i en qualsevol direcció) i el temps és homogeni.

1.2 Principi de relativitat de Galileu

Quan parlem d'un *principi de relativitat* volem dir que hi ha tota una classe de sistemes de referència per als quals les lleis d'un cert domini de la física tenen la mateixa forma.

La formulació original del principi de relativitat de Galileu es troba en la segona

jornada del *Diàleg sobre els dos sistemes màxims*.⁴ Després d'esmentar un seguit de fenòmens observats sota la coberta d'una nau: el vol dels insectes, el goteig d'un vas sobre un gibrell col·locat a sota, etc.

«SALVIATI: [...] Observeu atentament totes aquestes coses de manera que no hi hagi dubte que ha de ser així mentre el vaixell està quiet i feu moure la nau amb la velocitat que vulgueu; si el moviment és uniforme i no fluctua, d'una banda a l'altra, vos no reconeixereu el més petit canvi en tots els efectes esmentats i per cap d'ells no podreu escatir si la nau es mou o està quieta [...]»

i en uns termes més actuals:

Per mitjà d'experiments de mecànica no podrem posar de manifest l'estat de repòs o de moviment uniforme del laboratori.

Tanmateix l'exemple següent sembla contradir aquest principi. Suposem que deixem caure un objecte des d'un tren que viatja a velocitat constant respecte al terra. Des del tren veurem que cau a sota nostre, amb una trajectòria rectilínia, mentre que un observador fix a la via veurà que descriu una paràbola. Aparentment les «lleis del moviment» de la pedra són diferents en els dos sistemes inercials, el lligat a la via i el lligat al tren. Però si hi pensem una mica més ens adonem que no hi ha aquesta contradicció. La descripció completa de l'experiment és, segons el tren: «una pedra deixada en repòs cau verticalment», i segons la via: «una pedra projectada horitzontalment cau seguint una paràbola». És més, si la formulem en termes de l'acceleració, la llei és la mateixa en tots dos casos, solament canvien les condicions inicials, que són diferents en els dos sistemes de referència inercials.

Per poder comparar les lleis de la física expressades en diferents sistemes de referència ens cal saber com es transformen les magnituds físiques en passar de l'un a l'altre. En particular, les coordenades d'espai i de temps, però també la massa, la càrrega elèctrica, les forces, els camps, etc.

Aquestes lleis de transformació són el resultat d'hipòtesis basades en l'evidència empírica.⁵ En el cas de les coordenades d'espai i de temps, les lleis de transformació se segueixen de les propietats geomètriques que hem suposat a la secció (1.1).

1.2.1 Les transformacions de Galileu

Són les transformacions que a la mecànica newtoniana relacionen les coordenades i el temps, (x_1, x_2, x_3, t) i (x'_1, x'_2, x'_3, t') , segons dos sistemes de coordenades inercials, \mathcal{K} i \mathcal{K}' , respectivament.

⁴GALILEI, Galileo, *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolomaico y copernicano*, Círculo de Lectores (Barcelona, 1997).

⁵El creixement de l'experiència acumulada pot fer variar aquesta *evidència empírica* i eventualment obligar-nos a variar algunes d'aquestes hipòtesis junt amb les lleis de transformació que se'n deriven, com veurem en el capítol 2.

Com que el temps de la mecànica newtoniana és absolut, si suposem que els rellotges de \mathcal{K} i \mathcal{K}' són idèntics —bateguen al mateix ritme— la relació de transformació ha de ser:

$$t' = t - t_0. \quad (1.3)$$

que només permet un canvi en l'origen de temps (t_0 és el que indica el rellotge de \mathcal{K} quan el de \mathcal{K}' indica 0).

Per a les coordenades cartesianes d'espai, suposarem que \mathcal{K} i \mathcal{K}' han escollit eixos amb vectors directores ortogonals unitaris $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ i $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$, respectivament, no necessàriament paral·lels, i han escollit els orígens de coordenades coincidents quan $t = 0$.

El lloc P' de l'espai de referència de \mathcal{K}' caracteritzat per les coordenades (x'_1, x'_2, x'_3) defineix amb O' el vector

$$\overrightarrow{O'P'} \equiv \vec{x}' = x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3.$$

Els components són: $x'_i = \hat{e}'_i \cdot \vec{x}'$.

En qualsevol instant els llocs de l'espai de referència de \mathcal{K}' estan superposats amb els llocs de l'espai de \mathcal{K} . En l'instant $t = 0$, O coincideix amb O' i P amb P' , de manera que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$, mentre que en l'instant t el lloc P' coincideix amb un altre lloc Q de l'espai de \mathcal{K} . Com que l'espai \mathcal{K}' es mou rígidament en bloc a velocitat \vec{V} respecte a \mathcal{K} , $\overrightarrow{PQ} = t \vec{V}$, i de la igualtat $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ en resulta

$$\overrightarrow{O'P'} + t \vec{V} = \overrightarrow{OQ}. \quad (1.4)$$

Un esdeveniment que s'ha produït en el lloc Q de l'espai de \mathcal{K} tindrà unes coordenades x_i , $i = 1, 2, 3$, tals que: $\overrightarrow{OQ} \equiv \vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$. Per saber-ne les coordenades segons \mathcal{K}' , usarem (1.4) i tindrem:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V} t \quad (1.5)$$

i també:

$$x'_j = \hat{e}'_j \cdot \vec{x}' = \sum_{i=1}^3 R_{ji} (x_i - V_i t),$$

on $R_{ji} = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$, és la matriu ortogonal⁶ que relaciona els triedres ortonormals dels dos sistemes de referència.

Si a més permetem que els orígens de coordenades de \mathcal{K} i \mathcal{K}' no coincideixin en $t = 0$, obtenim la transformació de Galileu més general:

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 R_{ji} (x_i - V_i t - b_i), \quad t' = t - t_0, \quad (1.6)$$

⁶Les transformacions ortogonals són les que conserven l'expressió pitagòrica (1.1) per a la distància euclidiana. Aquí ens limitarem a les rotacions, que són aquelles que tenen determinant igual a 1.

on b_i són les coordenades segons \mathcal{K} de l'origen de coordenades O' de \mathcal{K}' en $t = 0$.

El conjunt d'aquestes lleis de transformació constitueixen el que anomenem *grup de Galileu*. Aquest grup deixa invariant la distància euclidiana (1.1) i els intervals de temps per separat.

Tornem ara a la transformació (1.5) i suposem que $\vec{x}(t)$ és l'equació de la trajectòria d'una massa puntual m segons \mathcal{K} . La trajectòria segons \mathcal{K}' serà: $\vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{V}t$. Si derivem respecte a $t = t'$ obtenim la *lei d'addició de velocitats de Galileu*:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad (1.7)$$

on \vec{v} i \vec{v}' representen les velocitats de la massa puntual en els sistemes de referència \mathcal{K} i \mathcal{K}' , respectivament.

Com a conseqüència d'aquesta llei d'addició, les interaccions invariants per les transformacions de Galileu s'han de transmetre instantàniament, és a dir, amb una velocitat infinita, ja que d'acord amb (1.7) qualsevol velocitat de transmissió finita canvia en passar d'un sistema inercial a un altre.

1.2.2 Invariància galileiana de la mecànica de Newton

Vegem ara com es transforma la segona llei de Newton sota (1.5). En un cert sistema inercial \mathcal{K} tenim:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Si tornem a derivar (1.7), tenim:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2}.$$

Pel que fa a la massa inert, m , a la mecànica newtoniana és la *quantitat de matèria*, mentre que \vec{F} és la força resultant de les accions d'altres cossos sobre la massa puntual considerada. Sembla doncs plausible suposar que ni l'una ni l'altra depenen del sistema de referència que descriu el moviment i les prendrem invariants:

$$m = m', \quad \vec{F} = \vec{F}'. \quad (1.9)$$

D'acord amb aquestes consideracions, en el sistema de referència inercial \mathcal{K}' , (1.8) es converteix en:

$$\vec{F}' = m' \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2}.$$

Les equacions de la mecànica de Newton són les mateixes en \mathcal{K} i en \mathcal{K}' , i pel que fa al domini de la mecànica tots els sistemes de referència inercials són indistingibles.

La notació emprada amb vectors i escalars ja implica el bon comportament sota rotacions i és fàcil comprovar que sota translacions d'espai i de temps l'equació (1.8) no canvia.

El principi de relativitat també pot enunciar-se dient que les equacions fonamentals de la mecànica són invariants sota les transformacions de Galileu. Aquesta invariància deixa de valer per a sistemes de referència més generals, els anomenats *sistemes rígids*, basats en un triedre rígid de referència, però animats de moviments de translació i rotació arbitraris relativament a un sistema de referència inercial. Tanmateix, per a aquesta classe més àmplia de sistemes la llei (1.8) manté la mateixa forma si hi afegim al costat esquerre les forces d'inèrcia corresponents: la força centrífuga, la de Coriolis i la d'arrossegament.

1.2.3 Transformacions de Galileu i electromagnetisme

La teoria de Maxwell de l'electromagnetisme es concreta en les equacions de Maxwell, que, en el buit i en el sistema d'unitats internacional (SI), s'escriuen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.11)$$

on $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{C}^{-2} \text{kg m}$ i $\epsilon_0 = 1/(36\pi 10^9) \text{C}^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{s}^2$.

Hem separat el primer parell d'equacions (homogènies) del segon parell (inhomogènies) perquè, com ja veurem en el capítol 8, tenen papers diferents i els comportaments sota canvis de sistemes de referència també són diferenciats (vegeu l'exemple 1.1).

En ser les variables \vec{E} i \vec{B} vectorials i les dades també vectorials, \vec{j} , o escalars, ρ , i en ser els operadors vectorials, com ara $\vec{\nabla}$, o escalar, ∂_t , i aparèixer a més combinats com a productes escalars o vectorials, és immediat comprovar que aquestes equacions són invariants sota els canvis de coordenades cartesianes en un mateix sistema de referència:

$$x'_i = \sum_{l=1}^3 R_{il} x_l + C'_i, \quad t' = t + t'_0$$

amb el benentès que les variables es transformin d'acord amb:

$$\begin{aligned} E'_i(\vec{x}', t') &= \sum_{l=1}^3 R_{i'l} E_l(\vec{x}, t), & B'_i(\vec{x}', t') &= \sum_{l=1}^3 R_{i'l} B_l(\vec{x}, t), \\ j'_i(\vec{x}', t') &= \sum_{l=1}^3 R_{i'l} j_l(\vec{x}, t), & \rho'(\vec{x}', t') &= \rho(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Tanmateix les equacions de Maxwell (1.10) i (1.11) no són invariants sota canvis de sistema de referència inercial, com es demostra en l'exemple 1.1.

Tampoc no és invariant sota transformacions de Galileu l'equació de propagació de les ones electromagnètiques en el buit, en absència de càrregues i corrents:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{B} = 0. \quad (1.12)$$

D'acord amb aquestes equacions, les solucions de les equacions de Maxwell lliures en el buit són ondulatòries i es propaguen amb una velocitat $(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$, la mateixa en totes les direccions. Aquesta *velocitat crítica* de l'electromagnetisme té a veure amb la relació entre les unitats electrostàtica i electromagnètica de càrrega elèctrica i, amb els valors en el SI que hem donat més amunt, val $3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Weber i Kolrausch (1856) van determinar aquesta constant mesurant una mateixa càrrega per mètodes electrostàtics —pel potencial d'una ampolla de Leyden— i per mitjans electromagnètics —per l'oscil·lació produïda per la descàrrega resultant a través del quadre d'un galvanòmetre. El valor obtingut per a aquesta velocitat crítica va ser de $310.740 \text{ km s}^{-1}$. La semblança entre aquest valor i el conegut a l'època per a la velocitat de la llum en el buit van induir Maxwell a considerar que la llum és un fenomen electromagnètic ondulatori.

Exemple 1.1 Equacions de Maxwell i grup de Galileu

Haurem de veure primer com es transformen els camps \vec{E} i \vec{B} sota una transformació de Galileu (1.5). Si tenim en compte (1.7), la llei de força de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, l'expressió anàloga per a \vec{F}' , i el fet que $\vec{F} = \vec{F}'$ i $q = q'$, arribem a:

$$\vec{B} = \vec{B}', \quad \vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}'. \quad (1.13)$$

De la transformació (1.5) i d'aplicar la regla de la cadena obtenim que els operadors es transformen d'acord amb:

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}', \quad \partial_t = \partial_{t'} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla}'. \quad (1.14)$$

Una llei de transformació plausible per a les densitats de càrrega i corrent seria:

$$\rho = \rho', \quad \vec{j} = \vec{j}' + \rho' \vec{V}. \quad (1.15)$$

La primera és conseqüència del fet que tant la càrrega elèctrica com l'element de volum no canvien en passar d'un sistema de referència a l'altre, mentre que la segona té compte del corrent de deriva que s'aprecia des de \mathcal{K} en veure una densitat de càrrega ρ' que es mou en bloc a velocitat \vec{V} .

Si substituïm (1.13), (1.14) i (1.15) en (1.10) i (1.11), obtenim que el primer parell és invariant mentre que el segon no ho és.

Del punt de vista de Maxwell no ha de ser sorprenent que les equacions de l'electromagnetisme no siguin invariants sota transformacions de Galileu. En efecte, per a Maxwell \vec{E} i \vec{B} representen estats de moviment local d'un medi, l'èter *electromagnètic*, i no és estrany que en el sistema de referència inercial \mathcal{K}_0 en què l'èter és estacionari les equacions de l'electromagnetisme siguin més senzilles. En qualsevol altre sistema de referència hauríem de tenir en compte els efectes del *vent d'èter*. En particular, aquests efectes haurien de manifestar-se en un laboratori terrestre.

1.3 Electrodinàmica dels cossos en moviment

L'electrodinàmica de Maxwell va ser completada per Hertz i Lorentz seguint camins totalment diferents per tal de tenir en compte el moviment dels cossos.

L'objectiu de la teoria de Hertz és que el principi de relativitat de la mecànica es pugui estendre d'alguna manera a l'electrodinàmica de Maxwell. Així demana que les equacions conservin la forma en aplicar una transformació de Galileu. Per això substitueix la derivada parcial respecte al temps per una derivada temporal seguint el moviment del cos —un anàleg a les equacions de Lagrange dels medis continus— d'aquesta manera quan el cos no es mou es recuperen les equacions de Maxwell.

Aquests canvis no afecten ni les equacions constitutives ni les equacions en què apareixen les divergències de \vec{B} i \vec{D} , però sí les equacions en què surten els rotacionals dels camps, que en l'electrodinàmica de Hertz són (en el buit):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} - \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 (\partial_t \vec{E} + \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{\nabla} \times (\vec{E} \times \vec{v})) &= \mu_0 \vec{j}.\end{aligned}$$

Lorentz segueix el camí invers; busca les transformacions que deixen invariant l'electrodinàmica de Maxwell davant la impossibilitat experimental manifesta de detectar efectes electromagnètics en sistemes que es mouen a velocitat constant respecte a l'èter. Primer troba unes transformacions aproximades a primer ordre en v/c , més tard a segon ordre i finalment, l'any 1904, troba les lleis de transformació exactes. En aquestes lleis el temps es transforma d'una manera que depèn del punt. Això era contrari a la noció que a l'època es tenia del temps absolut. Per això, la variable temps que apareix en les seves equacions l'anomena *temps local* i, segons Lorentz, només és un artefacte matemàtic. Pel que fa a la transformació de les coordenades d'espai, ha de transformar les longituds de manera diferent segons la direcció. Les longituds paral·leles a la direcció del moviment sofreixen una contracció (seguint un suggeriment de FitzGerald) que es justifica per la modificació de les forces electromagnètiques que en definitiva són les responsables de mantenir l'estructura dels sòlids.

La intenció d'aquestes teories era explicar els resultats negatius de diversos intents de detectar els efectes electrodinàmics o òptics associats al moviment d'un laboratori terrestre respecte a l'èter.

En qualsevol cas l'efecte esperat era petit, per tal com depenia del quocient v/c o del seu quadrat. Així, es parla d'experiments de primer ordre o de segon ordre. A continuació n'esmentarem alguns.

1.3.1 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v/c

L'experiment de Wilson (1905) Una làmina dielèctrica i no magnètica es mou amb velocitat v entre les plaques d'un condensador, immers en un camp magnètic constant H paral·lel al condensador i perpendicular a v . S'observa una

sobrecàrrega de les plaques de densitat superficial $(\epsilon - 1)Hv/c$. Aquest resultat abona la teoria de Lorentz contra la de Hertz, segons la qual la sobrecàrrega ha de ser $\epsilon Hv/c$.

El dispositiu experimental de Wilson consisteix en un condensador cilíndric d'ebonita, que gira al voltant del seu eix, en un camp magnètic paral·lel a l'eix del cilindre.

L'any 1901 Blondlot va intentar un experiment semblant amb aire com a dielèctric. En ser l'efecte proporcional a $\epsilon - 1$, la sobrecàrrega no era prou gran per ser observable.

L'experiment de Röntgen (1885) En electricitat tenim càrregues reals i càrregues associades a la polarització d'un dielèctric. Sobre les cares d'una làmina dielèctrica entre les plaques d'un condensador pla hi apareix una distribució superficial de càrrega $\pm(\epsilon - 1)\epsilon_0 E$ (on E és el camp elèctric). En els experiments de Röntgen i d'Eichenwald aquesta làmina dielèctrica té la forma de disc i, en girar, el producte de la càrrega dielèctrica per la velocitat dóna un corrent de conducció.

1.3.2 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v^2/c^2

L'experiment de Trouton i Noble (1903) Segons la teoria de Lorentz, un condensador carregat que es mou respecte a l'èter amb velocitat v ha d'experimentar un parell de moment proporcional a v^2/c^2 . A proposta de FitzGerald (1901), Trouton i Noble (1903) van intentar mesurar aquest parell sobre un condensador suspès d'un fil elàstic en un laboratori terrestre. El resultat va ser negatiu.

Un esquema molt simplificat de l'experiment consistiria en el següent (vegeu la figura).

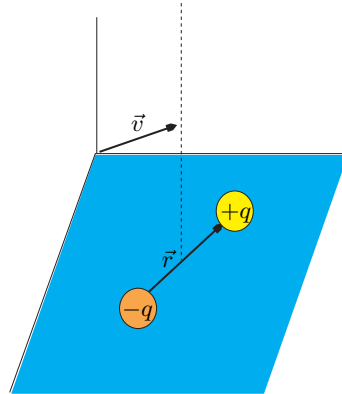
Representem les plaques del condensador per dues càrregues puntuals $\pm q$, separades una distància r , que es mouen en bloc respecte a l'èter amb velocitat \vec{v} , de manera que estan en repòs relatiu. La força sobre la càrrega positiva serà: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, sent \vec{E} el camp coulombià i

$$\vec{B} = \frac{-q\mu_0}{4\pi r^3} \vec{v} \times \vec{r},$$

el camp magnètic, creats per la càrrega negativa.

Sobre la càrrega negativa hi actua una força igual i de sentit contrari. El moment del parell de forces és doncs:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -q(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{B},$$



que en magnitud val:

$$M = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{v^2}{c^2 r} \sin 2\theta, \quad (1.16)$$

sent θ l'angle format per \vec{r} (la direcció normal a les plaques del condensador) i \vec{v} (la direcció del moviment respecte a l'èter).

En l'experiment, un condensador era suspès d'un fil elàstic de manera que, per a la direcció esperada de \vec{v} , $\theta = 45^\circ$, si $M \neq 0$, el fil experimenta una torsió de manera que s'arriba a una posició d'equilibri en què el moment del fil equilibra M . Com que l'angle θ varia contínuament per efecte de la rotació de la Terra, la posició d'equilibri haurà de variar al llarg del dia. No es van observar els canvis esperats.

1.4 Òptica. La velocitat de la llum

Abans d'entrar a estudiar els efectes del moviment en el domini de l'òptica farem un breu repàs de les determinacions de la velocitat de la llum. Això ens ajudarà a comprendre els intents d'estudiar-ne les variacions.

1.4.1 La velocitat de la llum en el buit

L'estimació de Rømer Era conegut que els eclipsis d'un dels satèl·lits de Júpiter, Ió, es retarden o s'avancen segons l'època de l'any. Rømer va suggerir que aquest efecte pot ser degut al fet que la llum es propaga a velocitat finita i que la Terra, en el seu moviment de translació anual, s'apropa o s'allunya de Júpiter. L'any de Júpiter és d'uns 12 anys terrestres, podem suposar doncs que en un any

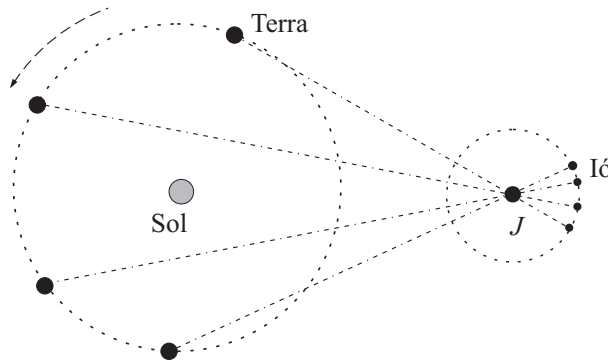


Figura 1.1. Els eclipsis d'Ió i les observacions des de la Terra

Júpiter pràcticament no es mou de lloc. Com que el radi de l'eclíptica és petit comparat amb la distància de la Terra a Júpiter, podem suposar també que els

eclipsis d'Ió sempre es produeixen en passar aquest pel mateix lloc i, per tant, a intervals de temps regulars, $\tau \approx 42$ h. Ara bé, entre dos eclipsis consecutius, la Terra s'haurà mogut i el retard amb què arribarà la informació que s'ha produït l'eclipsi serà diferent per a l'un i l'altre.

El temps necessari per observar n eclipsis des de la Terra és:

$$t_n = n\tau + (l_n - l_0)/c,$$

on l_n és la distància de la Terra a Júpiter en observar-se l' n -èsim eclipsi. Si en un any sencer es veuen N eclipsis, tindrem que, per haver passat un any $l_N = l_0$ i, per tant, $\tau = t_N/N$. I si durant mig any comptem M eclipsis,

$$t_M = M\tau + (l_M - l_0)/c.$$

Rømer (1676) mesurà un retard de la llum en travessar el radi de l'eclíptica d'uns 10 minuts.

Si comptem els eclipsis que es produeixen en mig any, la Terra haurà passat de la posició més propera a Júpiter a la més llunyana i $l_M - l_0$ serà el diàmetre de l'eclíptica. Tindrem, doncs:

$$c = \frac{l_M - l_0}{t_M - M\tau}.$$

La mesura de Fizeau Fizeau determinà per primera vegada la velocitat de la llum en el laboratori mitjançant el dispositiu de la figura 1.4.1.

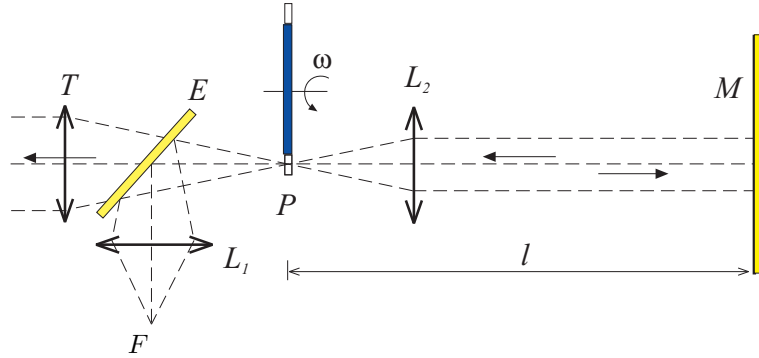


Figura 1.2. Mesura de la velocitat de la llum per Fizeau

Per mitjà de la lent L_1 i la làmina semiargentada E , la llum produïda en la font F es concentra en P , a la vora de la roda dentada, passa, es reflecteix en el mirall M i torna. Si en tornar no troba una dent i passa, és recollida pel telescopi T . La roda dentada gira a una velocitat angular ω que pot variar-se de forma contínua.

La llum triga un temps $\Delta t = 2l/c$ en anar de la roda dentada al mirall i tornar. Només passarà i arribarà al telescopi si primer troba forat i en tornar també, és a dir, si en aquest temps la roda ha girat un nombre sencer de dents:

$$\omega \Delta t = n2\pi/N,$$

on N és el nombre de forats de la roda dentada. Així, doncs, només passarà llum quan:

$$\omega = n\omega_1 \quad \text{amb} \quad \omega_1 \equiv \frac{\pi c}{Nl},$$

és a dir, per a velocitats angulars ω múltiples d'una velocitat *fonamental* ω_1 . Això ens permet de mesurar ω_1 , i per tant determinar c a partir de la relació:

$$c = \frac{Nl\omega_1}{\pi}.$$

Cal remarcar, d'una banda, que el resultat de la mesura de Fizeau és una estimació de la velocitat mitjana de la llum en un viatge d'anada i tornada. Si tinguéssim raons per fer la hipòtesi que la velocitat de la llum és la mateixa independentment de la direcció, llavors aquest experiment ens donaria el seu valor.

Respecte a què? A conseqüència de la llei d'addició de velocitats (1.7), la hipòtesi anterior només pot ser vàlida per a un sistema de referència i, per tant, cal demanar-se també: respecte a què és la velocitat obtinguda? Les dues teories de la naturalesa de la llum donen respostes diferents. Segons la teoria corpuscular (Newton), es tracta d'una velocitat de transmissió respecte al cos emissor, mentre que segons la teoria ondulatoria és una velocitat de propagació relativa al medi suport, l'èter.

Deixant de banda que, a mitjan segle XIX, després dels arguments aportats pels experiments d'interferències de Young i d'altres, la teoria corpuscular ja era poc sostenible, resulta que si la velocitat de propagació de la llum respecte a l'emissor fos la mateixa en qualsevol direcció, s'hauria d'observar efectes estranys en els sistemes dobles d'estels llunyans. Suposem un sistema format per dos estels

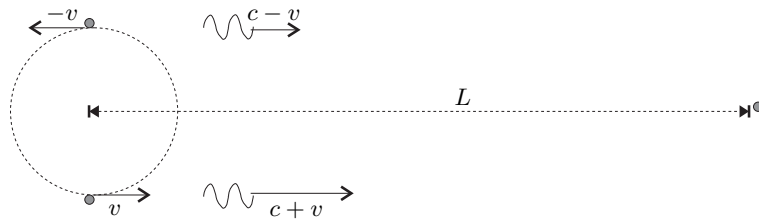


Figura 1.3. Teoria de l'emissor per a un sistema doble d'estels

de masses semblants que orbiten al voltant del seu centre de masses, amb una

velocitat v ; la velocitat de la llum procedent del component que s'apropa seria $v + c$ i la del que s'allunya $c - v$. Així, el retard amb què des de la Terra es veurien les dues posicions simultànies seria diferent:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c - v} - \frac{L}{c + v} = \frac{2Lv}{c^2 - v^2} \approx \frac{2Lv}{c^2}.$$

Si el sistema és molt lluny, aquest retard pot ser comparable al període orbital dels estels, i podria donar-se que veiéssim un estel simultàniament en dos llocs diferents i altres fenòmens que no han estat observats.

1.4.2 Òptica. Efectes d'ordre v/c

Un dels fenòmens en què es manifesta el moviment relatiu de la font emissora i del receptor és l'efecte Doppler: la freqüència de la llum emesa (o qualsevol altre fenomen ondulatori) és diferent de la freqüència de la llum rebuda. Una explicació elemental és que si el receptor s'acosta a la font rep més ones per unitat de temps perquè «va a trobar-les», mentre que si se n'allunya en rep menys perquè «les defuig». La fórmula clàssica d'aquest efecte, que estudiarem en detall més endavant, és:

$$\nu_R = \nu_E \frac{1 - v_R/c}{1 - v_E/c},$$

on ν_R és la freqüència de l'ona rebuda, ν_E , la de l'emesa i v_E i v_R les projeccions sobre la direcció de propagació de la velocitat de la font i del receptor relatives a l'èter. Si v_E és petita comparada amb c , val l'aproximació a primer ordre:

$$\nu_R \approx \nu_E (1 + v/c),$$

on $v = v_E - v_R$ és el component de la velocitat relativa en la direcció de propagació.

L'aberració estel·lar Un altre fenomen interessant és el conegut com a *aberració estel·lar*. Va ser descobert per primer cop per l'astrònom J. Bradley (1727) i consisteix en un moviment el·líptic de semieix major $21''$ i periodicitat anual que presenten tots els estels. Aquí en presentarem una explicació senzilla, basada en la teoria corpuscular de la llum, però també pot explicar-se en el marc de la teoria ondulatoria, sempre que l'èter no es vegi afectat pel moviment de la Terra.

Si observem l'estel E des de la Terra, el telescopi es mou respecte a l'estel amb una velocitat \vec{v} , la del moviment de la Terra. Considerem un corpuscle de llum procedent de E que va al telescopi T amb una velocitat \vec{c} , segons es representa en la figura 1.4. Si orientem el telescopi en la direcció de \vec{c} , la llum no arriba a l'ocular perquè en el temps que la llum es mou telescopi avall aquest s'ha desplaçat i la llum xoca contra les parets. Així doncs, perquè la llum arribi a l'ocular hem d'orientar el telescopi en la direcció de

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}, \quad (1.17)$$

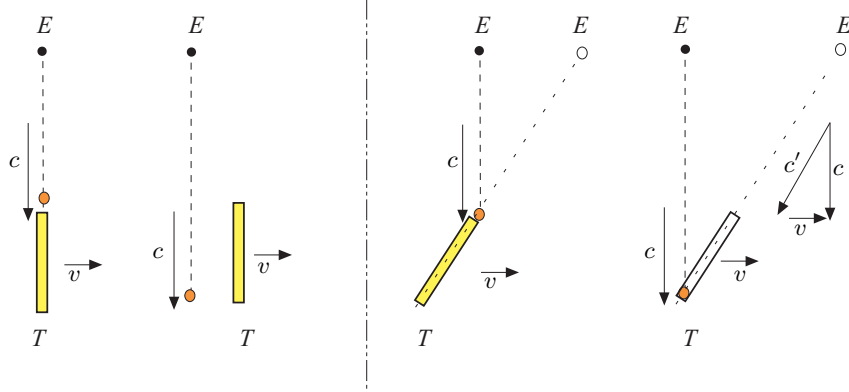


Figura 1.4. Orientació del telescopi per poder observar l'estel des de la Terra

i la posició aparent de l'estel serà la donada pel vector unitari $-\hat{c}'$. Si diem α' a l'angle en què es veu l'estel des de la Terra en moviment i α el que es mesuraria en un sistema de referència en repòs en el centre de masses del sistema solar, la relació de suma (1.17) dóna:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha + v}. \quad (1.18)$$

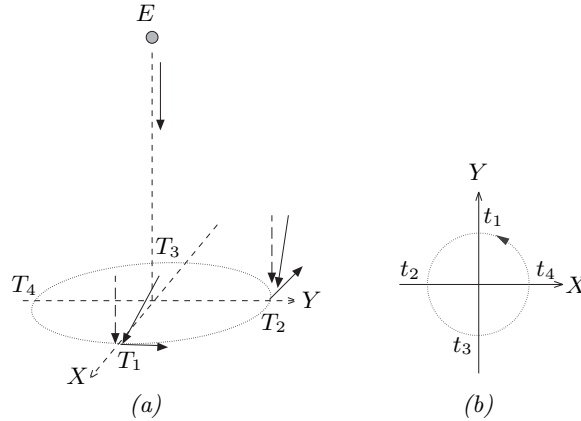


Figura 1.5. (a) Esquema del moviment anual de la Terra i l'observació d'un estel en la direcció perpendicular al pla de l'eclíptica. (b) La successió de posicions aparents: quan la Terra és en la posició 1, el telescopi ha d'apuntar lleugerament endavant i això dóna una posició aparent en la direcció positiva de l'eix Y

Si observem un estel que és en la direcció ortogonal al pla de l'eclíptica i infinitament lluny, ens trobarem amb la situació descrita a la figura 1.5. La figura

1.5(a) representa les diverses posicions de la Terra sobre l'eclíptica, que suposem circular. A la figura 1.5(b) hi representem les posicions aparents de l'estel E . Així, el punt O correspondria a la posició d'un estel que es veïés just sobre la vertical de l'eclíptica; els punts t_i , $i = 1, 2, 3, 4$ són les posicions aparents de l'estel E quan la Terra és en els llocs T_i , $i = 1, 2, 3, 4$ de l'eclíptica. En aquest cas la posició aparent de l'estel descriu una circumferència de radi v/c .

Si observem un estel en el pla de l'eclíptica tindrem la situació descrita a la figura 1.6, que cal llegir d'una forma anàloga a la figura 1.5. La trajectòria aparent de l'estel és un moviment oscil·latori d'amplitud v/c .

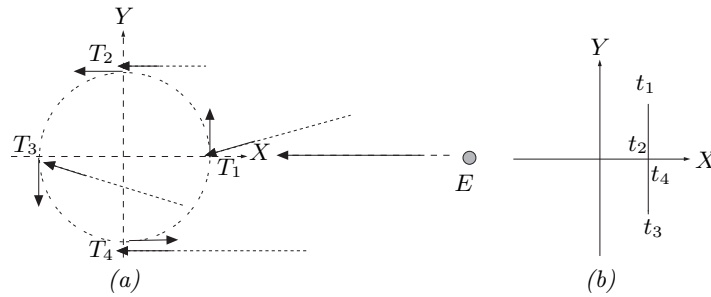


Figura 1.6. Aberració per a un estel en el pla de l'eclíptica. (a) Posicions de la Terra en el seu moviment sobre l'eclíptica. (b) La successió de posicions aparents, corresponents a les de la figura a), fa una oscil·lació

Per a estels en posicions intermèdies, la posició aparent descriu una el·lipse de semieix major v/c . Com que la velocitat orbital de la Terra és d'uns 30 km s^{-1} , aleshores $v/c \approx 10^{-4} \text{ rad} \approx 21''$.

No s'ha de confondre aquest moviment amb la paral·laxi, que és també un moviment aparent degut a la posició variable de la Terra sobre l'eclíptica i que disminueix amb la distància D a què es troba l'estel i és molt més petit, de l'ordre de R/D , on R és el radi de l'eclíptica. Per als estels més propers és de l'ordre de $0,1''$ d'arc. A més, la paral·laxi és avançada en fase $\pi/2$ respecte a l'aberració.

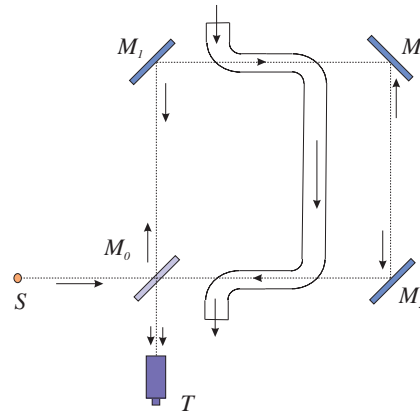
La velocitat de la llum en un medi que es mou La velocitat de la llum en un medi refringent d'índex de refracció n és c/n . En el marc de la teoria de propagació en l'èter, l'afirmació anterior té sentit si el medi està en repòs respecte a l'èter. Si el medi es mou amb velocitat v , hi ha diverses possibilitats. Si val la llei d'addició de velocitats, conseqüència del principi de relativitat de la mecànica, la velocitat de propagació de la llum respecte al laboratori serà $c/n \pm v$, segons si la considerem en el sentit del moviment del medi o en el contrari. (En termes de propagació en l'èter diríem que l'èter contingut en el medi és totalment arrossegat pel moviment d'aquest medi.)

Una altra possibilitat consisteix en el fet que l'èter sigui només parcialment arrossegat pel medi, de manera que la velocitat de propagació sigui $c/n \pm \alpha v$, segons el sentit sigui cap endavant o endarrere, on $0 \leq \alpha \leq 1$ és el coeficient

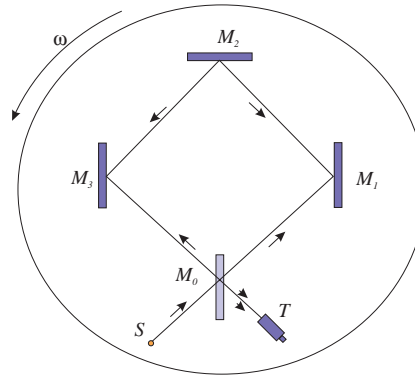
d'arrossegament. Fresnel (1824) va elaborar tota una argumentació teòrica per obtenir que $\alpha = 1 - 1/n^2$, si bé altres autors (Stokes) argumentaven que havia de valer 1.

L'experiment de Fizeau (1851) per determinar el coeficient d'arrossegament dóna la raó a Fresnel. Consisteix a comparar per interferometria els camins òptics de dues ones lluminoses, l'una que recorre el circuit de la figura en el sentit $M_0M_1M_2M_3M_0$ i l'altra, en el sentit $M_0M_3M_2M_1M_0$.

En tots dos casos hi ha trams en què la llum es propaga en el si d'un medi (aigua) en moviment: en el primer cas la propagació i la velocitat de l'aigua van en el mateix sentit, de manera que la velocitat de propagació és $c/n + \alpha v$, i en el segon van en sentit contrari i la velocitat de propagació és $c/n - \alpha v$. D'aquesta manera, el camí òptic és diferent per als dos trajectes i la diferència depèn de v . Comparant els patrons d'interferència per a l'aigua en repòs o amb l'aigua fluïnt a una velocitat v , es pot determinar el coeficient d'arrossegament α .



L'efecte Sagnac Consisteix en l'efecte del moviment de rotació del laboratori sobre la velocitat de propagació de la llum. El dispositiu de Sagnac (1914) consisteix en un disc que gira amb velocitat angular ω , amb tres miralls M_1 , M_2 i M_3 , i una làmina semiargenta M_0 , fixos en el disc. En arribar a M_0 la llum es divideix, una part recorre el circuit $M_0M_1M_2M_3M_0$, a favor del moviment de rotació, i l'altra, el circuit $M_0M_3M_2M_1M_0$, contra el moviment del disc. S'observa el patró d'interferència en el telescopi i es compara amb el que es té quan el disc no gira. S'observa un desplaçament de les franges d'interferència proporcional a la velocitat angular i a l'àrea delimitada pel circuit, d'acord amb les previsions teòriques.



Harres (1912) va realitzar un experiment semblant en què la llum era obligada a seguir el circuit tancat per mitjà d'un seguit de prismes. En aquest cas, la llum es propaga en un laboratori que gira i també en un medi que es mou. L'experiment de Harres és doncs una combinació dels experiments de Sagnac i de Fizeau.

1.4.3 Òptica d'ordre v^2/c^2 . L'experiment de Michelson

En el marc de la teoria electromagnètica i l'òptica de finals del segle XIX, el sistema de referència inercial estacionari en l'èter —el suport de les ones lluminoses— té un lloc privilegiat perquè, respecte a aquest sistema de referència, les ones electromagnètiques es propaguen amb la mateixa velocitat c en totes les direccions. Un laboratori terrestre es mou amb una certa velocitat, \vec{v} , respecte a l'èter⁷ i per tant la velocitat de la llum en aquest laboratori haurà de dependre de la direcció de propagació.

En efecte, d'acord amb la llei galileiana d'addició de velocitats, la velocitat de propagació de la llum en el laboratori terrestre serà: $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$, i si θ és l'angle que formen la direcció de propagació en el laboratori i la del moviment relatiu, tindrem:

$$\begin{aligned} c'(\theta) &= c \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} - \beta \cos \theta \right) \\ &\approx c \left(1 - \beta \cos \theta - \frac{\beta^2}{2} \sin^2 \theta + O(\beta^4) \right) \quad \text{amb } \beta \equiv v/c. \end{aligned} \quad (1.19)$$

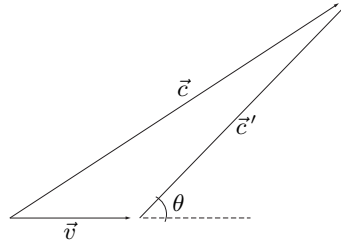


Figura 1.7. En un laboratori terrestre la velocitat de la llum depèn de la direcció θ

El mateix Maxwell s'adonà d'aquest efecte i del fet que les mesures terrestres de la velocitat de propagació de la llum donaven la velocitat mitjana sobre un camí d'anada i tornada. A conseqüència d'això, el terme de primer ordre en β es compensa i només queda l'efecte d'ordre β^2 . Si es pren la velocitat orbital de la Terra com a estimació de v , resulta $\beta^2 \approx 10^{-8}$ i l'efecte d'anisotropia (1.19), proporcional a β^2 , era massa petit per poder ser mesurat amb els instruments de l'època (finals de la dècada de 1870).

Gairebé per aquell temps Albert A. Michelson va desenvolupar un instrument d'alta precisió per comparar camins òptics, l'interferòmetre de Michelson, i va intentar aplicar-lo a mesurar els efectes del moviment de la Terra sobre la propagació de la llum. Aquest va ser l'objectiu dels experiments de Michelson (1881) i de Michelson i Morley (1887).

⁷Per bé que aquesta velocitat és variable, la seva variació és lenta i per a experiments de curta durada el laboratori es comportarà com un sistema de referència molt aproximadament inercial.

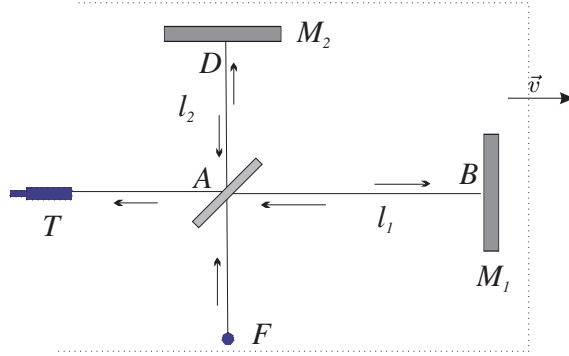


Figura 1.8. Esquema de l'interferòmetre de Michelson

L'interferòmetre de Michelson funciona de la manera següent. En arribar a la làmina semiargenta A , el feix de llum monocromàtica procedent de la font F es divideix en dos, un que segueix recte fins a reflectir-se en el mirall M_2 i un altre que surt en la direcció del mirall M_1 , on també es reflecteix. Els dos feixos de retorn travessen la làmina semiargenta i interfereixen en T , cosa que produeix una figura d'interferència que depèn de la diferència dels camins òptics respectius (o, equivalentment, dels temps de viatge).

Per fer-nos una idea de què podia mesurar aquest experiment suposarem que l'interferòmetre està orientat de la manera més favorable: que el braç AB , de longitud l_1 , és paral·lel a la direcció del moviment, mentre que l'altre braç, AD , de longitud l_2 , hi és perpendicular. Per al feix longitudinal, la velocitat de la llum en el camí AB ($\theta = 0$) és $c' = c - v$ i en el camí BA ($\theta = \pi$) és $c' = c + v$, de manera que el temps total emprat és:

$$t_1 = \frac{l_1}{(c - v)} + \frac{l_1}{(c + v)} = \frac{2l_1}{c(1 - \beta^2)}.$$

Per al feix transversal ($\theta = \pm\pi/2$), la velocitat de la llum és la mateixa a l'anada i a la tornada, $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$, i el temps total emprat és:

$$t_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

La posició dels anells d'interferència depèn de la diferència de camins òptics d'acord amb:

$$\frac{c\Delta t}{\lambda} = \frac{c(t_2 - t_1)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{l_1}{(1 - \beta^2)} \right),$$

on λ és la longitud d'ona de la llum monocromàtica emprada. Com veiem, l'efecte és d'ordre β^2 . A més, el resultat també depèn de la longitud dels braços i no

hi ha cap manera d'assegurar que els braços de l'interferòmetre siguin iguals, o bé mesurar-los amb la precisió que demana aquest experiment. Per evitar aquest problema, Michelson va girar 90° tot l'aparell. D'aquesta manera el braç AB passa a tenir una posició transversal, i el temps emprat per la llum en el viatge de A a B i tornar és ara

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}},$$

mentre que l'emprat en el viatge de A a D i tornada és

$$t'_2 = \frac{2l_2}{c(1-\beta^2)}.$$

La diferència de camins òptics haurà canviat i ara la posició dels anells d'interferència vindrà donada per:

$$\frac{c\Delta t'}{\lambda} = \frac{c(t'_2 - t'_1)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{l_2}{(1-\beta^2)} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

La diferència entre els dos efectes implica que les franges del segon espectre estan desplaçades respecte de les del primer en:

$$\begin{aligned} \frac{c(\Delta t' - \Delta t)}{\lambda} &= \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \left(\frac{1}{(1-\beta^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &\approx \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \left(1 + \beta^2 - 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \beta^2. \end{aligned}$$

Aquesta quantitat ens dona el desplaçament del segon espectre respecte del primer, en nombre de franges.

Si prenem el moviment de translació de la Terra com una estimació de la seva velocitat respecte a l'èter ($v \approx 3 \cdot 10^6 \text{ cm s}^{-1}$),⁸ per a un interferòmetre amb uns braços d'11 m de longitud i per a la llum groga del sodi ($\lambda = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$), resulta un desplaçament esperat de 0,37 franges. L'efecte observat va ser 10 cops més petit que l'esperat. Dins del marge d'error experimental era com si la Terra no es mogués respecte a l'èter.

Entre les possibles explicacions que es van considerar per interpretar aquest resultat negatiu cal destacar-ne les següents:

- l'èter és arrossegat totalment pel laboratori terrestre, de la mateixa manera que l'atmosfera és arrossegada per la Terra,
- l'anomenada *contracció de FitzGerald-Lorentz*, segons la qual tots els objectes es contrauen en la direcció del seu moviment relatiu a l'èter en un factor $\sqrt{1-v^2/c^2}$, mentre que en les direccions transversals no es deformen, o

⁸La velocitat de rotació és més petita, $\omega R/c \approx 0,5 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$.

- la llum es propaga amb la mateixa velocitat, c , en totes les direccions, però respecte a la font emissora (com correspondria a les teories d'emissió esmentades més amunt).

Totes tres explicacions tenen inconvenients. Si fos certa la primera, llavors caldria trobar una justificació per a l'aberració estel·lar. En efecte, en un marc ondulatori aquest fenomen s'explica pel moviment del telescopi respecte del medi en què es propaga l'ona lluminosa procedent de l'estel. Si el telescopi arrossegues totalment l'èter que conté no hi hauria aberració estel·lar.

La segona explicació és una suposició *ad hoc* que comporta la complicació d'explicar quines forces interatòmiques són les responsables d'aquesta deformació dels sòlids cristallins. De fet, Lorentz la va adoptar per obtenir les lleis de transformació de coordenades en la seva teoria de l'electró.

La tercera explicació implicaria, com ja hem comentat més amunt, que s'haurien d'observar imatges estranyes en els sistemes estel·lars dobles llunyans, i no és el cas. Si bé aquesta llei de propagació podria semblar descartable per ser més pròpia d'una teoria corpuscular de la llum que d'una teoria ondulatoria, a finals del segle XIX hi havia alguna teoria electromagnètica, com ara la teoria d'emissió de Riesz, que l'abonaven. Del punt de vista experimental, l'argument tampoc no és tan immediat a causa del que s'anomena *fenomen d'extinció*. La llum que ens arriba d'un estel no viatja en el buit sinó en un medi molt enrarit, de manera que la llum que rebem és la superposició d'una ona primària originada en la font i una de secundària radiada per les càrregues del medi que són accelerades per l'acció de l'ona primària. L'ona primària s'amorteix amb la distància —d'acord amb un paràmetre que s'anomena *longitud d'extinció* i que és més gran com més enrarit és el medi— i pràcticament no ens arriba. En l'observació dels dos components d'un sistema doble, només ens arriben l'ona secundària de cada estel, que s'han originat en el medi interestel·lar i que, segons les teories d'emissió, es mourien a velocitat c respecte d'aquest medi.

Cap d'aquests intents d'explicar el resultat negatiu és satisfactori. En el proper capítol veurem com la teoria de la relativitat especial resol aquest problema.

Problemes

- 1.1 Un avió es mou a 900 km/h respecte a l'aire en repòs des d'un punt A a un punt B distants 900 km i torna. Compareu el temps de vol d'aquest trajecte i el que trigaria quan el vent bufa a 100 km/h en la direcció perpendicular al trajecte AB . Feu el mateix càlcul quan la velocitat del vent és paral·lela al trajecte.

- 1.2 Demostreu que l'equació d'ona per a una funció escalar $\phi(t, \vec{x})$,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \vec{x}) = \vec{\nabla}^2 \phi(t, \vec{x})$$

no és invariant sota una transformació de Galileu.

- 1.3 El parell de forces de l'equació (1.16) s'escriu $1/2 U_e (v/c)^2 \sin(2\theta)$ on U_e és l'energia electrostàtica de les dues càrregues oposades. Demostreu que per a un condensador l'efecte és el doble, és a dir no apareix el terme $1/2$ en la fórmula anterior.

Calculeu el parell de forces que actuaria sobre un condensador que està suspès formant un angle de 45° respecte al moment orbital de la Terra, $v \approx 30$ km/s. Amb unes plaques de 100 cm^2 separades 1 cm i carregades amb un potencial de 10 kV.

- 1.4 El període de la segona lluna de Júpiter, Europa, és de 3,55 dies. Quant val la discrepància màxima entre el període real i el temps observat des de la Terra entre dos eclipsis consecutius? Quin és el retard acumulat en el diàmetre de l'eclíptica, sense tenir en compte el moviment de Júpiter? La velocitat orbital de la Terra és de 30 km/s i el radi de l'òrbita és $1,49 \cdot 10^8$ km.

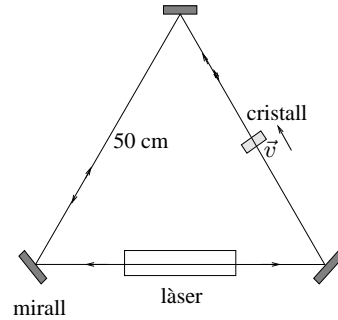
- 1.5 Una pluja cau verticalment a una velocitat de 10 m/s i nosaltres correm amb un paraigües a una velocitat de 5 m/s. Amb quin angle respecte a la vertical hem de col·locar el paraigües per no mullar-nos?

Des de la Terra observem una estrella que descriu una el·lipse de manera que el seu eix menor el veiem amb un angle de $36''$. Quin angle forma l'estrella amb l'eclíptica?

Si suposéssim que el moviment el·líptic anterior es deu al paral·laxi. A quina distància es trobaria l'estrella del Sol en anys llum?

- 1.6 Estudieu l'experiment de Fizeau per a l'aigua. Si tenim una longitud d'ona, $\lambda = 5700 \text{ Å}$, la longitud de cada tub és $6,15$ m, la velocitat del corrent d'aigua val $7,65$ m/s, i el desplaçament mitjà de les franges en invertir el flux és de $0,86 \pm 0,01$. Compareu el valor del coeficient d'arrossegament deduït dels valors anteriors amb el valor $1 - 1/n^2$ per a l'aigua, $n = 1,333$.

- 1.7 Per a una versió moderna de l'experiment de Fizeau es té un làser a un costat del triangle equilàter determinat pels miralls de la figura, també en un dels costats hi posem un cristall ($n = 1,5$) d'un gruix d'1 cm. El raig làser pot efectuar el camí tancat en qualsevol direcció. Si el cristall està en repòs ambdós camins coincideixen. Quina és la diferència de camins òptics si el cristall es mou a 1 cm/s?



- 1.8 Feu el càlcul per a un experiment de Michelson quan els braços no són ni paral·lels ni perpendiculars al moviment respecte a l'èter, és a dir, per al cas més general per al qual el braç l_1 forma abans de girar 90° un angle θ amb la direcció de moviment relatiu de la Terra respecte a l'èter (suposeu que aquesta direcció és en el pla de l'interferòmetre). Demostreu que el desplaçament en nombre de franges ve donat per

$$\frac{l_1 + l_2}{\lambda} \beta^2 \cos 2\theta.$$

Capítol 2

Els postulats de la teoria especial de la relativitat

Hem acabat el capítol anterior comentant els intents de conciliar el resultat negatiu de l'experiment de Michelson amb el principi de relativitat de Galileu i la llei d'addició de velocitats. Ara presentarem la solució proposada per Poincaré l'any 1904, que va estendre el principi de relativitat a tota la física i va concloure que «després d'una anàlisi detallada d'aquest fet hauria de sorgir una nova dinàmica caracteritzada pel fet que cap velocitat pot excedir a la de la llum», i per Einstein en un dels seus tres famosos articles de l'any 1905, en el qual desenvolupa la teoria especial de la relativitat.

2.1 El principi de relativitat de Poincaré i Einstein

El primer dels postulats de la teoria especial de la relativitat és pròpiament allò que anomenem un *principi de relativitat*, perquè estableix l'equivalència des del punt de vista de la física de tota una classe de sistemes de referència. Estén el principi de relativitat de Galileu, que està limitat a la mecànica, als altres dominis de l'òptica i l'electrodinàmica, que hi estaven en conflicte. L'enunciat d'Einstein d'aquests postulats diu textualment així:

«[...] les mateixes lleis de l'electrodinàmica i l'òptica valen en tots els sistemes de referència en què valen les lleis de la mecànica.»

Aquests sistemes de referència són els que anomenem *inercials*.¹

El *segon postulat* estableix que:

¹Aquesta denominació, força corrent en l'actualitat, és relativament recent (finals del segle XIX) i Von Laue l'atribueix a Lange.

«[...] la llum es propaga en el buit a una velocitat definida, c , independent de l'estat [de moviment] del cos emissor.»

És a dir, és la mateixa en tots els sistemes de referència inercials.

Aquest segon postulat dóna contingut al primer pel que fa a l'òptica. De fet, diu que la llei de l'òptica de la propagació isòtropa de la llum a la velocitat c val per a tots els sistemes de referència de la classe inercial.

Els dos postulats que acabem d'esmentar no són contradictoris per ells mateixos. Sí que ho són si suposem tàcitament la llei d'addició de velocitats (1.7). En efecte, si per a un sistema de referència inercial, \mathcal{K} , la velocitat de propagació de la llum en el buit $|\vec{c}|$ no depèn de la direcció, per a un altre \mathcal{K}' que es mogui amb velocitat \vec{v} respecte d'aquest, $|\vec{c}'| = |\vec{c} - \vec{v}|$ sí que hi dependrà, com ja hem analitzat en la secció (1.4.3).

Si es volen mantenir els dos postulats cal doncs renunciar a la llei d'addició de velocitats (1.7). Ara bé, aquesta llei és una conseqüència immediata de la transformació de Galileu (1.5), la qual resulta al seu torn d'aplicar conceptes aparentment «evidents per ells mateixos» de geometria euclidiana i de cinemàtica. S'imposa, per tant, revisar si algunes d'aquestes «veritats» que la cinemàtica galileiana dóna per establertes s'ajusten efectivament a la realitat.

2.2 Revisió de la cinemàtica

La cinemàtica s'ocupa de la descripció del moviment. Relaciona mesures de posició d'un mòbil en l'espai d'un sistema de referència amb mesures de temps realitzades amb rellotges estacionaris en aquest sistema.

Amb la idea de modificar la mecànica clàssica al mínim possible, mantindrem que l'espai d'un sistema de referència inercial es regeix per les lleis de la geometria euclidiana.

La descripció del moviment d'un cos respecte a un sistema de referència \mathcal{K} consisteix a dir que en l'instant t_1 passa pel lloc P_1 , en l'instant t_2 passa pel lloc P_2 , etc. Es tracta d'afirmacions del tipus: «el mòbil coincideix amb P_a quan el rellotge indica t_a , $a = 1, 2, 3, \dots$ », però, quin rellotge?

En la cinemàtica newtoniana, com que hi ha un *temps absolut* (del qual els rellotges donen una mesura aproximada que Newton anomenà *temps relatiu*) qualsevol rellotge va bé. De fet hi ha una esquematització corrent en la mecànica newtoniana en què un observador es representa per tres eixos coordenats i un rellotge en l'origen de coordenades. Però si tenim en compte que el senyal lluminós que ens informa del pas del mòbil pel lloc P_a es propaga a velocitat finita, el t_a (que s'anomena *temps òptic*) que indica aquest rellotge únic estarà afectat pel retard en la propagació del senyal. I encara pitjor, els diferents temps mesurats, t_1 , t_2 , etc., estaran afectats per retards diferents, perquè els senyals procedeixen de punts P_1 , P_2 , etc. que es troben a distàncies diferents de la seu «del rellotge». Així doncs, si volem emprar un sol rellotge per assignar els temps, haurem de

corregir les lectures t_a d'acord amb els retards corresponents. Aquesta operació de correcció pot resultar força complicada pel fet que el retard dependrà de la posició de la qual ha sortit el senyal.

Una altra possibilitat consistiria en el fet que cada observador disposés d'una infinitat de rellotges locals estacionaris, un a cada lloc del seu espai de referència, de manera que el rellotge local que es troba a P_a fos el que indiqués el temps t_a quan el mòbil hi passa. D'aquesta manera s'evitarien els problemes associats a la correcció dels retards, per bé que se'n crearien d'altres. En efecte, per poder concedir el mateix *significat* —la mateixa *fiabilitat*— a les mesures t_a dels diversos rellotges locals cal que aquests siguin en cert sentit *equivalents*: (a) que portin la mateixa marxa i (b) que el fet que el rellotge de P_1 indiqui $t = 0$ vulgui dir el mateix que el fet que el rellotge de P_2 marqui $t = 0$. El primer requisit el podem «garantir» construint tots els rellotges *iguals*, d'acord amb el mateix principi físic, fets del mateix material i de la mateixa mida. Tot i això, haurem de postular a més que dos rellotges iguals estacionaris en dos llocs diferents de l'espai de referència de \mathcal{K} porten la mateixa marxa. Breument, l'homogeneïtat de l'espai de \mathcal{K} .

Per al segon requisit haurem de donar un *protocol de sincronització*: un conjunt d'operacions el resultat de les quals ens permet de decidir si dos rellotges estan sincronitzats o no. Un exemple de protocol d'aquests el suggereix Einstein en l'article de 1905. Suposem que quan el rellotge estacionari en P_1 indica t_1 emet un senyal electromagnètic que arriba a P_2 quan el rellotge d'allà indica t_2 i que és reflectit instantàniament per arribar altre cop a P_1 quan el rellotge local marca t'_1 . Direm que els dos rellotges estacionaris estan *sincronitzats* si es compleix $t_1 + t'_1 = 2t_2$.

Exemple 2.1 Importància del sistema de rellotges

Amb aquest exemple volem remarcar les inconsistències que es derivarien d'utilitzar un únic rellotge estacionari en l'origen de coordenades O del sistema de referència \mathcal{K} , i assignar temps als esdeveniments a mesura que els veu un *observador-cronometrador* situat en O . Podríem construir un altre sistema de referència \mathcal{K}' amb el mateix espai de referència però amb l'origen de coordenades O' desplaçat respecte a l'anterior, $\overrightarrow{OO'} = \vec{b}$, i amb un rellotge idèntic al de \mathcal{K} , i sincronitzat amb ell. (Podríem haver fabricat els dos rellotges en el punt mitjà de OO' i haver-los transportat a les seues definitives a una velocitat infinitament lenta, per exemple.)

Llavors, l'única diferència entre \mathcal{K} i \mathcal{K}' seria que han pres un origen de coordenades diferent en el mateix espai de referència. Hauríem d'esperar que descriguessin les mateixes lleis de la mecànica. Però no és així: *si la primera llei de la mecànica val en \mathcal{K} no val en \mathcal{K}'* . En efecte, considerem un moviment que els dos sistemes de referència descriuen com a rectilini, com el que es mostra en la figura (2.1). Els dos observadors veuen que el mòbil passa pel punt P en instants diferents, t i t' , a causa del diferent retard del senyal en anar de P a O o a O' . Si $\vec{x}(t)$ és la posició de P segons \mathcal{K} i $\vec{x}'(t')$ és la posició segons \mathcal{K}' , tindrem:

$$\vec{x}'(t') = \vec{x}(t) + \vec{b}, \quad t' = t + \frac{1}{c} (|\vec{x}'(t')| - |\vec{x}(t)|).$$

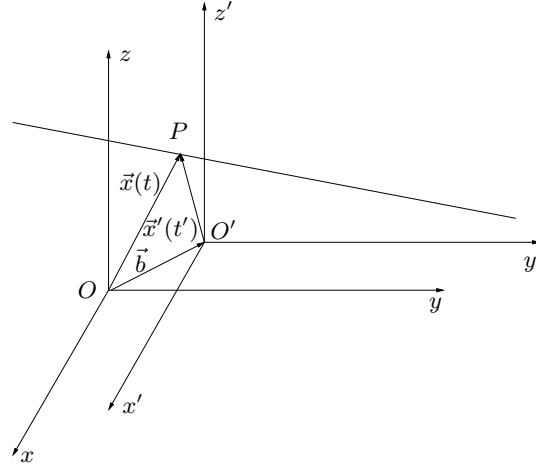


Figura 2.1. *Moviment rectilini vist des de dos sistemes de referència amb l'origen de coordenades no coincidents. El moviment és uniforme a \mathcal{K} però no a \mathcal{K}'*

Si \mathcal{K} veu un moviment rectilini i uniforme, $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}t$, amb \vec{v} constant. Però si substituïm aquesta llei del moviment en la relació del retard, obtenim:

$$t' = t + \frac{1}{c} \left(|\vec{x}_0 + \vec{v}t + \vec{b}| - |\vec{x}_0 + \vec{v}t| \right),$$

que dóna una relació $t' = t'(t)$ no lineal. En conseqüència, si bé per a \mathcal{K}' el moviment també serà rectilini, no serà uniforme i la primera llei de la mecànica no val per a aquest segon observador.

2.2.1 La simultaneïtat podria no ser universal

L'exemple que considerarem tot seguit pretén il·lustrar que si \mathcal{K} i \mathcal{K}' són dos sistemes de referència en moviment relatiu per als quals val el segon postulat, llavors hi ha parelles d'esdeveniments que són simultanis segons \mathcal{K}' i no ho són segons \mathcal{K} .

Suposem que \mathcal{K}' és un tren que es mou sobre una via, \mathcal{K} , cap a la dreta tal com s'indica a la figura 2.2, que tots dos sistemes de referència són inercials i que en particular val el segon postulat d'Einstein. Suposem que cauen dos llamps, l_1 i l_2 , el primer toca el tren en un lloc A' de la màquina i el segon en un lloc B' de l'últim vagó. En la via els dos llamps també deixen dos senyals, en les travesses A i B , respectivament.

Des dels dos sistemes de referència es fan les afirmacions següents:

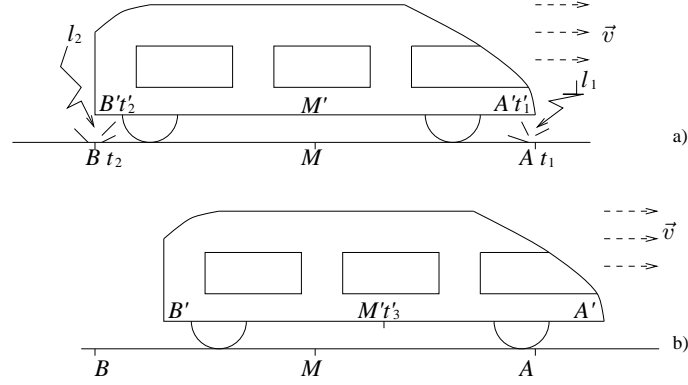


Figura 2.2. La simultaneïtat no és universal

\mathcal{K}'	tren	l_2 passa en B' en l'instant t'_2
		l_1 passa en A' en l'instant t'_1
\mathcal{K}	via	l_2 passa en B en l'instant t_2
		l_1 passa en A en l'instant t_1

Suposem que en \mathcal{K}' la caiguda dels dos llamps és simultània: $t'_2 = t'_1$. El punt mitjà, M' , del tren, equidistant de A' i de B' , «veurà» l_1 i l_2 simultàniament (és a dir, els senyals lluminosos σ_1 i σ_2 procedents dels esdeveniments l_1 i l_2 arriben a M' al mateix temps) en l'instant

$$t'_3 = t'_1 + \frac{\overline{A'M'}}{c} = t'_2 + \frac{\overline{B'M'}}{c}.$$

En aquest instant A' estarà a la dreta de A perquè el tren s'ha mogut cap a la dreta sobre la via, des que va caure el llamp l_1 i A coincidia amb A' . Per la mateixa raó, B' estarà a la dreta de B . El punt mitjà M' del segment $A'B'$ del tren estarà també a la dreta del punt mitjà del segment AB de la via. De manera que: el senyal σ_2 que informa que ha passat l_2 ja haurà passat per M , mentre que el senyal σ_1 que informa de l_1 encara no hi haurà arribat. (Vegeu la figura 2.2.)

Així segons la via σ_2 arriba a M abans que σ_1 . Com que els senyals σ_1 i σ_2 han sortit de punts equidistants de M i, pel segon postulat, es propaguen tots dos a la mateixa velocitat c , resulta que σ_2 ha d'haver sortit abans que σ_1 i per tant el llamp l_2 ha caigut abans que l_1 .

2.3 La transformació de Lorentz

Hi ha diverses maneres d'arribar a la transformació de Lorentz. Lorentz les trobà buscant les transformacions de coordenades que deixen invariants les equacions

de Maxwell, però ja l'any 1887, buscant les transformacions que deixen invariant l'equació d'ona, W. Voigt havia trobat unes transformacions que tan sols difereixen de les de Lorentz en un factor d'escala $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

La deducció d'Einstein en l'article de 1905 es basa en consideracions purament cinemàtiques i en la utilització del segon postulat. La diferència important entre els resultats d'Einstein i de Lorentz rau en el fet que, mentre que per al segon les coordenades x'_1, x'_2, x'_3 i t' només són unes variables matemàtiques, per a Einstein són el resultat de mesures de longitud i de temps efectuades en un sistema de referència inercial d'acord amb uns protocols de mesura establerts. La deducció que presentem aquí és en línies generals semblant a la d'Einstein en l'article de 1905.

\mathcal{K} i \mathcal{K}' seran dos sistemes de referència inercials, dotats cada un d'un sistema d'eixos cartesianes, amb vectors unitaris, $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ i $\hat{e}_{1'}, \hat{e}_{2'}, \hat{e}_{3'}$, respectivament. (x_1, x_2, x_3) i t són les coordenades cartesianes i el temps en què s'ha produït un cert esdeveniment segons el sistema \mathcal{K} , mentre que (x'_1, x'_2, x'_3) i t' són les coordenades i el temps del mateix esdeveniment segons \mathcal{K}' . La llei de transformació de coordenades consisteix en les quatre funcions de quatre variables:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \\ t' &= g(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

o, abreujadament:

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad t' = g(\vec{x}, t),$$

on: $\vec{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$ i $\vec{x}' = x_{1'}\hat{e}_{1'} + x_{2'}\hat{e}_{2'} + x_{3'}\hat{e}_{3'}$.

Perquè (2.1) sigui una bona transformació de coordenades haurà de ser invertible, i per tant el jacobià haurà de ser no nul:

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, t')}{\partial(x_1, x_2, x_3, t)} \neq 0. \quad (2.2)$$

El grup euclidià i les translacions temporals

Sense canviar de sistema de referència —l'espai de referència i el sistema de rellotges— podem canviar l'orientació del sistema d'eixos cartesianes (per una rotació, per exemple), l'origen de coordenades o també l'origen de temps. Les transformacions (2.1) inclouen les del grup euclidià —equació (1.2).

El principi de relativitat

En els dos sistemes, \mathcal{K} i \mathcal{K}' , han de valer les mateixes lleis de la mecànica. En particular, la primera llei de Newton, segons la qual un cos sobre el qual no actua cap força segueix un moviment rectilini i uniforme, tant respecte a \mathcal{K} com a \mathcal{K}' . Per tant, el transformat per (2.1) d'un moviment rectilini i uniforme segons \mathcal{K} :

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{V}t, \quad t = t; \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}_0, \vec{V} \text{ constants}$$

ha de ser un moviment rectilini i uniforme segons \mathcal{K}' :

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{V}t, t) = \vec{x}'_0 + \vec{V}'g(\vec{x}_0 + \vec{V}t, t); \quad \forall t, \quad (2.3)$$

amb \vec{x}'_0 i \vec{V}' que no depenen de t , però que poden dependre de \vec{x}_0 i \vec{V} .

Si demanem a més que la transformació de coordenades no tingui singularitats a distància finita —que no hi hagi esdeveniments que per a \mathcal{K} passin a distància finita de l'origen de coordenades i que per a \mathcal{K}' passin a distància infinita— resulta que la transformació més general que compleix (2.3) és:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \sum_{j=1}^3 A_{ij}x_j + A_it + B_i \\ t' &= \sum_{j=1}^3 D_jx_j + Dt + E \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

(B_1, B_2, B_3, E) són les coordenades amb què \mathcal{K}' caracteritza l'esdeveniment que \mathcal{K} indica per $(x_i = 0, t = 0)$. La demostració d'aquest resultat la podeu trobar a l'apèndix A del llibre de V. Fock, *The theory of space, time and gravitation* (Pergamon Press, 1964).

Si \mathcal{K} i \mathcal{K}' trien els orígens de coordenades cartesianes, O i O' , de manera que quan $t = 0$ i $t' = 0$, O coincideixi amb O' , tindrem que $B_i = 0$ i $E = 0$. A partir d'ara ho suposarem així. La resta de paràmetres, A_{ij} , A_i , D_j i D , dependran del moviment relatiu dels dos sistemes de referència, de la diferent orientació dels eixos coordenats de l'un i l'altre, etc.

El moviment relatiu

Com es veurà des de \mathcal{K}' la trajectòria d'un objecte que roman en repòs en \mathcal{K} ? En aquest sistema la seva trajectòria serà $\vec{x}(t) = \vec{x}_0, \forall t$. Les coordenades d'espai i de temps segons \mathcal{K}' dels diversos instants de la història d'aquest objecte s'obtenen per aplicació de (2.4):

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}x_{0j} + A_it, \quad t' = \sum_{j=1}^3 D_jx_{0j} + Dt.$$

Si aïllem t de la segona equació i substituïm en la primera obtenim:

$$x'_i(t') = \frac{A_i}{D}t' + \sum_{j=1}^3 \left(A_{ij} - \frac{A_i D_j}{D} \right) x_{0j},$$

que correspon a la trajectòria d'un moviment rectilini i uniforme a una velocitat independent d' \vec{x}_0 . Així, \mathcal{K}' veu com els llocs de l'espai de \mathcal{K} es mouen com un bloc a la velocitat

$$\frac{1}{D}(A_1, A_2, A_3),$$

que correspon a la idea de velocitat relativa de \mathcal{K} respecte a \mathcal{K}' .

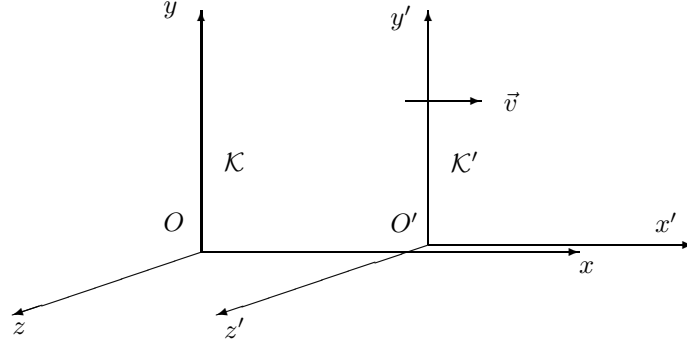


Figura 2.3. Configuració estàndard dels eixos coordenats de \mathcal{K} i \mathcal{K}' , paral·lels a la velocitat relativa

Elecció dels eixos

Com ja hem comentat abans, \mathcal{K} i \mathcal{K}' poden escollir arbitràriament l'orientació dels eixos coordenats respectius de manera que siguin paral·lels entre ells, amb els eixos \overrightarrow{OX} i $\overrightarrow{O'X'}$ paral·lels a la velocitat relativa, amb una configuració com la de la figura (2.3). En aquest cas es pot demostrar (vegeu l'apèndix 2.A.1) que:

$$\begin{aligned} A_2 = A_3 = 0, & & A_{31} = A_{32} = A_{21} = A_{23} = 0, \\ D_2 = D_3 = 0, & & A_{13} = A_{23} = A_{12} = A_{32} = 0, \\ & & A_{22} = A_{33} \geq 0, \quad A_{11} \geq 0 \end{aligned}$$

de manera que la transformació (2.4) es redueix a:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= ax_1 + bt \\ x'_2 &= mx_2 \\ x'_3 &= mx_3 \\ t' &= dx_1 + et \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

i depèn dels coeficients constants $a = A_{11} \geq 0$, $m = A_{22} \geq 0$, $b = A_1$, $d = D_1$ i $e = D$, els quals han de satisfer, a més:

$$ae \neq bd, \quad \text{i} \quad m \neq 0,$$

a conseqüència de (2.2).

Si substituïm les coordenades de l'origen de \mathcal{K}' , $x'_i = 0$, en (2.5), obtenim que les seves coordenades segons \mathcal{K} són:

$$x_1 = -\frac{b}{a}t, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

En conseqüència, la velocitat relativa \vec{v} de \mathcal{K}' respecte a \mathcal{K} és:

$$\vec{v} = (v, 0, 0), \quad v = -\frac{b}{a}.$$

El segon postulat

En el sistema de referència \mathcal{K} , l'equació del front d'una ona lluminosa que s'ha originat en un esclat P que s'ha produït en l'origen de coordenades, $\vec{x}_P = 0$, de \mathcal{K} en l'instant $t_P = 0$ és:

$$|\vec{x}| = ct, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

És a dir, el senyal es propaga a partir de $\vec{x}_P = 0$ amb la mateixa velocitat c en totes les direccions i passa pel lloc \vec{x} de l'espai de \mathcal{K} en l'instant $t = |\vec{x}|/c$.

En les coordenades de \mathcal{K}' l'esclat P es produeix en $\vec{x}'_P = 0$ i en l'instant $t'_P = 0$. Per tant, l'equació del front d'ona en \mathcal{K}' serà també:

$$|\vec{x}'| = ct', \quad t' \geq 0 \quad (2.7)$$

amb la mateixa velocitat de propagació.

Com que el fet que un esdeveniment estigui sobre el front de l'ona esfèrica originada en l'esclat P és independent del sistema de referència, sempre que les coordenades (x_1, x_2, x_3, t) d'un esdeveniment segons \mathcal{K} satisfacin l'equació (2.6), les seves coordenades (x'_1, x'_2, x'_3, t') segons \mathcal{K}' satisfaran també (2.7).

En l'apèndix 2.A.2 analitzem en detall les conseqüències d'aquesta condició i determinem els paràmetres constants de la transformació (2.5) en funció de la velocitat relativa v . La transformació queda com:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= m \gamma (x_1 - vt) \\ x'_2 &= m x_2 \\ x'_3 &= m x_3 \\ t' &= m \sigma \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

amb $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ i $\sigma = \pm 1$. Si demanem, a més, que dos esdeveniments que passin en el mateix lloc de \mathcal{K} conservin l'ordre temporal en \mathcal{K}' , llavors només pot ser $\sigma = 1$.

El coeficient m es pot determinar si afegim la condició que només pot dependre de la velocitat relativa, $m = m(v)$, i en l'apèndix 2.A.3 obtenim que $m = 1$. Així, la transformació de coordenades de \mathcal{K} a \mathcal{K}' amb els eixos orientats en la configuració estàndard és:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \gamma (x_1 - vt) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

S'anomena *transformació de Lorentz pura* (sense rotació ni translacions d'origen i temps). Aquesta transformació és l'equivalent a les (1.5) i $t' = t$ de la mecànica newtoniana.

2.4 Propietats de les transformacions de Lorentz

El canvi més important respecte a la cinemàtica de Galileu és que la coordenada t' depèn també de \vec{x} i per tant la simultaneïtat no és absoluta. És a dir, si $t_1 = t_2$, per a dues posicions diferents, \vec{x} i \vec{y} , tals que $\vec{v} \cdot \vec{x} \neq \vec{v} \cdot \vec{y}$, llavors un altre observador inercial que es mogui amb velocitat \vec{v} respecte al primer tindrà: $t'_1 \neq t'_2$.

Límit newtonià

Un altre fet notable és que per a velocitats petites comparades amb c les transformacions (2.9) tendeixen a les (1.5) i $t' = t$. Per obtenir aquest resultat es fa $c \rightarrow \infty$ a (2.9) (en aquest límit, $\gamma \rightarrow 1$).

Aquesta serà a partir d'ara una de les condicions que ens guiaran a l'hora de postular les lleis de la física relativista. Demanarem que en el límit de petites velocitats, $v/c \rightarrow 0$, les lleis de la física tinguin com a límit les lleis de la física de Newton.

La simultaneïtat és relativa

Considerem dos esdeveniments, A i B , que siguin simultanis segons un sistema de referència \mathcal{K} i que passen en dos llocs diferents de l'espai de \mathcal{K} . Les coordenades d'espai respectives seran (x_A, y_A, z_A) i (x_B, y_B, z_B) , i les coordenades temporals $t_A = t_B$.

En un altre sistema de referència \mathcal{K}' , que es mou a velocitat $\vec{v} = (v, 0, 0)$, amb $v > 0$, les coordenades temporals dels dos esdeveniments no han de ser necessàriament iguals. Efectivament, de (2.9) tenim:

$$t'_B - t'_A = \gamma \left(t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right) - \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) = \gamma \frac{v}{c^2} (x_A - x_B),$$

que és diferent de zero si $x_A \neq x_B$ i no depèn de les coordenades espacials de A i B en eixos transversals a la velocitat relativa.

En conseqüència: (a) si la posició relativa de dos esdeveniments simultanis segons \mathcal{K} és ortogonal a la velocitat relativa de \mathcal{K}' , llavors els dos esdeveniments són també simultanis segons \mathcal{K}' , i (b) si $x_A > x_B$, llavors A és anterior a B segons \mathcal{K}' .

Si els esdeveniments A i B són simultanis segons \mathcal{K} , llavors per a \mathcal{K}' el que passa davant en el sentit del moviment relatiu és anterior.

La velocitat límit

Les expressions (2.9) posen de manifest també el paper de velocitat límit de c . En efecte, si $v \rightarrow c$, el factor γ tendeix a ∞ , i si $v > c$, és un nombre imaginari.

Aquest límit s'ha d'entendre com una fita superior per a les velocitats de les partícules i dels objectes materials que puguin servir com a suport d'un sistema de referència. Això no està en contradicció amb el fet que en alguns fenòmens es

«mesurin» velocitats superiors a c (el que s'anomena *velocitats supralumíniques*) ni que no hi pugui haver velocitats de fase més grans que c .

Un exemple sovint invocat per il·lustrar la possibilitat de tenir velocitats superiors a c consisteix en un far situat en el centre d'un cilindre i que gira a una velocitat angular Ω mentre va emetent un raig de llum en la direcció radial. En arribar a la paret interior del cilindre, el raig hi produeix una taca lluminosa. Si el radi interior del cilindre és R , el punt lluminós es desplaça sobre la paret a una velocitat $R\Omega$, que pot superar c , si prenem R tan gran com convingui.

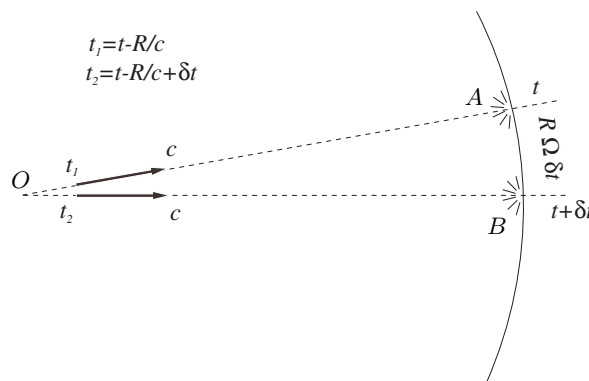


Figura 2.4. Si la distància entre el far i la paret és prou gran, la velocitat a què es desplaça la taca sobre la paret pot ser tan alta com vulguem

No diríem, però, que la taca lluminosa és un objecte físic en el sentit que no té les característiques que hem esmentat més amunt. Intuïtivament, ja sembla clar que el pas de la taca per B (figura 2.4) en l'instant $t + \delta t$ no és causat pel pas de la taca per A en un instant t immediatament anterior, sinó pel fet que en l'instant $t + \delta t - R/c$ el far ha emès en la direcció \overline{OB} . De fet, si l'entorn de A sobre la paret estigués cobert per una pintura absorbent, no hi hauria taca lluminosa a A i en canvi n'hi seguiria havent a B .

El que distingeix aquest cas del moviment d'una partícula o del d'un paquet d'energia és que no hi ha res de físic que es transmeti al llarg de la trajectòria de la taca. No hi ha cap connexió causal entre posicions consecutives de la taca sobre la paret.

En el domini de la radioastronomia es donen velocitats aparents superiors a la velocitat de la llum. Aquest fenomen s'ha observat en els plasmons emesos pels quàsars. Recentment (1994) s'ha observat també una radiofont en l'interior de la Galàxia que presenta dues ejeccions en sentits oposats. L'observació directa de les velocitats aparents dels plasmons dóna valors d' $1,25 \pm 0,15 c$ i $0,65 \pm 0,08 c$. Aquestes velocitats aparents són compatibles amb el fet que la velocitat de cada plasmó sigui inferior a c en el sistema de referència de la Terra (vegeu el problema 5).

Més endavant, en el capítol 10 comentarem experiments recents en què s'han mesurat velocitats supralumíniques.

L'interval invariant

Les transformacions de Lorentz tenen una propietat mètrica notable que engloba les mesures d'espai i de temps. Així com les transformacions (1.2) i (1.3) deixen invariants, d'una banda, la distància espacial, $dx^2 + dy^2 + dz^2$, i, de l'altra, l'interval temporal, dt ; la transformació (2.9) deixa invariant l'interval:

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.10)$$

com es pot comprovar fàcilment. Aquesta propietat està relacionada amb el fet que la velocitat de la llum c és la mateixa en tots els sistemes de referència inercials.

Evidentment, aquest interval també és invariant sota translacions i rotacions d'espai i sota translacions temporals, perquè aquestes transformacions deixen invariants els dos intervals per separat, el de temps i el d'espai.

Parametritzacions de les transformacions de Lorentz

D'entre les diverses parametritzacions possibles per a les transformacions de Lorentz n'hi ha una d'especialment adaptada. Si triem els eixos adequadament, és a dir, l'eix X paral·lel a la velocitat relativa entre els dos sistemes de referència, qualsevol transformació de Lorentz se'n escriu com (2.9) i només afecta dues coordenades: x i t , i la transformació depèn d'un paràmetre, β , que està relacionat amb la velocitat relativa. Si en lloc de β prenem el nou paràmetre ζ definit per $\beta \equiv \tanh \zeta$, el canvi ja garanteix que $-1 \leq \beta \leq 1$ per a $\forall \zeta$ i tenim $\gamma = \cosh \zeta$ i $\beta\gamma = \sinh \zeta$. Amb aquest canvi la part no trivial de (2.9) s'expressa com:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cosh \zeta - ct \sinh \zeta \\ ct' &= ct \cosh \zeta - x \sinh \zeta \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

que té una estructura semblant a la de les rotacions en el pla, amb funcions hiperbòliques en lloc de les trigonomètriques. Cosa normal ja que ha de deixar invariant l'interval hiperbòlic (2.10).

Aquesta parametrització és molt útil a l'hora de combinar transformacions de Lorentz en la mateixa direcció com veurem més endavant (secció 2.6).

Els grups de Lorentz i de Poincaré

Les equacions 2.9 són un cas particular de llei de transformació de coordenades entre sistemes inercials. Presuposen unes orientacions particulars dels eixos i unes eleccions particulars dels orígens espacials i temporals dels sistemes de referència. Si les combinem amb rotacions d'espai obtenim les transformacions de Lorentz generals, les quals formen el que s'anomena *grup de Lorentz*. Si a més hi afegim les translacions d'espai i de temps, obtenim les transformacions anomenades *grup de Poincaré*.

Per la seva pròpia naturalesa, el conjunt de totes les transformacions de coordenades entre una classe de sistemes de referència constitueix un grup de transformacions, independentment que es tracti de la classe de sistemes de referència inercials o de qualsevol altra classe. En efecte, si T_1 és la transformació que passa de \mathcal{K} a \mathcal{K}' i T_2 la que passa de \mathcal{K}' a \mathcal{K}'' , llavors la transformació producte $T_2 * T_1$ és la que passa de \mathcal{K} a \mathcal{K}'' . D'altra banda, la transformació identitat és la que passa del sistema de referència \mathcal{K} a ell mateix, i T_1^{-1} , inversa de T_1 , és la transformació que converteix les coordenades de \mathcal{K}' a \mathcal{K} .

2.4.1 Expressió vectorial de les transformacions de Lorentz

Per mitjà de la notació vectorial podem obtenir una expressió per a la transformació de Lorentz que és independent dels eixos escollits per als sistemes de referència.

Si x_i , $i = 1, 2, 3$, són les coordenades cartesianes en \mathcal{K} d'un esdeveniment, el seu vector de posició és:

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3, \quad (2.12)$$

on \hat{e}_i , $i = 1, 2, 3$, són els vectors unitaris en les direccions dels tres eixos de \mathcal{K} . Semblantment, segons \mathcal{K}' , el vector de posició de l'esdeveniment serà:

$$\vec{r}' = x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3.$$

(Hem suposat que els orígens de coordenades coincideixen a $t = t' = 0$.) Si substituïm (2.9) en aquesta darrera expressió tenim:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) x_1 \hat{e}_1 - \gamma t v \hat{e}_1, \quad (2.13)$$

on hem usat que, per ser els eixos paral·lels: $\hat{e}_i = \hat{e}'_i$, $i = 1, 2, 3$.

La velocitat relativa està orientada paral·lelament a l'eix \vec{OX} i val: $\vec{v} = v \hat{e}_1$. A més, $x_1 = \vec{v} \cdot \vec{r} / v$. L'equació (2.13) es pot posar doncs com:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \frac{(\gamma - 1)}{v^2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \gamma t \vec{v}. \quad (2.14)$$

Per a la transformació de la coordenada temporal, (2.9) dóna immediatament que

$$t' = \gamma t - \frac{1}{c^2} \gamma (\vec{v} \cdot \vec{r}). \quad (2.15)$$

D'aquesta manera, tant (2.14) com (2.15) són independents dels eixos escollits.

Notem també que si descomponem \vec{r} i \vec{r}' en les respectives parts transversal i longitudinal respecte a la direcció del moviment, és a dir, $\vec{r} = \vec{r}_\perp + r_\parallel \vec{v} / v$ i el mateix per a \vec{r}' , (2.14) ens porta a:

$$\vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp, \quad r'_\parallel = \gamma (r_\parallel - t v). \quad (2.16)$$

Les equacions de transformació (2.14) i (2.15) es poden expressar com:

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=1}^4 L_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}, \quad \mu = 1, \dots, 4 \quad (2.17)$$

amb la definició:

$$x^1 = x_1, \quad x^2 = x_2, \quad x^3 = x_3, \quad x^4 = ct,$$

i definicions semblants per a $x^{\mu'}$.² Hem pres la variable x^4 en comptes de t perquè les quatre coordenades tinguin les mateixes dimensions, de manera que els coeficients $L_{\nu}^{\mu'}$ són les quantitats adimensionals:

$$\left. \begin{aligned} L_j^{i'} &= \delta_j^i + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta^i \beta^j \\ L_4^{i'} &= L_i^{4'} = -\gamma \beta^i, \quad L_4^{4'} = \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

amb $\beta^i = v^i/c$. És interessant adonar-se de la relació:

$$\beta^i = -\frac{L_4^{i'}}{L_4^{4'}}. \quad (2.19)$$

En forma matricial, la transformació (2.17) es pot expressar com a:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \vec{\beta} \vec{\beta}^\top & -\gamma \vec{\beta} \\ -\gamma \vec{\beta}^\top & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ ct \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

on \mathbb{I}_3 és la matriu identitat en l'espai de tres dimensions.

2.5 Mesures de longitud i de duracions per a sistemes mòbils

La transformació de Lorentz permet conèixer les coordenades i el temps d'un esdeveniment en un sistema de referència inercial si les coneixem en un altre, i per tant relacionar els resultats en sistemes diversos. Les posicions i el temps dels esdeveniments en cada sistema es determinen de la mateixa manera, amb rellotges estàndard i amb regles rígids fabricats de la mateixa manera. Per veure si dos rellotges o dos regles en repòs un respecte de l'altre funcionen igual, podem transportar-los lentament (en el límit infinitament lent) i veure si coincideixen. El problema sorgeix quan volem comparar un regle amb un altre que es mou a una certa velocitat respecte al primer, ja que no els podem superposar, o quan volem comparar el temps transcorregut en un rellotge que es mou a una certa velocitat respecte als nostres, perquè l'haurem de comparar amb rellotges situats en punts diferents i no amb un rellotge sol.

²Aquest canvi de notació està justificat en l'apèndix A al final del llibre i s'aplica sistemàticament a partir del capítol 4.

2.5.1 Mesures de longituds

La mesura de la longitud d'un objecte rígid estacionari és una operació senzilla. Alineades amb la dimensió de l'objecte que es vol mesurar, se superposen el nombre necessari de rèpliques del regle patró o les seves fraccions i aquest nombre dóna la mesura de l'objecte.

Mesurar un objecte rígid des d'un sistema de referència inercial \mathcal{S} que el veu en moviment rectilini i uniforme requereix més artifici. Una manera consisteix a *fer una imatge* de l'objecte mòbil estacionària en \mathcal{S} i després fer mesures sobre aquesta imatge igual que en el cas d'un objecte estacionari.

Una manera que sembla natural de fer aquesta imatge és considerar les posicions que ocupen els punts de l'objecte en l'espai estacionari de \mathcal{S} en un determinat instant, és a dir, simultànies segons \mathcal{S} .³

Per comparar els resultats de les mesures esmentades més amunt, considerarem un regle rígid, Q , que es mou amb una velocitat \vec{v} respecte a \mathcal{S} . Denotarem per \mathcal{S}^\dagger el sistema de referència inercial comòbil amb el regle. Siguin A_1 i A_2 els punts extrems de Q . Segons \mathcal{S}^\dagger cada un d'aquests punts està sempre en el mateix lloc, les trajectòries respectives són:

$$\vec{x}_a^\dagger(t^\dagger) = \vec{x}_a^\dagger, \quad a = 1, 2 \quad (2.21)$$

i la longitud és: $l^\dagger = |\vec{x}_1^\dagger - \vec{x}_2^\dagger| \equiv |\Delta\vec{x}^\dagger|$.

Segons \mathcal{S} aquests punts es mouen amb velocitat \vec{v} i les trajectòries s'obtinran per transformació de Lorentz de (2.21). La longitud del regle segons \mathcal{S} la definim com la distància entre dues posicions \mathcal{S} -simultànies dels extrems: $l = |\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)| \equiv |\Delta\vec{x}|$.

De la transformació de Lorentz (2.14) i de (2.21) tenim:

$$\vec{x}_a^\dagger = \vec{x}_a(t_a) + \left(\frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v} \cdot \vec{x}_a(t_a) - \gamma t_a \right) \vec{v}, \quad a = 1, 2.$$

La diferència dels dos valors quan $t_1 = t_2$ ens dóna:

$$\Delta\vec{x}^\dagger = \Delta\vec{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{v} \cdot \Delta\vec{x}) \vec{v}$$

o bé,

$$\Delta x_{\parallel} = \gamma^{-1} \Delta x_{\parallel}^\dagger \quad \text{i} \quad \Delta \vec{x}_{\perp} = \Delta \vec{x}_{\perp}^\dagger, \quad (2.22)$$

és a dir, segons el sistema \mathcal{S} , que veu el regle en moviment, la dimensió longitudinal de l'objecte és més curta ($\gamma^{-1} \leq 1$) que segons el sistema de referència comòbil

³Notem que amb això hem establert un protocol d'operacions per mesurar allò que en diem *longitud d'un objecte en moviment*. Hi ha altres protocols igual de consistents, per exemple, considerar posicions dels punts de l'objecte que «es veuen» simultàniament des d'un lloc determinat de \mathcal{S} , fer una fotografia de l'objecte sobre el fons d'un regle graduat, etc., els quals donaran lloc a definicions alternatives de longitud. Definicions que són igual d'acceptables i que, per descomptat, poden donar resultats diferents l'una de l'altra.

amb el regle, mentre que la dimensió transversal és la mateixa segons els dos sistemes.

Si l'angle que forma el regle amb la direcció del moviment és α segons \mathcal{S} i α^\dagger segons \mathcal{S}^\dagger , se segueix de manera immediata de (2.22) que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \gamma \operatorname{tg} \alpha^\dagger, \quad \text{i} \quad l = \sqrt{\Delta \vec{x}_\parallel^2 + \Delta \vec{x}_\perp^2} = l^\dagger \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \alpha^\dagger} \leq l^\dagger$$

o, per referir-ho a mesures angulars en \mathcal{S} :

$$l = \frac{l^\dagger}{\gamma \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha}}.$$

En el cas que el regle estigui orientat en la direcció del moviment relatiu, $\alpha = 0$ i

$$l = \gamma^{-1} l^\dagger,$$

que com a molt val l^\dagger . Aquest valor màxim, que s'obté fent la mesura en el sistema comòbil, s'anomena *longitud pròpia*.

L'efecte que hem estudiat fins aquí coincideix quantitativament amb la *contracció de FitzGerald-Lorentz* que hem esmentat a la secció 1.4.3, però no hi té res a veure. Mentre que per a Lorentz hi havia un escurçament real dels cossos en la direcció del seu moviment, que calia explicar per l'acció de les forces electromagnètiques que sostenen la xarxa cristal·lina, aquí la «contracció» és conseqüència del fet que per mesurar un objecte en moviment hem d'usar la noció de simultaneïtat, que és relativa.

Per raons històriques, l'efecte s'anomena *contracció de longituds* i ha estat la font de no pocs equívocs i discussions.⁴ El problema rau a donar el mateix nom, *longitud*, a dues mesures fetes en condicions diferents. L'observador estacionari respecte a l'objecte fa una mesura purament geomètrica, mentre que l'observador que veu l'objecte en moviment s'ha de servir de la simultaneïtat per obtenir una imatge estacionària de l'objecte, que després mesura pel mètode geomètric estàndard.

Exemple 2.2 El regle i el forat

Un regle de longitud pròpia L_R llisca sobre un terra pla a velocitat \vec{v} . En aquest terra i en la trajectòria del regle hi ha un forat de diàmetre propi L_F , de manera que $L_R > L_F > L_R \sqrt{1 - \beta^2}$. En arribar el regle al forat, hi passarà i hi caurà, o bé no hi passarà?

(A) Si ho analitzem des del sistema del forat, la longitud del regle és

$$L_R \sqrt{1 - \beta^2} < L_F.$$

Per tant, hi passa i hi cau.

⁴Una exposició completa i aclaridora es pot trobar a RIECHENBACH, H., *The philosophy of space and time*, de , p. 156, Dover (1956).

- (B) En canvi, si analitzem el problema des del sistema del regle, el diàmetre del forat és $L_F \sqrt{1 - \beta^2} < L_F < L_R$, i el regle no hi cau perquè no passa pel forat.

Quin dels dos raonaments és el bo?

Cap. De fet, si res no l'obliga a canviar, en arribar al forat el regle continua en el seu moviment rectilini i uniforme i passa a l'altre costat, independentment de les longituds relatives de regle i forat.

Si hem de disposar un sistema que estiri del regle cap avall, el que passi dependrà de com s'activi el mecanisme.

- (I) Si hi ha una força gravitatòria permanent i constant, quan més de la meitat del regle pengi sobre el forat aquesta força el desequilibrarà i el farà inclinar-se i passar.
- (II) Si l'impuls cap avall s'aplica sobre el regle simultàniament en el sistema del terra i en el moment en què coincideixen els centres del regle i del forat, llavors la resposta és la (A) de més amunt.
- (III) I si l'aplicació és simultània en el sistema del regle, la resposta escaient és la (B).

2.5.2 Mesures del temps

Ara compararem la mesura de la duració d'un mateix procés des de dos sistemes de referència inercials: \mathcal{S}^\dagger , que veu el procés estacionari, i \mathcal{S} , que veu el «recipient» on es produeix el procés animat d'un moviment amb velocitat \vec{v} constant.

Segons \mathcal{S}^\dagger el procés comença i acaba en el mateix lloc:

$$(1) \quad \text{comença a } t_i^\dagger \quad \text{en } \vec{x}_0^\dagger$$

$$(2) \quad \text{acaba a } t_f^\dagger \quad \text{en } \vec{x}_0^\dagger$$

i la duració del procés segons \mathcal{S}^\dagger és: $\Delta t^\dagger = t_f^\dagger - t_i^\dagger$, la diferència dels temps indicats al final i a l'inici per un rellotge estacionari en \mathcal{S}^\dagger que és tota l'estona al costat d'on es desenvolupa el procés.

Segons \mathcal{S} el procés comença en \vec{x}_i en l'instant t_i , i acaba en un altre lloc, \vec{x}_f , en l'instant t_f . Aquests temps estan relacionats amb t_i^\dagger , t_f^\dagger i \vec{x}_0^\dagger per la transformació de Lorentz (2.15):

$$t_i = \gamma \left(t_i^\dagger + \frac{\vec{x}_0^\dagger \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \quad \text{i} \quad t_f = \gamma \left(t_f^\dagger + \frac{\vec{x}_0^\dagger \cdot \vec{v}}{c^2} \right).$$

La diferència ens dona la duració del procés segons \mathcal{S} :

$$\Delta t = t_f - t_i = \gamma \Delta t^\dagger \geq \Delta t^\dagger. \quad (2.23)$$

En conclusió, la duració d'un procés mesurada des d'un sistema de referència inercial que el veu produir-se en moviment sempre és més gran que la duració que mesura l'observador inercial comòbil amb el procés, que s'anomena *duració pròpia*. Aquest fenomen es coneix com a *dilatació temporal*.

Convé remarcar que els dos procediments de mesura són diferents. Mentre que l'observador comòbil S^\dagger només utilitza un rellotge, l'observador S en necessita dos: el que dóna t_i i és en el lloc on comença el procés, i el que dóna t_f , en el lloc on acaba.

La vida mitjana dels muons

Aquest efecte s'ha mesurat per mitjà de partícules subatòmiques que viatgen a grans velocitats. En incidir sobre les capes altes de l'atmosfera, els raigs còsmics produeixen unes partícules, els mesons π , que es desintegren i produeixen leptons μ o muons. Aquestes partícules baixen verticalment cap avall i arriben a la troposfera.

Els muons són també inestables i es desintegren en un electró, un neutrino i un antineutrino, segons la reacció:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

o la corresponent a les antipartícules respectives:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

Aquesta desintegració és un procés estocàstic. No podem saber què li passarà a una partícula determinada ni quant temps passarà abans no es desintegri, però sí que aquest temps obeeix a una llei de probabilitat, i el nombre de muons que es desintegren a cada instant és proporcional al nombre de muons que queden a la població. Això dóna una llei de desintegració exponencial

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau), \quad (2.24)$$

on $N(t)$ és el nombre de muons supervivents en l'instant t , N_0 és la població inicial i τ és la vida mitjana. De l'expressió anterior tenim també:

$$\tau = \frac{t}{\log N_0 - \log N(t)}. \quad (2.25)$$

La vida mitjana mesurada en el laboratori, amb els muons movent-se a velocitats petites, és de $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s.

La vida mitjana val

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty dt t \dot{N}(t) = \tau$$

i és també la duració del procés «reduir-se la població per un factor $1/e$ », i d'acord amb l'efecte de la dilatació temporal, la vida mitjana d'un determinat tipus de partícules dependrà de la seva velocitat. De (2.23) tindrem:

$$\tau = \gamma \tau_0 .$$

Els experiments per mesurar aquest efecte daten de finals de la dècada de 1930. Aquí comentarem el de Frisch i Smith (1963)⁵ que comparen els cabals de muons procedents dels raigs còsmics amb velocitats seleccionades en la banda $0,9950c < v < 0,9954c$ (per tant, amb $10,0 < \gamma < 10,4$), per a dues altituds diferents: dalt del Mt. Washington (1.907 m) i a nivell del mar.

Per tal de seleccionar les partícules en la banda de velocitats indicada l'escintil·lador de plàstic està protegit per un gruix de ferro (el gruix de ferro en el recompte de Mt. Washington era de 2,5 peus, mentre que a nivell del mar només era d'1,5 peus, per compensar l'efecte amortidor del gruix de 1.907 m d'aire entre els dos llocs) de manera que els muons més lents que $0,9950c$ no el travessen i els més ràpids que $0,9954c$ travessen el plàstic i tot. La resta queden atrapats en l'escintil·lador i s'hi desintegren. Per mitjà de la traça en un oscil·loscopi es pot distingir entre els uns i els altres, comptar-los, mesurar el temps entre que entren i es desintegren i determinar-ne la llei de desintegració. (L'observació d'aquesta llei serveix per confirmar que les partícules que es detecten en el primer recompte a Mt. Washington i en el segon, al nivell del mar, són les mateixes.)

Després de sis recomptes d'una hora de duració a cada lloc, els resultats van ser:

	1	2	3	4	5	6	mitjanes
N_0 (Mt. Washington)	568	554	582	527	588	559	563 ± 10
N (nivell del mar)	412	403	436	395	393	...	408 ± 9

N_0 i N són els recomptes al Mt. Washington i al nivell del mar, respectivament.

A la velocitat $v = 0,995c$, els muons recorren la distància de 1.907 m en $t = 6,4 \cdot 10^{-6}$ s. Substituint aquest temps i les dades de la taula anterior en (2.25) per a la vida mitjana dóna:

$$\tau = 19,9 \pm 0,8 \mu\text{s},$$

que dividit per $\gamma = 10,0$ dóna: $\tau_0 = 1,99 \pm 0,08 \mu\text{s}$, que concorda amb la vida mitjana en repòs.

Un fet interessant a remarcar en aquest experiment, i en d'altres del mateix tipus, és que el *temps* entre els dos recomptes en el sistema de la Terra no es mesura amb dos rellotges estacionaris sincronitzats, com s'hauria de fer a la manera ortodoxa, sinó dividint la distància recorreguda entre la velocitat dels muons.

⁵FRISCH, D. H., SMITH, J.H., *Am. J. Phys.*, **31**, pàg. 342 (1963) (dóna una descripció detallada del dispositiu experimental).

Experiments amb muons i altres partícules inestables, comparant-ne la vida mitjana en repòs i a diferents velocitats, s'han realitzat també per mitjà d'anells d'emmagatzematge en acceleradors circulars. L'anàlisi teòrica d'aquests experiments l'hem de deixar per a més endavant, quan haguem parlat de la marxa dels rellotges accelerats.

Exemple 2.3 La paradoxa dels bessons

Potser el resultat anterior no causa gaire commoció, perquè no és prou dramàtic. Suposem, però, que comparem el temps de vida, i l'envelliment, de dos germans bessons, en Carles i en Terenci. A l'edat de 25 anys, en Carles s'embarca en una càpsula espacial que inicia un viatge a velocitat $v = 0,6c$, constant, cap a un estel llunyà E , estacionari relativament a la Terra, que es troba a 6 anys llum. Per a aquesta velocitat, $\gamma = 5/4$. En Terenci, menys aventurer, es queda a la Terra. Quan en Carles arriba a E , segons en Terenci han passat

$$\frac{6 \text{ anys llum}}{0,6c} = 10 \text{ anys}.$$

Aquest temps s'obté restant les indicacions de dos rellotges estacionaris en el sistema de la Terra: el de E quan hi arriba en Carles i el de la Terra en partir. Segons en Carles, que mesura la duració del seu viatge d'anada amb un únic rellotge, hauran passat

$$\frac{10 \text{ anys}}{\gamma} = 8 \text{ anys}.$$

Per al viatge de tornada podem aplicar un raonament anàleg. Així, segons en Terenci dura 10 anys i segons en Carles en dura 8. De manera que quan es tornin a trobar, en Terenci tindrà $25 + 2 \times 10 = 45$ anys i en Carles en tindrà $25 + 2 \times 8 = 41$ i, per tant, en retrobar-se en Carles serà més jove que en Terenci.

Si ara argumentem des del sistema de la nau, en Carles veu que el seu germà, muntat a la Terra, inicia un viatge a velocitat $v = 0,6c$. Incidentalment, també veu apropar-se un estel, E , a la mateixa velocitat. Quan E arriba allà on és en Carles, tant l'estel com la Terra, amb en Terenci al damunt, inicien un viatge en sentit contrari fins que els germans es retroben. Com que el factor de dilatació temporal no depèn del sentit de v , és el mateix que en el cas anterior, i pel mateix raonament, en Terenci (viatger ara) tindrà 41 anys i en Carles (ara sedentari), 45. Així, en retrobar-se, en Terenci serà més jove que en Carles.

Aquesta és la coneguda *paradoxa dels bessons*. Però si fem l'experiment, el resultat ha de ser únic: la realitat és independent del sistema de referència emprat per descriure-la. Per aquesta raó es parla de paradoxa. Un dels dos raonaments anteriors ha de ser fallaç, ja que els dos resultats no es poden donar alhora. En efecte, malgrat les aparences les dues descripcions anteriors no són simètriques. Mentre que en Terenci és sempre estacionari en un sistema de referència inercial i per tant el seu resultat serà el correcte, el sistema de la nau no ho és perquè en arribar a E frena i canvia el sentit del seu moviment.

2.6 Llei de composició de les velocitats

Un altre resultat important que podem obtenir directament de les transformacions de Lorentz és la llei de composició de velocitats. Si $\vec{r}(t)$ és la trajectòria d'un punt material segons \mathcal{K} , la trajectòria del mateix punt segons \mathcal{K}' l'obtindrem aplicant la transformació (2.14) i (2.15) a la seqüència d'esdeveniments $(t, \vec{r}(t))$:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \frac{(\gamma - 1)}{v^2} (\vec{r}(t) \cdot \vec{v}) \vec{v} - \gamma t \vec{v}, \quad (2.26)$$

$$t' = \gamma t - \frac{1}{c^2} \gamma (\vec{v} \cdot \vec{r}(t)). \quad (2.27)$$

L'equació paramètrica de la trajectòria s'obté aïllant $t = t(t')$ a la segona equació i substituint-ho a la primera.

Les velocitats respecte a \mathcal{K} i respecte a \mathcal{K}' són, respectivament:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{w}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}.$$

Derivant (2.26) i aplicant la regla de la cadena tenim:

$$\vec{w}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1} \left(\vec{w} + \frac{\gamma_v - 1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{v} - \gamma_v \vec{v} \right), \quad (2.28)$$

i de (2.27) tenim:

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma_v \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c^2} \right), \quad (2.29)$$

i per tant:

$$\vec{w}' = \frac{\vec{w} + (\gamma_v - 1)(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{v}/v^2 - \gamma_v \vec{v}}{\gamma_v (1 - \vec{v} \cdot \vec{w}/c^2)}. \quad (2.30)$$

En les expressions anteriors hem posat γ_v per indicar que correspon a la velocitat v . Mantindrem el subíndex sempre que hi hagi perill de confusió.

En l'aproximació de velocitats petites, $|\vec{w}| \ll c$ i $|\vec{v}| \ll c$, l'expressió anterior es redueix a:

$$\vec{w}' \approx \vec{w} - \vec{v},$$

com era d'esperar.

Si ara separem a (2.30) els components transversals i longitudinals respecte a v , obtenim:

$$\vec{w}'_{\perp} = \frac{\vec{w}_{\perp}}{\gamma_v (1 - \vec{w} \cdot \vec{v}/c^2)}, \quad w'_{\parallel} = \frac{w_{\parallel} - v}{1 - \vec{w} \cdot \vec{v}/c^2}. \quad (2.31)$$

Amb les equacions (2.31) podem calcular tant la relació entre els angles θ i θ' que formen les velocitats \vec{w} i \vec{w}' amb la direcció del moviment relatiu, com la relació entre els mòduls. Tenim:

$$w'_{\parallel} = w' \cos \theta', \quad w_{\parallel} = w \cos \theta, \quad w'_{\perp} = w' \sin \theta', \quad w_{\perp} = w \sin \theta,$$

que introduïdes a (2.31), donen:

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{w \sin \theta}{\gamma_v(w \cos \theta - v)}, \quad \text{i} \quad w' = \frac{\sqrt{w^2 + v^2 - 2wv \cos \theta - ((wv \sin \theta)/c)^2}}{1 - (wv \cos \theta)/c^2}. \quad (2.32)$$

2.6.1 Velocitats paral·leles

En al cas particular de velocitats paral·leles, (2.30) es redueix a:

$$w' = \frac{w - v}{1 - wv/c^2}. \quad (2.33)$$

En la composició de velocitats paral·leles és especialment útil la parametrització hiperbòlica introduïda en (2.11). En efecte, si posem:

$$w = c \operatorname{th} \phi, \quad v = c \operatorname{th} \zeta \quad \text{i} \quad w' = c \operatorname{th} \phi', \quad (2.34)$$

llavors (2.33) dóna:

$$\phi' = \phi - \zeta, \quad (2.35)$$

que és una relació additiva en els nous paràmetres, com la de Galileu ho és amb les velocitats. A més amb aquests paràmetres tenim:

$$\gamma_w = \cosh \phi, \quad \gamma_v = \cosh \zeta \quad \text{i} \quad \gamma_{w'} = \cosh \phi',$$

i de (2.35) obtenim:

$$\gamma_{w'} = \cosh(\phi - \zeta) = \gamma_w \gamma_v (1 - wv/c^2). \quad (2.36)$$

Per acabar assenyalarem que de (2.33) i amb una mica de càlcul s'arriba a:

$$c^2 - w'^2 = \frac{c^2(c^2 - w^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - wv)^2},$$

que indica que si $|\vec{w}| < c$ i $|\vec{v}| < c$, llavors $|\vec{w}'| < c$. I que si tenim $w = c$, llavors també $w' = c$.

Apèndix 2.A

A continuació detallem alguns càlculs que s'han obviat en la deducció de la transformació de Lorentz.

2.A.1 Elecció d'eixos en configuració estàndard

Si escollim els eixos \overrightarrow{OX} i $\overrightarrow{O'X'}$ paral·lels a la velocitat relativa (figura 2.3) resulta: $A_2 = A_3 = 0$ i la transformació quedarà:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_1t \\ x'_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ x'_3 &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \\ t' &= D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + Dt \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

En aquesta disposició, el moviment relatiu dels dos sistemes és paral·lel a l'eix OX i el pla $X'O'Y'$ de \mathcal{K}' llisca sobre el pla XOY de \mathcal{K} . De manera que si un esdeveniment té coordenada $x_3 = 0$ també tindrà coordenada $x'_3 = 0$, i per tant:

$$A_{31} = A_{32} = 0.$$

Per un raonament anàleg amb els plans $X'O'Z'$ i XOY s'arriba també a:

$$A_{21} = A_{23} = 0.$$

A més, la configuració estàndard de la figura (2.3) es conserva si sotmetem a la mateixa rotació els eixos transversals de tots dos sistemes: \overrightarrow{OY} , \overrightarrow{OZ} , $\overrightarrow{O'Y'}$ i $\overrightarrow{O'Z'}$. Una rotació de 90° deixaria els eixos com mostra la figura (2.5) i equivaldria a les substitucions:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1 & x_2 &= \tilde{x}_3 & x_3 &= -\tilde{x}_2 & t &= \tilde{t} \\ x'_1 &= \tilde{x}'_1 & x'_2 &= \tilde{x}'_3 & x'_3 &= -\tilde{x}'_2 & t' &= \tilde{t}'. \end{aligned}$$

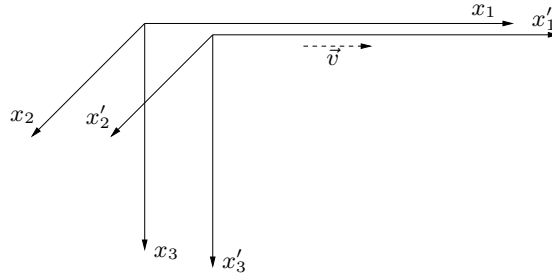


Figura 2.5. Configuració estàndard amb els eixos girats 90° al voltant de la direcció de la velocitat relativa

Com que la configuració relativa del sistema d'eixos amb $(\tilde{})$ és la mateixa que la del sistema d'eixos sense $(\tilde{})$, la transformació (2.37) entre coordenades amb $(\tilde{})$ ha de ser la mateixa que per a coordenades sense $(\tilde{})$. Les substitucions anteriors en (2.37) porten immediatament a:

$$A_{12} = A_{13} = 0, \quad D_2 = D_3 = 0, \quad A_{22} = A_{33}.$$

Finalment, com que també podem escollir arbitràriament el sentit dels eixos coordenats sense canviar l'espai de referència, ens podem arreglar perquè els coeficients A_{11} , A_{22} i A_{33} siguin positius.

Resumint, per una elecció convenient dels eixos respectius dels sistemes de referència \mathcal{K} i \mathcal{K}' , molts dels coeficients de la transformació (2.4) són nuls i la transformació es redueix a la forma

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= ax_1 + bt \\ x'_2 &= mx_2 \\ x'_3 &= mx_3 \\ t' &= dx_1 + et \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

2.A.2 El segon postulat

D'aplicar la condició que sempre que es compleixi (2.6) s'ha de complir (2.7) als casos particulars:

- (a) $(x_1 = 0, x_2 = c, x_3 = 0, t = 1),$
- (b) $(x_1 = c, x_2 = 0, x_3 = 0, t = 1) \text{ i}$
- (c) $(x_1 = -c, x_2 = 0, x_3 = 0, t = 1),$

obtenim respectivament:

$$(a) \quad c^2 e^2 = m^2 c^2 + b^2 \quad (2.39)$$

$$(b) \quad c |dc + e| = |ac + b| \quad (2.40)$$

$$(c) \quad c |-dc + e| = |-ac + b|. \quad (2.41)$$

Les dues últimes equacions només admeten les dues solucions:

$$\left. \begin{aligned} (I) \quad d &= \sigma a/c, \quad e = \sigma b/c, \quad \text{amb } \sigma = \pm 1 \\ (II) \quad d &= \sigma b/c^2, \quad e = \sigma a, \quad \text{amb } \sigma = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

però el cas I el podem descartar perquè no compleix la condició $ae \neq bd$, que és necessària perquè la transformació (2.5) sigui invertible.

En el cas II , si utilitzem el fet que $a > 0$ i $m > 0$ tenim que (2.39) queda:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= m\gamma(x_1 - vt) \\ x'_2 &= mx_2 \\ x'_3 &= mx_3 \\ t' &= m\sigma\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

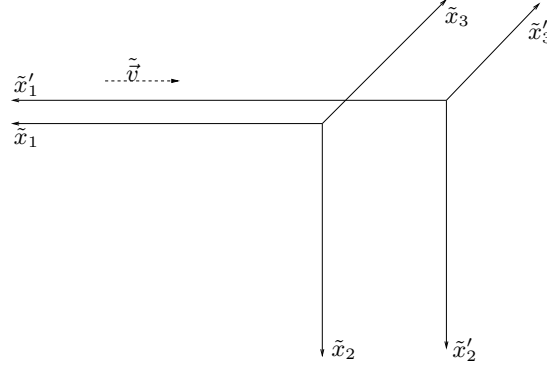


Figura 2.6.

amb $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

2.A.3 El coeficient m

En efecte, notem que la inversa de la transformació anterior té la mateixa forma, substituint v per $-v$ i m per $1/m$. Veiem també que correspon al fet que \mathcal{K} es mou amb velocitat $-v$ respecte a \mathcal{K}' i, per tant,

$$m(-v) = 1/m(v). \quad (2.44)$$

D'altra banda, si canviem els sentits dels eixos coordenats de \mathcal{K} i \mathcal{K}' , tenim les transformacions de coordenades:

$$\left. \begin{array}{llll} \tilde{x}_1 = -x_1 & \tilde{x}_2 = -x_2 & \tilde{x}_3 = -x_3 & \tilde{t} = t \\ \tilde{x}'_1 = -x'_1 & \tilde{x}'_2 = -x'_2 & \tilde{x}'_3 = -x'_3 & \tilde{t}' = t' \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

que transforma la configuració estàndard de la figura 2.3 en una altra configuració estàndard amb velocitat $\vec{v} = (-v, 0, 0)$, com es mostra a la figura 2.6. Ara bé, si introduïm els canvis (2.45) en (2.8) obtenim:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{x}'_1 = m(v) \gamma (\tilde{x}_1 + v \tilde{t}) \\ \tilde{x}'_2 = m(v) \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}'_3 = m(v) \tilde{x}_3 \\ \tilde{t}' = m(v) \gamma \left(\tilde{t} + \frac{v}{c^2} \tilde{x}_1 \right) \end{array} \right\}$$

D'aquí que, $m(v) = m(-v)$, que junt amb (2.44), i com que $m > 0$, dóna $m(v) = 1$.

Finalment, la transformació de coordenades de \mathcal{K} a \mathcal{K}' amb els eixos orientats

en la configuració estàndard és:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - vt) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Problemes

- 2.1 En un sistema S' un esdeveniment té lloc en el punt $x' = 10$, $y' = 0$, $z' = 0$, on les coordenades vénen donades en metres i $t' = 1$ s. Si un sistema S es mou respecte a S' amb una velocitat de $3c/5$ en la direcció negativa de l'eix de les x i els orígens del dos sistemes coincideixen per a $t = 0, t' = 0$. Quines són les coordenades de l'esdeveniment a S .

- 2.2 Demostreu que l'equació d'ona per a una funció escalar $\phi(t, \vec{x})$,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \vec{x}) = \vec{\nabla}^2 \phi(t, \vec{x}),$$

és invariant sota una transformació de Lorentz arbitrària.

- 2.3 Dos esdeveniments P i Q separats espacialment $3 \cdot 10^8$ m són simultanis en un cert sistema de referència inercial S . Trobeu les velocitats en la direcció PQ d'altres sistemes de referència perquè els esdeveniments estiguin separats per intervals de temps de 0,1 s, 1 s i 10 s respectivament.

- 2.4 Un coet surt de la Terra amb una velocitat de $0,8 c$ a les dotze del migdia en els rellotges de la Terra i del coet. A les 12h 30m segons el rellotge de la nau passa per davant d'una estació interplanetària fixa respecte a la Terra i amb els rellotges sincronitzats amb la Terra. Quina hora marca el rellotge de l'estació? A quina distància en coordenades terrestres es troba l'estació? A les 12h 30m de la nau s'envia un senyal a la Terra. A quina hora de la Terra es rep el senyal? Si contesten des de la Terra immediatament quan reben el senyal de resposta a la nau?

- 2.5 Un estel que es troba a una distància D de la Terra emet dos plasmons amb la mateixa velocitat v i en sentits oposats, en una direcció que forma un angle θ amb la visual. La posició aparent de cada un es determina per la direcció en què arriba a l'observatori la llum procedent del plasmó.

- Determineu la velocitat angular aparent mesurada des de la Terra per al plasmó que s'allunya (μ_r) i per al plasmó que s'apropa (μ_a).
- El març de 1994, la radiofont GRS1915+105 va emetre dos plasmons per als quals es van mesurar unes velocitats aparents de $D\mu_a = 1,25 \pm 0,15 c$ i $D\mu_r = 0,65 \pm 0,08 c$ (el que de fet s'observa directament és $\mu_{r,a}$ i es determina D per altres mitjans). Determineu la velocitat v dels plasmons i la direcció d'ejecció.

- 2.6 Pot definir-se la longitud d'un regle mòbil multiplicant la seva velocitat per l'interval de temps transcorregut en passar els dos extrems per un mateix punt del sistema que el veu moure's. Demostreu que amb aquesta definició obtenim el mateix resultat que amb la definició estàndard.

- 2.7 Un coet de longitud pròpia 10 m s'allunya de la Terra amb una velocitat de $0,8c$. Enviem un senyal lluminós que arriba a la cua del coet a l'instant $t = 0$ segons els rellotges de la Terra i del coet. Calculeu, en ambdós sistemes, l'instant en què la llum arriba al cap del coet. Si allà sofreix una reflexió i torna enrere, calculeu l'instant en què arriba a la cua en els dos sistemes i compareu els resultats.
- 2.8 A l'interior d'una habitació fosca una barra recta de longitud pròpia l_0 es mou en un pla vertical, la barra forma un angle α amb l'horitzontal i es propaga amb una velocitat uniforme \vec{v} paral·lela a terra.
- (a) Quin és l'angle que forma la barra amb el terra en el sistema de referència propi de la barra? En un cert instant de temps el sostre de l'habitació emet fotons en direcció vertical. (b) Calculeu la longitud de l'ombra de la barra sobre el terra en funció de l_0 , α i la velocitat de la barra. (c) Quines són les longituds màxima i mínima que pot tenir l'ombra en funció de l'angle α ? Justifiqueu el resultat.
- 2.9 Un feix de mesons K^+ que es propaga a una velocitat constant $(\sqrt{3}/2)c$ passa per dos comptadors separats per una distància de 9 m. Com que aquestes partícules són inestables es desintegren en vol. A causa d'aquest fet pel primer comptador en passen 1.000 i pel segon només en passen 250. Determineu la vida mitjana dels K^+ en el seu sistema en repòs.
- 2.10 Dos fotons es propaguen en la direcció de l'eix x separats per una distància l . Calculeu la distància que els separa en un sistema de referència que es mou amb velocitat v en la direcció de l'eix x :
- (a) quan la velocitat és en sentit positiu de l'eix x , i (b) quan és en sentit contrari. Apliqueu el resultat al cas $v = 0,8c$.
- (c) Podeu relacionar el resultat amb la contracció de Lorentz? Per què?
- 2.11 Un carret roda sobre una taula a velocitat v . Un altre de més petit roda sobre el primer a velocitat v respecte al primer. Sobre el segon n'hi ha un altre i així successivament. Fent ús de la transformació de Lorentz amb funcions hiperbòliques trobeu la velocitat v_n de l' n -èsim carret respecte a la taula, i el $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Capítol 3

Òptica relativista

3.1 Fenòmens ondulatoris

Amb els conceptes cinemàtics desenvolupats fins aquí ja estem en condicions de tractar diversos fenòmens òptics des d'un punt de vista relativista. La descripció i les argumentacions que donarem tot seguit són extensives a qualsevol altre fenomen ondulatori, excepte si en algun cas utilitzem la invariància de la velocitat de la llum en el buit.

Una ona es caracteritza perquè la intensitat d'una certa magnitud física — per exemple, el camp electromagnètic, la pressió de l'aire, la concentració d'un compost químic, la temperatura, etc.— depèn del lloc de l'espai i del temps. A més, aquesta propietat es propaga en un medi o en el buit d'acord amb unes regles. La llei de propagació més elemental és el *principi de Huygens*, segons el qual en un instant donat tots els punts del front de l'ona actuen com a focus emissors d'ones esfèriques. El front d'ona corresponent a l'instant immediatament posterior és la superfície envolupant del conjunt d'aquestes esferes infinitesimals.

3.1.1 Fronts d'ona

En un instant donat, t , els punts de l'espai que es troben en un mateix estat d'excitació pel que fa a aquesta magnitud es troben sobre una superfície d'equació:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \text{constant}$$

que anomenarem *front d'ona*.

La família de superfícies $\Phi(\vec{x}, t) = C_1$, amb C_1 fix i t variable dona les posicions successives dels fronts d'ona. Un *raig* és qualsevol línia que en cada punt és perpendicular al front d'ona que hi passa.

La família dels fronts d'ona i la família dels raigs corresponents donen dues descripcions complementàries (dual l'una de l'altra) i equivalents de la propagació de l'ona.

Per definir la velocitat de propagació d'una ona, denotem per \mathcal{S}_t el front d'ona en l'instant t , i suposem que passa per \vec{x} , és a dir, $\Phi(\vec{x}, t) = 0$. En l'instant $t + dt$ el front d'ona s'haurà desplaçat i serà \mathcal{S}_{t+dt} . El punt d'intersecció d'aquest segon front d'ona amb el raig que passa per \vec{x} serà de la forma $\vec{x} + dl \hat{n}$, on \hat{n} és el vector unitari normal a \mathcal{S}_t en \vec{x} —i per tant serà proporcional a $\vec{\nabla}\Phi$. Pel fet d'estar sobre el front d'ona \mathcal{S}_{t+dt} tindrem:

$$\Phi(\vec{x} + dl \hat{n}, t + dt) = 0.$$

Això es representa en la figura 3.1, i es pot interpretar com si la pertorbació es propagués al llarg dels raigs, ortogonalment als fronts d'ona, de manera que en el temps dt es desplaça una distància dl en la direcció \hat{n} . La *velocitat de propagació* és doncs: $v \equiv dl/dt$.

De restar $\Phi(\vec{x} + dl \hat{n}, t + dt) - \Phi(\vec{x}, t) = 0$ i quedar-nos amb els termes de primer ordre obtenim:

$$v = -\frac{\partial_t \Phi(\vec{x}, t)}{\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}, t)} = -\frac{\partial_t \Phi(\vec{x}, t)}{|\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}, t)|}, \quad (3.1)$$

on hem usat que \hat{n} i $\vec{\nabla} \Phi$ són paral·lels.

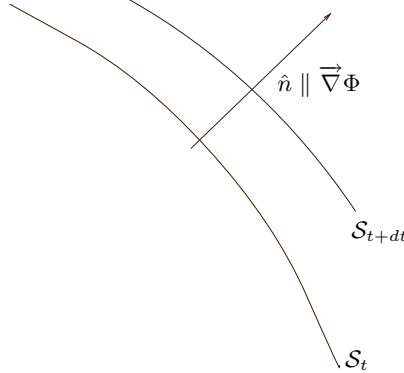


Figura 3.1. Propagació dels fronts d'ona

3.1.2 Ones planes monocromàtiques

En general, qualsevol ona que satisfaci el principi de superposició, es pot expressar, fent ús dels desenvolupaments de Fourier, com a suma d'ones elementals, les quals tenen una freqüència ben definida i els fronts d'ona són plans. S'anomenen *ones planes monocromàtiques*.

Una ona elemental d'aquestes té tres característiques: la freqüència, ν , el mòdul de la velocitat amb què es propaga l'ona, v , i la direcció de propagació, \hat{n} . Una de

les possibles expressions matemàtiques de les ones planes és:

$$\Phi(\vec{x}, t) = A \cos[2\pi(\vec{n} \cdot \vec{x} - \nu t)]. \quad (3.2)$$

Els punts de l'espai que en un instant donat tenen el mateix estat d'excitació són aquells en què $\Phi(\vec{x}, t) = C$ constant, és a dir:

$$2\pi(\vec{n} \cdot \vec{x} - \nu t) = \arccos \frac{C}{A},$$

que pel fet que la funció \arccos és multivaluada dona una família de plans paral·lels equidistants. En particular, per a $C = A$ (excitació màxima) tenim:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \nu t + m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (3.3)$$

que anomenem *crestes*. En augmentar t , el valor del segon membre augmenta i la cresta m -èsima es desplaça en el sentit que indica \vec{n} .

Si en l'instant t la cresta m -èsima passa pel punt \vec{x} , en l'instant $t + 1/\nu$ hi passarà la cresta $(m + 1)$ -èsima. $T = 1/\nu$ és el temps transcorregut entre el pas de dues crestes consecutives pel mateix lloc i s'anomena *període de l'ona*, mentre que ν és el nombre de crestes que passen per un lloc en una unitat de temps i s'anomena *frequència*.

En un mateix instant t , les crestes m -èsima i $(m + 1)$ -èsima són els dos plans paral·lels (figura 3.2):

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \nu t + m; \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \text{i} \quad \vec{n} \cdot \vec{x} = \nu t + m + 1,$$

de manera que si considerem dos punts \vec{x}_1 i \vec{x}_2 , un sobre cada pla, tindrem $\vec{n} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = 1$. La distància entre les dues crestes serà doncs:

$$\lambda \equiv \hat{n} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \frac{1}{|\vec{n}|},$$

que s'anomena *longitud d'ona*. La inversa de la longitud d'ona és el *nombre d'ona*, $|\vec{n}|$ (nombre d'ones per unitat de longitud en la direcció de propagació). Finalment, el *vector d'ona* és $\vec{n} = |\vec{n}| \hat{n}$.

Si dividim la distància entre dues crestes λ pel temps T que triguen a passar dues crestes consecutives pel mateix punt, tindrem la velocitat de propagació dels fronts d'ona

$$c_1 = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu = \frac{\nu}{|\vec{n}|}, \quad (3.4)$$

que també s'anomena *velocitat de fase* perquè és la velocitat a què es desplacen els plans de fase constant.

Si haguéssim aplicat la fórmula (3.1) a l'equació del front d'ona (3.2) hauríem obtingut el mateix resultat.

Imaginem ara una successió d'ones sinusoidals amb el perfil (3.2), però formada només per un nombre finit de crestes, aleshores parlarem d'un *tren d'ones finit*.

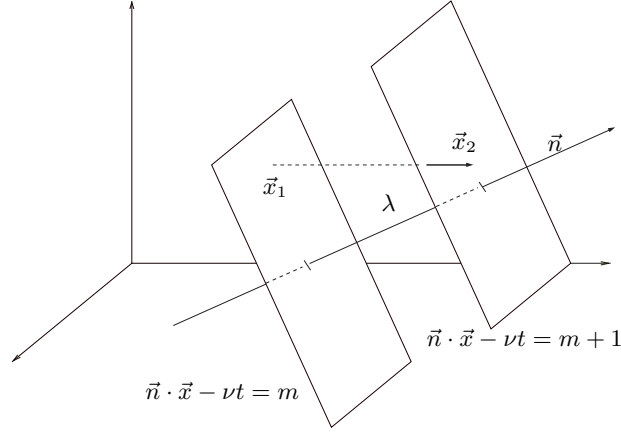


Figura 3.2. Propagació de fronts d'ona plans

3.2 Transformació dels fronts d'ones planes i monocromàtiques

En aquest apartat estudiarem la relació entre les característiques d'una mateixa ona plana monocromàtica segons dos sistemes de referència inercials diferents.

Considerem un tren d'ones planes format per $M + 1$ crestes, de manera que en l'instant t_1 l'última passi pel punt \vec{x}_1 i en l'instant t_2 el cap del tren d'ones passi pel punt \vec{x}_2 . De restar les equacions dels plans ocupats per aquestes crestes tindrem:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) - \nu (t_2 - t_1) = M,$$

el nombre d'ones que formen el tren.

Aquesta quantitat, el nombre d'ones que formen el tren, és quelcom físic i no pot dependre de l'observador. Això vol dir que la quantitat $\vec{n} \cdot \Delta \vec{x} - \nu \Delta t$, amb $\Delta \vec{x} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ i $\Delta t \equiv t_2 - t_1$, ha de ser la mateixa en qualsevol sistema i qualsevulla que siguin \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , t_1 i t_2 . Així, per a dos sistemes de referència inercials amb \mathcal{S}' que es mou a una velocitat \vec{v} respecte a \mathcal{S} , podem escriure:

$$\vec{n} \cdot \Delta \vec{x} - \nu \Delta t = \vec{n}' \cdot \Delta \vec{x}' - \nu' \Delta t'. \quad (3.5)$$

De la inversa de les transformacions de Lorentz (2.14, 2.15) tenim

$$\begin{aligned} \Delta \vec{x} &= \Delta \vec{x}' + (\gamma - 1)(\vec{v} \cdot \Delta \vec{x}')\vec{v}/v^2 + \gamma \vec{v} \Delta t', \\ \Delta t &= \gamma(\Delta t' + \vec{v} \cdot \Delta \vec{x}'/c^2), \end{aligned}$$

que un cop substituïdes a (3.5), i tenint en compte que el resultat ha de valer per

a qualssevol Δt i $\Delta \vec{x}$, donen:

$$\vec{n}' = \vec{n} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \gamma \vec{v} \frac{\nu}{c^2}, \quad (3.6)$$

$$\nu' = \gamma(\nu - \vec{v} \cdot \vec{n}). \quad (3.7)$$

Com que la velocitat de propagació és $c_1 = \nu/|\vec{n}|$, podem escriure (3.7) com:

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \vec{v} \cdot \hat{n}/c_1), \quad (3.8)$$

on \hat{n} és el vector unitari en la direcció de propagació.

3.2.1 Efecte Doppler

El canvi de freqüència, (3.8), es coneix amb el nom d'*efecte Doppler*, i es produeix quan un receptor R rep una ona emesa per un emissor E que es mou respecte a ell.

Suposem que l'emissor E és estacionari en el sistema \mathcal{S}' , que es mou amb una velocitat \vec{v} respecte a \mathcal{S} , el sistema en què el receptor R és en repòs. Denotem ara per ν_A , \hat{n}_A i c_{1A} , les característiques d'una ona plana monocromàtica en els sistemes de l'emissor ($A = E$) i del receptor ($A = R$). Aquestes quantitats estaran relacionades per (3.8), que escriurem ara:

$$\nu_R = \frac{\nu_E}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}_R}{c_{1R}} \right)}. \quad (3.9)$$

En general, doncs, la freqüència de l'ona rebuda és diferent de l'emesa.

Tenim dos casos extrems de la relació (3.9) segons que receptor i emissor es moguin radialment o transversalment. Així quan l'emissor s'allunya radialment del receptor, $\hat{n}_R \cdot \vec{v} = -v$ i, com que $c_{1R} \leq c$,

$$\nu_R = \nu_E \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c_{1R}} \leq \nu_E \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \leq \nu_E,$$

de manera que tenim desplaçament cap al roig.

Si l'emissor s'apropa radialment al receptor, llavors $\hat{n}_R \cdot \vec{v} = v$ i, com que $c_{1R} \leq c$, tenim:

$$\nu_R = \nu_E \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c_{1R}} \geq \nu_E \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \geq \nu_E,$$

i tenim desplaçament cap al blau.

En el cas que el moviment relatiu sigui transversal, $\hat{n}_R \cdot \vec{v} = 0$, tenim $\nu_R = \gamma^{-1}\nu_E$, que es coneix com a efecte Doppler transvers. Aquest no té paral·lel a la mecànica newtoniana i de fet només és una manifestació de la dilatació temporal.

3.2.2 L'aberració estel·lar

Un altre efecte que hem tractat clàssicament és l'aberració estel·lar o el canvi de direcció de la llum rebuda dels estels a causa del moviment de translació de la Terra en la seva òrbita. Això dóna com a resultat un moviment anual dels estels fixos sobre una el·lipse amb un semieix major d'uns 21" d'arc —el mateix per a tots— i una excentricitat que depèn de l'altura de l'estel sobre el pla de l'eclíptica. A la secció 1.4.2, en tractar aquest problema del punt de vista newtonià, utilitzàvem una teoria corpuscular de la llum, per bé que el mateix resultat es pot obtenir amb una teoria ondulatoria.

En aquest cas farem servir una teoria ondulatoria i ens és útil la fórmula (3.6), però dividint pel nombre d'ona i utilitzant que, en tractar-se de llum que es propaga en el buit, $c_{1R} = c_{1E} = c$. Així tenim:

$$\hat{n}' = \frac{\nu}{\nu'} \left(\hat{n} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\hat{n} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right).$$

Aquí \mathcal{S} és el sistema de referència estacionari respecte als estels fixos i \mathcal{S}' , el sistema inercial que instantàniament es mou amb la Terra. Les direccions $\hat{\tau} = -\hat{n}$ i $\hat{\tau}' = -\hat{n}'$ en què s'han d'apuntar els telescopis estacionaris en \mathcal{S} i \mathcal{S}' per rebre l'ona plana procedent de l'estel —figura 3.3— guardaran la relació

$$\hat{\tau}' = \frac{1}{\gamma(1 + \vec{v} \cdot \hat{\tau}/c)} \left(\hat{\tau} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\hat{\tau} \cdot \vec{v}) \vec{v} + \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right), \quad (3.10)$$

on hem usat també (3.8).

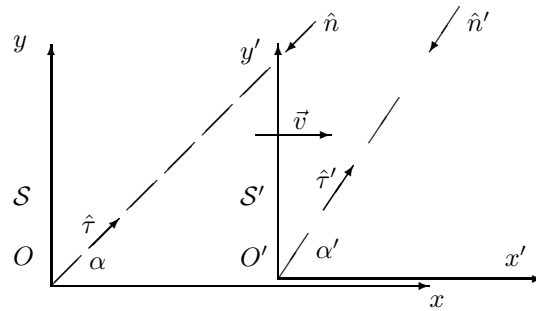


Figura 3.3. Aberració estel·lar amb una direcció d'incidència de la llum \hat{n} segons \mathcal{S}

Suposem, per simplificar, que prenem l'eix x en la direcció del moviment de la Terra respecte als estels i l'eix y de manera que el pla xy contingui la direcció \hat{n} , tal com s'indica a la figura 3.3. Així, en el sistema \mathcal{S} de l'estel, el telescopi s'ha d'apuntar en la direcció $\hat{\tau} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, mentre que des del sistema \mathcal{S}'

de la Terra, s'ha d'apuntar en la direcció $\hat{r}' = (\cos \alpha', \sin \alpha', 0)$. Si ara utilitzem l'equació (3.10), per a els dos components tenim:

$$\begin{aligned}\cos \alpha' &= \frac{c \cos \alpha + v}{c + v \cos \alpha}, \\ \sin \alpha' &= \frac{\sin \alpha}{\gamma(1 + v/c \cos \alpha)}\end{aligned}$$

i dividint el component y' per la x' obtenim el resultat relativista per a l'aberració estel·lar:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma(\cos \alpha + v/c)}. \quad (3.11)$$

Notem que l'única diferència amb el resultat no relativista (1.18) rau en el factor γ del denominador, que per a velocitats petites comparades amb c tendeix a 1.

3.2.3 Fórmula de Fresnel

Una altra conseqüència notable de les fórmules de transformació (3.6) i (3.8) és la fórmula de Fresnel per a la propagació de la llum en un medi refringent en moviment, que en el marc prerelativista (vegeu la secció 1.4.2) es coneixia com a efecte de l'*arrossegament parcial de l'èter*.

Suposem que tenim un medi transparent d'índex de refracció r_1 que es mou amb una velocitat \vec{v} respecte al sistema \mathcal{S} del laboratori. La velocitat de propagació de la llum respecte al sistema \mathcal{S}' en què el medi és en repòs és $c'_1 = c/r_1$. Per determinar-ne la velocitat respecte a \mathcal{S} utilitzarem la relació $c_1 = \nu/|\vec{n}|$ i també les fórmules inverses de (3.6) i (3.8). Per facilitar el càlcul descompondrem \vec{n} en els seus components paral·lel i perpendicular a la velocitat, així de (3.6) tindrem:

$$\vec{n}_\perp = \vec{n}'_\perp, \quad n_\parallel = \gamma(n'_\parallel + v\nu'/c^2)$$

i aleshores

$$|\vec{n}| = \left(\gamma^2(n'_\parallel + v\nu'/c^2)^2 + \vec{n}'_\perp{}^2 \right)^{1/2}.$$

Ara, si α és l'angle entre \vec{v} i \vec{n}' , tenim:

$$n'_\parallel = |\vec{n}'| \cos \alpha \quad \text{i} \quad |\vec{n}'_\perp| = |\vec{n}'| \sin \alpha,$$

que, després de substituir, ens dóna:

$$|\vec{n}| = \gamma |\vec{n}'| \left(1 + 2 \cos \alpha \frac{vc'_1}{c^2} + \frac{v^2 c'_1{}^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha \right)^{1/2},$$

que, tenint en compte la relació $c'_1 = \nu'/|\vec{n}'|$ i la seva homòloga en \mathcal{S} i fent servir (3.8), ens porta finalment a:

$$c_1 = c'_1 \frac{1 + v/c'_1 \cos \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha v c'_1 / c^2 + v^2 c'_1{}^2 / c^4 - v^2 / c^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}.$$

Per al cas particular d'una ona que es propaga en la direcció de la velocitat relativa entre els sistemes, és a dir $\alpha = 0$, tindrem:

$$c_1 = c'_1 \frac{1 + v/c'_1}{1 + vc'_1/c^2}.$$

Per a velocitats v petites comparades amb la de la llum podem aproximar aquesta expressió per

$$c_1 \approx c'_1 (1 + v/c'_1)(1 - vc'_1/c^2) \approx c'_1 \left(1 + \frac{v}{c'_1} - \frac{vc'_1}{c^2}\right)$$

o bé, en funció de l'índex de refracció r_1

$$c_1 \approx \frac{c}{r_1} + v \left(1 - \frac{1}{r_1^2}\right), \quad (3.12)$$

que és la fórmula que va donar Fresnel (vegeu l'apartat 1.4.2) i que aquí hem obtingut com una aproximació de la fórmula exacta relativista.

3.3 Mesures de l'efecte Doppler relativista

3.3.1 L'experiment d'Ives-Stilwell

La fórmula no relativista de l'efecte Doppler s'obté també a partir de (3.5) usant la transformació de Galileu (1.5, 1.3) en comptes de la transformació de Lorentz (2.14, 2.15), i dóna per a la llum:

$$\nu_R = \nu_E \frac{1 - \vec{v}_R \cdot \hat{n}/c}{1 - \vec{v}_E \cdot \hat{n}/c}, \quad (3.13)$$

on \hat{n} és el vector unitari en la direcció de propagació i \vec{v}_R i \vec{v}_E són, respectivament, les velocitats del receptor i la font respecte a l'èter.

A primer ordre en $1/c$ aquesta expressió es redueix a:

$$\nu_R = \nu_E \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c} + O(1/c^2)\right),$$

on $\vec{v} = \vec{v}_E - \vec{v}_R$ és la velocitat de l'emissor relativa al receptor, i coincideix amb l'aproximació al mateix ordre de (3.9). Les prediccions relativista i no relativista comencen a diferir al segon ordre d'aproximació, a causa fonamentalment del factor γ .

Si comparem les expressions per a la longitud d'ona, $\lambda = c/\nu$, tenim, respectivament:

relativista	$\lambda_R \approx \lambda_E \left[1 - \beta \cos \theta + \frac{1}{2}\beta^2\right]$
no relativista	$\lambda_R \approx \lambda_E \left[1 - \beta \cos \theta + (\vec{\beta}_R \cdot \hat{n})^2\right]$

on θ és l'angle que formen la direcció de propagació \hat{n} i la velocitat relativa \vec{v} .

Si el moviment de l'emissor respecte a l'èter és molt més ràpid que el del receptor, $v_R \ll v_E$, llavors $\beta \approx \beta_E \gg \beta_R$ i el terme de segon ordre de l'expressió no relativista és negligible. En aquest cas les dues expressions es poden unificar així:

$$\lambda_R \approx \lambda_E (1 - \beta \cos \theta + \beta^2 \alpha) \quad (3.14)$$

amb $\alpha = 1/2$ (cas relativista) o $\alpha = 0$ (cas no relativista).

El coeficient α es pot determinar experimentalment per l'observació de l'efecte Doppler transvers, ja que a $\theta = 90^\circ$ només hi ha efecte Doppler de segon ordre. La dificultat rau en el fet que a $\theta = 90^\circ$ la mesura és molt sensible a petites desviacions en la direcció d'observació, ja que $\delta \cos \theta = \sin \theta \delta \theta \approx \delta \theta$, i l'efecte de primer ordre fàcilment apantalla el de segon ordre.

En el disseny experimental d'Ives i Stilwell (1938)¹ s'evita aquest problema comparant els desplaçaments Doppler de la llum emesa pels raigs canals d'hidrogen en les direccions $\theta_1 = 7^\circ$ i $\theta_2 = 173^\circ$, com mostra la figura 3.4.

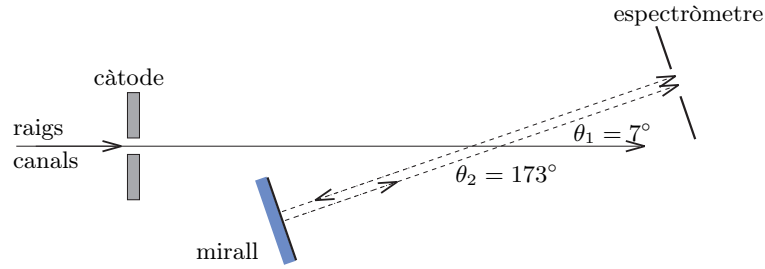
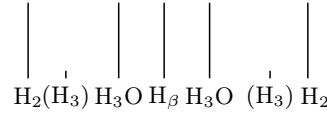


Figura 3.4. Observació de l'efecte Doppler en l'emissió de llum per raigs canals d'hidrogen

En l'experiment s'observa la ratlla H_β de longitud d'ona 4861 \AA . Per a cada valor del potencial accelerador l'espectrograma mostra una línia central i parelles de línies laterals, disposades simètricament a banda i banda, les més blaves produïdes per les emissions cap endavant, i les més vermelles per les emissions cap endarrere, que són recollides en l'espectròmetre després de ser reflectides en un mirall.



Cada parella de ratlles correspon a un àtom d'hidrogen associat en algun tipus de molècula (d'aquí la notació H_2 , H_3 , H_3O de la figura). Sota l'acció d'un mateix potencial, les molècules més pesants s'han accelerat menys, d'aquí que el desplaçament Doppler sigui més petit per a les ratlles marcades H_3O que per a les H_3 (absents en l'espectrograma mostrat) i que per a les H_2 .

¹IVES, H. E. i STILWELL, G. R., *J. Opt. Soc. Am.*, **28**, 215 (1938) i IVES, H. E. i STILWELL, G. R., *J. Opt. Soc. Am.*, **31**, 369 (1941).

Si apliquem (3.14), tindrem que les longituds d'ona de les ratlles laterals són:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\approx \lambda_0(1 - \beta \cos \theta_1 + \beta^2 \alpha), \\ \lambda_2 &\approx \lambda_0(1 + \beta \cos \theta_1 + \beta^2 \alpha),\end{aligned}$$

ja que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

La longitud d'ona de la ratlla central és λ_0 i la mitjana de les ratlles laterals és:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \approx \lambda_0 + \lambda_0 \beta^2 \alpha. \quad (3.15)$$

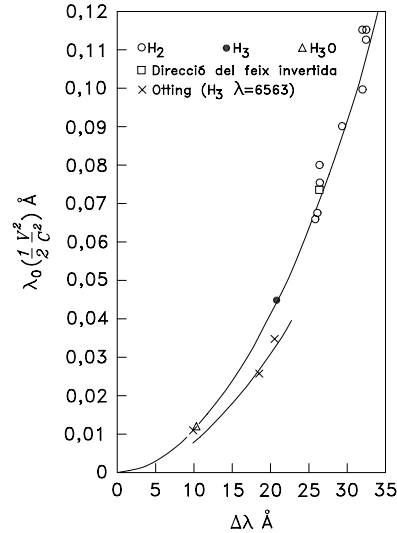
D'altra banda, la semidiferència:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \approx \beta \lambda_0 \cos \theta_1$$

ens permet de determinar β per mitjans òptics.

Els resultats obtinguts per a la línia H_β de la partícula de H_2 són els de la taula següent. En la gràfica es representa $\Delta'\lambda \equiv \lambda_m - \lambda_0$ en funció de $\Delta\lambda$ i la columna $\Delta'\lambda_{\text{calc}}$ de la taula està calculada per al cas relativista, $\alpha = 1/2$.

Voltatge	$\Delta\lambda_{\text{obs}}$	$\Delta'\lambda_{\text{obs}}$	$\Delta'\lambda_{\text{calc}}$
26735	25,82	0,0670	0,067
27270	26,05	0,0686	0,0675
28185	26,53	0,0724	0,080
28185	26,56	0,0725	0,0755
34395	29,40	0,0869	0,090
40190	31,93	0,1049	0,0995
41640	32,01	0,1054	0,1145
42260	32,50	0,1098	0,113
42280	32,29	0,1073	0,1145



Representació de $\Delta'\lambda$ en funció de $\Delta\lambda$

3.3.2 Altres experiments

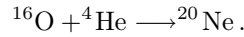
En un experiment recent, Hasselcamp et al. (1979),² s'ha mesurat el desplaçament Doppler transvers de la línia H_α emesa per raigs canals d'hidrogen ràpids, amb $0,84 \cdot 10^{-2} < \beta < 3,90 \cdot 10^{-2}$, per mitjà d'una observació transversal directa dels raigs canals. La mesura dóna per al coeficient

$$\alpha = 0,52 \pm 0,03,$$

²HASSEL CAMP, D., MONDRY, E. i SCHARMANN, A., *Z. Physik*, **A289**, 151 (1979).

que s'ajusta bé al valor teòric $1/2$.

Un altre experiment de disseny similar al d'Ives i Stilwell, perquè obté el desplaçament transvers ($\theta = 90^\circ$) per comparació dels desplaçaments per a 0° i 180° , és el d'Olin et al. (1973).³ En comptes d'observar una transició òptica en els raigs canals com el primer, utilitza els raigs gamma de 8,64 MeV ($\nu \approx 2 \cdot 10^{21}$ Hz) d'una transició dels nuclis de ^{20}Ne produïts en la reacció



Aquests nuclis surten en un estat excitat i en desexcitar-se emeten els raigs gamma de 8,64 MeV. D'altra banda, la velocitat de retrocés dels nuclis de ^{20}Ne és força ben definida, tant quan el raig de ^{16}O incideix sobre un fitó de ^4He com quan és a la inversa. Aquesta velocitat es pot determinar per mètodes cinemàtics o a partir de l'efecte Doppler transvers i la relació (3.15) amb $\alpha = 1/2$. El resultat de l'experiment es resumeix en la taula següent:

	β (fitó de ^4He)	β (fitó de ^{16}O)
Desplaçament Doppler	$0,048\,736 \pm 0,000\,024$	$0,012\,242 \pm 0,000\,029$
Cinemàtica	$0,048\,721 \pm 0,000\,009$	$0,012\,192 \pm 0,000\,003$

3.3.3 L'efecte Doppler i els espectres d'emissió i absorció

D'acord amb les observacions acumulades de l'espectroscòpia atòmica, recollides per la teoria quàntica, l'emissió i l'absorció de radiació electromagnètica pels àtoms es produeix a unes freqüències característiques que constitueixen l'espectre d'un element. Aquest espectre es manifesta en una seqüència de ratlles brillants (*espectre d'emissió*) que corresponen a la radiació emesa per les transicions dels electrons entre diversos nivells energètics de l'àtom o alternativament en ratlles fosques (*espectre d'absorció*) sobre el fons de l'espectre de descomposició de la llum blanca que corresponen a freqüències absorbides pels electrons en saltar a nivells energètics més alts. Aquestes freqüències estan afectades per l'efecte Doppler associat al moviment dels àtoms.

Uns arguments semblants s'apliquen també a l'emissió i absorció de raigs gamma per un nucli en passar d'un estat energètic a un altre.

Hi intervenen diversos moviments, amb els desplaçaments de freqüència corresponents. En primer lloc, la radiació emesa s'emporta energia i moment lineal en la direcció d'emissió. Aquest darrer és compensat per un retrocés de l'àtom emissor que es manifesta en un desplaçament cap al roig de la radiació emesa. No es tracta exactament d'un desplaçament Doppler. (Per a una discussió dinàmica dels processos d'emissió i absorció electromagnètica, vegeu l'apartat 5.2.1.)

³OLIN, A., ALEXANDER, T. K., HÄUSSER, O., McDONALD, A. B. i EWAN, G. T., *Phys. Rev.*, **D8**, 1633 (1973).

Aquest desplaçament en la freqüència de la radiació emesa té un valor ben definit i depèn de la freqüència de la radiació i de la massa de l'emissor. Si l'àtom efectua una transició entre dos nivells $E_1 \rightarrow E_2$, amb diferència d'energies $E_1 - E_2 = h\nu_0$, la freqüència de la radiació emesa és:

$$\nu_e = \nu_0 - \delta\nu_e. \quad (3.16)$$

Per a petites velocitats tenim $h\delta\nu_e \approx \frac{(h\nu_e)^2}{2Mc^2}$, que correspon a l'energia cinètica que s'emporta el retrocés, i M és la massa de l'emissor. Per exemple, per a l'àtom d'hidrogen tenim $h\nu_e \leq 13,6 \text{ eV}$, $2Mc^2 \approx 2 \cdot 10^9 \text{ eV}$ i aleshores $h\delta\nu_e \approx 10^{-7} \text{ eV}$.

En l'absorció es dona un efecte semblant. L'àtom receptor recula perquè ha de recollir tant l'energia com la quantitat de moviment de la radiació. Aquest retrocés es manifesta en un desplaçament cap al roig de la freqüència de la radiació absorbida.

Si l'absorció ha de produir la transició inversa $h\nu_0$ en un àtom del mateix tipus (absorció ressonant), haurem de tenir:

$$\nu_0 = \nu_e - \delta\nu_a, \quad (3.17)$$

on ν_e és la freqüència de la radiació incident en el sistema laboratori. Com abans, $h\delta\nu_a \approx \frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2}$, i tampoc no és pròpiament un desplaçament Doppler (vegeu l'apartat 5.2.1 esmentat).

L'amplada natural de les ratlles

Pel fet que un àtom, nucli, molècula, etc. estigui en un estat excitat pot passar d'aquest estat a un altre de menys energia. Això fa que la duració de la vida de l'estat quàntic no sigui infinita. Un tractament mecanicoquàntic de l'emissió de radiació mostra que el nombre d'àtoms en un estat excitat decreix amb el temps d'acord amb la llei $N = N_0 e^{-2\Gamma t}$, on $\tau_0 = 1/(2\Gamma)$ és el que s'anomena *vida mitjana* de l'estat. Pel mateix motiu, l'amplitud del camp de radiació emès disminueix segons la llei

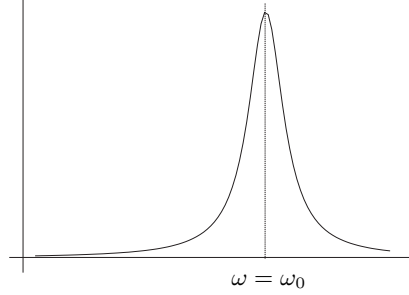
$$F(t) = F_0 e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t), \quad t > 0, \quad (3.18)$$

on $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = (E_i - E_f)/\hbar$. E_i i E_f són les energies dels estats inicial i final respectivament i F_0 és una amplitud real.

Per mitjà de la transformada de Fourier, l'expressió (3.18) es pot descompondre com a superposició d'ones monocromàtiques de freqüència angular ω i amplitud

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = F_0 \left(\frac{1}{\Gamma + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\Gamma + i(\omega + \omega_0)} \right).$$

$|\hat{F}(\omega)|^2$ ens dóna la proporció amb què l'ona de freqüència ω contribueix a la intensitat total. Té l'aspecte que es mostra a la figura i presenta un màxim molt a prop de ω_0 . En la proximitat d'aquesta freqüència tenim que $|\omega - \omega_0| \ll |\omega + \omega_0|$. A més normalment $\Gamma \ll |\omega + \omega_0|$ i podem aproximar



$$|\hat{F}(\omega)|^2 \approx \frac{F_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2}.$$

L'amplada de la gràfica a meitat del màxim és $\Gamma = 1/(2\tau_0)$, es coneix com a *amplada natural de la línia espectral* i indica que totes les freqüències de l'interval $\omega_0 \pm \Gamma$ contribueixen de manera notable a la radiació emesa (3.18).

L'amplada tèrmica

Un altre tipus d'eixamplament de les línies espectrals és degut al moviment d'agitació tèrmica dels àtoms emissors. Les seves velocitats es distribueixen estadísticament segons una llei de distribució isòtropa on

$$f(\vec{v}) d^3v = f(v) v^2 dv d^2\Omega(\theta, \phi)$$

dóna la probabilitat que la velocitat d'un àtom emissor estigui compresa en el cub de vèrtexs \vec{v} i $\vec{v} + d\vec{v}$. La funció $f(v)$ depèn de la temperatura absoluta T .

Com que la direcció de \vec{v} és aleatòria, el denominador de (3.9) tant pot ser més gran com més petit que 1 i, en conseqüència, la freqüència de la radiació emergent ν'_e serà, respectivament, més petita o més gran que ν_e (la que correspondria a l'emissor inicialment en repòs). Com a resultat, cada ratlla de l'espectre d'emissió d'un element és una banda de freqüències d'amplada finita que resulta de la superposició de línies infinitesimals, amb freqüències ν'_e que varien al voltant de ν_e . La brillantor de la línia infinitesimal ν'_e depèn de la proporció d'àtoms emissors amb una velocitat \vec{v} justa perquè el desplaçament Doppler doni precisament aquesta freqüència. La freqüència mitjana corresponent a la ratlla de l'espectre observat és:

$$\langle \nu'_e \rangle = \nu_e \int_{|\vec{v}| < c} \frac{f(v) v^2}{\gamma (1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)} dv d^2\Omega(\theta, \phi) \quad (3.19)$$

i l'amplada de la ratlla ve donada per la desviació estàndard:

$$\sigma = \sqrt{\langle (\nu'_e - \langle \nu'_e \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \nu'^2_e \rangle - \langle \nu'_e \rangle^2}.$$

Tant el desplaçament $\langle \nu'_e \rangle - \nu_e$ com l'amplada σ són funció de la temperatura absoluta T de l'emissor. Un argument idèntic s'aplica a les ratlles fosques de l'espectre d'absorció.

Exemple 3.1

La distribució relativista de Maxwell-Boltzmann, que correspon a l'estat d'equilibri d'un gas relativista de partícules que només interaccionen per xocs, és:⁴

$$f(\vec{\beta})d^3\beta = \frac{\mu}{4\pi K_2(\mu)} \gamma^5 e^{-\mu\gamma} \beta^2 d\beta d^2\Omega(\theta, \phi), \quad (3.20)$$

on

$$\mu \equiv \frac{mc^2}{kT}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad 0 < \beta < 1,$$

m és la massa pròpia de cada partícula del gas, k la constant de Boltzmann, T la temperatura, θ, ϕ determinen l'orientació de $\vec{\beta}$, i $K_2(\mu)$ és la funció de Bessel modificada de segona espècie.

Suposem ara que cada partícula pot emetre llum a una freqüència pròpia ν_e . La freqüència rebuda en el laboratori estarà afectada per l'efecte Doppler, segons la velocitat i direcció del moviment en l'instant de l'emissió. La freqüència mitjana $\langle \nu'_e \rangle$ s'obté de substituir (3.20) en (3.19):

$$\begin{aligned} \langle \nu'_e \rangle &= \nu_e \frac{\mu}{4\pi K_2(\mu)} \int_0^1 e^{-\mu\gamma} \gamma^4 \beta^2 d\beta \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \beta \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\nu_e \mu}{2K_2(\mu)} \int_0^1 e^{-\mu\gamma} \gamma^4 \beta \log \left[\frac{1+\beta}{1-\beta} \right] d\beta, \end{aligned}$$

que per mitjà del canvi: $\beta = \text{th } \zeta$ es redueix a

$$\langle \nu'_e \rangle = \frac{\nu_e \mu}{K_2(\mu)} \int_0^1 e^{-\mu \cosh \zeta} \cosh \zeta \sinh \zeta d\zeta.$$

Després d'una integració per parts, arribem a l'expressió següent:

$$\langle \nu'_e \rangle = \frac{\nu_e}{K_2(\mu)} \left(-\partial_\mu + \frac{1}{\mu} \right) \int_0^1 e^{-\mu \cosh \zeta} d\zeta.$$

La integral del segon membre és la funció de Bessel modificada $K_0(\mu)$, i utilitzant les relacions de recurrència de les funcions de Bessel s'arriba a:

$$\langle \nu'_e \rangle = \nu_e \frac{\mu K_1(\mu) + K_0(\mu)}{\mu K_2(\mu)}. \quad (3.21)$$

El producte kT té dimensions d'energia i dona una mesura de l'energia cinètica mitjana de les partícules del gas. En el límit no relativista, aquesta energia és molt inferior a l'energia en repòs de cada partícula: $kT \ll mc^2$, i es pot fer l'aproximació

⁴SYNGE, J. L., *The relativistic gas*, North Holland (Amsterdam, 1957).

$\mu \gg 1$. Si utilitzem les aproximacions asimptòtiques de les funcions $K_n(\mu)$ en l'expressió (3.21) tenim l'aproximació no relativista:

$$\langle \nu'_e \rangle \approx \nu_e \left(1 - \frac{1}{2\mu} \right) = \nu_e \left(1 - \frac{kT}{2mc^2} \right). \quad (3.22)$$

Per determinar l'amplada de la línia de l'espectre observat en el laboratori, haurem de calcular:

$$\begin{aligned} \langle \nu_e'^2 \rangle &= \frac{\nu_e^2 \mu}{4\pi K_2(\mu)} \int_0^1 e^{-\mu\gamma} \gamma^3 \beta^2 d\beta \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\nu_e^2 \mu}{K_2(\mu)} \int_0^1 e^{-\mu\gamma} \gamma^5 \beta^2 d\beta = \nu_e^2. \end{aligned}$$

On hem usat, com abans, l'expressió integral de la funció $K_0(\mu)$ i les relacions de recurrència de les funcions de Bessel.

L'amplada de la línia és doncs:

$$\sigma = \sqrt{\langle \nu_e'^2 \rangle - \langle \nu_e' \rangle^2} = \nu_e \sqrt{1 - \left(\frac{\langle \nu_e' \rangle}{\nu_e} \right)^2}, \quad (3.23)$$

que en l'aproximació no relativista, $\mu \gg 1$, dóna:

$$\sigma \approx \frac{\nu_e}{\sqrt{\mu}} = \nu_e \sqrt{\frac{kT}{mc^2}}.$$

Valors típics per a àtoms de l'amplada natural per a les línies de l'espectre òptic són $\Gamma \approx 10^8 - 10^9 \text{ s}^{-1}$, que són menors que les provocades per l'excitació tèrmica (per a la línia groga del sodi a 500 K de temperatura tenim $\sigma \approx 10^{10} \text{ s}^{-1}$). Aquesta relació canvia quan ens referim a l'eixamplament de les ratlles en la zona de l'espectre de les microones i de les freqüències ràdio, per a les quals l'eixamplament tèrmic és menor que el natural a les temperatures que es troben usualment al laboratori.

En resum, els moviments de retrocés en l'emissió i l'absorció provoquen un desplaçament net de les ratlles de l'espectre. A més, la vida mitjana finita dels estats de l'emissor és la causa de l'eixamplament natural i, sobreposat a aquests efectes, el desplaçament Doppler associat a l'agitació tèrmica produeix alhora un desplaçament i un eixamplament.

Considerem ara la radiació emesa per un àtom quan un electró fa una transició de E_1 a $E_2 = E_1 - h\nu_0$. Si aquesta radiació és absorbida per un altre àtom del mateix element, podrà provocar la transició inversa? En aquest cas parlariem d'*absorció ressonant*.

Si tenim en compte (3.17) i (3.16), la freqüència de la radiació absorbida és:

$$\nu_a = \nu_e - \delta\nu_a = \nu_0 - (\delta\nu_a + \delta\nu_e) < \nu_0.$$

En conseqüència, no hi ha absorció ressonant llevat que moguem l'absorbent per tal de produir un desplaçament cap al blau que compensi l'efecte dels dos retrocessos, $\delta\nu_e + \delta\nu_a$.

Una altra possibilitat és que, a causa de les amplades σ_e i σ_a de les ratlles d'emissió i d'absorció, el desplaçament $\delta\nu_e + \delta\nu_a$ no sigui suficient per eliminar-ne el solapament. Concretant, si tenim en compte les amplades de les ratlles, les relacions (3.16) i (3.17) s'han de substituir respectivament per:

$$\begin{array}{ll} \text{emissió} & |\nu_e + \delta\nu_e - \nu_0| < \sigma_e \\ \text{absorció} & |\nu_0 + \delta\nu_a - \nu_e| < \sigma_a \end{array}$$

i la condició perquè sigui possible l'absorció ressonant és:

$$|\delta\nu_e + \delta\nu_a| = |(\nu_e + \delta\nu_e - \nu_0) + (\nu_0 + \delta\nu_a - \nu_e)| < \sigma_e + \sigma_a.$$

3.3.4 Mesures basades en l'efecte Mösbauer

El descobriment de l'efecte Mösbauer (1958) va ser de gran utilitat per a la mesura del desplaçament Doppler de segon ordre. L'efecte consisteix en el fet que, per a determinades transicions gamma en nuclis inserits en una xarxa cristal·lina, el retrocés associat a l'emissió és absorbit per tot el cristall. En aquest cas, el desplaçament de la línia de l'espectre associat a l'emissió és (en l'aproximació de petites velocitats):

$$h\delta\nu_e \approx \frac{(h\nu_e)^2}{2M_C c^2},$$

on M_C és la massa del cristall (típicament està entre 10^{19} i 10^{22} vegades la massa del nucli) i l'efecte del retrocés és pràcticament inexistent. El mateix passa amb l'absorció.

Una radiació gamma que presenta efecte Mösbauer és la transició de 14,4 keV del ^{57}Fe , i ha estat utilitzada en múltiples experiments.

Considerem, per exemple, l'efecte de la temperatura (3.19). El desplaçament Doppler de primer ordre tant pot ser cap al roig com cap al blau, en funció de la direcció del moviment d'agitació tèrmica, i com que hem d'omitir per a totes les velocitats i direccions possibles dels emissors, l'efecte de primer ordre associat a l'agitació tèrmica és nul. Ara bé v^2/c^2 sempre és positiu i no depèn de la direcció i en fer la mitjana no s'anul·la. Això comporta un desplaçament Doppler transvers mitjà:

$$\frac{\delta\nu_e}{\nu_0} \approx -\frac{v_e^2}{2c^2} = -CT_e$$

proporcional a la temperatura absoluta de l'emissor, on el coeficient C depèn de la funció de distribució $f(v)$ més adient per descriure el comportament del material emissor (o absorbent) en les condicions de l'experiment.

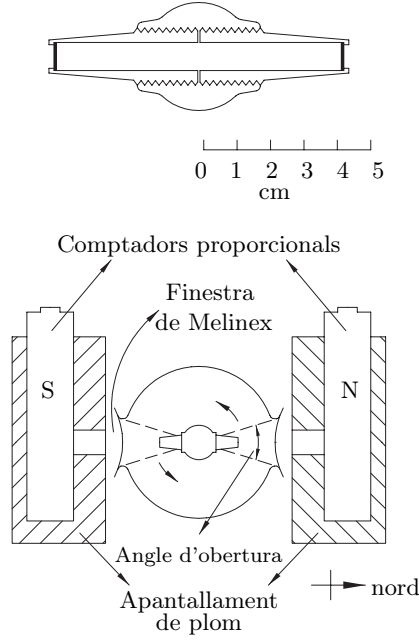


Figura 3.5. Perfil i planta del rotor de l'experiment de Hay et al. (1960). (Òbviament la planta i el perfil no estan a la mateixa escala.)

Si emissor i absorbent estan a temperatures diferents, hi haurà un desplaçament Doppler relatiu:

$$\frac{\delta\nu}{\nu_0} \approx \frac{\delta\nu_e - \delta\nu_a}{\nu_0} = -C(T_e - T_a).$$

Per al ^{57}Fe a temperatura ambient, el coeficient val $C = -2,21 \cdot 10^{-15} \text{ K}^{-1}$. Pound i Rebka (1960)⁵ van mesurar aquest efecte i van trobar una llei del tipus:

$$\left(\frac{\delta\nu_e}{\nu_0} \right)_{\text{obs}} = -(2,09 \pm 0,24) 10^{-15} \Delta T$$

que concorda amb la predicció relativista.

En un altre tipus de mesures de l'efecte Doppler transvers s'utilitza un rotor com el de la figura 3.5.

En l'experiment de Hay et al. (1960),⁶ s'estudia l'absorció ressonant dels raigs gamma de 14,4 keV del ^{57}Fe , entre un emissor i un receptor situats sobre un diàmetre del rotor a diferents distàncies del centre: R_E per a l'emissor i R_A per

⁵POUND, R. V. i REBKA, G. A. JR., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 274 (1960).

⁶HAY, H. J., SCHIFFER, J. P., CRANSHAW, T. E. i EGELSTAFF, P. A., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 165 (1960).

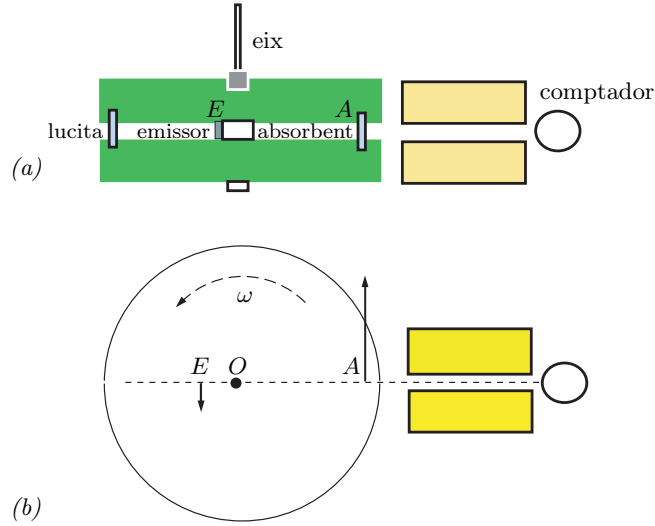


Figura 3.6. Velocitats instantànies de l'emissor (E) $v_E = \omega R_E$ i l'absorbent (A) $v_A = \omega R_A$ en un rotor

al receptor. Els raigs gamma emesos per E en la direcció radial (transversalment al moviment de E) són rebuts per A també transversalment al seu moviment. En el sistema inercial que instantàniament veu E i A movent-se amb les velocitats \vec{v}_E i \vec{v}_A de la figura 3.6, com que $\theta_E = \theta_A = 90^\circ$ tenim, d'acord amb (3.9), que:

$$\nu_{\text{lab}} = \nu_A \gamma_A^{-1}, \quad \nu_{\text{lab}} = \nu_E \gamma_E^{-1},$$

per tant,

$$\frac{\delta\nu}{\nu_E} = \frac{\nu_A - \nu_E}{\nu_E} = \sqrt{\frac{1 - \beta_E^2}{1 - \beta_A^2}} - 1 \approx \frac{\omega^2}{2c^2} (R_A^2 - R_E^2).$$

A $\omega = 0$, $\delta\nu = 0$, i si tenim en compte l'eixamplament tèrmic σ , els intervals d'emissió i d'absorció: $\nu_E \pm \sigma$ i $\nu_A \pm \sigma$, respectivament, se solapen totalment i l'absorció ressonant és màxima.

En girar el disc, el solapament dels intervals disminueix i també l'absorció ressonant (figura 3.7). De manera que augmenta la transmissió i, per tant, la radiació gamma recollida en el detector.

En el rotor de Champeney i Moon (1961)⁷ l'emissor i l'absorbent eren a la mateixa distància de l'eix ($R_E = R_A$). En girar el disc l'efecte Doppler transvers els afecta tots dos igual, de manera que l'absorció ressonant no ha de canviar, tal com s'observa.

⁷CHAMPANEY, D. C. i MOON, P. B., *Proc. Phys. Soc.*, **77**, 350 (1960).

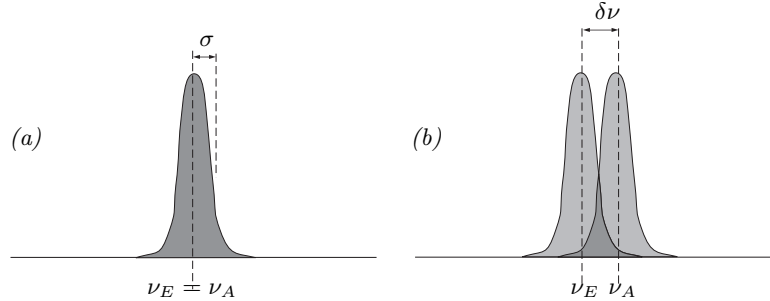


Figura 3.7. En variar ω el solapament dels intervals d'absorció i emissió disminueix: (a) $\omega = 0$ i (b) $\omega \neq 0$

En l'experiment de Kundig (1963),⁸ l'absorbent era a 9,3 cm de l'eix del rotor i l'emissor, en el centre, es movia per mitjà d'un transductor piezoelèctric, de manera que l'efecte Doppler longitudinal de l'emissor es compensava amb l'efecte Doppler transvers en l'absorció. Així, la magnitud d'aquest darrer es pot determinar a partir de la velocitat radial de l'emissor.

3.3.5 L'espectre de SS 433

L'efecte Doppler es manifesta també en els espectres de la radiació procedent dels estels (ja sigui en l'emissió visible, ràdio o raigs X). Aquí no considerarem el desplaçament cap al roig d'origen cosmològic (que explica la llei de Hubble) ni el gravitatori, que s'expliquen en el marc de la teoria general de la relativitat.

A finals de la dècada de 1970 es va observar un objecte, que ara es coneix com a SS 433, que és dins de la Galàxia i que presentava uns trets força especials. El seu espectre té unes línies identificades que corresponien a emissions atòmiques de H i de He. També té unes línies inicialment no identificades d'unes intensitats menors però comparables a les anteriors. Això feia pensar que l'abundància de l'emissor era alta i que, per tant, havien de ser línies de l'espectre del H i del He desplaçades per efecte Doppler. La més marcada d'aquestes línies era a la zona roja de l'espectre, amb una longitud d'ona de 7400 Å. La velocitat necessària per desplaçar la línia roja més propera de l'espectre del H (6536 Å) és d'uns 40.000 km/s, molt més gran (en dos ordres de magnitud) que la velocitat d'escapament de la Galàxia i per tant no podia correspondre a un estel que es mogués a aquesta velocitat.

Algunes d'aquestes línies «no identificades» estan desplaçades cap al roig i d'altres cap al blau. A més, la posició d'aquestes ratlles en l'espectre varia d'un dia per l'altre. En un interval de 30 dies, la línia roja esmentada més amunt pot

⁸KUNDIG, W., *Phys. Rev.*, **129**, 2371 (1963).

augmentar la longitud d'ona en 700 \AA . Això vol dir que la velocitat corresponent passa de 20.000 km/s a 50.000 km/s .

Un estudi més aprofundit (de l'any 1979) va revelar que l'espectre de SS 433 presentava les línies de l'espectre corresponents al H i al He per triplicat: una corresponent a la longitud d'ona en repòs λ_0 , una altra desplaçada cap al roig λ_+ i una altra cap al blau λ_- . Totes les línies desplaçades cap al roig corresponien a una mateixa velocitat de recessió i totes les desplaçades cap al blau a una mateixa velocitat d'aproximació.

És va observar que les longituds d'ona de les línies desplaçades realitzaven una oscil·lació periòdica que durava 164 dies, i que els valors extrems de les velocitats de recessió i d'aproximació es donaven al mateix temps. A més, en el seu recorregut per l'espectre hi havia un moment en què cada línia λ_+ es creuava amb la corresponent λ_- . En aquest instant, la velocitat de recessió era de 12.000 km/s .

Amb aquestes dades, el model proposat més plausible consisteix en un sistema binari, amb un objecte compacte E que pren matèria a l'altre component, més gran, G . La matèria de G cau en espiral sobre E i forma un disc d'acreció. En caure, part de la matèria rebota i surt formant dos feixos de gas no massa calent (més enllà dels 20.000 K el H i el He estan ionitzats), en la direcció de l'eix de rotació de l'objecte compacte E i en sentits oposats (vegeu la figura 3.8). Ara bé, com que E i G orbiten l'un al voltant de l'altre, els eixos de rotació respectius no tenen una direcció fixa, sinó que tenen un moviment de precessió.

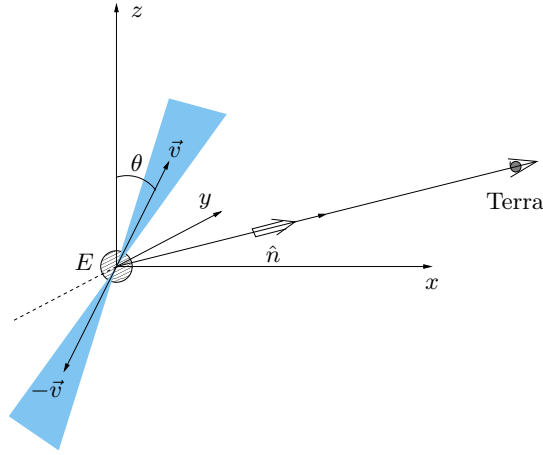


Figura 3.8. Component compacte del sistema binari i els dos plasmons ejectats. L'eix de rotació de l'estel té un moviment de precessió al voltant d'un eix fix, que prenem com a z

Si denotem per $\pm \vec{v}$ les velocitats dels raigs de gas i per \hat{n} la direcció de la visual

des de la Terra, tindrem si agafem com a eix z l'eix de rotació de l'estel,

$$\vec{v} = v (\sin \theta \cos \Omega t, \sin \theta \sin \Omega t, \cos \theta), \quad \hat{n} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha).$$

Com que la velocitat de l'objecte central ha de ser inferior a la velocitat d'escapament de la Galàxia, que és un parell d'ordres de magnitud inferior a les velocitats de recessió que intentem explicar, podem suposar que aquest objecte està quiet en relació a la Terra.

De (3.9) i de la relació $\lambda\nu = c$ tenim:

$$\lambda_R = \lambda_E \gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}_R}{c} \right). \quad (3.24)$$

Si indiquem per λ_+ i λ_- les longituds d'ona rebudes a la Terra procedents de l'emissió dels raigs $+\vec{v}$ i $-\vec{v}$, respectivament, i indiquem per λ_0 la longitud d'ona en el laboratori, obtenim:

$$\lambda_{\pm} = \lambda_0 \gamma [1 \mp \beta (\sin \theta \sin \alpha \cos \Omega t + \cos \theta \cos \alpha)]. \quad (3.25)$$

Les línies corresponents a λ_+ i λ_- oscil·len en l'espectre amb un període $T = 2\pi/\Omega$, en sentits oposats i amb una amplitud màxima $\lambda_0 \gamma \beta \sin \theta \sin \alpha$. El punt central d'aquesta oscil·lació, que és alhora la mitjana aritmètica i el valor de λ en què es creuen les dues línies en el seu moviment oscil·latori, és de:

$$\lambda_0 (\gamma - 1) \approx \lambda_0 \frac{\beta^2}{2}.$$

Aquest desplaçament romanent, correspon a l'efecte relativista de segon ordre que, com ja hem comentat més amunt, és una manifestació de la dilatació temporal.

Amb les dades de l'observació de SS 433, es poden ajustar els paràmetres θ , α , β i T , i tenim:

$$\theta = 20^\circ, \quad \alpha = 80^\circ, \quad \beta = 0,26, \quad T = 164 \text{ dies.}$$

Problemes

- 3.1 Un emissor de polsos de radar és en repòs en el punt $x = 0$. Un meteorit gran s'hi acosta a una velocitat constant v i en l'instat $t = 0$ es troba en el punt $x = -l$. En els instants $t = 0$ i $t_0 < l/c$ són emesos dos polsos de radar, que es reflecteixen sobre el meteorit i tornen a l'emissor. Determineu: (a) l'interval de temps entre les arribades dels dos polsos al meteorit (en temps propi del meteorit) i (b) l'interval de temps entre les arribades a $x = 0$ dels dos polsos reflectits.
- 3.2 Tenim un sistema de naus que viatgen entre dos planetes, T i M , en un sistema de referència inercial. Les naus van equipades amb llums idèntics davant i darrere i es mouen a una velocitat v_0 tant quan van en una direcció com quan van en la contrària. La llum procedent del davant de la nau que va cap a T té, vista des d'aquest planeta, una longitud d'ona de 5000 \AA , mentre que la llum procedent del darrere de la nau que s'allunya, vista des de T , és vermella amb una longitud d'ona de 6000 \AA . (a) Quant val v_0 . (b) Suposant que una nau, A , que va de T a M , canvia de velocitat per passar a una altra, B , que va al seu davant. A quina velocitat va A respecte a T perquè la llum de darrere de la nau B arribi a A amb una longitud d'ona de 5000 \AA ?
- 3.3 Tres emissors de ràdio idèntics (A , B i C) emeten amb una freqüència ω_0 . C i B s'allunyen de A a velocitat \vec{v} i $-\vec{v}$ respectivament. Quant val la freqüència del senyal que rep C procedent de B ? I la del senyal que rep C procedent de A ?
- 3.4 Un mirall es mou en una direcció perpendicular al seu pla amb una velocitat v . Un raig de llum incideix formant un angle Θ . Quin angle forma el raig reflectit? Com canvia la freqüència? Si el mirall es mou paral·lelament al seu pla, proveu que l'angle de reflexió i el d'incidència coincideixen. Què passa amb la freqüència?
- 3.5 Un pió neutre π^0 es desintegra en dos fotons gamma.
 (a) D'un feix de pions π^0 , tots amb la mateixa velocitat v , se'n desintegren N_0 . Determineu la distribució de fotons emesos en funció de la direcció $\frac{dN}{d\Omega(\theta, \phi)}$ en el sistema del laboratori si sabem que en el sistema comòbil amb el feix la distribució és uniforme.
 (b) Si en el sistema del laboratori el nombre de fotons que surten cap endavant (en el sentit del feix) és N_f i el nombre dels que surten cap endarrere és N_b , quant val la velocitat v en funció del quocient N_f/N_b ?
- 3.6 Un objecte quasi puntual explota en el seu sistema en repòs en una distribució isòtropa de partícules idèntiques que s'allunyen a la mateixa velocitat del centre formant una closca esfèrica.

(a) Quina distribució de velocitats tenim en el sistema de referència en el qual l'objecte es mou a velocitat \vec{v} ? Utilitzeu aquest resultat per determinar la geometria de la figura que formen les partícules. Què passa si les partícules són fotons?

(b) Determineu la distribució angular del nombre de partícules en aquest sistema en termes de la mateixa quantitat en el sistema en repòs, és a dir, de $dN/d\Omega = N/(4\pi)$ (Ω és l'angle sòlid i N és el nombre total de partícules). Podeu deixar el resultat en forma implícita.

- 3.7 Un model simplificat de l'expansió de l'Univers consisteix a considerar que l'espai-temps és el de Minkowski i que cada galàxia s'allunya de la Terra a una velocitat que podem considerar constant. La brillantor aparent B_a d'una galàxia es defineix per l'energia rebuda a la Terra per unitat d'angle sòlid i unitat de temps, mentre que la brillantor real B_r és l'energia emesa per unitat de temps i angle sòlid en el sistema de referència propi.

Demostreu que per a una galàxia que s'allunya radialment de la Terra a una velocitat $v = c\beta$, la relació B_a/B_r és la quarta potència del coeficient Doppler. (Ajut: Compteu que, d'una banda, si l'energia és el nombre de fotons per $h\nu$, es veurà afectada per l'efecte Doppler, i de l'altra, les direccions d'aquests fotons es veuran modificades per l'aberració. A més, el temps que dura l'emissió no és exactament igual al temps que dura la recepció.)

Capítol 4

L'espaitemps de Minkowski

4.1 Introducció

«La invariància per translacions o rotacions d'espai l'hem considerat fins ara com una propietat de l'espai en canvi la invariància per moviments uniformes l'hem considerat una propietat de les equacions de moviment. Aquestes darreres ens barrejaven l'espai i el temps. Si intentéssim descobrir una propietat d'un espai abstracte de quatre dimensions que englobés l'espai i el temps potser trobaríem lligades de forma natural a aquest espaitemps unes transformacions d'origen geomètric que a la mecànica clàssica tenien orígens diferents.»

D'aquesta manera raonava Minkowski en la conferència de Colònia de 1908.

Ja hem vist com les transformacions de Lorentz (2.14, 2.15) que relacionen les coordenades (\vec{x}, t) i (\vec{x}', t') en dos sistemes de referència inercials fan intervenir de manera essencial les quatre coordenades. El temps ja no té un significat absolut, independent del sistema de referència, i no podem considerar-lo separatament de l'espai com estàvem acostumats a fer en la cinemàtica newtoniana.

Els objectes elementals que ens interessaran a partir d'ara seran els *esdeveniments*. Cada sistema de referència caracteritza un esdeveniment pel lloc i per l'instant en què es produeix: quatre coordenades, tres d'espacials (x^1, x^2, x^3) i una de temporal, t . Dos successos que per a un sistema de referència han coincidit en el lloc de l'espai i l'instant de temps són indistingibles a efectes de la cinemàtica: són el mateix esdeveniment.

El conjunt de tots els esdeveniments s'anomena *espaitemps* i té quatre dimensions, perquè aquest és el nombre de coordenades necessàries per identificar-ne inequívocament cada element.

Com ja s'ha fet a l'apartat 2.4, per tractar les quatre coordenades en peu d'igualtat substituïm t per $x^4 \equiv ct$, que té dimensions de longitud com les altres tres. Denotarem les quatre coordenades d'un esdeveniment per x^μ , on l'índex grec

va d'1 fins a 4. Quan utilitzem índexs llatins, com ara i , sobreentendrem que pot anar només d'1 fins a 3.

Per bé que no podrem separar les coordenades espacials de la temporal i que les tractarem totes quatre com si fossin equivalents, convé recordar que no ho són completament. En efecte, les coordenades cartesianes d'espai són el resultat de fer mesures amb regles rígids, mentre que la coordenada temporal es mesura amb rellotges estacionaris sincronitzats. A més, l'ordre temporal té a veure amb les relacions causa-efecte.

En l'apèndix A al final del llibre es tracten amb detall els conceptes tensorials i mètrics necessaris per al desenvolupament del present capítol.

4.2 L'espai-temps de Minkowski

L'existència d'una família infinita de sistemes de referència inercials, pròpia de la relativitat especial, confereix a l'espai-temps una geometria específica i per això se l'anomena *espai-temps de Minkowski*. Les coordenades, x^ν i $x^{\mu'}$, d'un mateix esdeveniment segons dos sistemes de referència inercials, \mathcal{K} i \mathcal{K}' , estan relacionades per una transformació de Poincaré:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu x^\nu + A^{\mu'}, \quad (4.1)$$

on $\Lambda^{\mu'}_\nu$ és una matriu de Lorentz general, que sempre es pot descompondre com a producte de transformacions de Lorentz pures¹ L^μ_ν i rotacions, i $A^{\mu'}$ representa la translació d'origen que porta O a O' . En la igualtat anterior hem utilitzat el *conveni d'Einstein*: si en una expressió apareix un índex repetit, un cop com a subíndex i un altre com a superíndex, se sobreentén el sumatori per a tots els valors possibles d'aquest índex.

Si P i Q són dos esdeveniments, la *posició relativa* o *desplaçament*

$$\Delta x^\mu \equiv x^\mu_Q - x^\mu_P, \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

és un vector —sota el grup afí de 4 dimensions i, en particular, sota el grup de Poincaré que n'és un subgrup (vegeu l'apèndix A). Tindrem:

$$\Delta x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu \Delta x^\nu$$

i en direm 4-vector, per recalcar que té quatre components i distingir-lo dels vectors en l'espai tridimensional.

4.2.1 La mètrica de Minkowski

Ja hem vist a la secció 2.4 que l'interval entre dos esdeveniments (2.10) val el mateix en tots els sistemes de referència inercials o, dit d'una altra manera, és

¹L'expressió general d'aquestes transformacions ha estat determinada a l'apartat 2.4 per les fórmules 2.18.

invariant sota transformacions de Poincaré (4.1). En relació amb la geometria de l'espai temps de Minkowski tindrà un paper anàleg al que té la distància (1.1) en l'espai euclidià tridimensional, que és invariant sota les transformacions del grup euclidià (1.2).

Per utilitzar una notació més compacta, denotarem per $\eta_{\mu\nu}$ la matriu

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

de manera que si la posició relativa de dos esdeveniments és Δx^μ , l'interval invariant es pot escriure com:²

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 - (\Delta x^4)^2 \quad (4.3)$$

i de les consideracions anteriors sobre la invariància de l'interval se segueix que

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\mu'\nu'} \Delta x^{\mu'} \Delta x^{\nu'}.$$

Però com que els dos esdeveniments són arbitraris, la igualtat anterior val per a un desplaçament Δx^μ qualsevol. En conseqüència, donat un 4-vector qualsevol V^μ , la quantitat $\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ és un escalar de Lorentz. És a dir,

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \eta_{\mu'\nu'} V^{\mu'} V^{\nu'} \quad (4.4)$$

amb $V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu V^\nu$, on $\Lambda^{\mu'}_\nu$ és una transformació de Lorentz general i $\eta_{\mu'\nu'}$ ve donada, com $\eta_{\mu\nu}$, per (4.2).

Com que la matriu $\eta_{\mu\nu}$ és simètrica ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$), donats dos 4-vectors qualssevol, T^μ i V^ν , tenim la identitat següent:

$$\eta_{\mu\nu} T^\mu V^\nu = \frac{1}{2} [\eta_{\mu\nu} (T^\mu + V^\mu) (T^\nu + V^\nu) - \eta_{\mu\nu} T^\mu T^\nu - \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu],$$

de la qual se segueix que $\eta_{\mu\nu} T^\mu V^\nu$ és un escalar de Lorentz —per ser suma de tres escalars de Lorentz. Per aplicació del *criteri de tensorialitat* (vegeu la secció A.1.6), resulta que $\eta_{\mu\nu}$ és un tensor de Lorentz, 2-covariant i simètric³ que anomenarem *mètrica de Minkowski*. Aquesta mètrica és el fonament de la geometria de l'espai temps de Minkowski. L'invariant $\eta_{\mu\nu} T^\mu V^\nu$ és el *producte de Minkowski* dels 4-vectors T^μ i V^ν .

És una mètrica no degenerada, ja que $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1 \neq 0$, i la seva inversa és, en forma de matriu:

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

²Mantenim la notació habitual, Δs^2 , per a l'interval invariant, amb el benentès que això no pressuposa que aquesta quantitat és positiva, com es podria inferir de l'exponent 2.

³A partir d'ara sobreentendrem el qualificatiu *Lorentz* sempre que ens referim a tensors.

Amb la mètrica de Minkowski (4.2) i la seva inversa (4.5), les operacions de baixar i pujar índexs (vegeu la secció A.A.2 per als detalls) queden així:

Baixar índexs Si V^μ és un 4-vector, podem construir el 4-vector covariant $V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu$. Els components són:

$$V_4 = -V^4, \quad V_i = V^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pujar índexs Si ara W_μ és un 4-vector covariant, podem construir el 4-vector contravariant $W^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} W_\nu$, que té per components:

$$W_4 = -W^4, \quad W_i = W^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Així doncs, el producte mètric dels dos vectors V^μ i W^ν es pot expressar indistintament com a:

$$\eta_{\mu\nu} W^\mu V^\nu = W_\nu V^\nu = W^\mu V_\mu = \eta^{\mu\nu} W_\mu V_\nu. \quad (4.6)$$

4.3 Classificació dels intervals

En la mètrica de Minkowski la coordenada temporal hi té un paper diferenciat de les espacials ($\eta_{44} = -1$, mentre que $\eta_{ii} = +1$). Una conseqüència immediata és que el producte de Minkowski d'un 4-vector per ell mateix no té un signe definit —contràriament al que passa amb el producte escalar ordinari de dos 3-vectors. Aquesta propietat ens serveix per classificar els 4-vectors, V^μ , en:

tipus espai, quan $\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0$,

tipus temps, quan $\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0$ i

tipus llum, nuls o isòtrops, si $\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0$.

De manera semblant, si prenem un esdeveniment P com a origen, qualsevol altre esdeveniment Q es pot classificar en relació amb ell segons si $\Delta x^\mu = x_Q^\mu - x_P^\mu$ és un 4-vector de tipus espai, de tipus temps o de tipus llum. Com que la classificació es fa basant-se en l'invariant $\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$, és ella mateixa independent del sistema de referència inercial utilitzat.

Les raons d'aquesta denominació són òbvies pel fet que:

- (a) Si en un sistema de referència \mathcal{K} , $x_P^i \neq x_Q^i$, $i = 1, 2, 3$ i $x_P^4 = x_Q^4$, la separació entre P i Q és *espacial* en \mathcal{K} i, a més,

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = |\Delta \vec{x}|^2 > 0.$$

- (b) Si, per contra, $x_P^i = x_Q^i$, $i = 1, 2, 3$ i $x_P^4 \neq x_Q^4$, la separació entre P i Q és *temporal* en \mathcal{K} i, a més,

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -(\Delta x^4)^2 < 0.$$

- (c) Finalment, si Q és un esdeveniment sobre un front d'ona lluminosa (esfèrica) que s'ha originat en l'esdeveniment P , aquests esdeveniments estan connectats per un raig de llum i:

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = |\Delta \vec{x}|^2 - c^2 (\Delta t)^2 = 0.$$

Les dues propietats següents són els enuncisats inversos dels anteriors.

Proposició 1 *Si la separació Δx^μ entre dos esdeveniments, P i Q , és de tipus temps, hi ha un sistema de referència inercial \mathcal{K}^\dagger en què P i Q passen al mateix lloc.*

En efecte, de la transformació de Lorentz (2.14) tenim:

$$\Delta \vec{x}^\dagger = \Delta \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\Delta \vec{x} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} \Delta x^4$$

i hem de trobar $\vec{\beta}$ tal que $\Delta \vec{x}^\dagger = 0$. De l'anàlisi dels components de l'equació tenim que la solució és:

$$\vec{\beta} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta x^4}.$$

Però perquè es tracti pròpiament d'una transformació de Lorentz cal que $|\vec{\beta}| < 1$, és a dir, $|\Delta x^4| > |\Delta \vec{x}|$, la qual cosa està garantida si, i només si,

$$\Delta s^2 = |\Delta \vec{x}|^2 - |\Delta x^4|^2 < 0.$$

De la invariància de l'interval tenim que, expressat en el sistema de referència \mathcal{K}^\dagger , val $-(\Delta x^{4\dagger})^2$, d'aquí que puguem dir que un interval de tipus temps es mesura amb un rellotge.

És més, per a aquest valor de β , el valor de la quarta coordenada en el sistema \mathcal{K}^\dagger és:

$$\Delta x^{4\dagger} = \gamma \left(\Delta x^4 - \vec{\beta} \cdot \Delta \vec{x} \right) = \gamma^{-1} \Delta x^4,$$

que té el mateix signe que el quart component Δx^4 .

Proposició 2 *Si la separació Δx^μ entre dos esdeveniments, P i Q , és de tipus espai, hi ha un sistema de referència inercial \mathcal{K}^\dagger en què P i Q són simultanis.*

En efecte, considerem ara el component temporal (2.15) de la transformació de Lorentz:

$$\Delta x^{4\dagger} = \gamma (\Delta x^4 - \vec{\beta} \cdot \Delta \vec{x}).$$

Si volem trobar $\vec{\beta}$ tal que $\Delta x^{4\dagger} = 0$, una solució és:

$$\vec{\beta} = \frac{\Delta x^4}{|\Delta \vec{x}|^2} \Delta \vec{x}.$$

Però perquè es tracti efectivament d'una transformació de Lorentz cal que $|\vec{\beta}| < 1$, és a dir, $|\Delta x^4| < |\Delta \vec{x}|$, la qual cosa està garantida si, i només si,

$$\Delta s^2 = |\Delta \vec{x}|^2 - |\Delta x^4|^2 > 0.$$

Com en el cas anterior, de la invariància de l'interval tenim que, expressat en el sistema \mathcal{K}^\dagger , val $|\Delta \vec{x}^\dagger|^2$, que es mesura amb regles estacionaris en aquest sistema de referència.

Una conseqüència immediata de les dues proposicions anteriors és el resultat següent:

Proposició 3 *Si un 4-vector V^μ és temporal i orientat cap al futur, existeix almenys un sistema de referència \mathcal{K}^\dagger en què*

$$V^{j\dagger} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{i} \quad V^{4\dagger} > 0.$$

I si un 4-vector W^μ és de tipus espai, hi ha un sistema de referència (de fet, molts) en què $V^{4\dagger} = 0$.

4.4 Els cons de llum

Amb la classificació anterior, a partir d'un esdeveniment P donat podem dividir l'espai-temps en unes regions ben definides, independents del sistema de referència en què es faci aquesta divisió.

La regió Γ_P la formen els esdeveniments Q tals que $\Delta x^\mu = x_Q^\mu - x_P^\mu$ és de tipus temps (vegeu la figura 4.1). La regió Π_P la constitueixen els esdeveniments per als quals Δx^μ és de tipus espai. El *con de llum* el formen els esdeveniments que estan en la frontera entre Γ_P i Π_P , aquells per als quals Δx^μ és de tipus llum. La regió Γ_P és l'*interior* del con de llum i Π_P , l'*exterior*. Denotarem per $\bar{\Gamma}_P$ la regió formada pel con de llum i el seu interior.

La raó d'aquesta nomenclatura resulta òbvia a partir de la figura 4.1. Considerem, per exemple, la secció de la regió $\bar{\Gamma}_P$ per l'hiperplà $x^4 = \text{constant}$; està formada pels esdeveniments que satisfan

$$|\vec{x} - \vec{x}_P|^2 \leq (x^4 - x_P^4)^2,$$

és a dir, són dins de l'esfera de centre \vec{x}_P i radi $|x^4 - x_P^4|$. Així, doncs,

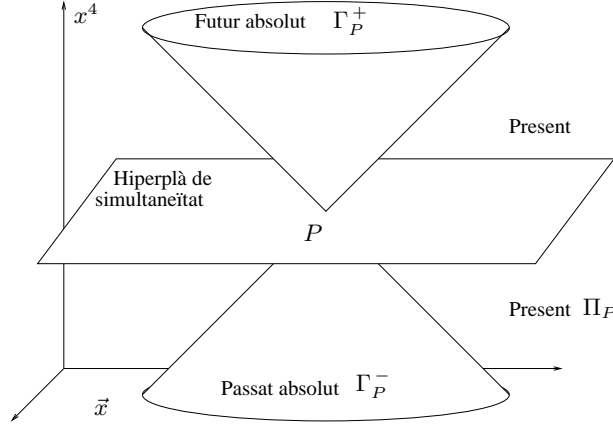


Figura 4.1. Con de llum amb vèrtex a P . Per limitacions de la representació en una figura plana, heu d'imaginar l'espai de tres dimensions representat pel pla horitzontal

(a) Γ_P té per eix de simetria la recta d'equació:

$$x^1 = x_P^1, \quad x^2 = x_P^2 \quad \text{i} \quad x^3 = x_P^3$$

(b) i les seves «seccions horitzontals» són esferes, el radi de les quals augmenta proporcionalment a la distància al vèrtex \vec{x}_P .

Passat, present i futur

En la figura 4.1 també veiem com $\bar{\Gamma}_P$ té dues branques: $\bar{\Gamma}_P^+$ i $\bar{\Gamma}_P^-$, segons que Δx^4 sigui positiu o negatiu. S'anomenen, respectivament, *con de llum futur* i *con de llum passat* de P . Els interiors respectius es denoten per Γ_P^+ i Γ_P^- .

Aquesta divisió també és invariant de Lorentz. En efecte, si $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \leq 0$ i $\Delta x^4 > 0$, llavors $0 \leq |\Delta \vec{x}| \leq \Delta x^4$. En un altre sistema inercial, \mathcal{K}' , de (2.15) i de $|\vec{\beta}| < 1$ tindrem:

$$\Delta x^{4'} = \gamma (\Delta x^4 - \vec{\beta} \cdot \Delta \vec{x}) \geq \gamma (\Delta x^4 - |\vec{\beta}| |\Delta \vec{x}|) > \gamma (\Delta x^4 - |\Delta \vec{x}|) \geq 0,$$

és a dir, $\Delta x^{4'} > 0$. Un raonament semblant s'aplica quan $\Delta x^4 < 0$.

$\bar{\Gamma}_P^+$ està format pels esdeveniments tals que: $\Delta s^2 \leq 0$ i $\Delta x^4 > 0$. Són esdeveniments que es poden connectar amb P per un senyal físic, que viatgi a una velocitat inferior a c . Aquesta regió és el *futur absolut* de P (absolut en el sentit que no depèn del sistema de referència). De manera semblant, $\bar{\Gamma}_P^-$ és el *passat absolut* de P .

La regió Π_P , complementària de $\bar{\Gamma}_P = \bar{\Gamma}_P^+ \cup \bar{\Gamma}_P^-$, és el *present absolut* de P . Està format per esdeveniments Q tals que Δx^4 pot ser positiu, negatiu o nul segons el sistema de referència. Ja hem vist en la secció 4.3 (proposició 2) que

per a cada $Q \in \Pi_P$ existeix un sistema de referència inercial per al qual P i Q són simultanis ($\Delta x^4 = 0$). Es tracta, doncs, d'esdeveniments que no poden estar causalment connectats amb P . (Si no, hi hauria sistemes inercials que veurien l'efecte P abans que la causa Q .)

Per contra, el futur absolut $\bar{\Gamma}_P^+$ està format per tots els esdeveniments Q que podrien tenir P per causa. Per a tots els sistemes de referència inercials, Q és posterior a P ($\Delta x^4 > 0$). I al seu torn, el passat absolut $\bar{\Gamma}_P^-$ són tots els esdeveniments que podrien haver estat la causa de P .

Ordenació temporal

La família de cons $\bar{\Gamma}_P^+$ amb vèrtex a qualsevol esdeveniment P de l'espai-temps ens permet de definir una ordenació temporal dels esdeveniments, independent del sistema de referència. Així, la relació:

$$P \text{ és anterior a } Q \text{ si, i només si, } Q \in \bar{\Gamma}_P^+$$

és una vertadera relació d'ordre. Les propietats reflexiva i antisimètrica són òbvies, mentre que la transitiva se segueix de la propietat següent.

Proposició 4 *La suma de dos 4-vectors tipus temps o tipus llum orientats cap al futur és ell mateix un 4-vector temporal o tipus llum orientat cap al futur. (I és de tipus llum si, i només si, tots dos 4-vectors són de tipus llum i paral·lels.)*

En efecte, siguin V^μ i W^ν els dos 4-vectors i $T^\mu = V^\mu + W^\mu$, la suma. El component T^4 és positiu perquè ho són els sumands. A més,

$$\eta_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \eta_{\mu\nu} W^\mu W^\nu + 2\eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu.$$

Ara bé, a conseqüència de la hipòtesi: $0 \leq |\vec{V}| \leq V^4$ i $0 \leq |\vec{W}| \leq W^4$, i, per tant,

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = -V^4 W^4 + \vec{V} \cdot \vec{W} \leq -V^4 W^4 + |\vec{V}| |\vec{W}| \leq 0,$$

de manera que:

$$\eta_{\mu\nu} T^\mu T^\nu \leq \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \eta_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \leq 0,$$

que demostra la proposició.

Per aplicació iterada d'aquest resultat, es veu la seva validesa quan el nombre de sumands és més gran que 2.

La propietat algebraica següent ens serà útil més endavant.

Proposició 5 *Qualsevol 4-vector es pot posar com a combinació lineal de dos 4-vectors temporals orientats al futur.*

En efecte, sigui $t^\mu = (\vec{t}, t^4)$. Si és temporal ell mateix, és obvi que es compleix l'enunciat, i si és espacial o de tipus llum, prenem: $u^\mu = (\vec{t}/2, t^4 + h)$ i $w^\mu = (-\vec{t}/2, h)$, amb $h > 0$ prou gran perquè tant u^μ com w^μ siguin temporals i futurs. Llavors tenim: $t^\mu = u^\mu - w^\mu$.

4.5 Línia d'univers d'un punt material

Si ens fixem en un punt material i en seguim la història, tenim una corba contínua en l'espai-temps que s'anomena *línia d'univers*. L'evolució d'un objecte extens i connex la representarem pel feix de les línies d'univers de les seves parts elementals: el seu *tub d'univers*.

Si volem representar l'evolució d'objectes puntuals que poden ser anihilats o creats en algun moment, les línies d'univers corresponents acabaran sobtadament en esdeveniments d'aquest tipus.

4.5.1 Parametrització, orientació i causalitat

La línia d'univers d'un punt material és una corba en l'espai-temps que, en forma paramètrica, ve donada per quatre funcions:

$$\lambda \rightarrow x^\mu(\lambda) = (\vec{x}(\lambda), ct(\lambda))$$

contínues i derivables amb continuïtat (excepte, potser, en un nombre finit de punts). Demanarem a més que $x^4(\lambda) = ct(\lambda)$ sigui una funció estrictament creixent, de manera que, si $\lambda_1 < \lambda_2$, llavors $t(\lambda_1) < t(\lambda_2)$, i que la considerem orientada del passat cap al futur.

Un punt material pot ser la seu de processos físics, biològics, etc. Per tant ha de ser possible una ordenació causal absoluta dels esdeveniments que en conformen la línia d'univers. Del que hem vist a la secció (4.4), això només es pot donar si sempre que $\lambda_1 < \lambda_2$, llavors $x^\mu(\lambda_2)$ és en el futur absolut de $x^\mu(\lambda_1)$. És a dir, $x^\mu(\lambda_2) - x^\mu(\lambda_1)$ és un vector temporal (o tipus llum) i orientat cap al futur. És fàcil comprovar que aquesta condició es dona si, i només si,

$$\dot{x}^\mu(\lambda)\dot{x}_\mu(\lambda) \leq 0 \quad \text{i} \quad \dot{x}^4(\lambda) > 0 \quad (4.7)$$

amb $\dot{x}^\mu(\lambda) \equiv dx^\mu/d\lambda$. Es diu llavors que la línia d'univers és de tipus temps (o llum) i orientada cap al futur.

Quan la línia és temporal, i a conseqüència de la proposició 3, en cada punt $x^\mu(\lambda)$ de la línia d'univers hi ha un conjunt de sistemes de referència inercials en repòs relatiu $\mathcal{S}_\lambda^\dagger$ que veuen el punt material instantàniament en repòs.

Una altra conseqüència de (4.7) és que la línia d'univers d'un punt material està continguda en els cons de llum de qualsevol dels seus punts (vegeu la figura 4.2). En efecte, considerem el punt $x^\mu(\lambda_0)$. Per a $\lambda > \lambda_0$,

$$x^\mu(\lambda) - x^\mu(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \dot{x}^\mu(\tau) d\tau.$$

La integral és el límit d'una suma de quadriectors temporals (o llum) orientats cap al futur. Pel que hem vist en la proposició 4, aquesta suma serà ella mateixa un 4-vector temporal (o llum), i $x^\mu(\lambda)$ és en el con de llum amb vèrtex a $x^\mu(\lambda_0)$.

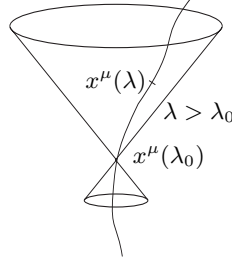


Figura 4.2. La línia d'univers d'un punt material està tota continguda dins del con de llum de qualsevol dels seus punts

En principi la parametrització de la línia d'univers es pot escollir com més convingui. De fet, qualsevol funció $\sigma = \sigma(\lambda)$ derivable amb continuïtat (excepte potser en un nombre finit de punts) i tal que $\dot{\sigma} \equiv d\sigma(\lambda)/d\lambda > 0$, per a qualsevol valor de λ ens permet de reparametritzar la línia segons:

$$z^\mu(\sigma) \equiv x^\mu(\lambda(\sigma)), \quad (4.8)$$

on $\lambda(\sigma)$ és la funció inversa de la donada i $\sigma(\lambda(\sigma_1)) = \sigma_1$.

La corba (4.8) està formada per la mateixa successió d'esdeveniments que la $x^\mu(\lambda)$, però està recorreguda a un altre ritme. La relació entre els vectors tangents en les dues parametritzacions s'obté d'aplicar la regla de la cadena:

$$\dot{z}^\mu(\sigma) = \frac{dz^\mu}{d\sigma} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{1}{\dot{\sigma}} \frac{dx^\mu}{d\lambda}.$$

Com que $\dot{\sigma} > 0$, llavors $\dot{z}^\mu(\sigma)$ també satisfà la condició causal (4.7).

Un exemple interessant, i sovint útil, de parametrització consisteix a prendre $\lambda = t$, el temps coordinat; de manera que si $\vec{x}(t)$ és la trajectòria del punt M en el sistema inercial \mathcal{K} , tenim:

$$x^\mu(t) = (\vec{x}(t), ct).$$

Aquesta parametrització té l'inconvenient que t no és invariant sota canvis de sistema de referència. Quan el paràmetre sí que és un escalar de Lorentz, de manera que $\lambda = \lambda'$, les quatre derivades $\dot{x}^\mu(\lambda)$ són els components d'un 4-vector. En efecte, ja hem vist que el desplaçament infinitesimal és un 4-vector:

$$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} dx^{\nu},$$

si a més $d\lambda = d\lambda'$, tenim:

$$\dot{x}^{\mu'}(\lambda') = \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} \dot{x}^{\nu}(\lambda).$$

4.5.2 El temps propi

A partir de l'expressió infinitesimal de l'interval, (2.10), sobre la línia d'univers d'un punt material podem definir:

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} ds^2 = -\frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.9)$$

on el factor c^{-2} s'introdueix perquè τ tingui dimensions de temps. Aquest és un paràmetre invariant que s'anomena *temps propi*.

La funció $\tau(\lambda)$ de reparametrització s'obté de dividir (4.9) per $d\lambda^2$, treure l'arrel i integrar:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(\lambda) \dot{x}^\nu(\lambda)}. \quad (4.10)$$

Com que la corba és temporal, l'arrel és real. La constant d'integració τ_0 reflecteix l'arbitrarietat en l'elecció de l'origen de la parametrització.

Si el paràmetre de partida és el temps coordinat t , llavors $x^4 = ct$ i

$$\frac{dx^\mu}{dt} = (\vec{v}, c) \quad \text{amb} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt},$$

de manera que (4.9) i (4.10) donen, respectivament:

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= \gamma^{-1} dt = dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ \tau - \tau_0 &= \int_{t_0}^t \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

El paràmetre τ l'hem definit amb dimensions de temps, però no tindrà cap significat físic fins que no diguem amb quin rellotge es mesura. Si es tracta d'un punt material M amb un moviment rectilini i uniforme respecte al sistema inercial \mathcal{K} , llavors:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t \vec{v}, \quad \text{amb} \quad \vec{v} \text{ constant},$$

la línia d'univers és una recta en l'espai-temps i podem triar un sistema de referència inercial \mathcal{K}^\dagger comòbil amb M . Integrant (4.11), el temps propi i el temps coordinat en \mathcal{K} guarden la relació:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

que és la mateixa relació (2.23) que guarden la duració pròpia Δt^\dagger i la duració Δt segons \mathcal{K} . Així, $\Delta\tau = \Delta t^\dagger$ es mesurarà amb un rellotge estacionari en \mathcal{K}^\dagger i, per tant, comòbil amb M . És més, qualsevol sistema de referència comòbil amb M mesura el mateix Δt^\dagger .

Si el moviment de M és arbitrari, en cada instant t hi ha tota una família de sistemes inercials instantàniament comòbils amb el punt (tots ells estan en repòs

relatiu i els rellotges dels uns i els altres portaran la mateixa marxa). Triem un \mathcal{K}_t^\dagger (que segurament canviarà amb t). Per a intervals de temps infinitesimals tindrem:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} = dt^\dagger.$$

En conseqüència, i d'acord amb l'equació (4.10), $\Delta\tau$ és la suma d'una infinitat de temps infinitesimals, dt^\dagger , que es mesuren amb els successius rellotges estacionaris en els corresponents sistemes comòbils, \mathcal{K}_t^\dagger .

En aquest punt afegim el següent postulat referent al funcionament de rellotges accelerats:

Postulat 1 *Un rellotge comòbil amb un punt material entre dos esdeveniments $x^\mu(t_0)$ i $x^\mu(t)$ indicarà $\tau - \tau_0$ donat per (4.11).*

Aquest postulat equival a suposar que, al primer ordre d'aproximació (del punt de vista infinitesimal), el rellotge comòbil amb el punt material (potser accelerat) marxa al mateix ritme que el rellotge inercial instantàniament comòbil. Equival també al que s'anomena *hipòtesi dels rellotges*:

La marxa d'un rellotge ideal només es veu afectada per la seva velocitat, però no per la seva acceleració.

És un enunciat que no es dedueix dels dos postulats d'Einstein, els quals només es refereixen a sistemes inercials. Es tracta d'una hipòtesi sobre la física del rellotge, i equival a dir que la dinàmica d'un rellotge segons un sistema de referència instantàniament comòbil i accelerat és igual que la dinàmica d'un rellotge idèntic estacionari en un sistema de referència inercial. La seva validesa s'haurà de contrastar amb l'experiència.

Abans d'entrar-hi, però, convé remarcar la semblança amb un cas extret de la geometria euclidiana: la longitud d'una corba rectificable. La línia d'univers d'un moviment accelerat és una corba en l'espai-temps (per oposició a la recta, que representa un moviment rectilini i uniforme). En geometria euclidiana, per determinar la longitud d'una corba l'aproximem per una poligonal de costats *rectilinis* infinitesimals, dl . La suma $\int dl$ dona la longitud de la corba. En el cas present, dir que la duració pròpia entre $x(\lambda_1)$ i $x(\lambda_2)$ ve donada per la integral (4.10) equival a aproximar la línia d'univers corba per una seqüència de moviments rectilinis i uniformes de duració pròpia infinitesimal $d\tau$.

4.6 La paradoxa dels bessons. Realitzacions experimentals

En l'exemple 2.3 hem plantejat la paradoxa dels bessons, suposant que la Terra i l'estel eren estacionaris en un sistema inercial, i l'hem resolta tot observant que els sistemes de referència estacionaris respectius no són tots dos inercials. En

termes de l'espai-temps, podem dir que els esdeveniments de partida i trobada, P i Q , determinen una única línia d'univers recta: correspon a la línia d'univers d'en Terenci, mentre que la línia d'univers d'en Carles té dos trams rectilinis: un de P a R , l'instant en què en Carles arriba a E i comença el retorn a la Terra, i l'altre de R a Q . (Vegeu la figura 4.3.)

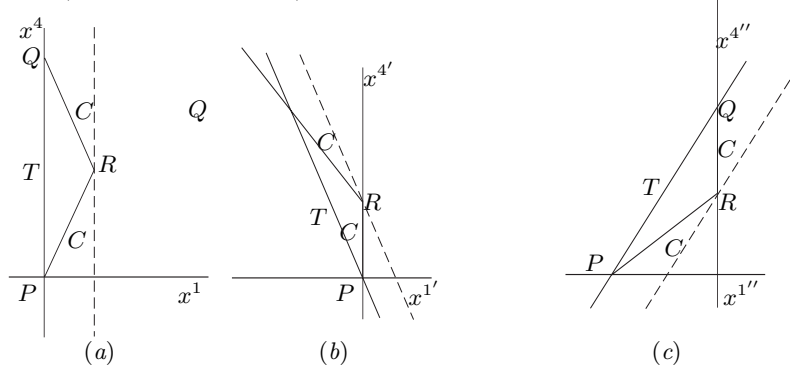


Figura 4.3. Diagrames d'espai-temps del viatge de la paradoxa dels bessons representat: (a) en el sistema de referència del bessó que roman a la Terra, (b) en el sistema comòbil amb la nau en viatge d'anada i (c) segons la nau en viatge de tornada

Podem aplicar (4.11) per determinar tant el temps propi transcorregut per a en Terenci

$$\Delta\tau_T = t_Q - t_P,$$

on t_P i t_Q són els temps de P i Q en el sistema de la Terra, com també el d'en Carles

$$\Delta\tau_C = \int_{t_P}^{t_Q} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta\tau_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Aquesta és, doncs, la resposta quantitativa de la teoria especial de la relativitat, complementada amb el postulat dels rellotges, a l'anomenada *paradoxa dels bessons*. Tot seguit en veurem dues realitzacions experimentals.

4.6.1 Desintegració de muons en vol

En l'experiment de Bayley et al. (1977)⁴ es mesura la dilatació temporal relativista per a muons μ^\pm en òrbita circular en un anell d'emmagatzematge al CERN.

D'acord amb (4.11) la predicció de la teoria especial de la relativitat i el postulat dels rellotges, la vida mitjana τ dels muons en vol és:

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \tau_0 \gamma, \quad (4.12)$$

⁴BAYLEY, J. et al., *Nature*, **268**, 301 (1977).

on v és la velocitat dels muons en l'anell i τ_0 , la vida mitjana dels muons en repòs. Per a aquest valor prenen com a referència el determinat per Baladin et al. (1974) que figura a la taula 4.1.

Els muons s'obtenen per la desintegració en vol

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

de pions de moment lineal 30 GeV/c i s'injecten en l'anell d'emmagatzematge de 14 m de diàmetre.

Per anàlisi de l'estructura del paquet de muons que circula per l'anell al llarg d'un període de 0,147 μ s es pot determinar la freqüència de rotació, la qual permet de determinar el factor $\gamma = 29,327 \pm 0,004$. L'error correspon a una incertesa de ± 1 mm en el radi de les òrbites.

Vides mitjanes ⁵ de μ^\pm en μ s			
	μ^+	μ^-	mitjana
τ	$64,419 \pm 0,058$	$64,368 \pm 0,029$	$64,378 \pm 0,026$
τ_0	$2,1966 \pm 0,0020$	$2,1948 \pm 0,010$	$2,1952 \pm 0,009$

Taula 4.1. τ =vida mitjana en vol, τ_0 =vida mitjana en repòs. [Bayley, J. et al., Nature, **268**, 301 (1977)]

La petitesa del paràmetre $\frac{\tau}{\gamma\tau_0} - 1$ dóna idea de la bondat de la predicció teòrica (4.12). Per als valors mitjans de la població μ^\pm dóna:

$$\frac{64,4}{29,3 \cdot 2,20} - 1 = -9 \cdot 10^{-4}.$$

4.6.2 L'experiment de Hafele i Keating

Per comparar la marxa de dos rellotges, R_1 en moviment arbitrari i R_0 estacionari en un sistema inercial \mathcal{K} , els posarem a zero en el moment que es troben per primera vegada i en compararem les indicacions quan es tornin a trobar. Si $\vec{v}(t)$ és la velocitat de R_1 respecte a \mathcal{K} , de (4.11) tenim que el retard de R_1 respecte a R_0 és:

$$\tau - t = \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} - t.$$

Per a velocitats petites, l'expressió anterior es pot aproximar per:

$$\tau - t \approx \frac{1}{2c^2} \int_0^t dt v(t)^2 = -t \frac{\bar{v}^2}{2c^2}, \quad (4.13)$$

⁴BALADIN, M. P. et al., *Soviet Phys. JETP*, **40**, 811 (1974).

on \bar{v} és un valor mitjà de la velocitat.

Si t és suficientment gran, fins i tot per a velocitats com les dels avions comercials aquesta diferència pot ser mesurable. De fet, des de principis de la dècada dels setanta, amb els rellotges atòmics de cesi portàtils s'ha assolit una estabilitat molt gran, que permet de precisar al nanosegon. Hafele i Keating (1972)⁶ es van plantejar una realització experimental de la paradoxa dels bessons —també dita *dels rellotges*.

En aquest cas els «bessons» són tres rellotges de ^{133}Cs : l'un, R_B , que resta en un aeroport i els altres dos que fan la volta al món en un avió comercial, l'un cap a l'est i l'altre en sentit oest. Com que l'experiment dura més d'un dia, l'aeroport no és estacionari en un sistema aproximadament inercial. El sistema de referència \mathcal{K} adient al cas té l'origen en el centre de la Terra i els tres eixos ancorats en l'esfera dels estels fixos. Segons \mathcal{K} , el rellotge R_B està en moviment circular uniforme i diàriament descriu una circumferència de radi $r \cos \lambda$ en sentit oest-est (r és el radi de la Terra i λ , la latitud de l'aeroport).

Si per simplificar suposem que l'aeroport és sobre l'equador i que els dos vols es fan seguint aquesta línia a velocitat constant v respecte al terra (prenem la velocitat positiva en sentit oest-est), la velocitat respecte a \mathcal{K} és $r\Omega + v$, on Ω és la velocitat de rotació de la Terra. (Com que es tracta de velocitats petites comparades amb la de la llum, la llei d'addició de velocitats de Galileu és vàlida en l'aproximació que treballem.)

De (4.13) podem obtenir la diferència dels temps indicats pels rellotges R_B de l'aeroport i R_A de l'avió:

$$\tau_A - \tau_B \approx -t \frac{1}{2c^2} (r\Omega \pm v)^2 + t \frac{1}{2c^2} r^2 \Omega^2 \approx -t \frac{1}{2c^2} (\pm 2r\Omega v + v^2),$$

on $t \approx \tau_B$ és el temps coordinat \mathcal{K} entre la partida i l'arribada, i el signe és $+$ o $-$ segons si el vol va cap a l'est o cap a l'oest. Si posem una velocitat aproximada de 1000 km/h per a l'avió, $r\Omega = 4 \cdot 10^7$ m/dia i una duració del viatge $t \approx \tau_A \approx \tau_B \approx 40$ h, tenim:

$$\tau_{AE} - \tau_B \approx -2,6 \cdot 10^{-7} \text{ s} \approx -260 \text{ ns}$$

$$\tau_{AO} - \tau_B \approx 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ s} \approx 140 \text{ ns}$$

segons que es tracti d'un vol cap a l'est o cap a l'oest.

En l'experiment real de Hafele i Keating, els avions no volen a velocitat constant ni tampoc segueixen l'equador, però el retard del rellotge de l'avió respecte al de l'aeroport es pot determinar a partir de les dades de la trajectòria i de la velocitat instantània:

$$(\tau_A - \tau_B)_{\text{cin}} \approx -\frac{1}{2c^2} \int_0^t dt [2r \cos \lambda(t) \Omega v(t) \cos \theta(t) + v(t)^2], \quad (4.14)$$

⁶HAFELE, J. C. i KEATING, R. E., *Science*, **177**, 166 (1972).

on λ és la latitud i $v \cos \theta$ és el component de la velocitat en la direcció oest-est.

Hem explicitat el subíndex *cin* en el retard (4.14) perquè el retard de cada rellotge tindrà també una contribució d'origen gravitatori, perquè el rellotge R_A de l'avió està molta estona a un potencial gravitatori més gran que el rellotge R_B . Si $z(t)$ és la diferència d'altures a cada instant, el retard acumulat segons la teoria general de la relativitat és:

$$(\tau_A - \tau_B)_{\text{grav}} \propto \frac{g}{c^2} \int_0^t z(t) dt. \quad (4.15)$$

En l'experiment es van transportar quatre rellotges de ^{133}Cs en vols comercials al voltant del món. A l'arribada es van comparar els temps enregistrats amb el temps de referència d'escala atòmica (AT) de l'US Naval Observatory.

El vol en sentit est (4 d'octubre de 1971) va durar 41,2 h efectives i el vol en sentit oest (13 d'octubre de 1971) va durar 48,6 h. El comandant de cada vol va registrar tant la trajectòria com la velocitat i l'altura, de manera que es tenien les dades per calcular (4.14) i (4.15) en cada un dels vols.

D'acord amb les expectatives, els rellotges que viatgen cap a l'est es retarden (envelleixen menys) que el de l'aeroport, mentre que en el viatge cap a l'oest s'avancen (envelleixen més de pressa). En la taula següent presentem els retards teòrics i els observats:

		retards (ns)	
		Est	Oest
Predicció	gravitatori	144 ± 14	179 ± 18
	cinemàtic	-184 ± 18	96 ± 10
Predicció	total	-40 ± 23	275 ± 21
Observat		-59 ± 10	273 ± 7

El retard dels rellotges en moviment té conseqüències sobre la «vida ordinària» per bé que no del tot evidents. La 13a Conferència General de Pesos i Mesures (1967) va adoptar el patró de ^{133}Cs per a la definició del segon, i la 14a Conferència (1971) va establir el Temps Atòmic Internacional, basat en rellotges atòmics que estan en funcionament en diversos establiments. Per a la comparació i sincronització d'aquests rellotges a distància un dels mètodes que s'apliquen consisteix a transportar un rellotge atòmic sincronitzat amb el del primer establiment i comparar-lo amb el del segon. En aquest procés, al temps indicat pel rellotge que viatja s'hi ha d'afegir el retard que comporta el transport en avió. Així per al trajecte París-Ottawa s'han d'afegir 32 ns, mentre que per al trajecte invers l'addició només és de 7 ns. L'any 1978 es van fer 43 comparacions horàries per aquest procediment.

4.7 Velocitat i acceleració pròpies

La *velocitat pròpia* d'un punt material és la derivada de la seva posició en l'espai-temps respecte al paràmetre *temps propi*:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (4.16)$$

que és un 4-vector pel fet que τ és un escalar de Lorentz. També se sol anomenar *quadrivelocitat*.

De (4.9) tenim que el quadrat de Minkowski de u^μ val:

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2, \quad (4.17)$$

per tant, dels quatre components de la quadrivelocitat només n'hi ha tres d'independents, ja que:

$$u^4 = +\sqrt{c^2 + \vec{u}^2}, \quad (4.18)$$

on $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, com habitualment. (L'elecció del signe $+$ és conseqüència de la condició causal (4.7).)

Per relacionar els components de la velocitat pròpia u^μ amb la velocitat newtoniana $\vec{w} = d\vec{x}/dt$ —també anomenada *trivelocitat*— aplicarem la regla de la cadena:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

que, si tenim en compte (4.11) i que $dx^4 = c dt$, ens porta a:

$$u^4 = \gamma c, \quad \vec{u} = \gamma \vec{w},$$

que escriurem:

$$u^\mu = (\gamma \vec{w}, \gamma c). \quad (4.19)$$

Els quatre components u^μ s'expressen en funció de les tres variables independents w^i , $i = 1, 2, 3$.

De dividir els components espacials pel component temporal tenim la relació inversa:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{w}}{c} = \frac{\vec{u}}{u^4}. \quad (4.20)$$

En el sistema de referència instantàniament comòbil, \mathcal{K}^\dagger , l'únic component no nul de la quadrivelocitat és el temporal:

$$u^{\mu\dagger} = (0, 0, 0, c). \quad (4.21)$$

De la relació (4.20), que val en qualsevol sistema inercial, i del fet que u^μ és un 4-vector, podem tornar a obtenir la llei relativista de composició de velocitats.

En efecte, si \mathcal{K}' i \mathcal{K} estan relacionats per la transformació (4.1), la relació (4.20) en el sistema \mathcal{K}' ens diu:

$$w^{i'} = c \frac{u^{i'}}{u^{4'}} = c \frac{\Lambda_{\alpha}^{i'} u^{\alpha}}{\Lambda_{\beta}^{4'} u^{\beta}} = c \frac{(\Lambda_{j'}^{i'} w^j + \Lambda_{4'}^{i'} c)}{(\Lambda_{l'}^{4'} w^l + \Lambda_{4'}^{4'} c)},$$

i substituint els valors de $\Lambda_{\alpha}^{\mu'}$ que apareixen a (2.14) i (2.15) ens torna a donar la llei de composició (2.31).

La derivada de la quadrivelocitat pròpia respecte al temps propi:

$$b^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} \quad (4.22)$$

és l'*acceleració pròpia*. En tractar-se del quocient entre un 4-vector i un escalar, és ella mateixa un 4-vector.

Per trobar la relació entre l'acceleració pròpia i l'acceleració newtoniana

$$\vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

només cal aplicar la regla de la cadena:

$$b^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

que tenint en compte (4.11) i (4.19) dóna:

$$b^{(4)} = \gamma^4 \frac{1}{c} \vec{w} \cdot \vec{a} \quad (4.23)$$

$$\vec{b} = \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 \frac{\vec{w} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{w} = \gamma^4 \left(\vec{a} + \frac{1}{c^2} \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{a}) \right), \quad (4.24)$$

on hem posat el superíndex 4 entre parèntesi per indicar el component 4 i per tal de no confondre'l amb la potència. En general, si no indiquem el contrari, no ho farem.

De derivar la lligadura (4.17) respecte al temps propi tenim:

$$2u^{\mu}b_{\mu} = 0, \quad (4.25)$$

és a dir,

$$-b^4 u^4 + \vec{b} \cdot \vec{u} = 0$$

que ens permet d'aïllar

$$b^4 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{u}}{u^4} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{w}}{c}, \quad (4.26)$$

que mostra com l'acceleració pròpia només té tres components independents.

La relació (4.25) ens diu que l'acceleració pròpia b^{μ} és ortogonal a la quadrivelocitat u^{μ} . Com que aquesta última és de tipus temps, b^{μ} ha de ser necessàriament

de tipus espai. En efecte, en el sistema instantàniament comòbil \mathcal{K}^\dagger , $\vec{w}^\dagger = 0$ i la relació (4.26) ens diu $b^{4\dagger} = 0$. Així, el quadrat de Minkowski, que és un invariant, val:

$$b^\mu b_\mu = b^{\mu\dagger} b_{\mu\dagger} = \vec{b}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger > 0.$$

Directament a partir de (4.23) i (4.24) obtenim:

$$b^\mu b_\mu = \gamma^4 \left(\vec{a}^2 + \gamma^2 \frac{(\vec{a}\vec{w})^2}{c^2} \right) = \gamma^6 \left(\vec{a}^2 - \left(\frac{\vec{w}}{c} \times \vec{a} \right)^2 \right), \quad (4.27)$$

on també és obvi que b^μ és de tipus espai.

4.8 Moviment uniformement accelerat

La definició newtoniana de moviment uniformement accelerat: $\vec{a} = \text{constant}$, admet diverses generalitzacions relativistes. La que podria semblar natural: $b^\mu = \text{constant}$ és inconsistent perquè, com ja hem vist, b^μ només té tres components independents. En efecte, de derivar la relació (4.25) tenim:

$$b^\mu b_\mu + \frac{db^\mu}{d\tau} u_\mu = 0$$

i si $b^\mu = \text{constant}$, llavors $b^\mu b_\mu = 0$ que, per tractar-se d'un 4-vector espacial, implica $b^\mu = 0$.

La definició que es pren habitualment per al moviment relativista uniformement accelerat és:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \gamma^{-1} \vec{b} = \text{constant}, \quad (4.28)$$

que no presenta inconsistències perquè només són tres condicions. Més endavant (secció 5.4) veurem el significat dinàmic d'aquesta condició.

Notem que (4.28) implica que el component de \vec{u} ortogonal a \vec{b} és constant, i només el component paral·lel de la velocitat varia. Podem escollir els eixos de manera que: $\vec{b} = (b, 0, 0)$ i $\vec{u}_0 = (u_0^1, u_0^2, 0)$, ara bé u_1 canvia amb t però $u_2 = u_0^2$ podem triar l'origen de temps de manera que $u_0^1 = 0$ i seguidament, per una transformació de Lorentz pura en la direcció de l'eix de les y arribem a un sistema de referència i uns eixos en què \vec{u}_0 i \vec{b} estan en la direcció de l'eix de les x . Així, en aquests sistemes de referència convertim el problema en un problema d'una dimensió d'espai:

$$b^\mu = (b, 0, 0, b^4), \quad u^\mu = (\gamma w, 0, 0, \gamma c).$$

Si usem ara les relacions (4.23) i (4.24) tenim:

$$b = \gamma^4 a \quad \text{i} \quad b^4 = \frac{bw}{c} = \gamma^4 \frac{aw}{c}, \quad (4.29)$$

on $a = dw/dt$.

En el sistema instantàniament comòbil: $b^{\mu\dagger} = (b^\dagger, 0, 0, 0)$ i del fet que $b^\mu b_\mu$ és un invariant tenim:

$$b^\dagger = \sqrt{b^\mu b_\mu} = \gamma^3 a. \quad (4.30)$$

Notem de passada que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma w) = \gamma^3 a \quad (4.31)$$

i, per tant, la condició (4.28) equival a $b^\dagger = \text{constant}$, és a dir:

$$b^{\mu\dagger} = \text{constant}. \quad (4.32)$$

4.8.1 Moviment hiperbòlic

Vegem ara la forma de la trajectòria $x^\mu(\tau)$ d'un moviment d'aquest tipus. La determinarem en el sistema de referència en què

$$b^\mu = (b, 0, 0, b^4), \quad u^\mu = (\gamma w, 0, 0, \gamma c).$$

D'acord amb (4.29), (4.30) i (4.31) tindrem:

$$b = \gamma b^\dagger \quad b^4 = \gamma \frac{w}{c} b^\dagger$$

amb $b^\dagger = \text{constant}$. És a dir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du^1}{d\tau} &= \frac{b^\dagger}{c} u^4, & \frac{du^2}{d\tau} &= 0, \\ \frac{du^3}{d\tau} &= 0, & \frac{du^4}{d\tau} &= \frac{b^\dagger}{c} u^1. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Es tracta d'un sistema diferencial de primer ordre. Si escollim l'instant inicial, $\tau_0 = 0$, quan la velocitat val zero, $u^\mu(0) = (0, 0, 0, c)$, la solució del sistema és:

$$\left. \begin{aligned} u^1(\tau) &= c \sinh\left(\frac{b^\dagger \tau}{c}\right) \\ u^2(\tau) &= u^3(\tau) = 0 \\ u^4(\tau) &= c \cosh\left(\frac{b^\dagger \tau}{c}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

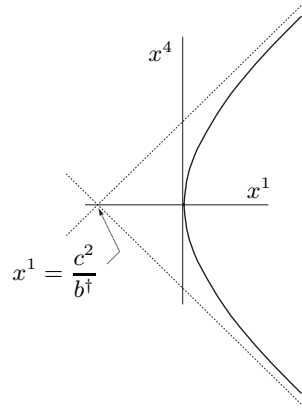


Figura 4.4. *Línia d'univers d'un moviment uniformement accelerat (o hiperbòlic). La velocitat tendeix asimptòticament a c*

Integrant una segona vegada respecte a τ tenim les equacions paramètriques de la trajectòria:

$$\left. \begin{aligned} x^1(\tau) &= \frac{c^2}{b^\dagger} \left[\cosh\left(\frac{b^\dagger \tau}{c}\right) - 1 \right] \\ x^2(\tau) &= x^3(\tau) = 0 \\ x^4(\tau) &= \frac{c^2}{b^\dagger} \sinh\left(\frac{b^\dagger \tau}{c}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

on hem pres l'origen de coordenades en $x^\mu(0)$.

Si ara utilitzem la coneguda identitat $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$, tenim:

$$\left(\frac{b^\dagger x^1}{c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{b^\dagger x^4}{c^2} \right)^2 = 1,$$

que és l'equació d'una hipèrbola equilàtera en l'espai-temps, de semieix c^2/b^\dagger i amb centre en el punt $(-c^2/b^\dagger, 0)$, com la que es mostra en la figura 4.4. La trajectòria espacial és rectilínia sobre l'eix X en el sistema de referència escollit aquí.

Problemes

- 4.1 Un sistema de referència S' es mou amb velocitat v respecte a un sistema S en la direcció $(1, -1, 0)$. Trobeu la matriu de la transformació de Lorentz que passa d'un sistema a l'altre.

- 4.2 Les coordenades d'espai-temps de dos parells d'esdeveniments són:

A_1	0,3 m	0,5 m	0	2×10^{-9} s	A_2	0,4 m	0,7 m	0	3×10^{-9} s
B_1	0,7 m	0,5 m	0	5×10^{-9} s	B_2	0,4 m	0,6 m	0	4×10^{-9} s

- a) Hi pot haver una connexió causal entre A_1 i A_2 ? I entre B_1 i B_2 ?
 b) Hi ha algun sistema de referència que vegi simultanis A_1 i A_2 ? El mateix per a B_1 i B_2 ? En cas afirmatiu, trobeu el sistema de referència.
- 4.3 Siguin a i b dos quadrivectors tals que $a^\mu a_\mu = b^\nu b_\nu = -m^2$ és a dir de tipus temps i de la mateixa norma, a més $a^4 > 0$ i $b^4 > 0$. a) Trobeu la transformació de Lorentz que anul·la la part d'espai d' a . b) Trobeu la transformació de Lorentz que transforma a en b .
- 4.4 Siguin V^μ i W^μ dos quadrivectors unitaris de tipus temps i espai, respectivament. Demostreu que $V^\mu W_\mu$ pot prendre qualsevol valor entre $-\infty$ i ∞ .
- 4.5 Un mesó Π^+ recorre una distància de 700 m a una velocitat constant de 0,99995 c abans no es desintegra. Quina vida pròpia té?
- 4.6 Sigui V^μ un 4-vector de tipus temps i W^μ un altre que no és de tipus espai. Demostreu: (a) si $V^4 W^4 > 0$, necessàriament $\eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu < 0$, i (b) si $V^4 W^4 < 0$, necessàriament $\eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu > 0$.
- 4.7 Siguin V^μ i W^μ dos 4-vectors de tipus llum no paral·lels. Demostreu que tenen la mateixa orientació temporal si, i només si, $\eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu < 0$.
- 4.8 La velocitat pròpia d'una partícula puntual és $u^\mu = \gamma(\vec{v}, c)$. (a) Trobeu un quadrivector unitari l^μ que sigui ortogonal a la velocitat pròpia i que tingui la part espacial paral·lela a la velocitat \vec{v} relativa al sistema laboratori. (b) Trobeu dos quadrivectors unitaris, w^μ i t^μ , tals que junt amb u^μ i l^μ formin una base ortogonal de l'espai-temps. (c) Quina forma ha de tenir la llei de variació de l^μ , w^μ i t^μ ?

Capítol 5

Mecànica relativista

En aquest capítol formularem les lleis de la dinàmica relativista, les quals han de substituir les lleis newtonianes en el domini de les velocitats grans. En l'elaboració dels nous enunciats tindrem presents dues regles:

- (1) les lleis han de ser les mateixes en tots els sistemes de referència inercials, com a conseqüència del principi de relativitat, i
- (2) en el límit de velocitats petites ($v \ll c$) les lleis relativistes s'han de reduir a les newtonianes.

La validesa de les lleis que enunciarem no descansa, però, en el fet de complir les dues condicions anteriors, sinó en el fet que superen la prova de l'experiment, així com en la seva aplicació diària en les grans màquines de la física d'aquest segle: les col·lisions entre partícules a grans energies, l'òptica electrònica, el moviment de les càrregues en els acceleradors, etc.

5.1 El quadrimoment lineal

La importància del vector *quantitat de moviment* a la mecànica newtoniana rau, en bona mesura, en el fet de ser una quantitat conservada en els xocs. Repassarem primer les lleis de les col·lisions newtonianes per després formular-ne la generalització relativista.

5.1.1 Col·lisions newtonianes

En tots els xocs es conserven les quatre magnituds següents:

1. Els tres components de la quantitat de moviment, o moment lineal total, que valen el mateix per a les partícules incidents que per a les partícules

emergents:

$$\left(\sum_a m_a \vec{v}_a \right)_A = \left(\sum_b m_b \vec{v}_b \right)_D . \quad (5.1)$$

Els subíndexs A i D indiquen «abans» i «després» del xoc, respectivament.

2. La massa inert total també es conserva

$$\left(\sum_a m_a \right)_A = \left(\sum_b m_b \right)_D . \quad (5.2)$$

En la mecànica de Newton aquesta llei indica la conservació de la *quantitat de matèria*.

Aquestes quatre lleis valen per a tots els xocs, independentment de si en el procés s'ha conservat, o no, el nombre de partícules i la seva identitat, a causa de, per exemple, desintegracions, fusions, explosions, etc.

Es comprova fàcilment que les lleis anteriors són invariants sota les transformacions de Galileu (1.5). En efecte, si complementem la llei d'addició de velocitats (1.7), $\vec{v}'_a = \vec{v}_a - \vec{V}$, amb el supòsit que la massa inert de cada partícula val el mateix en tots els sistemes de referència inercials, $m_a = m'_a$, tindrem:

$$\begin{aligned} \left(\sum_a m'_a \vec{v}'_a \right)_A - \left(\sum_b m'_b \vec{v}'_b \right)_D &= \\ \left(\sum_a m_a (\vec{v}_a - \vec{V}) \right)_A - \left(\sum_b m_b (\vec{v}_b - \vec{V}) \right)_D &= \\ \left(\sum_a m_a \vec{v}_a \right)_A - \left(\sum_b m_b \vec{v}_b \right)_D - \left[\left(\sum_a m_a \right)_A - \left(\sum_b m_b \right)_D \right] \vec{V} \end{aligned}$$

que val zero en virtut de (5.1) i (5.2).

I recíprocament, si (5.1) val per a tots els sistemes de referència inercials, llavors també es conserva la massa total. La demostració segueix fàcilment de reescriure l'equació anterior com:

$$\begin{aligned} \left[\left(\sum_a m'_a \vec{v}'_a \right)_A - \left(\sum_b m'_b \vec{v}'_b \right)_D \right] - \left[\left(\sum_a m_a \vec{v}_a \right)_A - \left(\sum_b m_b \vec{v}_b \right)_D \right] &= \\ \left[\left(\sum_a m_a \right)_A - \left(\sum_b m_b \right)_D \right] \vec{V} \end{aligned}$$

que relaciona les variacions de la quantitat de moviment total en dos sistemes de referència que es mouen a velocitat relativa \vec{V} . Si la quantitat de moviment total

es conserva en qualsevol sistema inercial, els dos termes del primer membre són zero, i també ho ha de ser el segon membre per a qualsevol \vec{V} . La qual cosa implica (5.2).

Entre les col·lisions newtonianes considerem a part aquelles en què també es conserva l'energia cinètica total:

$$\left(\sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 \right)_A = \left(\sum_b \frac{1}{2} m_b v_b^2 \right)_D, \quad (5.3)$$

que s'anomenen *elàstiques*, per distingir-les d'aquelles en què no es conserva, o *inelàstiques*. Tenim exemples d'aquestes últimes en les explosions i les fusions.

És fàcil comprovar que a conseqüència de (5.1) i (5.2), aquesta última relació és invariant de Galileu, per bé que cada membre de l'equació (5.3) no ho sigui per separat.

5.1.2 Col·lisions relativistes

La llei de conservació de la quantitat de moviment (5.1) no és covariant de Lorentz (no queda invariant de forma si canviem de sistema de referència inercial). Ho il·lustrem amb l'exemple següent.

Exemple 5.1

Considerem un xoc entre dues partícules idèntiques de massa m que després de xocar queden foses en una sola partícula de massa M . Hi ha un sistema inercial \mathcal{K} que veu les partícules aproximar-se amb velocitats $\vec{w} = (w, 0, 0)$ i $-\vec{w}$.

\mathcal{K}' serà un altre sistema inercial que es mou a velocitat $\vec{V} = (V, 0, 0)$ respecte a \mathcal{K} .

D'aplicar les lleis de conservació (5.1) i (5.2), en resulta que en el sistema \mathcal{K} la partícula emergent surt a velocitat $\vec{W} = (0, 0, 0)$ i la seva massa és $M = 2m$.

Per al sistema \mathcal{K}' , hauríem de tenir:

$$mw'_1 + mw'_2 = 2mW', \quad (5.4)$$

on hem suposat que m i M no depenen del sistema de referència, com en el cas newtonià. Les velocitats transformades s'obtenen d'aplicar la llei relativista d'addició de velocitats (2.31):

$$w'_1 = \frac{w - V}{1 - wV/c^2}, \quad w'_2 = -\frac{w + V}{1 + wV/c^2}, \quad W' = -V. \quad (5.5)$$

Substituïdes en (5.4) donen:

$$mw'_1 + mw'_2 - 2mW' = -\frac{2m}{1 - w^2V^2/c^4} \frac{w^2V}{c^2} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right)$$

que només s'anul·la per a $V = 0$. És a dir, per a aquest xoc en concret, si (5.1) val en el sistema inercial \mathcal{K} , no val en cap altre sistema de referència que es mogui respecte a \mathcal{K} en la direcció del moviment de les partícules.

5.1.3 Quadrimoment lineal

Introduïrem una definició de moment lineal relativista de manera que la llei de conservació valgui en tots els sistemes inercials. Una modificació senzilla de la quantitat de moviment newtoniana consisteix a prendre la part espacial de la velocitat pròpia en comptes de la velocitat. Amb això substituïm les variables v^i , que obeeixen a unes lleis de transformació una mica embolicades, per les variables u^i que, en formar part d'un quadrivector, segueixen unes lleis de transformació senzilles. Prenem, doncs, la definició de quantitat de moviment relativista:

$$\vec{p} = m\vec{u} = m\gamma_v \vec{v}, \quad (5.6)$$

on m és una constant amb dimensions de massa que s'anomena *massa pròpia*, o també *massa en repòs*, que és una característica de la partícula i no depèn del sistema de referència: és un escalar.

Si desenvolupem (5.6) en sèrie de potències d' $1/c$ tenim:

$$\vec{p} \approx m\vec{v} + O(1/c^2),$$

i en el límit de petites velocitats el moment lineal relativista dóna la quantitat de moviment newtoniana.

La llei relativista de conservació del moment lineal serà:

$$\left(\sum_a \vec{p}_a \right)_A - \left(\sum_b \vec{p}_b \right)_D = 0, \quad (5.7)$$

amb \vec{p}_a donat per (5.6).

Si aquesta llei de conservació ha de ser la mateixa en qualsevol sistema inercial, en un altre sistema de referència \mathcal{K}' tindrem:

$$\left(\sum_a \vec{p}'_a \right)_A - \left(\sum_b \vec{p}'_b \right)_D = 0. \quad (5.8)$$

Per veure la relació que guarden \vec{p}_a i \vec{p}'_a utilitzarem el fet que \vec{u}_a són els tres components espacials del 4-vector velocitat pròpia i que m_a és un escalar. D'aquí que \vec{p}_a són els components espacials del 4-vector que anomenem *quadrimoment lineal*:

$$p_a^\mu = m_a u_a^\mu = (\vec{p}_a, p_a^4), \quad (5.9)$$

amb $p_a^4 = m_a \gamma_a c$.

La llei de transformació sota canvis de coordenades serà molt simple, com correspon a un 4-vector:

$$p_a^{\mu'} = L^{\mu'}_\nu p_a^\nu, \quad (5.10)$$

on $L^{\mu'}_\nu$ és la transformació de Lorentz que passa de \mathcal{K} a \mathcal{K}' .

Substituint (5.10) en (5.8) i reagrupant termes tenim:

$$0 = L''_j \left[\left(\sum_a p_a^j \right)_A - \left(\sum_b p_b^j \right)_D \right] + L''_4 \left[\left(\sum_a p_a^4 \right)_A - \left(\sum_b p_b^4 \right)_D \right].$$

El primer terme d'aquesta igualtat és zero en virtut de (5.7) i, com que el que queda s'ha de satisfer per a qualsevol transformació de Lorentz $L''_{\nu'}$, tenim necessàriament que:

$$\left(\sum_a p_a^4 \right)_A - \left(\sum_b p_b^4 \right)_D = 0. \quad (5.11)$$

En conclusió: les tres lleis de conservació (5.7) poden ser vàlides en tots els sistemes inercials si es compleix també la llei de conservació (5.11).

Si examinem la quantitat p^4 en el límit de petites velocitats, obtenim:

$$p^4 = mc\gamma = mc + O(1/c^2) \quad (5.12)$$

de manera que, per a petites velocitats de les partícules que hi intervenen, (5.11) dividida per c dona la llei newtoniana de conservació de la massa total (5.2) excepte termes d'ordre $1/c^2$.

D'acord amb el que hem vist al llarg d'aquest apartat, hem de substituir les quatre lleis newtonianes dels xocs per les lleis de conservació relativistes del quadrimoment lineal total:

$$\left(\sum_a p_a^\mu \right)_A - \left(\sum_b p_b^\mu \right)_D = 0. \quad (5.13)$$

Aquesta és una llei covariant —formulada en termes de magnituds i operacions tensorials— i això en garanteix la validesa per a tots els sistemes inercials, gràcies a la propietat dels tensors segons la qual, si tots els components d'un tensor s'anul·len en un sistema de coordenades, el mateix passa en qualsevol altre sistema de coordenades. (Vegeu la secció A.1.4)

5.1.4 Propietats del quadrimoment lineal

Els tres components espacials

$$\vec{p} = m\gamma_v \vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

tenen una forma semblant a la quantitat de moviment newtoniana, però aquí el coeficient d'inèrcia, $m\gamma_v$, augmenta amb la velocitat i tendeix a infinit quan la velocitat del cos s'aproxima a la velocitat límit c .

La constant que hem anomenat *massa pròpia* es pot determinar a partir de els components del quadrimoment lineal per:

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \quad (5.14)$$

que resulta de combinar la relació (4.17) amb la definició (5.9).

Vegem ara el significat del quart component. La quantitat $cp^4 = mc^2\gamma$ té dimensions de ML^2T^{-2} , com l'energia. D'altra banda, en l'aproximació de petites velocitats:

$$cp^4 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(1/c^2), \quad (5.15)$$

on en el segon terme hi reconeixem l'energia cinètica newtoniana. El primer terme és una constant característica de cada cos, amb dimensions d'energia, que s'anomena *energia en repòs*. (Més avall aportarem arguments en favor d'aquesta denominació.)

Per aquesta raó, i per d'altres que apareixeran en la secció (5.2), el producte

$$E = cp^4 \quad (5.16)$$

s'anomena *energia total* de la partícula, i l'excés sobre l'energia en repòs:

$$T = E - mc^2 = cp^4 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) \quad (5.17)$$

s'anomena *energia cinètica*, perquè és la part de E associada al moviment de la partícula i també perquè en el límit de petites velocitats val el mateix que l'energia cinètica newtoniana.

De la relació (5.14) i de la definició (5.16), podem expressar l'energia com a:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}, \quad (5.18)$$

i també el mòdul del moment lineal com a:

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2} = \sqrt{\frac{T(T + 2mc^2)}{c^2}}. \quad (5.19)$$

D'altra banda, de la relació (5.9) obtenim la següent expressió per a la velocitat de la partícula:

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}}{p^4} = \frac{c\vec{p}}{E}. \quad (5.20)$$

5.1.5 Xocs elàstics i xocs inelàstics

El quart component de la llei de conservació (5.13) multiplicada per c dona:

$$\left(\sum_a E_a \right)_A - \left(\sum_b E_b \right)_D = 0,$$

la llei de conservació de l'energia total. Si hi separem les contribucions de les energies en repòs i les energies cinètiques, tenim:

$$\left[\left(\sum_a m_a \right)_A - \left(\sum_b m_b \right)_D \right] c^2 + \left[\left(\sum_a T_a \right)_A - \left(\sum_b T_b \right)_D \right] = 0. \quad (5.21)$$

No es conserven la massa pròpia total per una banda i l'energia cinètica total per una altra, sinó una combinació de les dues expressada per l'energia total.

Quan les partícules que surten després del xoc són les mateixes que hi han entrat, diem que el xoc és *elàstic*. Llavors tenim òbviament que:

$$\left(\sum_a m_a \right)_A = \left(\sum_b m_b \right)_D,$$

que, substituïda en (5.21), ens porta a la conservació de l'energia cinètica:

$$\left(\sum_a T_a \right)_A = \left(\sum_b T_b \right)_D.$$

En els xocs inelàstics no es conserven la massa en repòs ni l'energia cinètica. Si denotem per ΔT i Δm el guany d'energia cinètica i el defecte màssic, respectivament:

$$\Delta T = \left(\sum_a T_a \right)_D - \left(\sum_b T_b \right)_A, \quad \Delta m = \left(\sum_a m_a \right)_A - \left(\sum_b m_b \right)_D,$$

obtenim de (5.21):

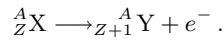
$$\Delta T = c^2 \Delta m, \quad (5.22)$$

de manera que en els xocs inelàstics es transforma energia en repòs en energia cinètica, o a la inversa.

Hi ha força exemples basats en aquesta transformació de massa pròpia en energia. Els més espectaculars són la fusió i la fissió nuclears, i en parlarem amb més detall a la secció 5.2.

Exemple 5.2 La desintegració beta i el neutrino

En la desintegració β^- un àtom X, de nombre atòmic Z i nombre màssic A , emet un electró i deixa com a residu un àtom Y de nombre atòmic $Z + 1$ i el mateix nombre màssic:



S'observa que l'energia cinètica de l'electró emès pren valors en un espectre continu, entre 0 i un valor màxim.

Aquesta observació està en desacord amb la llei del quadrimoment lineal que, per a una reacció com l'anterior prediu una energia cinètica ben definida per a l'electró.

En efecte, en el sistema de referència en què X és en repòs tenim $p_X^\nu = (\vec{0}, m_X c)$ i la llei de conservació ens diu:

$$p_Y^\nu = p_X^\nu - p_e^\nu,$$

el quadrat de Minkowski de la qual dóna:

$$-m_Y^2 = -m_X^2 - m_e^2 + 2m_X c \left(\frac{T_e}{c} + m_e c \right),$$

d'on:

$$T_e = \frac{(m_X - m_e)^2 - m_Y^2}{2m_X} c^2 \quad (5.23)$$

que dóna un valor ben definit de T_e si els nuclis X i Y estan en l'estat fonamental (o, com a molt, un espectre discret de valors de T_e si s'admet que X i Y podrien estar en estats excitats).

L'any 1930 Pauli va proposar que el resultat experimental es podria explicar sense renunciar a la llei de conservació del quadrimoment lineal si s'admetés l'existència d'una partícula addicional que s'endugués una part d'aquesta energia. Per conservació de la càrrega, aquesta partícula ha de ser neutra, cosa que la fa més difícil de detectar, i per això Fermi la va denominar *neutrino* (1934).

Considerem ara la reacció «corregida»:

$${}_Z^A X \longrightarrow {}_{Z+1}^A Y + e^- + \text{neutrino}.$$

De la llei de conservació del quadrimoment lineal tenim que:

$$p_Y^\nu + p_o^\nu = p_X^\nu - p_e^\nu,$$

on p_o^ν és el quadrimoment lineal del neutrino. A partir del quadrat de Minkowski en el sistema de referència en què X està en repòs tenim una relació semblant a (5.23)

$$T_e = \frac{(m_X - m_e)^2 - \mu^2}{2m_X} c^2, \quad (5.24)$$

on

$$\mu^2 c^2 = -(p_Y + p_o)^\nu (p_Y + p_o)_\nu. \quad (5.25)$$

El valor màxim que pot prendre μ ve condicionat pel fet que l'energia cinètica de l'electró (5.24) no pot ser negativa. Així:

$$\mu_{\text{màx}} = m_X - m_e,$$

que correspon a $T_e = 0$.

El valor mínim teòric de μ , que dóna com a contrapartida el valor màxim de T_e , es donaria quan el nucli Y i el neutrino sortissin en repòs relatiu. En efecte, en aquest cas hi ha un sistema de referència S^\dagger en el qual $p_Y^{\nu\dagger} = (\vec{0}, m_Y c)$ i $p_o^{\nu\dagger} = (\vec{0}, m_o c)$. En ser la quantitat $\mu^2 c^2$ un invariant de Lorentz, no depèn de quin sigui el sistema de referència utilitzat per calcular-la, i tindrem:

$$(\mu^2 c^2)_{\text{mín}} = (m_Y + m_o)^2 c^2. \quad (5.26)$$

De manera que:

$$(T_e)_{\text{màx}} = \frac{(m_X - m_e)^2 - (m_Y + m_o)^2}{2m_X} c^2, \quad (5.27)$$

i el valor del llinar superior de l'espectre de l'energia cinètica dels electrons emesos permet determinar la massa m_o de la partícula hipotètica.

Les dades experimentals abonen que la massa del neutrino és molt petita comparada amb la de l'electró. Mesures recents donen la fita superior:

$$\frac{m_o}{m_e} < 4,6 \cdot 10^{-5}.$$

De fet, es considera que el neutrino és una partícula de massa nul·la (vegeu l'apartat 5.1.6 per veure l'especificitat d'aquestes partícules).

Aquesta partícula predita teòricament per Pauli l'any 1930 va ser detectada l'any 1956 per Cowan i Reines. La reacció de desintegració β^-

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

(la partícula extra $\bar{\nu}$ és de fet un antineutrino) es pot donar espontàniament, perquè el defecte màssic $\Delta m = m_n - (m_p + m_e + m_{\bar{\nu}}) > 0$ i s'inverteix en l'energia cinètica de les partícules emergents, que ha de ser positiva.

Per contra, la reacció inversa, de desintegració β^+ espontània del protó

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu$$

(on e^+ i ν són, respectivament, el positó i el neutrino) no es pot donar espontàniament perquè el defecte màssic és negatiu i l'energia cinètica de les partícules emergents no pot ser negativa. Cowan i Reines van detectar que es produïa la desintegració β^+ en nuclis d'hidrogen disposats en les proximitats d'un reactor nuclear. Allà els antineutrinos, produïts en desintegracions β^- que tenen lloc en el reactor, bombardegen els protons i donen lloc a la reacció:

$$\bar{\nu} + p \longrightarrow n + e^+.$$

5.1.6 Fotons

D'acord amb la teoria quàntica, l'emissió de radiació electromagnètica no es produeix en forma contínua sinó per paquets discrets i localitzats. A certes escales, l'emissió i l'absorció de radiació electromagnètica es poden modelitzar com a xocs inelàstics de partícules materials amb aquests paquets discrets, que es tracten com a partícules i s'anomenen *fotons*. En qualsevol cas, com que en el buit viatgen a la velocitat c , el quadrimoment lineal, k^μ , d'un fotó ha de satisfer, d'acord amb (5.20), que: $|\vec{k}| = k^4$. És a dir:

$$k^\mu = k(\hat{k}, 1), \quad (5.28)$$

on el vector unitari \hat{k} és la direcció d'emissió del fotó.

Si tenim en compte (5.14), la massa pròpia del fotó resulta ser:

$$m = \frac{1}{c} \sqrt{-k^\mu k_\mu} = \frac{1}{c} \sqrt{-(k^4)^2 + \vec{k}^2} = 0. \quad (5.29)$$

Aquesta és una característica tant dels fotons com de totes les partícules que viatgen a la velocitat de la llum.

El resultat recíproc, a saber, si la massa pròpia d'una partícula és nul·la, llavors $|\vec{p}| = p^4$, se segueix immediatament de (5.14) i (5.20). Això inclou el cas del neutrino esmentat abans, és a dir el neutrino es mou a la velocitat de la llum i no hi ha cap sistema de referència en què es pugui veure en repòs.

La relació entre les propietats ondulatòries i les corpusculars de la radiació ve donada per les fórmules de Planck i De Broglie:

$$k^4 = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}, \quad |\vec{k}| = k^4 = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (5.30)$$

En canviar de sistema de referència, ν i \hat{k} varien d'acord amb l'efecte Doppler (3.9) i l'aberració (3.11) i, per la seva part, les quantitats k^μ canvien com els components d'un 4-vector. Són compatibles les relacions de Planck i De Broglie amb l'efecte Doppler i l'aberració? La resposta és afirmativa, perquè les fórmules d'aquests efectes les hem obtingudes en el capítol 3 a partir de la invariància de la fase $k_{\mu\nu} x^{\mu\nu} = k_\mu x^\mu$, per a qualsevol x^μ . Això implica que k_μ és un covector i, per tant, k^μ és un 4-vector.

5.2 Conversió massa-energia

A l'apartat 5.1.5 hem comentat la conversió de massa pròpia en energia cinètica, com a conseqüència de la llei de conservació de la suma de l'energia en repòs i l'energia cinètica. Ara veurem com, en variar l'energia interna d'un cos puntual, també varia la seva massa pròpia en la mateixa proporció:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

5.2.1 La inèrcia de l'energia

En el marc que ens movem, una partícula puntual és una simplificació vàlida en un determinat domini de dimensions i d'energies, en el qual ens és permès d'ignorar-ne l'estructura interna (perquè les energies en joc no són suficients per excitar graus de llibertat interns, etc.). Tanmateix, fins i tot en l'aproximació puntual, hem de tenir en compte que variacions en l'estructura interna es manifesten en variacions de la massa pròpia.

Comencem per considerar, per exemple, un electró lliure i la reacció d'emissió d'un fotó per aquest electró:

$$e^- \longrightarrow e^- + \gamma.$$

Aquesta reacció està prohibida perquè si el fotó té una energia no nul·la, llavors es viola la conservació del quadrimoment lineal. En efecte, sigui \mathcal{K} el sistema de referència de l'electró abans de l'emissió; el quadrimoment de l'electró abans de l'emissió és $p_1^\mu = (\vec{0}, m_e c)$, després és $p_2^\mu = (\vec{p}, p^4)$, i el quadrimoment del fotó és $k^\mu = (\vec{k}, k)$, amb $k = h\nu/c$.

De la llei de conservació tenim:

$$p_1^\mu - p_2^\mu = k^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

i, si calculem el quadrat de Minkowski i aïllem p_2^4 , dóna: $p_2^4 = m_e c$ que, per conservació de l'energia, porta a:

$$h\nu = 0.$$

L'energia del fotó ha de ser nul·la i, per tant, no hi ha emissió.

Tanmateix és corrent que un àtom en un estat excitat emeti llum per passar a un estat menys energètic o a l'estat fonamental. L'estudi de la llum emesa constitueix el camp de l'espectroscòpia atòmica i ha estat una valuosa font d'informació sobre l'estructura de l'àtom. Una cosa semblant es pot dir de l'emissió de raigs gamma (radiació electromagnètica de més alta freqüència) per un nucli atòmic excitat.

Una transició atòmica de les esmentades la podríem representar per:

$$A_E \longrightarrow A_0 + \gamma,$$

on γ és el fotó i hem representat el mateix àtom amb símbols diferents: A_E per a l'estat excitat i A_0 per a l'estat fonamental; perquè malgrat estar en l'aproximació puntual volem guardar memòria que l'estat dels seus electrons és diferent. Suposarem que A_E està en repòs en el laboratori.

La llei de conservació del quadrimoment lineal ens dóna:

$$p_E^\mu - k^\mu = p_0^\mu.$$

Si ara en calculem el quadrat de Minkowski, tenim en compte (5.14) i $p_E^\mu = (\vec{0}, m_E c)$, obtenim:

$$h\nu = k^4 c = \frac{m_E^2 - m_0^2}{2m_E} c^2. \quad (5.31)$$

Com que aquesta emissió s'observa, i de maneres molt variades, amb $h\nu \neq 0$, podem concloure que $m_E > m_0$.

Com que es tracta d'un estat lligat entre el nucli i els electrons que el componen, l'energia interna d'un àtom és negativa. L'energia interna de l'àtom en estat excitat

és més gran (menys negativa) que en l'estat fonamental. Del que hem vist abans, també la massa pròpia de l'àtom en l'estat A_E és més gran que la de l'àtom en l'estat A_0 . Podem concloure que a més energia interna més massa pròpia.

Notem que, de (5.31), resulta que:

$$h\nu = \frac{m_E + m_0}{2m_E} c^2 (m_E - m_0) < (m_E - m_0)c^2,$$

i l'energia del fotó emès és menor que l'esperada pel defecte màssic. Això és degut al fet que l'àtom A_0 també s'emporta energia cinètica en el moviment de retrocés (vegeu el problema 5.3).

5.2.2 Fissió i fusió nuclears

La massa en repòs d'un nucli és menor que la suma de les masses en repòs dels protons i neutrons que el componen. Aquesta diferència és deguda a la contribució de les energies cinètica i potencial dels nucleons. En tractar-se d'un estat lligat, l'energia total dels components és negativa, $E_T < 0$. S'anomena *energia d'enllaç*.

A la figura 5.1 presentem una gràfica de l'energia d'enllaç per nucleó en l'estat fonamental en funció del nombre màssic A . Hi veiem com $E(A) = -E_T/A$ depèn del nucli considerat i, en línies generals, és màxima per als nuclis de la part mitjana de la taula periòdica. El valor màxim s'assoleix per als nuclis de ^{56}Fe i ^{63}Cu , a la proximitat de $A = 60$, i també hi ha un màxim local per a l'heli ($A = 4$).

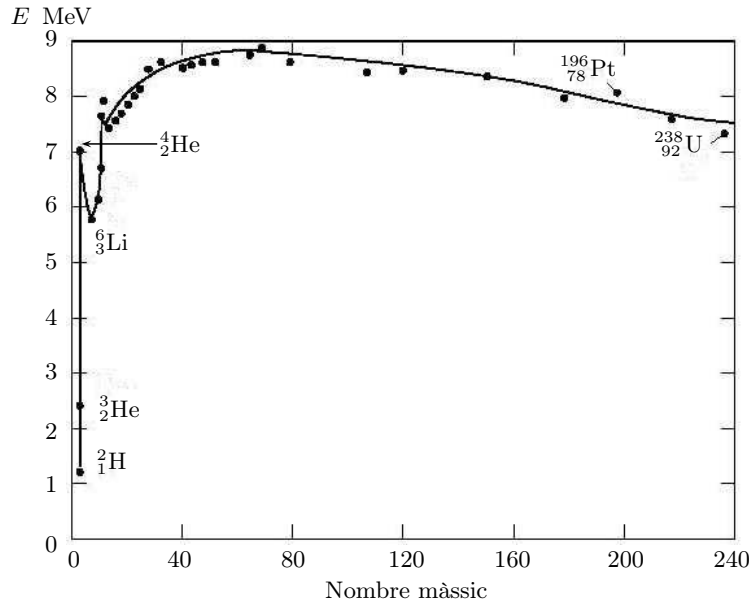
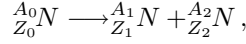


Figura 5.1. Energia per nucleó en funció del nombre de nucleons A

Els nuclis amb $E(A)$ més gran són més estables i no es desintegren espontàniament en d'altres més petits. En efecte, considerem una reacció del tipus



on Z_a i A_a són, respectivament, el nombre atòmic i el nombre màssic de cada nucli.

De les lleis de conservació de la càrrega elèctrica i del nombre de nucleons tenim:

$$Z_0 = Z_1 + Z_2, \quad A_0 = A_1 + A_2. \quad (5.32)$$

Tenim, a més, la llei de conservació del quadrimoment lineal: $p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$.

A conseqüència de (5.22), perquè la reacció es pugui donar espontàniament cal que el defecte màssic sigui positiu: $\Delta m = m_0 - m_1 - m_2 \geq 0$. A la massa en repòs m_a hi contribueixen els nucleons i l'energia d'enllaç:

$$m_a = Z_a m_p + (A_a - Z_a) m_n - A_a \frac{E(A_a)}{c^2}, \quad a = 0, 1, 2.$$

Si utilitzem aquesta relació junt amb (5.32), tenim per al defecte màssic:

$$\begin{aligned} \Delta m c^2 &= -A_0 E(A_0) + A_1 E(A_1) + A_2 E(A_2) \\ &= A_1 (E(A_1) - E(A_0)) + A_2 (E(A_2) - E(A_0)). \end{aligned}$$

Sempre podem escollir els índexs dels productes de manera que $E(A_1) > E(A_2)$, i si el nucli inicial és a la zona de $E(A_0)$ màxim, tindrem $E(A_0) \geq E(A_1) \geq E(A_2)$. Per tant, de la igualtat anterior resulta que $\Delta m < 0$ i la reacció no es pot donar espontàniament.

5.3 El sistema del centre de massa

Donat un col·lectiu de partícules puntuals, sovint és útil considerar un sistema de referència S_{CM} en el qual el trimoment lineal total és zero. Aquest sistema de referència s'anomena *del centre de massa* i sempre existeix —de fet, n'hi ha més d'un. En efecte, el quadrimoment lineal total

$$P^\mu = \sum_a p_a^\mu \quad (5.33)$$

és una suma de quadrivectors de tipus temps (per a masses positives) o de tipus llum (per a fotons i altres partícules de massa nul·la) que apunten cap al futur. D'acord amb la proposició 4.4, P^μ serà de tipus temps i orientat al futur (excepte en el cas molt excepcional que tots els p_a^μ siguin de tipus llum i paral·lels). Existirà, per tant, (proposició 4.3) un sistema de referència en el qual:

$$\vec{P}_{\text{CM}} = 0 \quad P_{\text{CM}}^4 = M c, \quad (5.34)$$

on M està relacionat amb el quadrat de Minkowski invariant:

$$M = \sqrt{-\frac{1}{c^2} P^\mu P_\mu}, \quad (5.35)$$

i ve a ser la massa total del sistema.

Si usem (5.33) i (5.34), tenim:

$$M = \sum_a m_a \gamma_{a\text{CM}} = \sum_a \left(m_a + \frac{T_{a\text{CM}}}{c^2} \right),$$

i queda clar que a M hi contribueixen tant les masses en repòs de les partícules components, com la inèrcia associada a les energies cinètiques $T_{a\text{CM}}$ observades en el sistema del centre de massa.

De manera anàloga al sistema del centre de massa newtonià, \mathcal{S}_{CM} es mou globalment amb les partícules. No les veu quietes, però les quantitats de moviment respectives, $\vec{p}_{a\text{CM}}$, es compensen mútuament:

$$\sum_a \vec{p}_{a\text{CM}} = \vec{P}_{\text{CM}} = 0.$$

La velocitat de \mathcal{S}_{CM} respecte al sistema \mathcal{S} del laboratori es pot determinar a partir de la transformació de Lorentz que converteix $P_{\text{CM}}^\mu = (\vec{0}, Mc)$ en P^μ . Si aquesta transformació és $x^\mu = L^\mu_\nu x_{\text{CM}}^\nu$, tindrem:

$$P^\mu = L^\mu_\nu P_{\text{CM}}^\nu = L^\mu_4 Mc.$$

De l'expressió (2.19), que relaciona els components de la matriu de la transformació de Lorentz i la velocitat relativa, tenim: $V_{\text{CM}}^i = L^i_4 / L^4_4$, i per tant:

$$\vec{V}_{\text{CM}} = c \frac{\vec{P}}{P^4} = \frac{\sum m_a \gamma_a \vec{v}_a}{\sum m_b \gamma_b}. \quad (5.36)$$

El sistema de referència del centre de massa és útil en l'estudi de problemes amb col·lisions, com ho il·lustra l'exemple següent.

Exemple 5.3 Energia lliardar d'una reacció

En algunes reaccions l'energia en repòs dels productes és més gran que la de les partícules entrants. Això vol dir que part de l'energia cinètica d'aquestes darreres s'ha convertit en massa dels productes. Aquesta conversió no pot ser en general total perquè l'energia cinètica dels productes ha de ser pel cap baix la necessària per garantir que la seva quantitat de moviment total sigui la de les partícules incidents.

Considerem una reacció com ara:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (5.37)$$

en la qual un protó accelerat incideix sobre un altre en repòs en el laboratori i després del xoc s'ha creat una parella protó-antiprotó. Ens demanem per l'energia cinètica mínima del protó incident perquè la reacció sigui possible.

Determinar l'energia cinètica mínima dels productes en el sistema del laboratori i en quines proporcions es reparteix, de manera que es conservi el 3-moment lineal total no és simple. Per a aquesta anàlisi és útil el sistema \mathcal{S}_{CM} , perquè en ell $\vec{P}_{\text{CM}} = 0$ abans i després del xoc, de manera que una configuració en què els tres protons i l'antiprotó surten en repòs respecte a \mathcal{S}_{CM} no és incompatible amb la conservació de la quantitat de moviment total i, a més, minimitza la part de l'energia cinètica incident que s'inverteix en energia cinètica dels productes.

Suposem que en el sistema \mathcal{S} del laboratori el quadrimoment del protó incident és $p_1^\mu = (\vec{p}, m_p c + T/c)$ i el del protó en repòs és $p_2^\mu = (\vec{0}, m_p c)$. En el sistema \mathcal{S}_{CM} els quadrimoments dels productes seran:

$$p_3^{\mu'} = p_4^{\mu'} = p_5^{\mu'} = p_6^{\mu'} = (\vec{0}, m_p c).$$

No podem aplicar directament la llei de conservació del quadrimoment lineal total perquè les dades de les partícules entrants i els productes estan donades en sistemes de referència diferents:

$$\begin{cases} \text{Abans:} & \mathcal{S} & P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (\vec{p}, 2m_p c + T/c) \\ \text{Després:} & \mathcal{S}_{\text{CM}} & P_{\text{CM}}^\mu = p_3^{\mu'} + p_4^{\mu'} + p_5^{\mu'} + p_6^{\mu'} = (\vec{0}, 4m_p c) \end{cases}$$

Però sí que podem comparar els quadrats de Minkowski, que són invariants:

$$(P^\mu P_\mu)_{\text{D}} = (P_{\text{CM}}^\mu P_{\mu\text{CM}})_{\text{A}},$$

és a dir:

$$-(4m_p c)^2 = (p_1^\mu + p_2^\mu)(p_{1\mu} + p_{2\mu}) = -2m_p^2 c^2 - 2m_p c(m_p c + T/c),$$

que dóna:

$$T = 6m_p c^2.$$

5.3.1 Hi ha un punt centre de massa relativista?

Notem la semblança de l'expressió (5.36) i la fórmula no relativista de la velocitat del centre de massa, que és la mitjana de les velocitats ponderades amb les masses dels cossos. En el cas relativista les velocitats estan ponderades amb $m_a \gamma_a$, el coeficient d'inèrcia, que té en compte també la contribució a la inèrcia de l'energia cinètica.

En el cas que les partícules del col·lectiu tinguin moviments rectilinis i uniformes, podríem estar temptats d'integrar (5.36) i definir la posició del centre de massa per:

$$\vec{X}_{\text{CM}} = \frac{\sum m_a \gamma_a \vec{x}_a}{\sum m_b \gamma_b} \quad (5.38)$$



Figura 5.2. La definició del punt centre de massa (5.39) en un cas particular: (a) segons el sistema centre de massa i (b) segons el sistema d'una de les partícules

que té l'aparença de ser una generalització relativista del concepte newtonià anàleg. Tanmateix la cosa és més complicada. Com que es tracta d'un punt en moviment, la fórmula anterior ens defineix la línia d'univers del centre de massa:

$$\vec{X}_{\text{CM}}(t) = \frac{\sum m_a \gamma_a \vec{x}_a(t)}{\sum m_b \gamma_b}, \quad X_{\text{CM}}^4(t) = ct. \quad (5.39)$$

\vec{X}_{CM} és la mitjana ponderada de posicions de les partícules del col·lectiu simultànies segons el sistema \mathcal{S} . Considerem ara un altre sistema de referència \mathcal{S}' i sigui $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$ la matriu de Lorentz que passa de \mathcal{S} a \mathcal{S}' .

Des del sistema de referència \mathcal{S}' es pot determinar també la línia d'univers del centre de massa per aplicació de la definició (5.39). Però ara \vec{X}'_{CM} és la mitjana ponderada de posicions simultànies segons \mathcal{S}' . A conseqüència d'això, no podem assegurar que la nova línia d'univers \vec{X}'_{CM} sigui la transformada segons Lorentz de la (5.39), $\Lambda_{\nu}^{\mu'} X_{\text{CM}}^{\nu}$, i en general no ho és.

Contràriament al que passa en la mecànica newtoniana, no hi ha una manera independent del sistema de referència de definir el *punt imaginari centre de massa* que resumeixi el moviment del col·lectiu de partícules. L'exemple següent mostra un cas en què clarament $(\vec{X}_{\text{CM}}(t), ct)$ no es transforma com una línia d'univers.

Exemple 5.4 La línia d'univers del centre de massa

Aplicarem la definició de centre de massa (5.38) a un sistema de dues masses puntuals lliures i iguals, primer des d'un sistema de referència \mathcal{S} que les veu movent-se en línies paral·leles, amb velocitats \vec{v} i $-\vec{v}$, respectivament, tal com es mostra a la figura 5.2(a) i des del sistema \mathcal{S}_1 comòbil amb la massa 1 [figura 5.2(b)].

En el sistema \mathcal{S} tenim:

$$\vec{x}_1 = \vec{l} + \vec{v}t, \quad \vec{x}_2 = -\vec{l} - \vec{v}t$$

amb \vec{l} perpendicular a \vec{v} ; de manera que $\vec{X}_{\text{CM}} = 0$.

D'altra banda, \mathcal{S}_1 es mou amb la velocitat \vec{v} respecte a \mathcal{S} . Així, les velocitats de les partícules són:

$$\vec{v}'_1 = 0, \quad \vec{v}'_2 = \frac{-2\vec{v}}{1 + v^2/c^2},$$

i les trajectòries són:

$$\vec{x}'_1 = \vec{l}, \quad \vec{x}'_2 = -\vec{l} + \vec{v}'_2 t'$$

amb

$$\gamma'_1 = 1 \quad \text{i} \quad \gamma'_2 = \frac{1 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}.$$

(Hem usat que els esdeveniments simultanis de coordenades $(\vec{l}, 0)$ i $(-\vec{l}, 0)$ en \mathcal{S} també són simultanis en \mathcal{S}_1 , perquè \vec{l} és perpendicular a la velocitat relativa.)

Si apliquem (5.38) en el sistema \mathcal{S}_1 tindrem:

$$\vec{X}'(t') = \frac{m\gamma'_1 \vec{x}'_1(t') + m\gamma'_2 \vec{x}'_2(t')}{m\gamma'_1 + m\gamma'_2} = -\frac{v^2}{c^2} \vec{l} - \vec{v}t'.$$

D'altra banda, d'aplicar la transformació de Lorentz a la línia d'univers $X^\mu = (\vec{X}_{\text{CM}}(t), ct)$, tenim: $(-\gamma\vec{v}t, \gamma ct)$, que no coincideix amb $X'^\mu = (\vec{X}'_{\text{CM}}(t'), ct')$. En efecte, mentre la primera passa per l'origen de coordenades de \mathcal{S}_1 , la segona no.

5.4 Dinàmica relativista

Una manera immediata de generalitzar la segona llei de Newton de la mecànica consisteix a prendre:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (5.40)$$

on $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$. És a dir, *la variació del trimoment lineal per unitat de temps és igual a la resultant de les forces aplicades*. Les lleis de l'electromagnetisme, la gravetat, etc., seran les encarregades d'especificar després com aquesta força \vec{F} depèn de la posició del cos, de la seva velocitat i dels altres cossos amb què interacciona.

Aquesta forma de la llei de la dinàmica no és, però, la més convenient per examinar-ne el comportament sota canvis de sistema de referència. Amb aquesta finalitat s'introdueix el quadrivector *força de Minkowski* —o també *quadriforça*— que és igual a la variació del quadrimoment lineal per unitat de temps propi:

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (5.41)$$

Notem que és equivalent conèixer la força \vec{F} o la força de Minkowski f^μ . Donada una podem determinar l'altra. En efecte, dels components espacials d'aquesta última i de la relació (4.11) resulta:

$$\vec{f} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F}. \quad (5.42)$$

D'altra banda, de derivar la relació (5.14) i del fet que la massa pròpia del cos és constant, tenim: $p_\mu f^\mu = 0$ que, tenint en compte (5.20), ens dóna:

$$f^4 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{f}}{p^4} = \frac{\gamma}{c} \vec{v} \cdot \vec{F}. \quad (5.43)$$

Del punt de vista de contingut físic les dues lleis, (5.40) i (5.41), diuen el mateix, però la segona, com que és manifestament tensorial, és més adient per tenir present la invariància relativista.

Una conseqüència immediata de (5.43) és la versió relativista del teorema de les forces vives:

$$\frac{dE}{dt} = c\gamma^{-1} \frac{dp^4}{d\tau} = c\gamma^{-1} f^4 = \vec{v} \cdot \vec{F}, \quad (5.44)$$

a saber, la variació de l'energia per unitat de temps és igual a la potència de les forces aplicades. Aquest teorema abona encara més la bondat de la denominació *energia* que hem introduït en l'apartat 5.1.4 per al producte $p^4 c$.

En el cas que la força aplicada \vec{F} és constant, de (5.40) i del fet que m és constant, tenim que:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} = \text{constant},$$

i estem en el cas del moviment hiperbòlic estudiat a la secció 4.8.

5.4.1 La inèrcia augmenta amb la velocitat

El fet que el factor $m\gamma$ que relaciona la velocitat \vec{v} i la quantitat de moviment \vec{p} no sigui constant —com passa a la mecànica newtoniana— té com a conseqüència que l'acceleració no sigui proporcional a la força aplicada. De (5.40) tenim:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v}. \quad (5.45)$$

Notem de passada que en el límit de petites velocitats

$$\vec{F} \approx m\vec{a} + O(1/c^2).$$

En el cas de moviment rectilini, \vec{v} i \vec{a} són paral·leles i (5.45) dóna:

$$F = m\gamma^3 a,$$

de manera que l'acceleració produïda per una mateixa força aplicada és més petita com més gran és la velocitat, i tendeix a zero a mesura que $v \rightarrow c$. Aquesta és una altra manifestació del límit que c representa per a les velocitats que pot adquirir una massa puntual.

5.5 Quadrimoment angular

Donada una massa puntual de quadrimoment lineal p^μ i línia d'univers $x^\nu(\tau)$, considerarem el tensor:

$$j^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (5.46)$$

que s'anomena *quadrimoment angular*. Els components espacials són:

$$j^{il} = x^i p^l - x^l p^i,$$

de manera que el trivector de components

$$\vec{j} = (j^{23}, j^{31}, j^{12}) = \vec{x} \times \vec{p} \quad (5.47)$$

és el trimoment angular relativista de la partícula, i en el límit de velocitats petites en front a c , tendeix al trimoment angular de la mecànica newtoniana.

Si tenim en compte (5.9) i (5.41), la derivada del quadrimoment angular és:

$$\frac{dj^{\mu\nu}}{d\tau} = x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu, \quad (5.48)$$

(on f^μ és la força de Minkowski) que és la llei relativista del moment angular i és l'anàleg de la llei del moment angular de la mecànica newtoniana.

En particular, per als components espacials tenim que, recordant (5.42), (5.43) i (5.47), l'equació anterior porta a:

$$\frac{dj^{il}}{dt} = x^i F^l - x^l F^i,$$

o bé:

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{x} \times \vec{F}, \quad (5.49)$$

on \vec{F} és la força aplicada, (5.40), i així és com s'escriu la llei relativista per al trimoment angular.

Per al cas d'una partícula lliure, $f^\mu = 0$ i l'equació (5.48) diu que el quadrimoment angular $j^{\mu\nu}$ es conserva.

Si ara considerem un conjunt de partícules, podem definir el quadrimoment angular total del sistema com la suma dels quadrimoments angulars de totes elles:

$$J^{\mu\nu} = \sum_a j_a^{\mu\nu}.$$

En general, per avaluar el segon membre d'aquesta expressió cal indicar a quin instant de la línia d'univers correspon $j_a^{\mu\nu}$, ja que aquestes quantitats són, en principi, variables. Excepte en el cas que es tracti de partícules lliures, ja que llavors els $j_a^{\mu\nu}$ són constants, com ja hem dit.

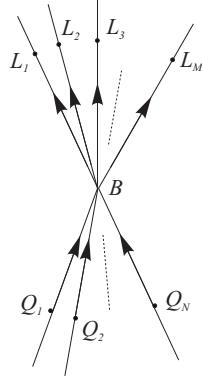


Figura 5.3. En els xocs entre partícules puntuals lliures es conserva el quadrimoment angular

Si es tracta d'un sistema de partícules que només interactuen per xoc, el tensor $J^{\mu\nu}$ es conserva. Per veure-ho analitzarem amb detall el cas senzill d'una col·lisió de N partícules que concorren en un esdeveniment B del qual emergeixen M partícules, tal com es mostra a la figura 5.3. El quadrimoment angular total abans del xoc és:

$$J_A^{\mu\nu} = j_1^{\mu\nu}(Q_1) + \dots + j_N^{\mu\nu}(Q_N).$$

Ara bé, per conservació del quadrimoment angular de cada partícula:

$$j_a^{\mu\nu}(Q_a) = j_a^{\mu\nu}(B), \quad a = 1, \dots, N,$$

i per tant:

$$J_A^{\mu\nu} = j_1^{\mu\nu}(B) + \dots + j_N^{\mu\nu}(B) = x_B^\mu P_A^\nu - x_B^\nu P_A^\mu,$$

on $P^\mu = \sum_a p_a^\mu$ és el quadrimoment lineal total. Per un argument similar arribem també a:

$$J_D^{\mu\nu} = x_B^\mu P_D^\nu - x_B^\nu P_D^\mu.$$

Els subíndexs A i D, com en el cas del quadrimoment lineal, indiquen «abans» i «després» del xoc, respectivament.

De manera que la conservació del quadrimoment lineal total en el xoc implica la conservació del quadrimoment angular total:

$$\left(\sum_a j_a^{\mu\nu} \right)_A = \left(\sum_b j_b^{\mu\nu} \right)_D. \quad (5.50)$$

La conservació del quadrimoment angular total té dues interpretacions, segons si es tracta de

els components espacials: el trivector de components $\vec{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$ és el moment angular total:

$$\vec{J} = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a,$$

o es tracta de

els components mixtos i llavors el trivector de components $\vec{K} = (J^{41}, J^{42}, J^{43})$ no depèn del temps, i de la igualtat

$$\vec{K} = \sum_a (ct\vec{p}_a) - \sum_a (\vec{x}_a m_a \gamma_a c)$$

es dedueix que el punt de coordenades:

$$\vec{X} \equiv \frac{\sum_a \vec{x}_a m_a \gamma_a}{\sum_b m_b \gamma_b}$$

[recordem l'equació (5.38)] compleix:

$$\vec{X} = \frac{\vec{P}}{P^4} ct - \frac{\vec{K}}{P^4},$$

és a dir, està en repòs en el sistema del centre de massa.

5.6 El moment angular intern. Spin

Representar un cos material per una massa puntual és una simplificació que pot ser útil a determinats nivells de descripció, però insuficient si es pretén afinar més. Per exemple, considerar els planetes com a masses puntuals movent-se en el camp gravitatori del Sol permet explicar les lleis de Kepler, i tenir en compte la interacció gravitatòria mútua entre aquestes masses puntuals permet entendre les desviacions del moviment planetari respecte a aquestes lleis.

Però entendre fenòmens més fins, com ara la precessió dels equinoccis o l'alentiment de la rotació terrestre, requereix passar a un nivell de detall superior. No n'hi ha prou a representar la Terra per la seva massa total i la posició del centre de massa, sinó que cal dir, a més, com és el seu moviment intern, el desplaçament de les seves diverses parts respecte al centre de massa.

A la mecànica newtoniana, els cossos extensos més simples són els sòlids rígids. Les forces de lligadura dins del mateix cos garanteixen que la distància entre dues parts qualssevol es mantingui constant. Això requereix que els coeficients d'elasticitat del cos siguin infinitament grans, i per aquesta raó un cos rígid és un cos ideal. El teorema de Chasles estableix que els únics moviments possibles d'un cos rígid es redueixen a una translació i una rotació global, i en conseqüència el cos rígid té sis graus de llibertat. Les lleis de la dinàmica són de la forma:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{N},$$

on \vec{P} és el moment lineal total, \vec{S} el moment angular relatiu al centre de massa, \vec{F} la força resultant i \vec{N} el moment resultant respecte al centre de massa.

Aquest segon nivell de descripció permet explicar la precessió i la nutació de l'eix polar, però no és suficient per entendre l'alentiment de la rotació terrestre, el qual és provocat per la fricció de les marees.

Tot i que en relativitat no té sentit parlar de cossos rígids —perquè a més de la idealització que suposen els cossos rígids newtonians, apareixen forces instantànies— podem, en determinats casos i a tall fenomenològic, descriure les lleis de la dinàmica d'un cos material per mitjà de: la seva massa pròpia m , la línia d'univers d'un punt $x^\mu(\tau)$, o centre de moviment, i el moment angular intern, o spin, que referit als eixos d'un sistema inercial instantàniament comòbil \mathcal{S}_τ^\dagger amb origen a $x^\mu(\tau)$, té per components $s^{i\dagger}(\tau)$, $i = 1, 2, 3$ i $s^{4\dagger}(\tau) = 0$. I tot seguit postular les lleis fenomenològiques del moviment

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad \frac{ds^{i\dagger}}{d\tau} = N^{i\dagger}, \quad (5.51)$$

on f^μ és la força de Minkowski resultant i $N^{i\dagger}$ són els components del moment extern resultant en el sistema de referència \mathcal{S}_τ^\dagger . Notem que $s^{4\dagger}(\tau) = 0$ implica que $s^\mu u_\mu = 0$ en qualsevol sistema de referència.

La llei de variació de l'spin no és però completa per tal com, en general, els sistemes de referència \mathcal{S}_τ^\dagger i $\mathcal{S}_{\tau+\delta\tau}^\dagger$ són diferents —estan en moviment relatiu— i la relació que guarden els seus eixos coordenats no està establerta.

Una manera senzilla de relacionar els eixos de \mathcal{S}_τ^\dagger i $\mathcal{S}_{\tau+\delta\tau}^\dagger$ consisteix a demanar que els dos sistemes estiguin relacionats per una transformació de Lorentz pura. Això equival a dir que des de \mathcal{S}_τ^\dagger els eixos de $\mathcal{S}_{\tau+\delta\tau}^\dagger$ es veuen paral·lels als mateixos eixos coordenats.

D'acord amb la definició d'acceleració pròpia, la velocitat de $\mathcal{S}_{\tau+\delta\tau}^\dagger$ respecte a \mathcal{S}_τ^\dagger és:

$$V^{i\dagger} = b^{i\dagger} \delta\tau + O(\delta\tau^2),$$

on hem usat que $\delta t^\dagger = \delta\tau$ i $b^{i\dagger}$ són els components de b^ρ en el sistema \mathcal{S}_τ^\dagger .

La transformació de Lorentz pura (2.18) que passa de $\mathcal{S}_{\tau+\delta\tau}^\dagger$ a \mathcal{S}_τ^\dagger tindrà, doncs, la forma:

$$L^\mu_\nu(b^{i\dagger} \delta t^\dagger) = \delta^\mu_\nu + \frac{\delta\tau}{c} A^\mu_\nu + O(\delta\tau^2) \quad (5.52)$$

amb:

$$A^i_4 = A^4_i = b^{i\dagger}, \quad A^4_4 = A^i_j = 0. \quad (5.53)$$

Així, si la transformació de Lorentz que passa de \mathcal{S}_τ^\dagger al sistema inercial \mathcal{S} del laboratori és $\Lambda^\mu_\nu(\tau)$, la transformació de Lorentz que passa de $\mathcal{S}_{\tau+\delta\tau}^\dagger$ al sistema inercial \mathcal{S} és:

$$\Lambda^\mu_\nu(\tau + \delta\tau) = \Lambda^\mu_\rho(\tau) L^\rho_\nu(b^{i\dagger} \delta t^\dagger) = \Lambda^\mu_\nu(\tau) + \Lambda^\mu_\rho(\tau) A^\rho_\nu \frac{\delta\tau}{c} + O(\delta\tau^2),$$

de manera que:

$$\frac{d\Lambda_\nu^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{c}\Lambda_\rho^\mu(\tau)A_\nu^\rho. \quad (5.54)$$

Ara, en el sistema inercial \mathcal{S} podem definir el quadrivector spin (a partir dels seus components en \mathcal{S}_τ^\dagger):

$$s^\mu(\tau) = \Lambda_i^\mu(\tau) s^{i\dagger}, \quad (5.55)$$

i la llei d'evolució (5.51) ens porta a:

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = \frac{d\Lambda_i^\mu(\tau)}{d\tau} s^{i\dagger} + \Lambda_i^\mu(\tau) N^{i\dagger}. \quad (5.56)$$

El segon terme de la dreta és $N^\mu \equiv \Lambda_i^\mu(\tau) N^{i\dagger}$, el quadrivector moment extern total respecte al centre de moviment, mentre que el primer terme de la dreta, per mitjà de (5.53) i (5.54), es pot posar així:

$$\frac{d\Lambda_i^\mu(\tau)}{d\tau} s^{i\dagger} = \Lambda_4^\mu(\tau) \frac{A_4^i}{c} s^{i\dagger} = \Lambda_4^\mu(\tau) \frac{(a_{i\dagger} s^{i\dagger})}{c} = \frac{u^\mu}{c^2} (b_\rho s^\rho),$$

de manera que l'equació covariant de l'spin queda com a:

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = \frac{u^\mu}{c^2} (b_\rho s^\rho) + N^\mu, \quad (5.57)$$

que en absència de moment extern es redueix a:

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = \frac{u^\mu}{c^2} (b_\rho s^\rho). \quad (5.58)$$

5.6.1 El transport de Fermi-Walker

Considerem un vector $l^\mu(\tau)$ a cada instant de la línia d'univers $x^\nu(\tau)$, tal que els seus components en la successió de sistemes instantàniament comòbils \mathcal{S}_τ^\dagger definits més amunt no canvien:

$$\frac{dl^{\mu\dagger}}{d\tau} = 0.$$

Si tenim en compte que $l^\mu(\tau) = \Lambda_\rho^\mu(\tau) l^{\rho\dagger}$ i les relacions (5.53) i (5.54), resulta:

$$\frac{dl^\mu}{d\tau} = \frac{d\Lambda_\nu^\mu}{d\tau} l^{\nu\dagger} = \frac{b^\mu}{c} l^{4\dagger} + \frac{u^\mu}{c^2} (b_\rho l^\rho),$$

però $l^{4\dagger} = (\Lambda^{-1})_4^\rho l^\rho = -u_\rho l^\rho / c$. De manera que

$$\frac{dl^\mu}{d\tau} = \frac{1}{c^2} (u^\mu b_\rho - u_\rho b^\mu) l^\rho. \quad (5.59)$$

Es diu llavors que el vector l^μ és transportat segons Fermi-Walker al llarg de la línia d'univers. La llei de l'spin (5.58) correspon al cas particular que el quadrivector l^μ és ortogonal a la quadrivelocitat pròpia, $u_\rho l^\rho = 0$.

Si a cada punt de la trajectòria, $x^\mu(\tau)$, agafem una tètrada amb $u^\mu(\tau)$ com a vector temporal i tres vectors ortogonals espacials, $u^\mu e_\mu^{(i)} = 0$, $e^{(j)\mu} e_\mu^{(i)} = \delta^{ij}$, i els transportem segons Fermi-Walker, llavors es conserven aquestes relacions d'ortogonalitat i a més

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{1}{c^2} (u^\mu b_\rho - u_\rho b^\mu) u^\rho = b^\mu,$$

és a dir, el transport segons Fermi-Walker del quadrivector velocitat ens dóna la llei de moviment.

5.6.2 La precessió de Thomas

Un exemple d'aquest transport que té aplicacions físiques interessants i que veurem més endavant [secció 9.4] és l'acoblament de l'spin amb un camp magnètic extern i amb el moment angular orbital.

Ara per veure l'arrel del problema amb un exemple senzill estudiarem un giroscopi en rotació lliure, de manera que el seu centre de moviment P està en moviment circular uniforme respecte al sistema inercial \mathcal{S} del laboratori i el vector moment angular, spin del giroscopi, es transporta segons Fermi-Walker al llarg de la trajectòria. Veurem com el moment angular en dos punts de la trajectòria està relacionat per una transformació de Lorentz pura i una rotació que es coneix amb el nom de *precessió de Thomas*.

La línia d'univers de P , així com la velocitat i l'acceleració pròpies són:

$$\begin{aligned} x^\mu(t) &= (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0, ct), \\ u^\mu(t) &= (-R\omega\gamma \sin(\omega t), R\omega\gamma \cos(\omega t), 0, c\gamma), \\ b^\mu(t) &= -R\omega^2\gamma^2 (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0, 0) \end{aligned}$$

amb $t = \gamma\tau$ i $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}}$.

En absència de moment extern, l'spin $s^\mu(\tau)$ evoluciona d'acord amb (5.58) que, component a component, dóna:

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds^1}{d\tau} &= \frac{\omega^3\gamma^3 R^2}{c^2} [s^1 \cos(\omega t) + s^2 \sin(\omega t)] \sin(\omega t), \\ \frac{ds^2}{d\tau} &= -\frac{\omega^3\gamma^3 R^2}{c^2} [s^1 \cos(\omega t) + s^2 \sin(\omega t)] \cos(\omega t), \\ \frac{ds^3}{d\tau} &= 0, \\ \frac{ds^4}{d\tau} &= -\frac{\omega^2\gamma^3 R}{c} [s^1 \cos(\omega t) + s^2 \sin(\omega t)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

Per integrar aquest sistema només ens cal ocupar-nos de s^1 i s^2 , ja que s^3 és constant i, de la condició $s^\rho u_\rho = 0$, tenim que $s^4 = \vec{s} \cdot \vec{u}/u^4$.

Introduïrem el canvi de variables:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= s^1 \cos(\omega t) + s^2 \sin(\omega t) \\ \zeta &= -s^1 \sin(\omega t) + s^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} s^1 &= \xi \cos(\omega t) - \zeta \sin(\omega t) \\ s^2 &= \xi \sin(\omega t) + \zeta \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

i tindrem que les dues primeres equacions (5.60) s'escriuen així:

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega\zeta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = -\omega\gamma^2\xi, \quad (5.62)$$

que és l'equació d'un oscil·lador amb freqüència $\gamma\omega$ i té per solució:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos(\omega\gamma t) + \zeta_0 \gamma^{-1} \sin(\omega\gamma t) \\ \zeta &= -\xi_0 \gamma \sin(\omega\gamma t) + \zeta_0 \cos(\omega\gamma t) \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

i, tenint en compte (5.61), tenim que les condicions inicials són $\xi_0 = s_0^1$ i $\zeta_0 = s_0^2$, (els components de l'spin a $t = 0$) i a més

$$\left. \begin{aligned} s^1(t) &= s_0^1 [\cos(\omega\gamma t) \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega\gamma t) \sin(\omega t)] + \\ &\quad s_0^2 [\gamma^{-1} \sin(\omega\gamma t) \cos(\omega t) - \cos(\omega\gamma t) \sin(\omega t)] \\ s^2(t) &= s_0^2 [\cos(\omega\gamma t) \cos(\omega t) + \gamma^{-1} \sin(\omega\gamma t) \sin(\omega t)] + \\ &\quad s_0^1 [\cos(\omega\gamma t) \sin(\omega t) - \gamma \sin(\omega\gamma t) \cos(\omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

Aquestes expressions ens donen, junt amb $s^3 = \text{constant}$ i $s^4 = \vec{s}\vec{u}/u^4$, el valor de $s^\mu(t)$ en el sistema inercial del laboratori \mathcal{S} en funció del que val a $t = 0$.

Per interpretar aquest resultat considerem la transformació de Lorentz pura $L_\nu^\mu(\vec{v}(t))$ que passa del sistema del laboratori \mathcal{S} al sistema de referència \mathcal{K}'_t instantàniament comòbil amb el centre de massa del giroscopi en l'instant t i que té els tres eixos d'espai paral·lels als del laboratori. Amb una mica de càlcul es pot comprovar que els components temporals de $s^\mu(0)$ i $s^\mu(t)$ en els sistemes comòbils a $t = 0$, \mathcal{K}'_0 , i a t , \mathcal{K}'_t seran respectivament:

$$s^{4'}(0) = s^{4'}(t) = 0,$$

i els components espacials estan relacionats per

$$s^{i'}(0) = R_j^{i'}(t) s^j(t),$$

on $R_j^i(t)$ és una rotació d'eix paral·lel a $\vec{a} \times \vec{v}$, que per a aquest moviment circular és constant, i amplitud $\omega(\gamma - 1)t$. És el que es coneix com *precessió de Thomas de l'spin*.

El motiu pel qual apareix aquest gir addicional és que la composició de dues transformacions de Lorentz pures amb velocitats no paral·leles, com per exemple $L(\vec{v})$ i $L(\vec{a}dt)$ amb \vec{a} no paral·lel a \vec{v} , no és una transformació de Lorentz pura sinó la composició d'una rotació i una transformació de Lorentz pura. Aquesta rotació és la que rep el nom de *precessió de Thomas*.

5.7 Quadrimoment angular total d'una partícula amb spin

En el cas d'un cos puntual amb spin, l'expressió (5.46) només dona una part del quadrimoment angular, que s'anomena *orbital* perquè està associat al moviment de translació. El quadrimoment angular total ha d'incorporar també la contribució del moment angular intern o spin.

En la formulació de la secció 5.6, l'spin és un quadrivector que no podem sumar directament al moment angular orbital, que és un tensor antisimètric de segon ordre.

Recordem que el quadrivector de spin l'hem construït a partir de tres quantitats, $s^{1\dagger}$, $s^{2\dagger}$ i $s^{3\dagger}$, components del moment angular intern en un sistema comòbil amb el cos. Llavors, l'equació (5.55) defineix s^μ en qualsevol sistema inercial. Però aquesta no és l'única manera de construir un objecte tensorial a partir de tres quantitats. En efecte, una alternativa consisteix a prendre les tres components $s^{i\dagger}(\tau)$ del moment angular intern en el sistema inercial \mathcal{S}_τ^\dagger i considerar la matriu antisimètrica:

$$s^{\rho\sigma\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & s^{3\dagger} & -s^{2\dagger} & 0 \\ -s^{3\dagger} & 0 & s^{1\dagger} & 0 \\ s^{2\dagger} & -s^{1\dagger} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

i definir el *tensor de spin* d'acord amb:

$$s^{\mu\nu}(\tau) = \Lambda_i^\mu(\tau) \Lambda_j^\nu(\tau) s^{ij\dagger}, \quad (5.66)$$

on $\Lambda_\rho^\mu(\tau)$ és la transformació de Lorentz que passa del sistema inercial \mathcal{S}_τ^\dagger al del laboratori.

Aquest tensor de spin $s^{\mu\nu}$ i el quadrivector s^μ definit a (5.55) estan relacionats per:

$$s^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha s_\beta, \quad (5.67)$$

on $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ és el tensor totalment antisimètric en quatre dimensions (amb la tria $\epsilon^{1234} = 1$). En efecte, n'hi ha prou a comprovar que (5.67) se satisfà en \mathcal{S}_τ^\dagger :

$$s^{4i\dagger} = -s^{i4\dagger} \frac{1}{c} \epsilon^{4ilk} u_l s_k = 0 \quad s^{ij\dagger} = \frac{1}{c} \epsilon^{ij4k} u_4 s_k = \epsilon^{ijk} s_k,$$

que coincideix amb els elements de la matriu (5.65).

Finalment, el quadrimoment angular total d'un cos amb spin es defineix així:

$$j^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + s^{\mu\nu}. \quad (5.68)$$

5.8 Formalismes lagrangia i hamiltonia

Els formalismes lagrangia i hamiltonia no aporten res de destacable a l'anàlisi del moviment d'una partícula lliure. Tanmateix, en fem una introducció aquí per la seva utilitat més endavant en l'estudi del moviment d'una partícula en un camp extern. En particular, proporcionen una manera senzilla de treure profit de les lleis de conservació (quan n'hi ha), de canviar a les coordenades més adients per a cada cas concret, d'abordar un problema per mètodes pertorbatius, etc.

Una altra raó important per dedicar una certa atenció a aquests formalismes és que serveixen de base per construir la mecànica quàntica i la mecànica estadística.

5.8.1 Lagrangiana d'una partícula lliure

Per a una partícula lliure, $\vec{F} = 0$, i l'equació (5.40) ens dona:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = 0. \quad (5.69)$$

Si busquem una lagrangiana $L(\vec{x}, \vec{v}, t)$ tal que les equacions d'Euler-Lagrange donin (5.69), haurem de demanar:

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

que té la solució senzilla:

$$L = -mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (5.70)$$

Aquesta lagrangiana no és l'única que dona lloc a les equacions del moviment d'una partícula lliure. D'entrada, si li afegim la derivada total respecte del temps d'una funció arbitrària $f(\vec{x}, t)$, s'obté una lagrangiana dinàmicament equivalent. Però l'arbitrarietat en l'elecció de L és més profunda. De fet, l'equació (5.69) equival a $\vec{v} = \text{constant}$, que es pot obtenir de la lagrangiana:

$$L_{\text{Nw}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

La lagrangiana (5.70) té, però, l'avantatge que la integral d'acció:

$$S = \int_1^2 L dt = -mc^2 \int_1^2 dt \sqrt{1-v^2/c^2} \quad (5.71)$$

entre dos esdeveniments, $x_1^\mu = (\vec{x}_1, ct_1)$ i $x_2^\mu = (\vec{x}_2, ct_2)$, és invariant sota transformacions de Lorentz. En efecte, la integral (5.71) al llarg d'un camí donat entre x_1^μ i x_2^μ dona un múltiple de la duració pròpia del camí considerat, la qual és un escalar.

Com és ben conegut, les equacions d'Euler-Lagrange associades a L són la solució del principi variacional de Hamilton:

$$\delta S = 0 \quad \text{amb} \quad \delta x_1^\mu = \delta x_2^\mu = 0.$$

5.8.2 Invariància per reparametrització

Si en comptes del paràmetre temps coordinat t n'utilitzem un altre qualsevol, relacionat amb t per la reparametrització: $\lambda = \lambda(t)$, l'acció (5.71) és:

$$S = -mc \int_1^2 d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad \text{amb} \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (5.72)$$

i la lagrangiana és

$$L^* = -mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (5.73)$$

que és invariant per reparametritzacions i a més és manifestament invariant de Lorentz si el paràmetre λ és escalar.

Les equacions d'Euler-Lagrange derivades de L^* són:

$$\frac{mc}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\dot{x}^2} \right) \ddot{x}^\nu = 0, \quad (5.74)$$

on $\dot{x}^2 \equiv \eta_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma$.

La matriu que apareix en el primer membre és la hessiana de L^* respecte a les velocitats:

$$W_{\mu\nu}^* \equiv \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = \frac{mc}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\dot{x}^2} \right),$$

i és singular, perquè té algun valor propi nul, com per exemple: $W_{\mu\nu}^* \dot{x}^\nu = 0$. A conseqüència d'això, $\det(W_{\mu\nu}^*) = 0$. Aleshores, si pretenem aïllar les acceleracions \ddot{x}^μ de (5.74), no obtenim una solució única, sinó:

$$\ddot{x}^\mu = A \dot{x}^\mu$$

amb $A(\lambda)$ arbitrària. Aquesta indeterminació és deguda al fet que la lagrangiana (5.73) és invariant per reparametrització, mentre que l'acceleració no ho és:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} = \left(\frac{d\lambda}{d\sigma} \right)^2 \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{d^2 \lambda}{d\sigma^2} \frac{d\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\sigma}.$$

Una família de paràmetres interessant la constitueixen les denominades *parametritzacions afins*, que es caracteritzen per:

$$\dot{x}_\mu \ddot{x}^\mu = 0.$$

Dues parametritzacions afins de la mateixa línia estan relacionades per: $\sigma = k_1 \lambda + \sigma_0$, on k_1 i σ_0 són constants.

5.8.3 Formalisme hamiltonia

Si pretenem construir el formalisme hamiltonia a partir de la lagrangiana L^* , ens trobem que, com que la hessiana $W_{\mu\nu}$ és singular, la transformació de Legendre:

$$p_\mu = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{mc\dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \quad (5.75)$$

no es pot invertir, i no podem aïllar les velocitats generalitzades \dot{x}^μ en funció dels moments conjugats p_μ . En efecte, de (5.75) tenim que les quatre variables p_μ no són independents sinó que satisfan el lligam:

$$\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2 c^2. \quad (5.76)$$

Així, la solució general de (5.75) és:

$$\dot{x}^\mu = M \eta^{\mu\nu} p_\nu,$$

amb M arbitrària, i no hi ha manera d'expressar $-\dot{x}^2$ en funció de p_μ .

La construcció del formalisme hamiltonia a partir de L^* topa doncs amb la dificultat que la hessiana $W_{\mu\nu}^*$ és singular. Aquest fet està fortament connectat amb la invariància de L^* sota reparametritzacions. La resolució més satisfactòria d'aquesta dificultat —del punt de vista de la física matemàtica— s'aborda en el marc del formalisme de Dirac de hamiltonianes amb lligams, però, per la seva complexitat, està fora de l'abast d'aquest text.

Una manera més senzilla d'evitar el problema consisteix a adonar-se que la font de les dificultats que ens trobem ara és la invariància per reparametrització, que ens ha permès escriure la lagrangiana en forma manifestament covariant, al preu d'introduir un grau de llibertat extra. En efecte, en covariantitzar, hem passat dels tres graus de llibertat espacials x^i (amb la coordenada temporal determinada per $x^4 = ct$) als quatre graus de llibertat x^μ . Si prescindim de la invariància per reparametrització i fixem un paràmetre d'evolució, per exemple, $\lambda = t$, la lagrangiana és:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}. \quad (5.77)$$

Si apliquem la transformació de Legendre, els moments conjugats són, en notació vectorial:

$$\vec{p} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}. \quad (5.78)$$

Aquesta expressió es pot invertir per aïllar les velocitats:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}}, \quad (5.79)$$

i també obtenir la hamiltoniana canònica:

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) \equiv \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}. \quad (5.80)$$

D'acord amb la mecànica analítica, les equacions de Hamilton:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (5.81)$$

són equivalents a les equacions d'Euler-Lagrange derivades de L .

Si prenem els parèntesis de Poisson elementals:

$$\{x^i, x^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad (5.82)$$

les equacions de Hamilton s'expressen d'una manera compacta per mitjà dels parèntesis de Poisson

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (5.83)$$

on $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ és una funció qualsevol a l'espai de les fases i el parèntesi de Poisson està definit per:

$$\{f, H\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right). \quad (5.84)$$

Problemes

- 5.1. En un cert sistema de referència una partícula té una energia total de 5 GeV i un moment lineal de 3 GeV/c. Quina energia té en un sistema on el seu moment lineal és de 4 GeV/c? Quina és la seva massa en repòs? Quina és la velocitat relativa entre els dos sistemes de referència?
- 5.2. Un cert accelerador pot subministrar protons amb una energia cinètica de 200 GeV. La massa en repòs del protó és $m_p = 0,938$ GeV. a) Calculeu la màxima massa en repòs possible M_0 d'una partícula X que es pugui produir com a resultat del xoc d'un d'aquests protons accelerats amb un protó en repòs, segons el procés següent:

$$p + p \rightarrow p + p + X$$

Un protó amb velocitat \vec{u} col·lisiona amb un altre protó en repòs i, de la col·lisió, emergeixen dos protons i un π^0 . b) Doneu el valor mínim que ha de tenir $\gamma(u)$ perquè això sigui possible. ($m_\pi = 135$ MeV)

- 5.3. Un àtom excitat de massa m , i en repòs en un cert sistema de referència, emet una fotó perdent una quantitat d'energia interna ΔE . Calculeu la freqüència exacta del fotó, tenint en compte el retrocés de l'àtom.
- 5.4. (a) Un fotó d'energia $h\nu$ xoca elàsticament amb un electró en repòs. L'energia del fotó després del xoc és $h\nu/2$ i surt amb una direcció que forma un angle de 60° amb la direcció del fotó incident. Quina és la freqüència ν del fotó incident?
- (b) Un fotó amb una energia $h\nu$ xoca amb un àtom excitat que es troba en repòs. Després del xoc el fotó encara té energia $h\nu$ però ha canviat el seu sentit de moviment en 180° . Si l'àtom es troba en el seu estat fonamental després del xoc, calculeu l'energia d'excitació inicial.
- 5.5. Calculeu l'energia mínima que ha de tenir el fotó en el sistema laboratori perquè la reacció següent sigui possible:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^+ + 2e^-$$

- 5.6. Un pió neutre π^0 de massa $m_{\pi^0} = 135$ MeV que es mou amb una energia cinètica d'1 GeV es desintegra en dos fotons.
- (a) Determineu les energies dels fotons si aquests s'emeten en la direcció del pió original i en sentits oposats.
- (b) Calculeu amb quin angle surten els fotons si aquests s'emeten formant un angle igual respecte a la direcció del pió inicial.
- 5.7. El 4-vector d'ona, $k^\mu = (\vec{k}, k^4)$ (o amb l'altre notació $k^\mu = (k^0, \vec{k})$), d'una ona electromagnètica plana i monocromàtica que es propaga en un medi refringent (d'índex de refracció $n > 1$) satisfà que $|\vec{k}| = n k^4$. Així, doncs,

prendrem com a 4-moment d'un fotó de freqüència ν , $k^\mu = (\vec{k}, k^4)$ amb $k^4 = h\nu/c$ i $|\vec{k}| = n k^4$. Considerem ara la reacció: $e^- \rightarrow e^- + \gamma$, en el si d'un medi refringent. Si θ és l'angle que formen la direcció \vec{k} del fotó emergent i la direcció \vec{p} de l'electró incident:

- (a) Determineu $\cos \theta$ en funció de l'energia E de l'electró incident i l'energia $h\nu$ del fotó emès.
- (b) Per a una E donada determineu el valor màxim de l'angle θ .
- (c) Calculeu l'energia mínima de l'electró perquè aquesta reacció sigui possible.

- 5.8. La 3-força sobre una massa puntual es defineix per $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ on \vec{p} és la part espacial del 4-moment p^μ de la partícula. Noteu que, a diferència de la 4-força de Minkowski $f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$, on τ és el temps propi, \vec{F} no és un objecte tensorial sota canvis de coordenades. Si fem un canvi de sistema de referència $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu x^\nu$, de manera que el sistema \mathcal{S}' es mou respecte al sistema \mathcal{S} a una velocitat $\vec{w} = (w^1, w^2, w^3)$ amb els eixos dels dos sistemes paral·lels, trobeu l'expressió de \vec{F}' en termes de \vec{F} , \vec{w} i la 3-velocitat, \vec{v} , de la partícula respecte al sistema \mathcal{S} .
- 5.9. Una partícula de massa m es mou en l'eix de les X en un sistema inercial atreta cap a l'origen amb una força $m\omega^2 x$. Fa oscil·lacions d'amplitud A . Expressen el període de l'oscil·lador relativista en termes d'una integral definida i doneu el valor aproximat d'aquesta integral per a valors de $\omega^2 A^2/c^2$ petits.

Capítol 6

Dinàmica relativista: partícules en interacció†

6.1 Introducció

En el capítol 5 hem posat les bases de la dinàmica relativista d'un cos sotmès a una força externa donada, la qual no és alterada pel moviment ni la presència del mateix cos. L'equació (5.40) permet de conèixer l'evolució del cos donades la seva posició i velocitat inicials i la força aplicada.

Quan un cos interacciona amb d'altres el problema és més complex perquè esperem que la força que experimentarà depengui, a part de la seva posició i la seva velocitat, de les dels altres, les quals estan influïdes al seu torn pel moviment del cos en qüestió.

En la descripció newtoniana l'acceleració de cada cos està determinada per les posicions i velocitats de tots els altres en el mateix instant. Així, per al cos i -èsim:

$$m_b \vec{a}_b = \vec{f}_b(\vec{x}_c, \vec{v}_d, t), \quad b, c, d = 1 \dots N. \quad (6.1)$$

Això dóna un sistema diferencial de segon ordre amb $3N$ graus de llibertat que, conegudes les posicions i velocitats inicials dels N cossos puntuals, permet de determinar-ne l'evolució futura (i passada). És per això que aquest marc s'anomena *predictiu*.

Aquesta descripció suggereix a més la interpretació física següent: la causa que el cos « b » experimenti l'acceleració \vec{a}_b és el fet que els altres, « c », estiguin en les posicions \vec{x}_c amb les velocitats \vec{v}_c en el mateix instant. Una imatge com aquesta, que suggereix un «senyal» que es propaga instantàniament de cada cos « c » al cos « b » per indicar-li com s'ha de moure, està en conflicte amb la teoria de la relativitat, en la qual no hi pot haver senyals que viatgin a velocitats superiors a la velocitat de la llum en el buit. Per causa de raonaments d'aquest estil, durant molt temps es va estendre la creença que una descripció predictiva del moviment d'un

sistema de cossos puntuals és incompatible d'arrel amb la invariància relativista.¹

Aquest inconvenient només és aparent.

Va ser Dirac qui, interessat a trobar un sistema dinàmic que representés correctament els fenòmens atòmics, va plantejar el problema, en el marc de la mecànica analítica, amb claredat. En previsió de la quantització posterior, el sistema havia de ser hamiltonià i també invariant relativista.

Dediquem els següents apartats a les transformacions de simetria dels sistemes hamiltonians i presentem un resum de temes de mecànica analítica que ens seran imprescindibles.² Després ho aplicarem al nostre sistema dinàmic relativista.

Veurem en l'apartat (6.6) que és possible fer compatibles la relativitat i el fet que les equacions del moviment siguin un sistema d'equacions de segon ordre, així com també el principi de causalitat.

6.2 Transformacions canòniques

L'espai fàsic d'un sistema dinàmic amb n graus de llibertat té dimensió $2n$. Les $2n$ coordenades d'aquest espai s'anomenen *canòniques* quan podem separar-hi n coordenades generalitzades, q^i , i n moments conjugats, p_j , $i, j = 1, \dots, n$, de manera que els parèntesis de Poisson elementals són:

$$\{q^i, q^j\} = \{p_l, p_k\} = 0, \quad \{q^i, p_l\} = \delta_l^i, \quad i, j, k, l = 1 \dots n \quad (6.2)$$

Una transformació de coordenades en l'espai fàsic ampliat:

$$q'^i = q'^i(q, p, t), \quad p'_l = p'_l(q, p, t) \quad (6.3)$$

s'anomena *canònica* si conserva els parèntesis de Poisson elementals

$$\{q'^i, q'^j\} = \{p'_l, p'_k\} = 0, \quad \{q'^i, p'_l\} = \delta_l^i. \quad (6.4)$$

Una manera, entre d'altres, de definir una transformació canònica consisteix a donar una funció generatriu $F(q^i, p'_j, t)$ tal que:

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p'_l \partial q^i} \right) \neq 0. \quad (6.5)$$

La transformació canònica s'obté a partir de les relacions:

$$p_i = \frac{\partial F(q, p', t)}{\partial q^i}, \quad q'^j = \frac{\partial F(q, p', t)}{\partial p'_j}. \quad (6.6)$$

¹Vegeu, per exemple, BERGMANN (1976).

²Seguirem la notació de GOLDSTEIN (2002, 3a edició) que el lector pot consultar per a més detalls.

En efecte, gràcies a (6.5) podem aïllar $p'_l = p'_l(q, p, t)$ a partir de les n primeres equacions (6.6). Llavors, de substituir aquest resultat en les n equacions (6.6) restants s'obté $q'^i = q'^i(q, p, t)$.

Una propietat de les transformacions canòniques és que converteixen les equacions de Hamilton associades a una hamiltoniana qualsevol $H(q, p, t)$ en les equacions de Hamilton que es deriven de la hamiltoniana transformada

$$H'(q', p', t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F(q, p', t)}{\partial t} \quad (6.7)$$

on (q, p, t) i (q', p', t) estan relacionats per (6.3).

En particular, la funció generatriu

$$F_0(q, p', t) = \sum_{i=1}^n q^i p'_i \quad (6.8)$$

correspon a la transformació identitat:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} = p'_i \quad q'^j = \frac{\partial F}{\partial p'_j} = q^j.$$

Una transformació canònica és a més una *transformació de simetria* si la hamiltoniana és invariant:

$$H'(q', p', t) = H(q', p', t), \quad (6.9)$$

és a dir, la mateixa funció H de $2n + 1$ variables dona la hamiltoniana abans i després de la transformació. D'aquesta manera les equacions de Hamilton expressades en les noves coordenades canòniques (q', p', t) tenen idèntica forma que quan s'expressen en les variables (q, p, t) .

6.2.1 Transformacions canòniques infinitesimals

Ens interessarà considerar famílies de transformacions canòniques que depenen d'un paràmetre:

$$q'^i = q'^i(\epsilon, q, p, t), \quad p'_l = p'_l(\epsilon, q, p, t), \quad i, l = 1 \dots n, \quad (6.10)$$

i que, a més, per a $\epsilon = 0$ es tingui la transformació identitat:

$$q'^i(0, q, p, t) = q^i, \quad p'_j(0, q, p, t) = p_j. \quad (6.11)$$

Per a valors petits del paràmetre ϵ podem aproximar (6.10) pel desenvolupament de Taylor fins al primer ordre:

$$q'^i = q^i + \epsilon Q^i(q, p, t) + O(2), \quad p'_j = p_j + \epsilon P_j(q, p, t) + O(2), \quad (6.12)$$

on hem tingut en compte (6.11), hem posat:

$$Q^i(q, p, t) \equiv \frac{\partial q'^i(0, q, p, t)}{\partial \epsilon}, \quad P_j(q, p, t) \equiv \frac{\partial p'_j(0, q, p, t)}{\partial \epsilon} \quad (6.13)$$

i $O(2)$ recull tots els termes d'ordre igual o superior a ϵ^2 .

La funció generatriu $F(\epsilon, q, p', t)$ també es pot desenvolupar fins al primer ordre i, si tenim en compte (6.8) i (6.11), la podem posar així:

$$F(\epsilon, q, p', t) = \sum_{i=1}^n q^i p'_i + \epsilon f(q, p', t) + O(2). \quad (6.14)$$

Les relacions (6.6) per a aquesta funció generatriu ens donen:

$$\left. \begin{aligned} q'^j &= q^j + \epsilon \frac{\partial f(q, p', t)}{\partial p'_j} + O(2) \\ p_i &= p'_i + \epsilon \frac{\partial f(q, p', t)}{\partial q^i} + O(2) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

que, després de comparar amb (6.12) i negligir termes d'ordre ϵ^2 , ens porten a:

$$Q^i(q, p, t) = \frac{\partial f(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad P_j(q, p, t) = -\frac{\partial f(q, p, t)}{\partial q^j}. \quad (6.16)$$

La funció $f(q, p, t)$ s'anomena *funció generatriu de les transformacions infinitesimals* (6.12). Així, donada una funció qualsevol $k(q, p, t)$ de l'espai fàsic ampliat, tindrem:

$$k(q', p', t) = k(q, p, t) + \epsilon \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial k}{\partial q^i} Q^i(q, p, t) + \frac{\partial k}{\partial p_i} P_i(q, p, t) \right] + O(2) \quad (6.17)$$

que, si usem (6.16) i el parèntesi de Poisson, es pot posar així:

$$k(q', p', t) = k(q, p, t) + \epsilon \{k, f\} + O(2). \quad (6.18)$$

En particular, per a la hamiltoniana $H'(q', p', t)$ tenim:

$$H'(q', p', t) = H(q, p, t) + \epsilon \frac{\partial f(q, p, t)}{\partial t} + O(2), \quad (6.19)$$

que, comparada amb (6.18) per a la funció H , ens porta a:

$$H'(q', p', t) - H(q', p', t) = \epsilon \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \{H, f\} \right) + O(2) = \epsilon \frac{df}{dt} + O(2), \quad (6.20)$$

on hem tingut en compte l'expressió (5.83) de la derivada temporal total.

Si ara ens fixem en (6.9), resulta que les transformacions canòniques infinitesimals (6.12) són de simetria si, i només si, la seva funció generatriu $f(q, p, t)$ és una constant del moviment.

6.2.2 L'operador generador infinitesimal

Sigui $k(q, p, t)$ una funció qualsevol en l'espai fàsic ampliat. L'operador generador infinitesimal de les transformacions (6.15) es defineix així:

$$\hat{X}k(q, p, t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [k(q', p', t) - k(q, p, t)] . \quad (6.21)$$

De (6.17) tenim immediatament que:

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^n \left(Q^i(q, p, t) \frac{\partial}{\partial q^i} + P_i(q, p, t) \frac{\partial}{\partial p_i} \right) . \quad (6.22)$$

En el cas que (6.15) sigui una transformació canònica infinitesimal, la relació (6.18) ens dóna que:

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = -\{f, \} . \quad (6.23)$$

6.3 Transformacions de Poincaré infinitesimals

Com ja hem dit a la secció 4.2, el grup de Poincaré el constitueixen les transformacions que resulten de compondre, successivament i en qualsevol ordre, diverses: (a) translacions espaciotemporals, (b) rotacions i (c) transformacions de Lorentz pures.³

Per a les transformacions infinitesimals de cada un dels tres tipus anteriors tenim les expressions següents:

Translacions espaciotemporals

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\epsilon}, \quad t' = t + \tau, \quad (6.24)$$

on $\vec{\epsilon}$ és el vector desplaçament i τ el desplaçament temporal.

Rotacions

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\phi} \times \vec{x} + O(2), \quad t' = t, \quad (6.25)$$

on $\vec{\phi}$ és el vector de rotació: la direcció defineix l'eix de rotació i el mòdul $|\vec{\phi}|$ és l'amplitud de la rotació infinitesimal. El terme $O(2)$ disminueix com $|\vec{\phi}|^2$ quan $\vec{\phi}$ tendeix cap a 0.

³Deixem de banda les transformacions discretes, paritat i inversió temporal que no estan lligades de manera contínua amb la identitat.

Transformacions de Lorentz pures

$$\vec{x}' = \vec{x} - t \vec{V} + O(2), \quad t' = t - \frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x} + O(2), \quad (6.26)$$

on \vec{V} és el vector velocitat relativa. L'expressió anterior és el desenvolupament de Taylor a primer ordre en \vec{V} de la transformació de Lorentz exacta (2.14) i (2.15). El terme $O(2)$ disminueix com $|\vec{V}|^2$ quan \vec{V} tendeix cap a 0.

La forma general d'una transformació de Lorentz infinitesimal s'obté de compondre les tres expressions anteriors:

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} - t \vec{V} + \vec{\phi} \times \vec{x} + \vec{\epsilon} + O(2) \\ t' &= t - \frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x} + \tau + O(2) \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

(el terme $O(2)$ inclou tots els termes que depenen almenys dels quadrats dels paràmetres o del producte de dos d'ells).

Notem que, si bé la composició de dues transformacions de Poincaré no és commutativa, aquest efecte només es manifesta en termes de segon ordre. A primer ordre les transformacions de Poincaré infinitesimals commuten.

Les transformacions de Poincaré formen un grup en què cada transformació està caracteritzada per 10 paràmetres que en l'expressió infinitesimal (6.27) es concreten en: $\vec{\epsilon}$, τ , $\vec{\phi}$ i \vec{V} .

6.4 Partícula lliure i invariància de Poincaré

A l'apartat 5.8.3 hem presentat el formalisme hamiltonià per a una partícula lliure. Les coordenades i moments canònics són els components de \vec{x} i \vec{p} i la hamiltoniana és $H = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$. Ara veurem com les transformacions infinitesimals de Poincaré són transformacions canòniques de simetria i n'obtidrem les funcions generatrius.

La transformació de Poincaré infinitesimal (6.27) s'assembla a la part de les coordenades d'una transformació infinitesimal del tipus (6.10),⁴ amb l'excepció que en aquell cas el paràmetre d'evolució t no resultava afectat per la transformació i ara sí. Per corregir aquesta diferència, aplicarem la primera de les equacions (6.27) a les trajectòries del sistema hamiltonià:

$$\vec{x}'(t') = \vec{x}(t) - t \vec{V} + \vec{\phi} \times \vec{x}(t) + \vec{\epsilon} + O(2). \quad (6.28)$$

D'altra banda, d'aïllar t de la segona de les equacions (6.27) tenim:

$$t = t' + \frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}(t') - \tau + O(2). \quad (6.29)$$

⁴Les idees desenvolupades a l'apartat 6.2.1 es generalitzen de manera immediata i òbvia al cas d'una família de transformacions que depenen de més d'un paràmetre.

(La substitució de $\vec{x}(t)$ per $\vec{x}(t')$ en el segon membre només introdueix una discrepància que queda englobada en el terme $O(2)$.)

Si ara substituïm (6.29) en (6.28) i tenim en compte que:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t') + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}(t') - \tau \right] \dot{\vec{x}}(t') + O(2) \quad (6.30)$$

obtenim que, a part de termes de segon ordre,

$$\vec{x}'(t') = \vec{x}(t') + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}(t') - \tau \right] \dot{\vec{x}}(t') - t' \vec{V} + \vec{\phi} \times \vec{x}(t') + \vec{\epsilon} + O(2). \quad (6.31)$$

La velocitat $\dot{\vec{x}}(t')$ ve donada per les equacions de Hamilton (5.81)

$$\dot{\vec{x}}(t') = \frac{c^2 \vec{p}(t')}{H(t')}. \quad (6.32)$$

Si substituïm aquesta expressió en l'anterior obtenim una llei de transformació en què tant les variables transformades, \vec{x}' , com les primitives, \vec{x} i \vec{p} , depenen del nou paràmetre d'evolució t' . L'acció de la transformació infinitesimal de Poincaré sobre les coordenades de l'espai fàsic ampliat de la partícula lliure és:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x} - \tau \right] \frac{c^2 \vec{p}}{H} - t \vec{V} + \vec{\phi} \times \vec{x} + \vec{\epsilon} + O(2). \quad (6.33)$$

Aquestes relacions s'han de completar amb la llei de transformació dels moments canònics.

6.4.1 Les funcions generatrius

Per determinar-les primer buscarem una funció generatriu per a les transformacions (6.33). Per analogia amb (6.14) serà de la forma:

$$F(\alpha^A, \vec{x}, \vec{p}', t) = \vec{x} \cdot \vec{p}' + \sum_{A=1}^{10} \alpha^A f_A(\vec{x}, \vec{p}', t) + O(2), \quad (6.34)$$

on α^A és una manera abreujada d'escriure els deu paràmetres: $(\vec{\epsilon}, \tau, \vec{\phi}, \vec{V})$. La relació anàloga a la (6.15) és:

$$x'^i = x^i + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{A=1}^{10} \alpha^A f_A(\vec{x}, \vec{p}, t) \right) + O(2).$$

De comparar aquesta última amb (6.33) obtenim:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{A=1}^{10} \alpha^A f_A \right) = \epsilon^i - \tau \frac{c^2 p^i}{H} + (\vec{\phi} \times \vec{x})^i + \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}}{H} p^i - t V^i \quad (6.35)$$

que s'integra immediatament i dóna:

$$\sum_{A=1}^{10} \alpha^A f_A = \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} - \tau H + \vec{\phi} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) + \vec{V} \cdot \left(\frac{H}{c^2} \vec{x} - t \vec{p} \right) + g(\alpha^A, \vec{x}, t),$$

on $g(\alpha^A, \vec{x}, t)$ és una funció arbitrària.

Com que volem a més que les equacions de Hamilton en els sistemes de referència \mathcal{S} i \mathcal{S}' siguin idèntiques, la transformació infinitesimal generada per la funció anterior haurà de ser també una transformació de simetria per a la hamiltoniana (5.80). Per tant, d'acord amb (6.20), $\sum_{A=1}^{10} \alpha^A f_A$ haurà de ser una integral del moviment. Això només es compleix si g és ella mateixa una integral del moviment, és a dir, si:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{c}{H} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x g + \partial_t g = 0,$$

la qual cosa implica que g és una constant, que escollirem nül·la.

Resumint, les funcions generatrius de les transformacions de Poincaré infinitesimals són

$$\sum_{A=1}^{10} \alpha^A f_A = \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} - \tau H + \vec{\phi} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) + \vec{V} \cdot \left(\frac{H}{c^2} \vec{x} - t \vec{p} \right). \quad (6.36)$$

Si apliquem (6.15), la forma d'aquestes transformacions en l'espai de les fases es concreta en:

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{\epsilon} + \tau \frac{c^2 \vec{p}}{H} + \vec{\phi} \times \vec{x} - t \vec{V} + \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}}{H} \vec{p} + \text{O}(2) \\ \vec{p}' &= \vec{p} + \vec{\phi} \times \vec{p} - \frac{H}{c^2} \vec{V} + \text{O}(2) \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

6.4.2 L'àlgebra de Poisson del grup de Poincaré

En l'expressió (6.36) es palesa la contribució de cada tipus de transformació elemental a la transformació infinitesimal total. Si associem una funció generatriu a cada paràmetre infinitesimal tenim:

Translacions en la direcció OX^i

$$P_i \equiv p_i$$

Rotacions al voltant de l'eix OX^i

$$J_i \equiv (\vec{x} \times \vec{p})_i$$

Translacions temporals

$$T \equiv -H = -c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Transformacions de Lorentz pures en la direcció OX^i

$$K_i \equiv -t p_i + \frac{H}{c^2} x_i$$

Els parèntesis de Poisson entre parelles d'aquestes funcions són:

$$\left. \begin{aligned} \{H, P_i\} &= 0 & \{H, J_i\} &= 0 & \{H, K_i\} &= -P_i \\ \{P_i, P_j\} &= 0 & \{P_i, J_j\} &= \epsilon_{ij}{}^l P_l & \{J_i, J_j\} &= \epsilon_{ij}{}^l J_l \\ \{P_i, K_j\} &= -\frac{H}{c^2} \delta_{ij} & \{K_i, J_j\} &= \epsilon_{ij}{}^l K_l & \{K_i, K_j\} &= -\frac{1}{c^2} \epsilon_{ij}{}^l J_l \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

on ϵ_{ijk} és el símbol antisimètric de Levi-Civita i les relacions anteriors es poden resumir així:

$$\{f_A, f_B\} = C_{AB}^L f_L, \quad A, B, L = 1, \dots, 10, \quad (6.39)$$

on les f_A representen les 10 funcions generatrius elementals H , P_i , J_j i K_l , i C_{AB}^L són constants.

A conseqüència d'aquestes relacions, el parèntesi de Poisson entre dues funcions generatrius de transformacions de Poincaré infinitesimals per a una partícula lliure és també una funció generatriu de partícula lliure. Aquest conjunt de funcions amb aquests parèntesis formen el que s'anomena l'*àlgebra de Poisson del grup de Poincaré*.

6.4.3 Els generadors infinitesimals de les transformacions de Poincaré

D'acord amb el que hem dit a l'apartat 6.2.2, cada paràmetre de les transformacions infinitesimals (6.33) porta associat un operador generador infinitesimal. D'aplicar directament (6.23) tenim:

Per a les translacions en la direcció OX^i

$$\hat{P}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (6.40)$$

Per a les rotacions al voltant de l'eix OX^i

$$\hat{J}_i \equiv (\vec{x} \times \vec{\nabla}_x)_i + (\vec{p} \times \vec{\nabla}_p)_i \quad (6.41)$$

Per a les translacions temporals

$$\hat{T} \equiv -\frac{c^2}{H} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x \quad (6.42)$$

Per a les transformacions de Lorentz pures en la direcció OX^i

$$\hat{K}_i \equiv -t \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{H}{c^2} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{x^i}{H} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x \quad (6.43)$$

Els commutadors entre parelles d'aquests operadors donen un resultat semblant a (6.39). En efecte, si $\hat{X}_A = -\{f_A, \cdot\}$ i k és una funció qualsevol de l'espai fàsic ampliat:

$$[\hat{X}_A, \hat{X}_B]k = \hat{X}_A(\hat{X}_B k) - \hat{X}_B(\hat{X}_A k) = \{f_A, \{f_B, k\}\} - \{f_B, \{f_A, k\}\},$$

que, per la identitat de Jacobi del parèntesi de Poisson, és igual a:

$$-\{k, \{f_A, f_B\}\} = \sum_{L=1}^{10} C_{AB}^L \{f_L, k\} = - \sum_{L=1}^{10} C_{AB}^L \hat{X}_L k.$$

Així, tenim les relacions de commutació:

$$[\hat{X}_A, \hat{X}_B] = - \sum_{L=1}^{10} C_{AB}^L \hat{X}_L. \quad (6.44)$$

El fet que els commutadors entre els generadors infinitesimals donin combinacions lineals amb coeficients constants dels mateixos generadors està relacionat amb el fet que el conjunt de les transformacions de Poincaré forma un grup.⁵

6.5 Sistema de diverses partícules

L'espai fàsic ampliat d'un sistema de N partícules és coordinat per

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t)$$

i els parèntesis de Poisson elementals són:

$$\begin{aligned} \{x_a^i, x_b^j\} &= \{p_{al}, p_{bk}\} = 0, & \{x_a^i, p_{bl}\} &= \delta_{ab} \delta_l^i, \\ i, j, k, l &= 1, 2, 3; & a, b &= 1 \dots N. \end{aligned} \quad (6.45)$$

La trajectòria del sistema dinàmic en l'espai fàsic ampliat és:

$$(\vec{x}_a(t), \vec{p}_b(t), t)$$

i s'obté a partir de les posicions i moments \mathcal{S} -simultanis en l'instant t del sistema de referència \mathcal{S} .

⁵Vegeu, per exemple, SUDARSHAN (1974).

En passar a un altre sistema de referència \mathcal{S}' , relacionat amb \mathcal{S} per una transformació de Poincaré infinitesimal del tipus (6.27), obtindrem una nova trajectòria del sistema dinàmic:

$$(\vec{x}'_a(t'), \vec{p}'_b(t'), t')$$

formada per posicions i moments \mathcal{S}' -simultanis.

Si ens limitéssim a aplicar la transformació infinitesimal (6.27):

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}'_a(t'_a) &= \vec{x}_a(t) - t \vec{V} + \vec{\phi} \times \vec{x}_a(t) + \vec{\epsilon} + O(2) \\ t'_a &= t - \frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}_a(t) + \tau + O(2) \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

obtindríem una configuració que no és \mathcal{S}' -simultània. Això es pot corregir usant la inversa de la segona de les equacions (6.46):

$$t = t'_a + \frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}_a(t'_a) - \tau + O(2),$$

que, substituïda en la primera de les equacions (6.46) i després de tenir en compte que:

$$\vec{x}_a(t) = \vec{x}_a(t'_a) + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}_a(t'_a) - \tau \right] \dot{\vec{x}}_a(t'_a) + O(2),$$

ens dóna:

$$x'^i_a(t') = x^i_a(t') + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}_a(t') - \tau \right] \dot{x}^i_a(t') - t' V^i + [\vec{\phi} \times \vec{x}_a(t')]^i + \epsilon^i + O(2), \quad (6.47)$$

on hem agafat el mateix paràmetre d'evolució per a totes les N partícules: $t' = t'_1 = \dots = t'_N$.

Per obtenir la forma de la transformació infinitesimal en l'espai fàsic a partir d'aquesta expressió ens resta concretar la velocitat $\dot{\vec{x}}_a(t'_a)$ en funció de les posicions i moments. Això dependrà de les equacions de Hamilton del sistema dinàmic que estiguem considerant.

Tanmateix, per a aquelles transformacions que $\vec{V} = 0$ i $\tau = 0$, és a dir, les rotacions i translacions espacials, tenim:

$$x'^i_a = x^i_a + [\vec{\phi} \times \vec{x}_a]^i + \epsilon^i + O(2).$$

Són transformacions puntuals, que no depenen de $\dot{x}^i_a(\vec{x}_b, \vec{p}_c)$ i no contenen informació dinàmica. Per raonaments semblants als de l'apartat 6.4.1 obtenim les funcions generatrius de:

(a) les translacions infinitesimals en la direcció OX^i

$$P_i = \sum_{b=1}^N p_{bi} \quad (6.48)$$

o *moment lineal total* que si utilitzem (6.23) ens dóna el generador infinitesimal de les translacions

$$\hat{P}_i = - \sum_{b=1}^N \frac{\partial}{\partial x_b^i}, \quad (6.49)$$

així com

(b) les rotacions infinitesimals al voltant de l'eix OX^i

$$J_i \equiv \sum_{b=1}^N (\vec{x}_b \times \vec{p}_b)_i \quad (6.50)$$

o *moment angular total*, de nou de (6.23) obtenim el generador infinitesimal de les rotacions

$$\hat{J}_i = - \sum_{b=1}^N \epsilon^k_{ij} \left(x_b^j \frac{\partial}{\partial x_b^k} + v_b^j \frac{\partial}{\partial v_b^k} \right). \quad (6.51)$$

El fet que siguin precisament aquestes sis funcions generatrius les que no contenen dinàmica està relacionat amb la manera com hem construït l'espai fàsic del sistema: posicions i moments \mathcal{S} -simultanis de les partícules components. Les rotacions i translacions espacials són precisament les transformacions del grup de Poincaré que conserven la \mathcal{S} -simultaneïtat.⁶

Per obtenir les funcions generatrius associades als paràmetres V^i i τ caldrà conèixer abans la dinàmica del sistema.

6.5.1 Partícules sense interacció

En aquest cas, el moviment de cada partícula és rectilini i uniforme i la hamiltoniana resulta de sumar les hamiltonianes de les partícules components:

$$H = \sum_{b=1}^N h_b, \quad \text{amb} \quad h_b = c \sqrt{m_b^2 c^2 + \vec{p}_b^2}. \quad (6.52)$$

D'acord amb les equacions de Hamilton, la velocitat del cos «a» és doncs:

$$\dot{\vec{x}}_a = \frac{c \vec{p}_a}{h_a},$$

que, en substituir a (6.47), ens dóna per a la transformació infinitesimal de les coordenades canòniques associada als paràmetres \vec{V} i τ :

$$\vec{x}'_a(t') = \vec{x}_a(t') + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}_a(t') - \tau \right] \frac{c \vec{p}_a(t')}{h_a(t')} - t' \vec{V} + O(2). \quad (6.53)$$

⁶Aquesta manera de construir l'espai fàsic a partir de les línies d'univers dels cossos és el que Dirac anomena *instant form* de la dinàmica, per distingir-la de les altres dues que proposa: la *point form* i la *front form*, que no detallarem perquè escapen molt de l'abast d'aquest text.

A partir d'aquí, i seguint raonaments semblants als de l'apartat 6.4.1 obtenim les quatre funcions generatrius restants:

Per a les translacions temporals infinitesimals

$$T = - \sum_{b=1}^N c \sqrt{m_b^2 c^2 + \vec{p}_b^2} = - \sum_{b=1}^N h_b \quad (6.54)$$

i per a les transformacions de Lorentz pures en la direcció OX^i

$$K_i \equiv -t P_i + \frac{1}{c^2} \sum_{b=1}^N x_{bi} h_b. \quad (6.55)$$

Les relacions de commutació entre les 10 funcions generatrius (6.48), (6.50), (6.54) i (6.55) són idèntiques a les (6.38). Són una característica de la parametrització de les transformacions infinitesimals del grup de Poincaré que hem escollit aquí, i es reproduceix en totes les accions canòniques d'aquest grup.

6.5.2 Partícules en interacció

En aquest cas la hamiltoniana serà una certa funció $H(\vec{x}_b, \vec{p}_c, t)$ i les equacions de Hamilton ens donen:

$$\dot{x}_a^i = \frac{\partial H}{\partial p_{ai}},$$

que es pot substituir a (6.47), amb $\vec{\epsilon} = \vec{\phi} = 0$ i tenim:

$$x_a'^i = x_a^i + V^j \left(\frac{1}{c^2} x_{aj} \frac{\partial H}{\partial p_{ai}} - t' \delta_j^i \right) - \tau \frac{\partial H}{\partial p_{ai}} + O(2). \quad (6.56)$$

Per obtenir les quatre funcions generatrius que falten pel mateix mètode que a l'apartat (6.4.1), hem de comparar aquesta expressió amb la primera de les (6.15). Per al cas $\vec{V} = 0$, resulta obvi que la funció generatriu de les translacions temporals infinitesimals és la mateixa hamiltoniana $-H(\vec{x}_b, \vec{p}_c)$, que no podrà dependre explícitament de t perquè, com que és la funció generatriu d'una transformació de simetria, ha de ser una constant del moviment.

Per a les transformacions de Lorentz pures, $\vec{V} \neq 0$, la integració ja no és òbvia, excepte per a la contribució del terme amb δ_j^i de (6.56). Així, posarem:

$$K_j = -t P_j + K_j^0(\vec{x}_b, \vec{p}_c), \quad (6.57)$$

on P_j és el moment lineal total i K_j^0 és una solució del sistema diferencial:

$$\frac{\partial K_j^0}{\partial p_{ai}} = \frac{1}{c^2} x_{aj} \frac{\partial H(\vec{x}_b, \vec{p}_c)}{\partial p_{ai}}. \quad (6.58)$$

En qualsevol cas, les deu funcions generatrius —les sis conegudes i les quatre que queden per determinar— han de complir les relacions de Poisson de l'àlgebra de Poincaré (6.38).

D'aquí que ens poguem plantejar el problema a la inversa. Un sistema hamiltonià relativista de N partícules en interacció vindrà determinat per les deu funcions generatrius de l'àlgebra de Poincaré, és a dir, deu funcions de l'espai fàsic que satisfacin els parèntesis de Poisson (6.38). En la *instant form* sis d'aquestes funcions: P_i i J_i , tenen la forma senzilla (6.48) i (6.50), que compleix òbviament els parèntesis de Poisson (6.38) en què solament apareixen elles i reben el nom de *funcions generatrius cinemàtiques*.

La resta de parèntesis de Poisson ens donen equacions sobre les incògnites H i K_l , anomenades *funcions generatrius dinàmiques*. Alguns d'aquests parèntesis de Poisson

$$\{H, P_i\} = 0 \quad \{H, J_i\} = 0, \quad \text{i} \quad \{K_i, J_j\} = \epsilon_{ij}{}^l K_l$$

ens diuen que H és una funció triescalar invariant per translacions i que \vec{K} són tres funcions que formen un trivector. Mentre que la resta:

$$\{H, K_i\} = -P_i \quad \{P_i, K_j\} = -\frac{H}{c^2} \delta_{ij}, \quad \{K_i, K_j\} = -\frac{1}{c^2} \epsilon_{ij}{}^l J_l \quad (6.59)$$

són condicions de compatibilitat sobre la dinàmica.

Notem, però, que (6.58) i (6.59) constitueixen un sistema diferencial en derivades parcials. Per trobar-ne la solució, primer s'ha de completar el sistema tot afegint-hi les condicions de compatibilitat que resulten de la igualtat de les derivades creuades de les incògnites. Es demostra que el sistema complet és molt restrictiu i l'única solució que admet és la que correspon a un sistema de partícules lliures.

Aquest resultat es coneix com a *teorema de no-interacció* i estableix que:

Si un sistema relativista de partícules admet una descripció hamiltoniana i les coordenades de posició (simultànies) de les partícules són coordenades canòniques, llavors es tracta d'un sistema de partícules lliures.

A conseqüència d'aquest teorema, la dinàmica relativista de partícules en interacció directa ha de renunciar a un dels dos components de la hipòtesi. En l'enfocament que resumim tot seguit, anomenat *manifestament predictiu*, t és el temps coordinat d'un sistema de referència inercial i les coordenades de l'espai de les fases són les posicions i les velocitats de les partícules en l'instant t , però no són coordenades canòniques d'un possible formalisme hamiltonià.

6.6 Sistemes predictius invariants pel grup de Poincaré

Considerem un sistema aïllat de N partícules puntuals en interacció mútua. Suposarem que la llei del moviment de les partícules segons un sistema de referència inercial \mathcal{S} qualsevol ve donada per un sistema diferencial ordinari de segon ordre

$$\frac{dx_a^i}{dt} = v_a^i, \quad \frac{dv_a^i}{dt} = \mu_a^i(x_b^j, v_c^k), \quad (6.60)$$

($i, j, k = 1, 2, 3$; $a, b, c = 1, 2, 3, \dots, N$). A conseqüència de la invariància relativista, les $3N$ funcions μ_a^i tenen la mateixa forma en tots els sistemes de referència inercial. A més, la invariància sota translacions temporals implica que aquestes funcions no depenguin explícitament del temps, és a dir, el sistema és autònom.

Però amb això no n'hi ha prou per tenir invariància relativista. La integral general del sistema $x_a^i = \varphi(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t)$ ens diu com es mou cada partícula a partir d'unes condicions inicials x_{b0}^j, v_{c0}^k a $t = 0$ (sotmeses a l'única restricció que $\bar{v}_{a0}^2 < c^2$).

Per a cada conjunt admissible de condicions inicials les N línies d'univers de les partícules tindran les equacions paramètriques

$$x_a^4(t) = ct, \quad x_a^i(t) = \varphi_a^i(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t). \quad (6.61)$$

La invariància relativista també implica que el grup de Poincaré deixa invariant aquest conjunt de línies d'univers. Precisem-ho una mica més. En un altre sistema de referència inercial \mathcal{S}' , relacionat amb \mathcal{S} per la transformació de Poincaré L_ν^μ , les línies d'univers de les partícules es transformaran en:

$$\begin{aligned} ct' &= L_4^{4'}[ct - A^4] + L_l^{4'}[\varphi_a^l(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t) - A^l] \\ x_a^{j'} &= L_4^{j'}[ct - A^4] + L_l^{j'}[\varphi_a^l(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t) - A^l]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

La primera ens dona $t' = f'(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t)$, que, un cop aïllat t i substituït a la segona, ens dona:

$$x_a^{i'} = \psi_a^i(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t').$$

Però, com que en el sistema inercial \mathcal{S}' la llei del moviment és formalment la mateixa que en el sistema \mathcal{S} , aquestes N trajectòries han de coincidir amb les que donaria la integral general per a unes dades inicials transformades $x_{b0}^{j'}, v_{c0}^{k'}$, que dependran de les condicions inicials en \mathcal{S} i la transformació de Poincaré que passa d'un sistema de referència a l'altre:

$$x_{a0}^{i'} = f_a^i(x_{b0}^j, v_{c0}^k, L_\nu^\mu), \quad v_{a0}^{i'} = g_a^i(x_{b0}^j, v_{c0}^k, L_\nu^\mu).$$

En conseqüència, per a tot t i per a qualsevol transformació del grup de Poincaré, s'haurà de complir que:

$$\begin{aligned} \varphi_a^i(x_{b0}^{j'}, v_{c0}^{k'}; L_4^{4'}[ct - A^4] + L_l^{4'}[\varphi_a^l(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t) - A^l]) = \\ L_4^{i'}[ct - A^4] + L_l^{i'}[\varphi_a^l(x_{b0}^j, v_{c0}^k; t) - A^l]. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Aquesta condició implica una restricció força severa sobre la forma de les funcions acceleració $\mu_a^i(x_b^j, v_c^k)$ admissibles.

Una manera senzilla de trobar la forma d'aquesta restricció consisteix a construir els generadors dinàmics del grup de Poincaré \hat{H} i \hat{K}_i . Per això farem servir els resultats de la secció (6.5), amb l'excepció que ara hem de considerar l'acció del grup sobre l'espai de les condicions inicials, donat per $(\vec{x}_a, \vec{v}_a; t)$, en comptes de l'espai de les fases. Així, per a una transformació de Poincaré infinitesimal, la relació (6.47), posant $t' = 0$ i $\vec{x}_a(0) = \vec{v}_a$, implica que:

$$\vec{x}'_a = \vec{x}_a + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}_a - \tau \right] \vec{v}_a + \vec{\phi} \times \vec{x}_a + O(2). \quad (6.64)$$

Mentre que si derivem (6.47) respecte a t' i substituïm $\ddot{\vec{x}}_a(0) = \ddot{\vec{\mu}}_a$, dona:

$$\vec{v}'_a = \vec{v}_a + \left[\frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{x}_a - \tau \right] \ddot{\vec{\mu}}_a + \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{v}_a) \vec{v}_a - \vec{V} + \vec{\phi} \times \vec{v}_a + O(2). \quad (6.65)$$

Si ara usem la relació (6.21), aquestes dues últimes relacions de transformació ens permeten de trobar els generadors infinitesimals del grup de Poincaré. Així tenim els generadors cinemàtics

$$\hat{P}_i = - \sum_{b=1}^N \frac{\partial}{\partial x_b^i}, \quad \hat{J}_i = \sum_{b=1}^N (\vec{x}_b \times \vec{\nabla}_x + \vec{v}_b \times \vec{\nabla}_v)_i \quad (6.66)$$

i els generadors dinàmics

$$\hat{H} = - \sum_{b=1}^N \sum_{j=1}^3 \left(v_b^j \frac{\partial}{\partial x_b^j} + \mu_b^j \frac{\partial}{\partial v_b^j} \right) \quad (6.67)$$

$$\hat{K}_i = - \sum_{b=1}^N \sum_{j=1}^3 \left(-x_{bi} v_b^j \frac{\partial}{\partial x_b^j} + \left(\delta_i^j - v_b^j v_{bi} - x_{bi} \mu_b^j \right) \frac{\partial}{\partial v_b^j} \right). \quad (6.68)$$

De demanar que les relacions de commutació entre parelles d'aquests generadors siguin les relacions (6.44) del grup de Poincaré, s'arriba a les següents equacions diferencials que han de complir les funcions μ .

Si considerem les relacions de commutació entre un generador cinemàtic i un de dinàmic obtenim:

$$\sum_{b=1}^N \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^j} = 0, \quad \sum_{b=1}^N \epsilon^k{}_{lj} \left(x_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^k} + v_b^j \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^k} \right) = \epsilon^i{}_{ls} \mu_a^s. \quad (6.69)$$

I per les relacions de commutació entre dos generadors dinàmics obtenim:

$$\sum_{b=1}^N \sum_{k=1}^3 \left(v_b^k (x_{bj} - x_{aj}) \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x_b^k} + [v_b^k v_{bj} + \mu_b^k (x_{bj} - x_{aj}) - \delta_j^k] \frac{\partial \mu_a^i}{\partial v_b^k} \right) = 2\mu_a^i v_{aj} + v_a^i \mu_{aj}. \quad (6.70)$$

Aquestes condicions diferencials sobre les funcions μ_a^i són les condicions necessàries i suficients⁷ perquè el sistema (6.60) sigui un sistema invariant Poincaré i garanteix que es compleix (6.63).

El primer conjunt és molt fàcil de satisfer: n'hi ha prou que les funcions acceleració μ_a^i solament depenguin de les posicions relatives i es transformin com a vectors de \mathbb{R}^3 sota el grup de rotacions. La resta de condicions (6.70) són no lineals i, per tant, molt més difícils d'integrar. De fet, de solucions que tinguin interès físic només se'n coneixen de pertorbatives.

⁷S'anomenen *condicions de Currie-Hill* i la demostració que són necessàries pot trobar-se a CURRIE, D. C., *Phys. Rev.* **142**, p. 817 (1966). HILL, R. N., *J. Math. Phys.* **8**, p. 201 (1967) i la suficiència a BEL, L.L., *Ann. Ins. Poincaré* **12**, p. 307 (1970).

Capítol 7

Dinàmica relativista de medis continus†

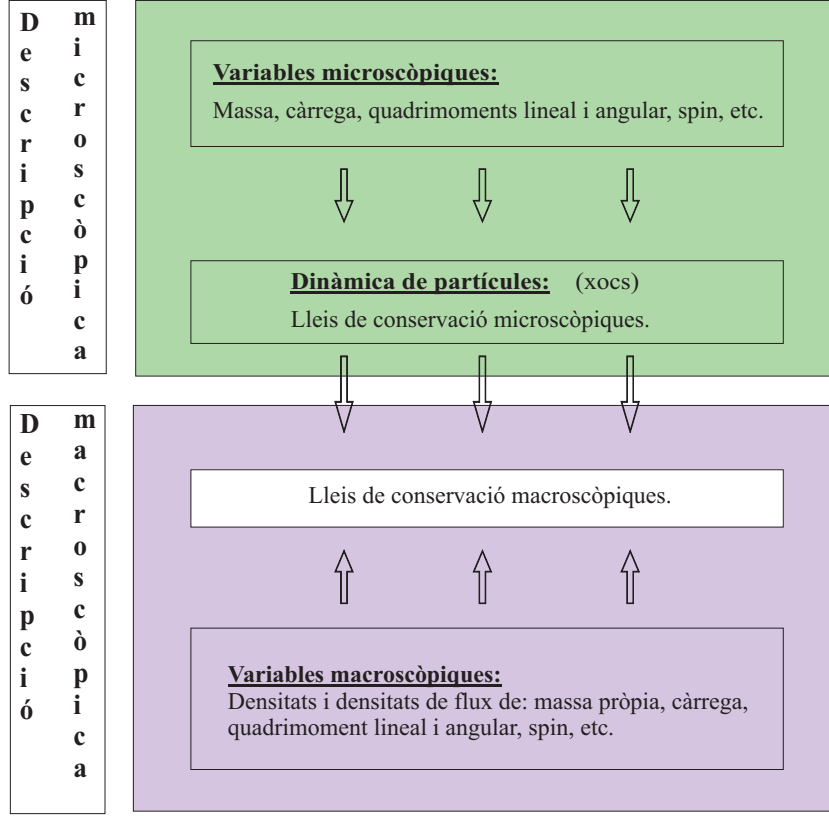
En una descripció microscòpica del moviment d'un medi material hauríem de seguir què li passa a cada partícula component, a la seva massa, a la càrrega, al seu moment lineal, al seu moment angular: l'orbital i l'intern, quines són les forces que actuen sobre cada partícula, etc.

En comptes d'això, en l'enfocament macroscòpic que prendrem aquí ens interessarem pel que passa, en mitjana, dins d'un element de volum ΔV , prou petit perquè valgui l'aproximació al continu, i al mateix temps prou gran de manera que contingui un gran nombre de partícules i valgui l'aproximació estadística. Les variables rellevants a la descripció macroscòpica seran densitats i densitats de corrent de magnituds físiques, com ara el nombre de partícules, la massa, la càrrega, l'energia, el moment lineal, etc.

Per obtenir les característiques generals d'aquestes variables macroscòpiques i també de la forma de les lleis generals de la dinàmica, ens basarem en un medi molt senzill, un gas de partícules que solament interaccionen per xoc. La forma d'aquestes lleis generals resultarà ser vàlida per a altres tipus de medis continus més complexos. El diagrama de la pàgina següent il·lustra aquesta manera de fer.

7.1 Lleis de conservació macroscòpiques

El medi continu que considerarem serà un gas enrarit de partícules que només interaccionen xocant entre elles. Les seves línies d'univers són poligonals, amb trams rectes, on els canvis de direcció i velocitat es produeixen en els instants (molt curts) en què una partícula xoca amb una altra. No ens importarà que els xocs puguin ser inelàstics, i que canviï la naturalesa i el nombre de les partícules que hi intervenen. El que sí que suposarem és que en tots els xocs



es conserva el quadrimoment lineal total i també el quadrimoment angular total:

$$\left(\sum_a p_a^\mu \right)_A = \left(\sum_b p_b^\mu \right)_D, \quad (7.1)$$

$$\left(\sum_a j_a^{\mu\nu} \right)_A = \left(\sum_b j_b^{\mu\nu} \right)_D, \quad (7.2)$$

on $p_a^\mu = m_a u_a^\mu$ i $j_a^{\mu\nu} = x_a^\mu p_a^\nu - x_a^\nu p_a^\mu + s_a^{\mu\nu}$ —equacions (5.9), (5.68). Els subíndexs A i D indiquen «abans» i «després» del xoc, respectivament.

Com ja hem dit, en la descripció macroscòpica no ens interessarem pels valors individuals p_a^μ i $j_a^{\mu\nu}$ sinó per les variables col·lectives com ara la densitat i la densitat de corrent d'aquestes magnituds.

En els canvis de sistema de referència, la densitat d'una magnitud i la seva densitat de corrent no es transformen independentment l'una de l'altra, sinó que apareixen mesclades en les lleis de transformació. És per aquesta raó que, en el formalisme quadridimensional de l'espai-temps, formen part d'un mateix objecte

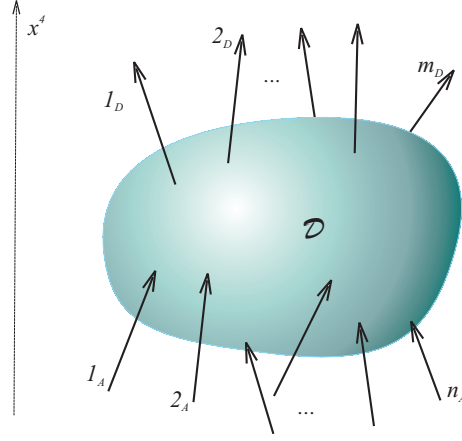


Figura 7.1. Transport de diverses magnituds físiques per les partícules constituents, amb entrada i sortida a \mathcal{D}

tensorial. En tenim un exemple en el quadricorrent electromagnètic, $j^\mu = (\vec{j}, \rho c)$, que integra en un mateix quadrivector la densitat de càrrega elèctrica ρ i la densitat de corrent elèctric \vec{j} (vegeu la secció 8.2).

7.2 Conservació del quadrimoment lineal

Considerem un domini acotat \mathcal{D} de l'espai-temps de Minkowski M_4 amb frontera $\partial\mathcal{D}$. Aquesta serà travessada per les línies d'univers d'algunes de les partícules constituents del medi: unes cap dins de \mathcal{D} i d'altres cap a fora (vegeu la figura 7.1). En travessar $\partial\mathcal{D}$ cada partícula transporta el seu quadrimoment lineal. Com que en l'interior del domini els únics canvis del p_a^μ individual es produeixen en els xocs, i en aquests es conserva el P^μ total, el quadrimoment lineal total que entra a \mathcal{D} a través de $\partial\mathcal{D}$ ha de ser igual al que en surt. Podem escriure aquesta llei de conservació global en l'interior de \mathcal{D} com a:

$$\sum_{\partial\mathcal{D}} p_a^\mu \sigma_a = 0. \quad (7.3)$$

La suma és sobre totes les línies d'univers que tallen $\partial\mathcal{D}$ i $\sigma_a = \pm 1$ segons si la línia entra a \mathcal{D} o en surt, respectivament. És a dir:

El flux net de quadrimoment lineal (respectivament de quadrimoment angular) a través de la frontera $\partial\mathcal{D}$ de qualsevol domini de l'espai-temps és nul.

7.2.1 El tensor d'energia-moment

Per avaluar el flux de quadrimoment lineal a través d'una hipersuperfície començarem pel cas senzill d'un bocí d'hiperplà que passa pel punt z , que denotarem per $\Sigma(\lambda)$, amb equació implícita

$$n_\alpha(x^\alpha - z^\alpha) = 0.$$

La direcció ortogonal a l'hiperplà és constant i està indicada per n_α , noteu que no l'hem agafat unitari, i el paràmetre λ definit per:

$$\int_{\Sigma(\lambda)} d^3\Sigma_\mu = \lambda n_\mu \quad (7.4)$$

és una mesura de l'extensió del tros d'hiperplà.

Denotarem per $P^\mu[z, \Sigma(\lambda)]$ el flux de quadrimoment lineal que travessa $\Sigma(\lambda)$ en el sentit de n_μ i definirem la densitat de flux de quadrimoment lineal prop del punt z en la direcció n_μ d'acord amb:

$$p^\mu(z, n_\rho) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} P^\mu[z, \Sigma(\lambda)]. \quad (7.5)$$

De la mateixa definició resulta que, si k és un escalar:

$$p^\mu(z, kn_\rho) = k p^\mu(z, n_\rho). \quad (7.6)$$

En efecte, si substituïm n_μ per $n'_\mu = kn_\mu$, com a conseqüència de (7.4), tenim $\Sigma(\lambda) = \Sigma'(\lambda')$ amb $\lambda' = \lambda/k$. Per tant, en aplicar la definició (7.5) resulta:

$$p^\mu(z, kn_\rho) = \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda'} P^\mu[z, \Sigma'(\lambda')] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{k}{\lambda} P^\mu[z, \Sigma(\lambda)] = k p^\mu(z, n_\rho).$$

La relació (7.6) ens diu que $p^\mu(z, n_\rho)$ és una funció homogènia de primer grau de les quatre variables n_ρ . Tot seguit veurem que, a més, en depèn linealment. És a dir, es pot expressar com a:

$$p^\mu(z, n_\rho) = \frac{1}{c} T^{\mu\rho}(z) n_\rho.$$

Per demostrar-ho, considerarem una tètrada ortonormal $\{\hat{e}_{(1)}^\mu, \hat{e}_{(2)}^\mu, \hat{e}_{(3)}^\mu, \hat{e}_{(4)}^\mu\}$ i la base dual corresponent: $\{\hat{\theta}_\mu^{(1)}, \hat{\theta}_\mu^{(2)}, \hat{\theta}_\mu^{(3)}, \hat{\theta}_\mu^{(4)}\}$. És obvi que:

$$\hat{\theta}_\mu^{(\alpha)} = \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \hat{e}_{(\beta)}^\nu.$$

Denotarem per $\Pi^{(\gamma)}$ l'hiperplà ortogonal a $\hat{\theta}_\mu^{(\gamma)}$ que passa pel punt z , amb equació implícita:

$$\hat{\theta}_\mu^{(\gamma)}(x^\mu - z^\mu) = 0$$

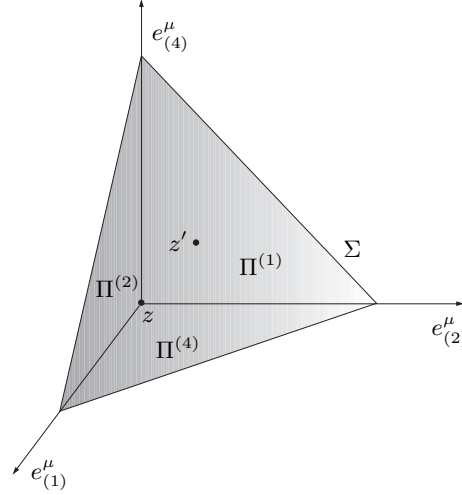


Figura 7.2. Símplex en l'espai-temps ($e_{(4)}^\mu$ és la direcció temporal i una de les direccions espacials s'ha suprimit)

i denotarem per $\Sigma(\lambda)$ l'hiperplà ortogonal a n_μ que passa per un punt z' proper a z que no està contingut en cap dels hiperplans $\Pi^{(\gamma)}$. Així, els cinc hiperplans $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(4)}$ i Σ delimiten un «pentàedre» \mathcal{R} d'espai-temps amb vèrtex a z (vegeu la figura 7.2), el que constitueix un símplex de l'espai-temps.

Les cares de \mathcal{R} són «tetraèdres» (símplexs tridimensionals) que, orientats cap a fora, en defineixen la frontera $\partial\mathcal{R}$. Si $\Sigma(\lambda)$ és la cara ortogonal a n_μ , llavors λn_μ serà el covector d'hipersuperfície corresponent i el paràmetre λ serà més petit com més a prop de z estigui z' . Els covectors hipersuperfície corresponents a les altres cares seran:

$$l_{(\gamma)} \hat{\theta}_\rho^{(\gamma)} \quad \text{per a la cara } \Pi^{(\gamma)}, \quad \gamma = 1, 2, 3, 4.$$

On no hi ha suma per a γ i el coeficient $l_{(\gamma)}$ depèn de λ . Per trobar-ne la relació, apliquem el teorema de Gauss (vegeu l'apèndix B.2) per al domini \mathcal{R} i els quatre camps constants: $A^\mu(x) = \delta_\alpha^\mu$, on α pren un valor fix arbitrari entre $\{1, 2, 3, 4\}$, i obtenim:

$$0 = \int_{\partial\mathcal{R}} \delta_\alpha^\mu d^3\Sigma_\mu = \lambda n_\alpha + \sum_{\gamma=1}^4 l_{(\gamma)} \hat{\theta}_\alpha^{(\gamma)},$$

que, si projectem sobre cada $\hat{e}_{(\beta)}^\alpha$, dóna:

$$l_{(\beta)} = -\lambda n_\alpha \hat{e}_{(\beta)}^\alpha, \quad \beta = 1, 2, 3, 4. \quad (7.7)$$

Aplicant ara la llei de conservació del quadrimoment lineal (7.3) al domini \mathcal{R} , arribem a:

$$\sum_{\partial\mathcal{R}} p_a^\mu \sigma_a = -P^\mu[z', \Sigma(\lambda)] - \sum_{\gamma=1}^4 P^\mu[z, \Pi^{(\gamma)}(l_{(\gamma)})] = 0,$$

on $P^\mu[\Sigma(\lambda)]$ i $P^\mu[\Pi^{(\gamma)}(l_{(\gamma)})]$ donen els fluxos a través de $\Sigma(\lambda)$ i $\Pi^{(\gamma)}(l_{(\gamma)})$, respectivament, en els sentits indicats per n_μ i $\hat{\theta}_\mu^{(\gamma)}$. (El signe $-$ és degut al fet que $\partial\mathcal{R}$ està orientada cap a fora i $\sigma_a = -1$ quan la línia d'univers surt.)

Si dividim per λ i prenem el límit $z' \rightarrow z$ (per tant, $\lambda \rightarrow 0$) i tenim en compte (7.7), arribem a:

$$p^\mu(z, n_\rho) + \sum_{\gamma=1}^4 p^\mu(z, -n_\nu \hat{e}_{(\gamma)}^\nu \hat{\theta}_\rho^{(\gamma)}) = 0,$$

que, si apliquem (7.6) al segon terme (amb $k = -n_\nu \hat{e}_{(\gamma)}^\nu$ i $\hat{\theta}_\rho^{(\gamma)}$ en comptes de n_ρ), es pot posar també així:

$$p^\mu(z, n_\rho) = \frac{1}{c} T^{\mu\nu}(z) n_\nu \quad \text{amb} \quad T^{\mu\nu}(z) \equiv c \sum_{\gamma=1}^4 \hat{e}_{(\gamma)}^\nu p^\mu(z, \hat{\theta}_\rho^{(\gamma)}). \quad (7.8)$$

Com que $p^\mu(z, n_\rho)$ és el resultat de sumar els quadrimoments individuals, és ell mateix un quadrivector, qualsevulla que sigui n_ρ , i del criteri de tensorialitat — apartat A.1.6 de l'apèndix A —, se segueix que $T^{\mu\nu}(z)$ és un tensor 2-contravariant, que s'anomena *tensor d'energia-moment* del medi en el punt z .

7.2.2 Llei de conservació local

Per avaluar el flux de quadrimoment lineal a través d'una hipersuperfície qualsevol sumarem els fluxos infinitesimals a través de cada element d'hipersuperfície

$$d^3 P^\mu = \frac{1}{c} T^{\mu\nu}(z) d^3 \Sigma_\nu(z)$$

per a cada punt $z \in \Sigma$. El flux total a través de Σ és:

$$P^\mu(\Sigma) = \frac{1}{c} \int_\Sigma T^{\mu\nu}(z) d^3 \Sigma_\nu(z). \quad (7.9)$$

En particular, per a la frontera $\partial\mathcal{D}$ d'un domini de l'espai-temps, i d'acord amb (7.3), tenim que:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} T^{\mu\nu} d^3 \Sigma_\nu = 0, \quad (7.10)$$

que, per aplicació del teorema de Gauss, ens porta a:

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_\nu T^{\mu\nu} d^4 x = 0 \quad (7.11)$$

per a qualsevol domini \mathcal{D} amb frontera de l'espai-temps. Aquesta igualtat només es pot satisfer si es compleix:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (7.12)$$

que és la forma local de la llei de conservació del moment lineal.

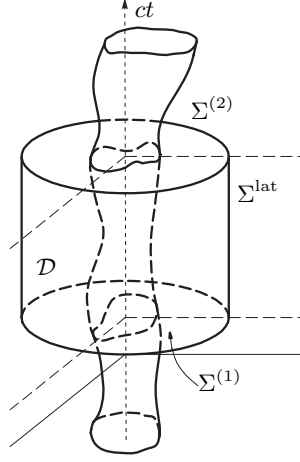


Figura 7.3. Cilindre d'espai-temps \mathcal{D} usat en la demostració de la conservació del quadrimoment lineal total

7.2.3 Conservació del quadrimoment lineal total

Suposem ara que, en un sistema de referència \mathcal{K} i per a $t_1 \leq t \leq t_2$, el medi està confinat en una regió afitada de l'espai: per a algun valor de R prou gran, el medi està contingut dins l'esfera de radi R :

$$\text{per a } |\vec{x}| \geq R \text{ i } ct_1 \leq x^4 \leq ct_2; \quad T^{\mu\nu}(x^\rho) = 0. \quad (7.13)$$

Considerem el domini \mathcal{D} de l'espai-temps delimitat per (vegeu la figura 7.3):

- (a) les bases: $\Sigma^{(a)} \equiv \{|\vec{x}| \leq R, x^4 = ct_a\}$, $a = 1, 2$, orientades cap al futur (apèndix B):

$$d^3\Sigma_\mu^{(a)} = (0, 0, 0, d^3x) \quad (7.14)$$

- (b) i l'hipercilindre: $\Sigma^{\text{lat}} \equiv \{|\vec{x}| = R, ct_1 \leq x^4 \leq ct_2\}$.

La frontera de \mathcal{D} és: $\partial\mathcal{D} = \Sigma^{(2)} - \Sigma^{(1)} + \Sigma^{\text{lat}}$. (L'orientació cap a l'exterior de \mathcal{D} implica prendre $\Sigma^{(1)}$ orientada cap al passat, i d'aquí el signe $-$).

Si apliquem (7.10) a aquest domini, tindrem:

$$\int_{\Sigma^{(2)}} T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu - \int_{\Sigma^{(1)}} T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu + \int_{\Sigma^{\text{lat}}} T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu = 0.$$

A causa de la condició de confinament (7.13), $T^{\mu\nu} = 0$ sobre Σ^{lat} i aleshores la tercera integral s'anulla. Si ara tenim en compte (7.14), l'expressió anterior ens porta a:

$$\int_{|\vec{x}| \leq R} T^{\mu 4}(\vec{x}, ct_2) d^3x = \int_{|\vec{x}| \leq R} T^{\mu 4}(\vec{x}, ct_1) d^3x, \quad (7.15)$$

que, si tenim en compte (7.13), implica que el quadrimoment lineal total:

$$P^\mu(t) \equiv \int_{R^3} \frac{1}{c} T^{\mu 4}(\vec{x}, ct) d^3x \quad (7.16)$$

no depèn de t , és a dir, es conserva.

7.2.4 Lleis de transformació

L'expressió (7.16) que dóna el quadrimoment lineal total en un sistema de referència \mathcal{K} es pot posar també així:

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} T^{\mu\nu}(x) d^3\Sigma_\nu,$$

on Σ és un hiperplà format per esdeveniments simultanis segons \mathcal{K} . Veurem ara com, en el cas que el medi compleixi la condició de confinament, el quadrimoment total P^μ és un quadrivector.¹

Per a un altre sistema de referència \mathcal{K}' , el quadrimoment lineal és:

$$P^{\mu'} = \frac{1}{c} \int_{\Sigma'} T^{\mu'\nu'}(x') d^3\Sigma_{\nu'}, \quad (7.17)$$

on Σ' és un hiperplà format per esdeveniments simultanis segons \mathcal{K}' . Per la llei de conservació (7.15), que val en tots dos sistemes de referència, podem escollir Σ i Σ' com més convingui, de manera que la seva intersecció caigui en la regió en què $T^{\mu\nu}(x)$ és nul.

Si ara considerem el domini $\tilde{\mathcal{D}}$ delimitat per les bases obliqües Σ , Σ' i l'hipercilindre $\tilde{\Sigma}^{\text{lat}}$, tindrem que (vegeu la figura 7.4): $\partial\tilde{\mathcal{D}} = \Sigma' - \Sigma + \tilde{\Sigma}^{\text{lat}}$. Per (7.10), la integral $\int_{\partial\tilde{\mathcal{D}}} T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu$ valdrà 0 i, a causa de la condició de confinament (7.13) també serà nul·la la integral sobre $\tilde{\Sigma}^{\text{lat}}$. Si usem les coordenades de \mathcal{K} , podem escriure que:

$$\int_{\Sigma'} T^{\mu\nu}(x) d^3\Sigma_\nu = \int_{\Sigma} T^{\mu\nu}(x) d^3\Sigma_\nu = cP^\mu. \quad (7.18)$$

D'altra banda, pel caràcter tensorial de $T^{\mu\nu}$ i de $d^3\Sigma_\nu$ i usant les coordenades de \mathcal{K} , podem posar:

$$T^{\mu'\nu'}(x') d^3\Sigma_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\rho} T^{\rho\nu}(x) d^3\Sigma_\nu(x),$$

que substituïda en (7.17) i tenint en compte (7.18) ens porta a:

$$P^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\rho} P^\rho. \quad (7.19)$$

¹Notem que no es tracta d'una qüestió trivial ja que, si bé tant $T^{\mu\nu}$ com $d^3\Sigma_\nu$ són tensors, el domini d'integració és diferent per a cada sistema de referència.

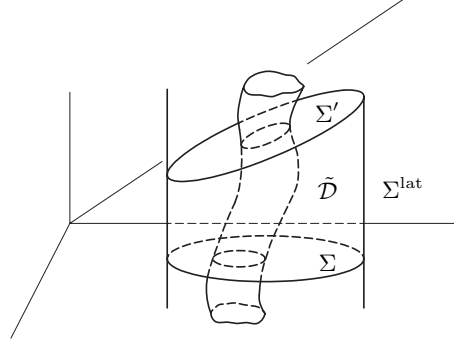


Figura 7.4. Cilindre oblic \tilde{D} d'espai-temps usat en la demostració del caràcter vectorial de P^μ

Convé remarcar la importància de la condició de confinament (7.13) en la deducció de (7.15) i de (7.18). Si $T^{\mu\nu}$ no s'anul·la a partir d'una certa distància, o si no satisfà una condició de decreixement com ara:

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|^2 T^{\mu\nu}(\vec{x}, x^4) = 0 \quad (7.20)$$

que permeti anular per a $R \rightarrow \infty$ les integrals a Σ^{lat} i a $\tilde{\Sigma}^{\text{lat}}$, el quadrimoment lineal total P^μ possiblement no es conservarà ni serà un quadrivector.²

7.3 El moment angular

De manera semblant a com en la secció anterior hem desenvolupat les conseqüències de la llei de conservació (7.1) del quadrimoment lineal, ara aprofundirem en la llei de conservació del moment angular (7.2). Enunciarem els resultats sense detalls perquè la deducció és totalment paral·lela a la de la secció anterior.

Es defineix el quadricorrent de moment angular $M^{\mu\nu\lambda}$ de manera que el moment angular que travessa la hipersuperfície d'espai-temps Σ és:

$$J^{\mu\nu}(\Sigma) = \int_{\Sigma} M^{\mu\nu\lambda}(x) d^3\Sigma_{\lambda}(x). \quad (7.21)$$

L'antisimetria del moment angular de cada partícula, $j_a^{\mu\nu} = -j_a^{\nu\mu}$, implica que $M^{\mu\nu\lambda} = -M^{\nu\mu\lambda}$. La llei de conservació local del moment angular és:

$$\partial_{\lambda} M^{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (7.22)$$

²La condició (7.20) és la forma típica per al cas que el medi continu és un camp (en la secció 11.1 s'estudia la radiació electromagnètica i allà precisament no es compleix).

Si se satisfà la condició de confinament (7.13), llavors el moment angular total

$$J^{\mu\nu} \equiv \int_{R^3} M^{\mu\nu 4}(\vec{x}, ct) d^3x \quad (7.23)$$

no depèn de t i, a més, es transforma com un tensor 2-contravariant antisimètric.

7.3.1 Moment angular orbital i spin

El procediment per definir el quadricorrent $M^{\mu\nu\lambda}(z)$ és semblant al seguit per al tensor d'energia-moment en l'apartat 7.2.1. Es parteix de la densitat de flux de moment angular a prop de l'esdeveniment z en la direcció n_ρ :

$$j^{\mu\nu}(z, n_\rho) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} J^{\mu\nu}[z, \Sigma(\lambda)], \quad (7.24)$$

on

$$J^{\mu\nu}[z, \Sigma(\lambda)] = \sum_a j_a^{\mu\nu} \sigma_a$$

és el moment angular total que travessa el bocí d'hiperplà $\Sigma(\lambda)$ en la proximitat de z (la suma és sobre totes les línies d'univers que tallen $\Sigma(\lambda)$). I com en l'apartat 7.2.1, es té:

$$M^{\mu\nu\lambda}(z) n_\lambda = j^{\mu\nu}(z, n_\rho). \quad (7.25)$$

Si utilitzem la descomposició (5.68) en moment angular orbital i spin per a cada partícula:

$$j_a^{\mu\nu} = x_a^\mu p_a^\nu - x_a^\nu p_a^\mu + s_a^{\mu\nu},$$

la substituïm a (7.24), i tenim en compte (7.2.1) i que $x_a \rightarrow z$ per a $\lambda \rightarrow 0$, obtenim:

$$j^{\mu\nu}(z, n_\rho) = z^\mu p^\nu(z, n_\rho) - z^\nu p^\mu(z, n_\rho) + s^{\mu\nu}(z, n_\rho), \quad (7.26)$$

on la notació és òbvia i $s^{\mu\nu}(z, n_\rho)$ és la densitat de flux de spin.

Per un raonament anàleg al de l'apartat 7.2.1, les expressions (7.25) i (7.26) ens porten a la següent descomposició del tensor $M^{\mu\nu\lambda}$:

$$M^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{c} (x^\mu T^{\nu\lambda} - x^\nu T^{\mu\lambda}) + S^{\mu\nu\lambda}, \quad (7.27)$$

on $S^{\mu\nu\lambda}$ és el quadricorrent de spin i la resta el quadricorrent de moment angular orbital.

En termes d'aquests dos components, l'equació de continuïtat (7.22) es pot posar així:

$$\partial_\lambda S^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{c} (T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}) = 0. \quad (7.28)$$

Si per alguna raó es conserven per separat l'spin i el moment angular orbital, tenim:

$$\partial_\lambda S^{\mu\nu\lambda} = 0 \quad \text{i} \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}.$$

Així, si les partícules del gas del nostre model no tenen spin, $T^{\mu\nu}$ és simètric.

7.4 El tensor d'energia-moment de Belinfante

El model de gas ens ha servit de vehicle per introduir les variables dinàmiques macroscòpiques i les lleis de conservació locals (7.12) i (7.22). Tanmateix, aquest mateix esquema val també per a medis continus d'altres classes, com per exemple el camp electromagnètic i el tensor d'energia-moment estudiat a la secció 8.5.

En aquesta secció deixarem de banda momentàniament el model de gas i un medi continu serà qualsevol sistema descrit pels tensors d'energia-moment $T^{\mu\nu}$ i de moment angular $M^{\mu\nu\lambda}$, que satisfan les lleis de conservació locals:

$$\partial_\lambda T^{\mu\lambda} = 0 \quad \partial_\lambda M^{\mu\nu\lambda} = 0.$$

El moment lineal total del medi i el moment angular total són donats per (7.16) i (7.23).

Es planteja ara la pregunta següent: estan unívocament determinades les variables dinàmiques $T^{\mu\nu}$ i $M^{\mu\nu\lambda}$? O, a la inversa: ¿existeixen altres variables $T^{*\mu\nu}$ i $M^{*\mu\nu\lambda}$ tals que:

- (i) satisfacin les lleis de conservació (7.12) i (7.22), i
- (ii) donin el mateix contingut en moment lineal i moment angular totals que $T^{\mu\nu}$ i $M^{\mu\nu\lambda}$?

La resposta és que sí. Tot seguit construirem el tensor d'energia-moment simètric, $\tilde{T}^{\mu\nu}$, també anomenat *de Belinfante*, que, en el sentit que ara acabem d'indicar, és equivalent a les variables $T^{\mu\nu}$ i $M^{\mu\nu\lambda}$ de partida.

Per començar introduïrem el tensor:

$$W^{\mu\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2} (S^{\mu\nu\lambda} + S^{\mu\lambda\nu} - S^{\nu\lambda\mu}) \quad (7.29)$$

que és antisimètric en els dos primers índexs. Si invertim aquesta relació podem aïllar el tensor quadricorrent de spin:

$$S^{\mu\nu\lambda} = W^{\lambda\nu\mu} - W^{\lambda\mu\nu}, \quad (7.30)$$

que, substituïda en la llei de conservació (7.28), dóna:

$$\partial_\lambda W^{\lambda\nu\mu} - \partial_\lambda W^{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{c} (T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}) = 0,$$

és a dir, el tensor:

$$\tilde{T}^{*\mu\nu} = T^{\mu\nu} - c \partial_\lambda W^{\lambda\nu\mu} \quad (7.31)$$

és simètric.

L'anomenarem *tensor d'energia-moment de Belinfante*, i la seva definició en termes de les variables $T^{\mu\nu}$ i $S^{\mu\nu\lambda}$ de partida és:

$$T^{*\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} - \frac{c}{2} (\partial_\lambda S^{\lambda\nu\mu} + \partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda S^{\nu\mu\lambda}). \quad (7.32)$$

Prendrem també com a tensor quadricorrent de moment angular:

$$M^{*\mu\nu\lambda} \equiv \frac{1}{c} (x^\mu T^{*\nu\lambda} - x^\nu T^{*\mu\lambda}) = M^{\mu\nu\lambda} + \partial_\rho [W^{\rho\lambda\mu} x^\nu - W^{\rho\lambda\nu} x^\mu]. \quad (7.33)$$

Un medi descrit per aquestes variables, $T^{*\mu\nu}$ i $M^{*\mu\nu\lambda}$, satisfà les lleis de conservació locals. En efecte, d'una banda $\partial_\lambda M^{*\mu\nu\lambda} = 0$ perquè $T^{*\mu\nu}$ és simètric, i de l'altra,

$$\partial_\nu T^{*\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} - c \partial_\nu \partial_\lambda W^{\lambda\nu\mu}$$

que és nul gràcies a (7.12) i a l'antisimetria de $W^{\lambda\nu\mu}$ en els dos primers índexs.

Si ara mirem la diferència entre els quadrimoments lineals totals, P^μ i \bar{P}^μ , associats respectivament a $T^{\mu\nu}$ i a $T^{*\mu\nu}$, de (7.16) i de (7.31), tenim:

$$P^\mu - \bar{P}^\mu = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}| \leq R} \partial_i W^{i4\mu}(\vec{x}, x^4) d^3x,$$

on hem tingut en compte que $W^{44\mu} = 0$ per antisimetria. Per aplicació del teorema de Gauss, si \hat{x} és el vector unitari normal a l'esfera de radi R , podem posar:

$$P^\mu - \bar{P}^\mu = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\theta, \phi} d^2\Omega(\theta, \phi) R^2 \hat{x}_i W^{i4\mu}(\vec{x}, x^4)$$

que és zero sempre que $S^{i4\mu}$ satisfaci una condició de confinament del tipus (7.13) o, alternativament, la menys restrictiva (7.20) amb $n = 2$.

De manera semblant, de (7.33) podem comparar els moments angulars totals associats a $M^{\mu\nu\lambda}$ i a $M^{*\mu\nu\lambda}$:

$$J^{\mu\nu} - \bar{J}^{\mu\nu} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}| \leq R} d^3x \partial_i (W^{i4\mu} x^\nu - W^{i4\nu} x^\mu)$$

i per aplicació del teorema de Gauss, el segon membre es pot posar com a:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\theta, \phi} d^2\Omega(\theta, \phi) R^2 \hat{x}_i (W^{i4\mu} x^\nu - W^{i4\nu} x^\mu)$$

que es zero sempre que $S^{i4\mu}$ compleixi una condició de decreixement a l'infinit del tipus (7.20) amb $n = 3$.

7.5 Dinàmica newtoniana de medis continus

En aquesta secció estudiarem la dinàmica newtoniana per introduir uns conceptes fenomenològics ben establerts que més endavant generalitzarem al cas relativista.

El formalisme desenvolupat fins aquí val també per a la dinàmica newtoniana de medis continus, substituint les transformacions de Lorentz per les de Galileu pel que fa a la tensorialitat, amb una interpretació lleugerament diferent del tensor d'energia-moment. (Recordem que a la secció 5.1 veiem com la llei relativista de conservació de l'energia substituïa la llei newtoniana de conservació de la massa inert.) Suposarem, a més, que hem pres un tensor d'energia-moment simètric.

Així, en la dinàmica newtoniana de medis continus, $T^{i4}(\vec{x}, ct)/c$ és la densitat de quantitat de moviment, mentre que $T^{44}(\vec{x}, ct)$ està relacionat amb la densitat de massa, $\rho(\vec{x}, t) \equiv T^{44}(\vec{x}, ct)/c^2$. Per la seva banda, T^{4i}/c és la densitat de corrent de massa. D'acord amb això, el quocient $v^i(\vec{x}, t) \equiv cT^{i4}/T^{44}$ és el camp de velocitats del medi —la velocitat mitjana de les partícules constituents en la proximitat del punt \vec{x} en l'instant t . Tindrem doncs:

$$T^{44} = \rho c^2 \quad T^{i4} = T^{4i} = \rho c v^i. \quad (7.34)$$

7.5.1 Equacions del moviment. Tensor d'esforços

Les lleis de conservació locals (7.12) significaran ara: (a) la llei de conservació de la matèria ($\mu = 4$):

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (7.35)$$

i (b) la llei de conservació de la quantitat de moviment ($\mu = i = 1, 2, 3$):

$$\partial_t (\rho v^i) + \partial_j T^{ij} = 0. \quad (7.36)$$

Si integrem ara la segona equació sobre qualsevol volum \mathcal{V} de l'espai obtenim, després d'aplicar el teorema de Gauss, que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho v^i d^3x = - \int_{\partial\mathcal{V}} T^{ij} d^2S_j. \quad (7.37)$$

Els termes d'aquesta equació admeten la interpretació següent: el primer membre dóna la variació de quantitat de moviment de la matèria continguda en \mathcal{V} i el segon membre és el flux entrant de quantitat de moviment per unitat de temps a través de la frontera $\partial\mathcal{V}$. Així $-T^{ij} d^2S_j dt$ és el flux de quantitat de moviment que entra a \mathcal{V} per l'element de superfície d^2S_j en el temps dt , i hi contribueixen dues aportacions:

- (a) l'associada a la convecció: $-\rho v^i v^j d^2S_j dt$ (el signe $-$ és perquè d^2S_j s'orienta cap a fora) i

- (b) l'impuls de la força que fa la part del medi de l'exterior de \mathcal{V} sobre l'interior a través de la superfície: $d^2 F^i dt$.

D'aquí que:

$$-T^{ij} d^2 S_j dt = -\rho v^i v^j d^2 S_j dt + d^2 F^i dt$$

i, per tant, podem posar:

$$d^2 F^i = -t^{ij} d^2 S_j \quad \text{amb} \quad t^{ij} = T^{ij} - \rho v^i v^j. \quad (7.38)$$

El tensor t^{ij} s'anomena *tensor d'esforços* i és simètric.

En alguns casos convé tenir en compte també *forces volúmiques*, en què la força és proporcional a l'element de volum $d^3 x$ sobre el qual actua. Aquest és el cas, per exemple, d'un medi de densitat $\rho(\vec{x}, t)$ en un camp gravitatori d'intensitat $\vec{g}(\vec{x}, t)$:

$$d^3 \vec{F} = \rho(\vec{x}, t) \vec{g}(\vec{x}, t) d^3 x.$$

En general la força que actua sobre el volum \mathcal{V} és:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 x \vec{\phi}(\vec{x}, t),$$

on $\vec{\phi}$ és la força per unitat de volum. Si afegim aquesta contribució al segon membre de (7.37) i usem (7.38), l'equació de balanç del moment lineal s'escriu així:

$$\partial_t(\rho v^i) + \partial_j(\rho v^i v^j + t^{ij}) = \phi^i. \quad (7.39)$$

7.5.2 Equacions constitutives del medi

Per descriure el moviment del medi hem de determinar-ne la densitat $\rho(\vec{x}, t)$ i el camp de velocitats $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Les lleis de conservació (7.35) i (7.39) donen quatre equacions diferencials en derivades parcials per a deu incògnites: la densitat, els tres components del camp de velocitats, i el tensor d'esforços (que a causa de la simetria té sis components independents). El problema és, doncs, altament indeterminat. Això és conseqüència de la incompletesa d'una dinàmica basada només en la conservació de la matèria i la quantitat de moviment. (Ni tan sols l'evolució subsegüent al xoc de dues masses puntuals no es pot determinar basant-se només en aquestes lleis de conservació.)

Per completar el marc genèric que proporcionen les lleis de conservació s'afegeixen noves lleis, de tipus fenomenològic, que precisin millor el tipus de medi continu que estem considerant. Són les *equacions constitutives*, que fan referència a la forma del tensor d'esforços i relacionen t^{ij} , que informa de la dinàmica del medi, amb la densitat ρ i el camp de velocitats \vec{v} , que en descriuen la cinemàtica. Alguns exemples senzills d'equacions constitutives són les dels medis següents:

Pols La pols es caracteritza perquè les parts contigües del medi no interactuen per contacte, de manera que:

$$t^{ij} = 0.$$

Fluid perfecte La força entre parts contigües del medi és perpendicular a la superfície de contacte, així:

$$t^{ij} = p \delta^{ij},$$

on $p(\vec{x}, t)$ és la pressió. Habitualment aquestes equacions constitutives es completen amb una relació entre la pressió i la densitat, l'*equació d'estat*.

Fluid newtonià El tensor d'esforços també té una contribució corresponent a la viscositat:

$$t^{ij} = (p - \lambda e^l_l) \delta^{ij} + 2\mu e^{ij},$$

on $e^{ij} = \partial_i v^j + \partial_j v^i$ és el tensor taxa de deformació, μ és el coeficient de viscositat de cisalla i $\lambda + 2\mu/3$ és el coeficient de viscositat volúmica.

Sòlid elàstic El tensor d'esforços depèn linealment del tensor de deformacions.

7.6 Equacions constitutives. Cas relativista

La resolució de la dinàmica relativista d'un medi continu consisteix a determinar els deu components del tensor d'energia-moment³ a partir del seu valor en un instant inicial: $T^{\mu\nu}(\vec{x}, ct_0)$. Igual que en el cas newtonià, el problema és indeterminat si només comptem amb les quatre lleis locals de conservació (7.12), per tant, hi hem d'afegir les equacions constitutives del medi.

Aquestes equacions constitutives relativistes són lleis fenomenològiques i, per formular-les, seguirem un mètode ja habitual: postularem la validesa de la llei newtoniana en un sistema \mathcal{S}^\dagger comòbil amb el medi i, per mitjà de les lleis tensorials de transformació, la traduirem al sistema \mathcal{S} del laboratori.

Com que correspon una velocitat diferent a cada punt x^ν del domini d'espai-temps ocupat pel medi, el sistema comòbil dependrà de x^ν i el denotarem per \mathcal{S}_x^\dagger . És aquell en què $u^{\mu\dagger}(x^\dagger) = (\vec{0}, c)$.

Així, si suposem vàlida la descomposició newtoniana del tensor d'energia-moment —(7.34) i (7.38)— en el sistema \mathcal{S}_x^\dagger , tindrem:

$$T^{44\dagger} = \rho^\dagger c^2, \quad T^{4i\dagger} = T^{i4\dagger} = 0, \quad T^{ij\dagger} = t^{ij\dagger}$$

i, en passar al sistema del laboratori:

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\alpha\beta\dagger}(x^\dagger) L^\mu_{\alpha\dagger} L^\nu_{\beta\dagger} = \rho u^\mu u^\nu + t^{\mu\nu}, \quad (7.40)$$

on $t^{\mu\nu}(x) = t^{ij\dagger}(x^\dagger) L^\mu_{i\dagger} L^\nu_{j\dagger}(x)$ és el tensor de tensions relativista i $\rho(x) = \rho^\dagger(x^\dagger)$ és la densitat pròpia. (En dependre \mathcal{S}_x^\dagger del punt, també en dependrà $L^\mu_{\alpha\dagger}$.)

Notem de passada que el tensor de tensions relativista és simètric i ortogonal al camp de velocitat pròpia:

$$t^{\mu\nu} u_\nu = t^{ij\dagger} L^\mu_{i\dagger} L^\nu_{j\dagger} u_\nu = t^{ij\dagger} L^\mu_{i\dagger} u_{j\dagger} = 0.$$

³S'acostuma a suposar que el tensor és simètric (secció 7.4).

En particular, en el cas d'un fluid perfecte tindrem: $t^{ij\dagger} = p \delta^{ij}$ i llavors:

$$t^{\mu\nu} = p \delta^{ij} L_{i\dagger}^{\mu} L_{j\dagger}^{\nu} = p (\eta^{\mu\nu} + \eta^{44} L_{4\dagger}^{\mu} L_{4\dagger}^{\nu}) = p \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^{\mu} u^{\nu} \right), \quad (7.41)$$

que substituïda en (7.40) ens dóna la forma del tensor d'energia-moment d'un fluid perfecte relativista:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\nu} + p \eta^{\mu\nu}, \quad (7.42)$$

on ρ és la densitat pròpia i p la pressió.

7.6.1 L'equació d'estat

Tanmateix, aquestes equacions constitutives no són un complement suficient perquè les lleis de conservació (7.12) determinin el moviment posterior del medi. En efecte, si substituïm (7.42) en (7.12), tenim:

$$\partial_{\nu} \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\nu} \right] + \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} p = 0,$$

de la qual podem separar la part paral·lela a u^{μ} :

$$\partial_{\nu} (\rho u^{\nu}) + \frac{p}{c^2} \partial_{\nu} u^{\nu} = 0 \quad (7.43)$$

i la part ortogonal a u^{μ} :

$$\rho u^{\nu} \partial_{\nu} u^{\mu} + \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} p + \frac{1}{c^2} u^{\nu} \partial_{\nu} (p u^{\mu}) = 0. \quad (7.44)$$

Tenim, doncs, quatre equacions per a les cinc incògnites $\rho(x)$, $p(x)$ i $u^j(x)$, $j = 1, 2, 3$, i el problema és encara indeterminat.

L'equació d'estat dóna una relació addicional entre la pressió p i la densitat pròpia ρ , d'una banda, i la densitat pròpia de partícules n , de l'altra. Aquesta equació es formula a partir de suposicions del comportament del medi basades en el coneixement fenomenològic i termodinàmic que en tinguem, o també es pot obtenir per mètodes de teoria cinètica.

Si complementem les equacions de conservació del quadrimoment lineal (7.43) i (7.44) amb l'equació d'estat i la llei de conservació local del nombre de partícules

$$\partial_{\nu} (n u^{\nu}) = 0 \quad (7.45)$$

el problema ja és determinat un cop coneguts els valors inicials de les incògnites $u^{\nu}(\vec{x}, 0)$, $\rho(\vec{x}, 0)$, $p(\vec{x}, 0)$ i $n(\vec{x}, 0)$.

Exemple 7.1 Casos senzills d'equació d'estat

Obtindrem les equacions constitutives i l'equació d'estat per a fluids perfectes en diverses estadístiques: (a) un gas de fotons, (b) un gas fred i (c) un gas de Maxwell-Boltzmann relativista. (Tot i que ometrem el superíndex \dagger , els raonaments que segueixen es fan en el sistema de referència localment comòbil amb el medi.)

Recordem que l'element de volum del medi ha de ser petit perquè valgui l'aproximació al continu i alhora prou gran perquè el nombre de partícules en el seu interior sigui gran, de manera que tingui sentit un tractament estadístic. El fet que considerem el sistema localment comòbil amb el medi no implica que el trimoment lineal \vec{k} individual de cada partícula hagi de ser nul. És el trimoment lineal total contingut en l'element de volum el que és 0.

El nombre de partícules en el volum hexadimensional de l'espai de les fases delimitat pels vèrtexs (\vec{x}, \vec{k}) i $(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{k} + d\vec{k})$ és, en l'instant t :

$$\mathcal{P}(\vec{x}, t; \vec{k}) d^3x d^3k.$$

Per simplificar, suposarem que $\mathcal{P}(\vec{x}, t, \vec{k})$ factoritza en una part que depèn de \vec{x} i una altra que depèn de \vec{k} :

$$\mathcal{P}(\vec{x}, t, \vec{k}) = n(\vec{x}, t) \mathcal{N}(\vec{k})$$

i que, a més, $\mathcal{N}(\vec{k})$ està normalitzat:

$$\int_{R^3} d^3k \mathcal{N}(\vec{k}) = 1,$$

de manera que $n(\vec{x}, t)$ és el nombre de partícules per unitat de volum. Suposarem també que en el sistema inercial localment comòbil no hi ha cap direcció preferida, per tant, $\mathcal{N}(\vec{k})$ només dependrà del mòdul de \vec{k} .

El quadrimoment lineal total que travessa la superfície $d^3\Sigma_\nu$ és $d^3\Sigma_\nu T^{\mu\nu}/c$. Si sumem els quadrimoments k^μ de totes les línies d'univers que travessen aquest element d'hipersuperfície, tindrem:

$$\text{Cas } d^3\Sigma_\nu = (0, 0, 0, d^3x)$$

$$T^{\mu 4} d^3x = cn(\vec{x}, t) d^3x \int_{R^3} d^3k \mathcal{N}(k) k^\mu \quad (7.46)$$

$$\text{amb } k^4 = \sqrt{k^2 + m^2 c^2}$$

$$\text{Cas } d^3\Sigma_\nu = (c dt d^2\vec{S}, 0)$$

$$T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu = c^2 n(\vec{x}, t) dt d^2S_i \int_{R^3} d^3k \mathcal{N}(k) \frac{k^i k^\mu}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2}}, \quad (7.47)$$

on hem usat que el nombre de partícules del tipus \vec{k} que travessa $d^2\vec{S}$ entre $x^4 = ct$ i $x^4 = ct + cdt$ és:

$$n(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{k}) \cdot d^2\vec{S} dt$$

$$\text{amb } \vec{v}(\vec{k}) = c\vec{k}/\sqrt{k^2 + m^2 c^2}.$$

D'aquí que, d'acord amb (7.46) i (7.47), podem posar:

$$T^{\mu\nu} = cn(\vec{x}, t) \int_{R^3} d^3k \mathcal{N}(k) \frac{k^\mu k^\nu}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2}}. \quad (7.48)$$

Del fet que $\mathcal{N}(k)$ no depèn de la direcció de \vec{k} , i per raons d'invariància sota rotacions de la integral anterior, obtenim fàcilment que:

$$T^{44} = cn(\vec{x}, t) 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \mathcal{N}(k) \sqrt{k^2 + m^2 c^2} = \rho c^2 \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} T^{4i} &= T^{i4} = 0 \\ T^{ij} &= cn(\vec{x}, t) \int_{R^3} d^3k \mathcal{N}(k) \frac{k^i k^j}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2}} = p \delta^{ij}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Així doncs, amb les suposicions que hem fet tenim un fluid perfecte. A més, la traça de (7.48) ens dóna:

$$3p - \rho c^2 = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -n(\vec{x}, t) 4\pi m^2 c^3 \int_0^\infty dk \mathcal{N}(k) \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2}}, \quad (7.51)$$

on hem usat que $k^\mu k_\mu = -m^2 c^2$.

La relació entre p , ρ i n —l'equació d'estat— dependrà de la funció de densitat $\mathcal{N}(k)$ en l'espai de moments. A tall d'exemple considerarem els casos següents:

Gas de fotons Com que $m = 0$, l'equació (7.51) ens dóna directament l'equació d'estat: $3p = \rho c^2$, que és independent de la densitat de probabilitat $\mathcal{N}(\vec{k})$.

Gas fred de partícules amb massa En un gas fred la mitjana de les velocitats de les partícules és petita i podem fer l'aproximació no relativista $|\vec{k}| \ll mc$, i posar:

$$\sqrt{k^2 + m^2 c^2} \approx mc + \frac{k^2}{mc}$$

que, substituïda a (7.49) i (7.51), dóna respectivament:

$$\rho c \approx nmc + \frac{4\pi n}{2mc} \int_0^\infty dk \mathcal{N}(k) k^4, \quad \frac{3p}{c} - \rho c \approx -nmc + \frac{4\pi n}{2mc} \int_0^\infty dk \mathcal{N}(k) k^4.$$

L'equació d'estat s'obté de restar la primera de la segona:

$$\frac{3}{2}p + nmc^2 \approx \rho c^2.$$

Gas de Maxwell-Boltzmann relativista La distribució de Maxwell-Boltzmann relativista per a un gas de partícules de massa $m \neq 0$ és:

$$\mathcal{N}(\vec{k}) = \frac{\mu}{4\pi m^3 c^3 K_2(\mu)} e^{-\mu\gamma} \quad (7.52)$$

amb

$$\mu = \frac{mc^2}{k_B T} \quad \gamma = \frac{1}{mc} \sqrt{k^2 + m^2 c^2},$$

k_B és la constant de Boltzmann, T la temperatura absoluta i $K_n(\mu)$ és la funció de Bessel modificada de segona espècie.

Si substituïm (7.52) a (7.49) i (7.51), obtenim respectivament:

$$p = n \frac{mc^2}{\mu} = nk_B T, \quad \rho c^2 - 3p = nmc^2 \frac{K_1(\mu)}{K_2(\mu)} \quad (7.53)$$

i l'equació d'estat és:

$$\rho c^2 = p \left(3 + \mu \frac{K_1(\mu)}{K_2(\mu)} \right).$$

Per a un gas molt calent la mitjana de les energies cinètiques de les partícules és gran comparada amb l'energia en repòs i ens podem posar en el límit ultrarelativista: $mc^2 \ll k_B T$. Per tant $\mu \ll 1$ i, si utilitzem les aproximacions: $K_1(\mu) \approx 1/\mu$ i $K_2(\mu) \approx 2/\mu^2$, l'equació (7.53) ens dona l'equació d'estat:

$$\rho c^2 \approx p \left(3 + \frac{\mu^2}{2} \right), \quad \mu = \frac{mc^2}{k_B T}.$$

En el límit $m \rightarrow 0$ tenim l'equació d'estat $\rho c^2 = 3p$, que descriu un gas de fotons.

Capítol 8

Equacions de l'electrodinàmica clàssica

En el capítol 1 ja hem comentat que les equacions de Maxwell en el buit són invariants sota transformacions de Lorentz. De fet la derivació per Lorentz d'aquestes transformacions parteix de demanar la validesa de les equacions de Maxwell en tots els sistemes inercials. Dedicarem una part important d'aquest capítol a estudiar aquesta invariància. Això pressuposa donar les lleis de transformació dels camps \vec{E} i \vec{B} i de les densitats de corrent \vec{j} i de càrrega ρ que els produeixen.

Contràriament a allò que passa amb \vec{x} i t , i amb els operadors $\vec{\nabla}$ i ∂_t , que són magnituds cinemàtiques amb unes lleis de transformació ben delimitades per la transformació de Lorentz, postular les lleis de transformació de \vec{E} i \vec{B} no és immediat. El significat físic d'aquestes dues magnituds rau en la llei de força de Lorentz, que les relaciona amb la força que actua sobre una càrrega en moviment. Resultarà especialment útil el formalisme de l'espai-temps: construirem objectes tensorials a partir de les densitats de càrrega i corrent, i dels camps elèctric i magnètic, i donarem les equacions de Maxwell en forma tensorial (o covariant).

Al llarg del text utilitzarem les unitats del sistema internacional (SI) racionalitzat. Dedicarem un apèndix del final del capítol per comentar breument l'origen dels diversos sistemes d'unitats a l'ús en electrodinàmica.

8.1 Equacions de Maxwell

A la secció 1.2.3 ja hem escrit les equacions de Maxwell en el buit (1.10) i (1.11). Tanmateix, per a posteriors utilitzacions ens serà útil començar ara per les equacions de Maxwell en un medi material:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (8.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}, \quad (8.2)$$

que relacionen les magnituds: *camp elèctric* (\vec{E}), *camp magnètic* (\vec{H}), *desplaçament* (\vec{D}) i *inducció magnètica* (\vec{B}), referents al camp electromagnètic, amb les densitats de càrrega (ρ) i corrent (\vec{j}).

Les relacions entre els camps \vec{E} i \vec{H} , i \vec{D} i \vec{B} depenen del medi material i s'anomenen *equacions constitutives*. De fet:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad (8.3)$$

on \vec{P} és la *polarització* del medi i \vec{M} n'és la *magnetització* (respectivament, la densitat de moment dipolar elèctric i de moment dipolar magnètic). \vec{P} depèn de \vec{E} , i \vec{M} de \vec{H} . Per als medis més simples, són senzillament proporcionals:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H},$$

on χ és la *susceptibilitat elèctrica* i χ_m és la *susceptibilitat magnètica*. En aquest cas tindrem:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.4)$$

amb: $\epsilon = (1 + \chi)\epsilon_0$ i $\mu = (1 + \chi_m)\mu_0$. S'anomenen *medis lineals i isòtrops* perquè les relacions (8.4) són de proporcionalitat directa i no tenen direccions privilegiades.¹

En els medis lineals no isòtrops les relacions constitutives tenen la forma:

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \sum_j \mu_{ij} H_j,$$

on ϵ_{ij} i μ_{ij} depenen del medi material.

No tots els medis són lineals, en especial pel que fa a la relació entre \vec{B} i \vec{H} . En les substàncies ferromagnètiques, a més que aquesta relació no és lineal, el camp magnètic no determina el valor de la magnetització \vec{M} , sinó que aquesta pot dependre de la història prèvia del material.

En el buit, $\vec{P} = \vec{M} = 0$ i tenim:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{i} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

de manera que les equacions de Maxwell en absència de medis materials són:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (8.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}. \quad (8.6)$$

Es tracta d'un conjunt de vuit equacions —dues d'escalars i dues de vectorials— que formen un sistema diferencial en derivades parcials. Les hem escrites separant expressament dos parells: el primer (8.5) és homogeni i el segon (8.6), no. Més endavant veurem el paper diferent que té cada parell.

¹En realitat els coeficients ϵ i μ depenen de la resposta del medi material als camps aplicats i són funció de la freqüència d'aquests camps, com veurem amb més detall en el capítol 13.

8.2 Càrregues i corrents

La compatibilitat de les equacions de Maxwell (8.2) comporta un lligam entre les derivades de les densitats de càrrega ρ i de corrent \vec{j} . Si prenem la derivada temporal de la primera equació i li sumem la divergència de la segona, com que la divergència d'un rotacional s'anulla, tindrem l'equació:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (8.7)$$

que s'anomena *equació de continuïtat*, i significa físicament la conservació local de la càrrega elèctrica.

En efecte, si integrem (8.7) en un volum \mathcal{V} qualsevol, envoltat per una superfície \mathcal{S} , i utilitzem el teorema de derivació sota el signe integral i el teorema de Gauss, obtenim:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3x \rho(\vec{x}, t) = - \int_{\mathcal{S}} d^2\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t). \quad (8.8)$$

El primer membre és la variació per unitat de temps de la càrrega lliure continguda en \mathcal{V} , mentre que el segon és el flux de càrrega per unitat de temps a través de \mathcal{S} cap dins de \mathcal{V} . L'equació de balanç (8.8) indica que no hi ha creació de càrrega en cap regió \mathcal{V} de l'espai.

Considerem ara el cas físicament interessant d'una distribució de càrrega i corrent confinada en una regió finita de l'espai, és a dir, que existeix un valor R tal que:

$$\rho(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{i} \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{sempre que} \quad |\vec{x}| \geq R. \quad (8.9)$$

Si escrivim (8.8) prenent per \mathcal{V} l'esfera de radi R , el segon membre serà nul, perquè \vec{j} s'anulla sobre la superfície de l'esfera $|\vec{x}| = R$, i arribem a la conservació de la càrrega total:

$$q(t) = \text{constant}$$

amb

$$q(t) = \int_{|\vec{x}| \leq R} d^3x \rho(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\vec{x}, t). \quad (8.10)$$

8.2.1 Forma covariant de l'equació de continuïtat

Si utilitzem que $x^4 = ct$ i introduïm la notació $j^4 = \rho c$, l'equació (8.7) es pot escriure com a:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (8.11)$$

Si, d'acord amb el principi de relativitat, les equacions de Maxwell en el buit tenen la mateixa forma en tots els sistemes de referència inercials, l'equació de continuïtat (8.11) serà invariant. Com que ∂_μ és un quadrivector covariant, aquesta invariància ens suggereix que j^μ ha de ser un quadrivector (ho demostrem en l'exemple 8.1):

$$j^{\nu'} = L^{\nu'}_{\alpha} j^{\alpha}.$$

Així, les quatre funcions

$$j^\mu(x^\nu) = (\vec{j}(\vec{x}, t), c\rho(\vec{x}, t)) \quad (8.12)$$

formen el quadrivector anomenat *quadricorrent elèctric*.

Exemple 8.1 El quadricorrent j^μ és un quadrivector

Si la transformació de Lorentz que relaciona dos sistemes de referència inercials, \mathcal{S} i \mathcal{S}' , és $x^{\mu'} = L^{\mu'}_\nu x^\nu$, l'operador gradient es transforma com a: $\partial_\nu = L^{\mu'}_\nu \partial_{\mu'}$ (vegeu l'exemple A.6 de l'apèndix A). La llei de transformació de les densitats de càrrega i corrent es podrà expressar com a: $j^\mu = J^\mu(j^{\nu'}, \vec{v})$, on \vec{v} és la velocitat de \mathcal{S}' respecte a \mathcal{S} . Així, l'equació (8.11) ens porta a:

$$L^{\nu'}_\mu \partial_{\nu'} j^{\alpha'} \frac{\partial J^\mu}{\partial j^{\alpha'}} = 0$$

que només coincidirà amb l'equació de continuïtat (8.11) a \mathcal{S}' , si

$$L^{\nu'}_\mu \frac{\partial J^\mu}{\partial j^{\alpha'}} = K \delta_{\alpha'}^{\nu'}, \quad (8.13)$$

on K és una constant que només pot dependre de la velocitat relativa \vec{v} . De fet també podria dependre de $j^{\nu'}$, però de la mateixa equació (8.13) tenim:

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial j^{\alpha'}} = L^\mu_{\alpha'} K(\vec{v}, j^{\nu'}),$$

i la igualtat de les derivades creuades respecte a $j^{\nu'}$ ens portarà a $\partial K / \partial j^{\nu'} = 0$.

De la transformació inversa de (8.13) tindrem que $K(-\vec{v}) = 1/K(\vec{v})$, i com que, per causa de la isotropia, K només pot dependre del mòdul de la velocitat relativa $v = |\vec{v}|$, arribem a:

$$K(-\vec{v}) = K(\vec{v}) = K(v),$$

que substituïda en l'equació anterior dóna $K(v) = \pm 1$, i si considerem el límit de petites velocitats podem descartar el cas -1 .

8.2.2 La càrrega total és un escalar

En el mateix supòsit que es compleixi la relació de confinament (8.9), l'equació de continuïtat implica que la càrrega q és un invariant de Lorentz.

Considerem la regió Ω_4 de l'espai-temps delimitada pels hiperplans:

$$x^4 = 0 \quad \text{i} \quad x^{4'} \equiv L^{4'}_\nu x^\nu = ct'_1$$

i per l'hipercilindre:

$$|\vec{x}| = R, \text{ amb } R \text{ prou gran,}$$

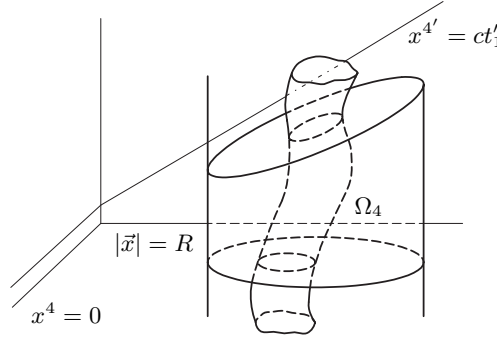


Figura 8.1. L'hipercilindre d'espai-temps, Ω_4 , delimitat per $|\vec{x}| = R$ i pels hiperplans $x^4 = 0$ i $x^4 = ct'_1$

de manera que: segons \mathcal{S} la càrrega i el corrent estan confinats en $|\vec{x}| < R$ per a $0 \leq x^4 \leq ct_1$, i segons \mathcal{S}' ho estan en $|\vec{x}'| < R'$ per a $ct'_0 \leq x^{4'} \leq ct'_1$ (vegeu la figura 8.1).

Si integrem l'equació de continuïtat covariant (8.11) a la regió Ω_4 i apliquem el teorema de Gauss (apèndix B), tindrem:

$$\int_{\Sigma} j^{\mu}(x) n_{\mu} d^3\Sigma = 0, \quad (8.14)$$

on n_{μ} és el vector unitari normal i $d^3\Sigma$ l'element d'hipersuperfície. Σ és la hipersuperfície que envolta Ω_4 i està formada pels dos hiperplans i l'hipercilindre esmentats més amunt. Sobre aquest últim, $j^{\mu} = 0$, i aquesta part no contribuirà a la integral. D'altra banda, sobre l'hiperplà $x^4 = 0$ tenim $n_{\mu} = (\vec{0}, -1)$ i $d^3\Sigma = d^3x$ (hipersuperfície orientada cap a fora), per tant:

$$\int_{x^4=0} j^{\mu}(x) n_{\mu} d^3\Sigma = - \int_{|\vec{x}| \leq R} j^4(\vec{x}, t) d^3x = -cq.$$

Finalment, si tenim en compte que $j^{\mu}n_{\mu}$ és un escalar, la integral sobre l'hiperplà $x^{4'} = ct'_1$ val:

$$\int_{x^{4'}=ct'_1} j^{\mu}(x) n_{\mu} d^3\Sigma = \int_{x^{4'}=ct'_1} j^{\mu'}(x') n_{\mu'} d^3\Sigma' = \int_{|\vec{x}'| \leq R'} j^{4'}(\vec{x}', t'_1) d^3x' = cq'.$$

Substituint aquests resultats en (8.14) arribem a: $q = q'$.

Aquest és un fet contrastat experimentalment: la càrrega elèctrica total no depèn de la velocitat. De fet hi ha una càrrega elemental, la de l'electró, de la qual totes les altres són múltiples. S'ha demostrat experimentalment que en valor

absolut les càrregues del protó i de l'electró són iguals en una part sobre 10^{19} . En un àtom la distribució de velocitats d'electrons i protons és molt diferent. En un element com ara el potassi, per exemple, els electrons poden assolir velocitats de $0,4c$, mentre que els protons del nucli estan pràcticament en repòs. La neutralitat d'aquests àtoms abona la invariància de Lorentz de la càrrega elèctrica.

8.3 El tensor de Faraday

El significat físic dels camps \vec{E} i \vec{B} està vinculat a la força que actua sobre una càrrega de prova q situada en el punt \vec{x} i que es mou a una velocitat \vec{v} . La llei de força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (8.15)$$

que suposarem vàlida en tots els sistemes de referència inercials, és la que ens indicarà com es transformen els camps \vec{E} i \vec{B} en canviar de sistema de referència.

Com ja hem comentat a la secció 5.4, conèixer el trivector força equival a conèixer el quadrivector força de Minkowski:

$$f^\mu = \left(\gamma \vec{F}, \frac{\gamma}{c} \vec{v} \cdot \vec{F} \right).$$

Si hi substituïm (8.15), aquesta quadriforça es pot expressar com a:

$$\begin{aligned} f^1 &= q(\gamma E_x + \gamma v^y B_z - \gamma v^z B_y) \\ f^2 &= q(\gamma E_y + \gamma v^z B_x - \gamma v^x B_z) \\ f^3 &= q(\gamma E_z + \gamma v^x B_y - \gamma v^y B_x) \\ f^4 &= \frac{q}{c} \gamma \vec{v} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

i de manera més compacta:

$$f^\mu = q F^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (8.16)$$

on $F^\mu{}_\nu$ és la matriu:

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Com que la força de Minkowski f^μ és un quadrivector qualsevulla que sigui la quadrivelocitat u^μ de la càrrega de prova, l'equació (8.16) ens diu que la contracció de $F^\mu{}_\nu$ amb qualsevol quadrivector temporal u^ν ha de ser un quadrivector.

No podem aplicar directament el criteri de tensorialitat de la secció A.1.6, perquè l'afirmació anterior és vàlida només si el quadrivector u^ν és temporal. Però si tenim en compte la proposició 5 del capítol 4, qualsevol quadrivector t^μ

es pot posar com a suma de dos vectors tipus temps, $t^\mu = w^\mu + u^\mu$, i com que la relació (8.16) és lineal, resulta que: $F^\mu_\nu t^\nu$ és la suma dels dos quadriectors $F^\mu_\nu w^\nu$ i $F^\mu_\nu u^\nu$ i, per tant, també és un quadriector, per a qualsevol t^μ .

Ara sí, ja podem aplicar el criteri de tensorialitat esmentat per concloure que F^μ_ν és un tensor 1-covariant, 1-contravariant.

El tensor 2-covariant

$$F_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu$$

s'anomena *tensor de Faraday o camp electromagnètic*. És totalment antisimètric i, d'acord amb (8.17), els seus components són:

$$F_{i4} = -F_{4i} = \frac{E^i}{c} \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k, \quad (8.18)$$

on ϵ_{ijk} és el tensor de Levi-Civita (exemple A.10).

Més endavant ens serà útil la relació inversa:

$$E^i = cF_{i4} = -cF_{4i} \quad B^k = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} F_{ij} \epsilon^{ijk}. \quad (8.19)$$

8.3.1 Transformació dels camps elèctric i magnètic

El fet que $F_{\mu\nu}$ sigui un tensor 2-covariant ens dóna les lleis de transformació dels camps \vec{E} i \vec{B} . En efecte, partirem de la relació tensorial:

$$F_{\mu'\nu'} = L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} F_{\alpha\beta}$$

i estudiarem el cas senzill en què els dos sistemes de referència estan en la configuració estàndard i la velocitat relativa és $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Amb els components (8.18) i la matriu $L^\alpha_{\mu'}$ donada per la matriu inversa de la (2.20), arribem a:

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - c\beta B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + c\beta B_y) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

La forma general de la transformació de \vec{E} i \vec{B} es pot obtenir de l'equació anterior si tenim en compte les descomposicions:

$$\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp \quad \vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp$$

i el fet que: $\vec{E}_\parallel = (E_x, 0, 0)$ i $\vec{E}_\perp = (0, E_y, E_z)$, i una relació anàloga per a \vec{B} .

De l'equació (8.20) tenim:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel \\ \vec{E}'_\perp &= \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel \\ \vec{B}'_\perp &= \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E})\right) \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Si ara ens adonem que qualsevol vector, per exemple \vec{E} , es pot descompondre en $\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel$ i tenim en compte que:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{v^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{E}) \quad \text{i} \quad \vec{E}_\parallel = \frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v},$$

tenim que les equacions de transformació (8.21) es poden posar en la forma més compacta:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1-\gamma}{v^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{E}) \quad (8.22)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} + \frac{1-\gamma}{v^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (8.23)$$

Per bé que pugui semblar una mica innovador unir \vec{E} i \vec{B} en un sol objecte tensorial, no és tan estrany. Una conseqüència d'aquesta interdependència és el fet que, si en un sistema de referència \mathcal{S} tenim que la part elèctrica $F_{i4} \neq 0$, mentre que la part magnètica F_{ik} s'anul·la, en un altre \mathcal{S}' pot passar que la part magnètica sigui $F'_{ik} \neq 0$. Aquesta situació és consistent amb el fet que en \mathcal{S} només tinguem densitat de càrrega, $j^4 \neq 0$, amb una densitat de corrent nul·la —i així el camp magnètic és nul— mentre que en \mathcal{S}' hi haurà, a més de la densitat de càrrega $j^{4'} = \gamma j^4$, un corrent de convecció $\vec{j}' = \gamma j^4 \vec{v}/c$ que serà la font d'un $\vec{B}' \neq 0$.

8.3.2 Els invariants del camp electromagnètic

La llei de transformació anterior posa de manifest el que ja hem comentat més amunt: els camps \vec{E} i \vec{B} no tenen una entitat independent. Un camp purament elèctric en un sistema de referència es pot manifestar com una combinació de camp elèctric i camp magnètic en un altre. No es pot, però, transformar un camp electromagnètic donat en qualsevol altre camp electromagnètic. En particular, un camp purament elèctric en \mathcal{S} no pot donar un camp purament magnètic en cap altre sistema \mathcal{S}' . Aquestes limitacions vénen imposades pels invariants del camp electromagnètic: les magnituds escalars que es poden construir a partir dels components del tensor $F_{\mu\nu}$ han de valer el mateix en tots els sistemes de referència inercials.

Considerem el tensor mixt $F^\mu_\nu = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$. Com que la traça d'un tensor 1-covariant, 1-contravariant és un escalar (vegeu la secció A.1.5), les traces de les diverses potències de F^μ_ν :

$$t_1 \equiv F^\mu_\mu, \quad t_2 = F^\mu_\nu F^\nu_\mu, \quad \dots, \quad t_{n+1} \equiv F^\mu_{\nu_1} F^{\nu_1}_{\nu_2} \dots F^{\nu_n}_\mu$$

seran invariants.

De fet, a conseqüència de l'antisimetria de $F_{\mu\nu}$, les traces de les potències senars són idènticament nul·les. A més, com que el polinomi mínim d'una matriu quadrada de rang 4 té, a tot estirar, grau 4, les potències de F^μ_ν d'ordre igual o

superior al quart es poden expressar com a combinació de les potències d'exponent inferior a 4. Com a conseqüència, les traces t_n , amb $n > 4$, es poden posar en funció de les quatre primeres, i d'aquestes només no són idènticament nul·les les:

$$t_2 = F^\mu_\nu F^\nu_\mu, \quad t_4 \equiv F^\mu_\nu F^\nu_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_\mu. \quad (8.24)$$

En funció de \vec{E} i \vec{B} , i usant (8.17), tenim:

$$t_2 = -2 \left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} \right) \quad \text{i} \quad t_4 = \frac{1}{2} t_2^2 + \frac{4}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{B})^2. \quad (8.25)$$

Per il·lustrar que no hi ha altres invariants de Lorentz que es puguin construir a partir dels components del camp electromagnètic, podem considerar un altre invariant, el determinant:

$$\det(F_{\mu\nu}) = \frac{1}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{B})^2. \quad (8.26)$$

D'una banda és invariant, perquè $\det L = 1$ i

$$\det(F_{\mu'\nu'}) = \det(L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} F_{\alpha\beta}) = (\det L)^2 \det(F_{\alpha\beta}) = \det(F_{\alpha\beta}).$$

I de l'altra, de (8.25) i de (8.26), tenim:

$$\det(F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} \left(t_4 - \frac{1}{2} t_2^2 \right).$$

Els dos invariants més senzills independents que podem formar amb el camp electromagnètic són doncs:

$$I_1 = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}, \quad I_2 = \vec{B} \cdot \vec{E}. \quad (8.27)$$

Una conseqüència immediata és que, si \vec{E} i \vec{B} són ortogonals aleshores l'invariant I_2 és nul en qualsevol sistema de referència i es poden donar tres casos:

- (a) que el I_1 sigui també nul, aleshores $|\vec{E}| = |\vec{B}|c$ i tenim el que es coneix com a *camp electromagnètic singular*,
- (b) que $I_1 > 0$, és a dir $|\vec{E}| < |\vec{B}|c$ —el camp magnètic domina sobre l'elèctric. Llavors existeixen sistemes de referència S' en què $\vec{E}' = 0$ i $\vec{B}' \neq 0$. Una manera de trobar un d'aquests sistemes de referència consisteix a fixar-se en la llei de transformació (8.21) i triar \vec{v} ortogonal a \vec{E} i \vec{B} . Tindrem que $\vec{E}_\parallel = \vec{B}_\parallel = 0$ i, per tant, $\vec{E}'_\parallel = \vec{B}'_\parallel = 0$. El mòdul de \vec{v} serà determinat per la condició $\vec{E}'_\perp = 0$ que, d'acord amb (8.21), dóna:

$$v = \frac{E}{B}.$$

La condició que el camp magnètic domini sobre l'elèctric garanteix que $v < c$. I finalment

- (c) que $I_1 < 0$, és a dir $|\vec{E}| > |\vec{B}|c$ —el camp elèctric domina sobre el magnètic. En aquest cas existeixen sistemes de referència \mathcal{S}' en què $\vec{E}' \neq 0$ i $\vec{B}' = 0$. Per trobar un d'aquests sistemes es procedeix de manera semblant al cas anterior i s'arriba a:

$$v = \frac{c^2 B}{E}.$$

La condició que el camp elèctric domini sobre el magnètic garanteix que $v < c$.

Exemple 8.2 Camp d'una càrrega puntual en moviment uniforme

Considerem una càrrega puntual q que es mou amb velocitat constant \vec{v} respecte a un sistema inercial \mathcal{S} . Volem determinar els camps \vec{E} i \vec{B} creats per q .

En el sistema de referència comòbil \mathcal{S}^\dagger , el camp és purament elèctric:

$$\vec{E}^\dagger = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}^\dagger}{r^{\dagger 3}}, \quad \vec{B}^\dagger = 0. \quad (8.28)$$

En aquest sistema les línies del camp \vec{E}^\dagger surten radialment de q i, com que $|\vec{E}^\dagger|$ no depèn de la direcció, estan distribuïdes amb simetria esfèrica (figura 8.2(a)).

En el sistema \mathcal{S} els camps \vec{E} i \vec{B} en el punt $x^\mu = (\vec{x}, ct)$ estan relacionats amb els camps \vec{E}^\dagger i $\vec{B}^\dagger = 0$ per la llei de transformació (8.21) per a la velocitat relativa $-\vec{v}$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_\parallel(x) &= \vec{E}_\parallel^\dagger(x^\dagger), & \vec{E}_\perp(x) &= \gamma \vec{E}_\perp^\dagger(x^\dagger) \\ \vec{B}_\parallel(x) &= 0, & \vec{B}_\perp(x) &= \frac{1}{c^2} \gamma \vec{v} \times \vec{E}_\perp^\dagger(x^\dagger) \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

on $\vec{E}^\dagger(x^\dagger)$ ve donat per (8.28).

El camp \vec{E}^\dagger depèn exclusivament de:

$$\vec{r}^\dagger = \vec{r} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{r}) \vec{v} - \gamma t \vec{v} = \vec{r}^\perp + \gamma (\vec{r}_\parallel - \vec{v} t),$$

on hem usat la transformació de Lorentz (2.14). Substituint (8.28) en (8.29), tenim:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_\parallel &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0 r^{\dagger 3}} (\vec{r}_\parallel - \vec{v} t), & \vec{E}_\perp(x) &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0 r^{\dagger 3}} \vec{r}_\perp \\ \vec{B}_\parallel(x) &= 0, & \vec{B}_\perp(x) &= \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_\perp \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

amb:

$$r^\dagger = \sqrt{\vec{r}^{\dagger 2}} = \sqrt{\gamma^2 (\vec{r}_\parallel - \vec{v} t)^2 + \vec{r}_\perp^2}.$$

En el cas particular $\vec{v} = (v, 0, 0)$ les equacions (8.30) es concreten en:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q\gamma(x - vt)}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_y &= \frac{q\gamma y}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_z &= \frac{q\gamma z}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

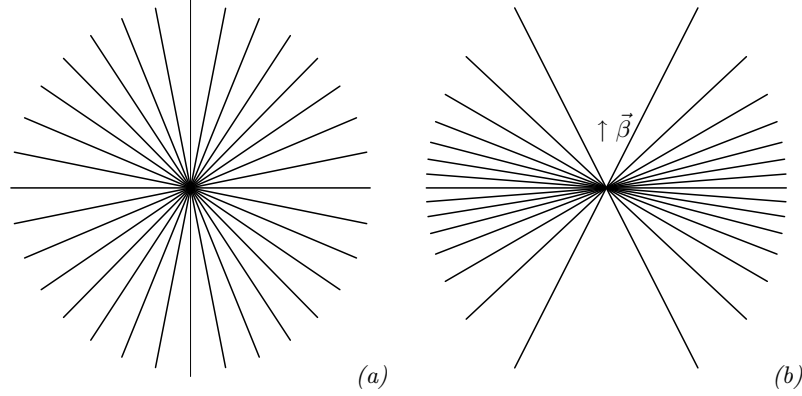


Figura 8.2. (a) Camp elèctric d'una càrrega situada a l'origen d'un sistema en repòs i (b) en un altre sistema en moviment uniforme i situada en el punt vt ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$)

per al camp elèctric i

$$B_x = B_x^\dagger = 0, \quad B_y = -\frac{v}{c^2} E_z, \quad B_z = \frac{v}{c^2} E_y$$

per al camp magnètic.

Per donar-ne una imatge gràfica, considerarem dos casos particulars: el primer, com es veu instantàniament per a \mathcal{S} el camp elèctric que a \mathcal{S}^\dagger tenia simetria esfèrica; i el segon, què passa en un punt de \mathcal{S} fix en transcórrer el temps. Si fem $t = 0$ tindrem el camp que en aquest instant es veu a \mathcal{S} (perquè quedi més clar farem $x = r \cos \theta$ i $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta$).

$$\vec{E} = \frac{q(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}.$$

Com veiem, encara és radial i va com $1/r^2$, però ja no té simetria esfèrica, és més gran en les direccions perpendiculars a l'eix de les X ($\theta = \pi/2$) i més petit en la direcció de l'eix de les X . En qualsevol altre instant t tindrem el mateix, però amb les línies que surten del punt $X = vt$.

Com a segon cas particular estudiem el camp en un punt fix de \mathcal{S} (per a més senzillesa triem el punt $(0, b, 0)$) en aquest $B_y = E_z = 0$, i els no nuls són

$$E_x = -\frac{q\gamma vt}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 v^2 t^2 + b^2]^{3/2}}, \quad E_y = \frac{q\gamma b}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 v^2 t^2 + b^2]^{3/2}}, \quad B_z = \frac{\beta}{c} E_y. \quad (8.31)$$

Com veiem decreixen amb el temps amb un màxim per a $t = 0$, que és quan la partícula passa més a prop del punt que hem triat. Una mesura del temps que triga el camp a fer-se nul és $\Delta t \approx b/(\gamma v)$, és a dir, que com més gran és γ més grans són els camps màxims, però són apreciables durant menys temps. Quan $\beta \rightarrow 1$, els

camps transversals al moviment de la càrrega són perpendiculars entre si i estan en la relació $E = cB$, semblen un impuls de radiació plana polaritzada que es propaga en la direcció de les X i el camp elèctric longitudinal canvia ràpidament d'un valor positiu a un de negatiu i la seva integral temporal s'anul·la.

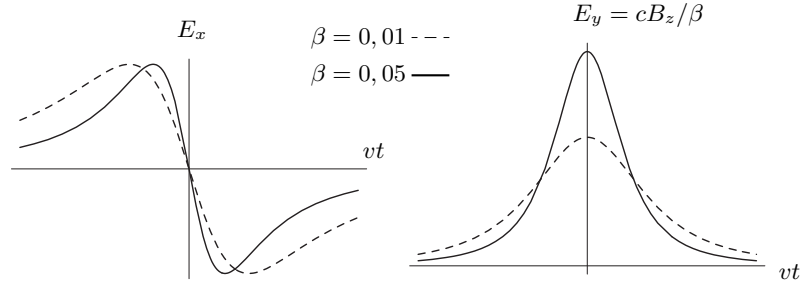


Figura 8.3. Variació temporal dels camps elèctric i magnètic d'una càrrega en moviment uniforme per a diversos valors de β

8.3.3 Forma covariant de les equacions de Maxwell en el buit

Tot seguit utilitzem la relació (8.19) per escriure les equacions de Maxwell (8.5) i (8.6) en funció del tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$. Per començar, la primera de les equacions (8.5) es pot expressar com a:

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0,$$

i cada component de la segona equació (8.5) es pot posar així:

$$c(\partial_i F_{j4} - \partial_j F_{i4} + \partial_4 F_{ij}) = 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3.$$

I usant la notació d'espai-temps, el primer parell (8.5) d'equacions de Maxwell es pot resumir en:

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0. \quad (8.32)$$

Notem que, si prenem $\mu = \nu$, l'equació anterior es satisfà idènticament perquè $F_{\mu\alpha}$ és antisimètric. Hi ha, doncs, tantes equacions independents (8.32) com ternes μ, ν, α diferents, és a dir, tantes com combinacions $C_4^3 = 4$.

Per escriure el segon parell utilitzarem el tensor contravariant:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta},$$

de manera que:

$$-c F^{i4} = c F^{4i} = E^i, \quad B^k = \frac{1}{2} F^{ij} \epsilon_{ijk}$$

i la primera de les equacions (8.6) es pot posar així:

$$\partial_i F^{4i} = \frac{\rho}{c\epsilon_0} = \mu_0 j^4,$$

on hem usat que $j^4 = \rho c$ i $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$.

D'altra banda, el component i de la segona equació (8.6) és:

$$\partial_l F^{il} + \partial_4 F^{i4} = \mu_0 j^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Així, en notació quadridimensional el segon parell d'equacions de Maxwell es pot expressar com a:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (8.33)$$

8.4 Potencials electromagnètics

Ja hem comentat més amunt que els dos parells d'equacions de Maxwell tenen papers diferents. El primer parell té com a conseqüència que els camps \vec{E} i \vec{B} es puguin derivar de potencials. La primera de les equacions (8.5) implica que existeix un potencial magnètic, \vec{A} , tal que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (8.34)$$

Si ara substituïm aquesta expressió en la segona de les equacions (8.5), obtenim que $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ és irrotacional i, per tant, és un gradient. És a dir, existeix un potencial elèctric ϕ tal que:

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi. \quad (8.35)$$

I a la inversa, donats els potencials ϕ i \vec{A} , si \vec{B} i \vec{E} estan definits per (8.34) i (8.35), llavors el primer parell d'equacions de Maxwell se satisfà idènticament.

8.4.1 El quadripotencial electromagnètic

Si introduïm la notació d'espai-temps:

$$A_\mu = \left(\vec{A}, -\frac{\phi}{c} \right) \quad (8.36)$$

i utilitzem les relacions (8.19), les equacions (8.34) i (8.35) es poden expressar respectivament així:

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad F_{4j} = \partial_4 A_j - \partial_j A_4, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

les quals es poden resumir en:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \quad (8.37)$$

D'aquesta expressió, i del fet que $F_{\mu\nu}$ és un tensor, se segueix que les quatre quantitats A_μ es transformen com els components d'un quadrivector covariant que s'anomena *quadripotencial electromagnètic*.

8.4.2 Les transformacions de galga

La correspondència entre el camp electromagnètic i el quadripotencial no és biunívoca. Hi ha tota una classe de potencials A_μ que donen lloc al mateix camp $F_{\mu\nu}$. En efecte, si en l'expressió (8.37) substituïm A_μ per

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f, \quad (8.38)$$

on $f(x^\rho)$ és una funció arbitrària, el camp $\tilde{F}_{\mu\nu}$ és el mateix $F_{\mu\nu}$ que es deriva de A_μ . (El resultat és conseqüència de la igualtat de les derivades creuades: $\partial_\mu \partial_\nu f = \partial_\nu \partial_\mu f$.)

La transformació (8.38) s'anomena *transformació de galga*.²

Com que el tensor $F_{\mu\nu}$ té un significat físic directe, i és mesurable a partir de la llei de força de Lorentz (8.16), tots els quadripotencials \tilde{A}_μ , obtinguts per una transformació de galga de A_μ , són físicament equivalents. Sovint és útil seleccionar un representant d'aquesta classe. Això es fa per mitjà d'una *condició de galga* o *fixació*, la qual consisteix en una relació entre les derivades primeres del quadripotencial A_μ escollit.

Dos exemples corrents de fixació són:

La galga de Coulomb, transversal o de radiació

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (8.39)$$

que no és covariant i s'utilitza en el formalisme hamiltonià i en la quantització del camp electromagnètic.

La galga de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (8.40)$$

que és covariant i, com veurem, simplifica molt la resolució de les equacions de Maxwell.

Exemple 8.3

Volem demostrar que donat un potencial A^μ sempre podem trobar-ne un d'equivalent \tilde{A}^μ que satisfaci la condició de Lorenz (8.40). En efecte, sigui $L = \partial_\mu A^\mu$ i sigui $\tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$. Tindrem que:

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu f,$$

que s'anul·larà sempre que $\partial_\mu \partial^\mu f = -L$, que és una equació diferencial en derivades parcials que sempre té solució. En particular, si coneixem els valors de $f(\vec{x}, 0)$ i $\partial_t f(\vec{x}, 0)$, la solució és única.

²En anglès *gauge* i en francès *jauge*. Aquest és un mot importat de la tecnologia. Una galga és una planxa d'acer o bloc prismàtic petit que s'empra per calibrar o regular la separació de dues peces, *galgat* és equivalent a *ajustat*.

8.4.3 Les equacions del potencial electromagnètic

És fàcil comprovar que si $F_{\mu\nu}$ es deriva d'un quadripotencial per la relació (8.37), el primer parell d'equacions de Maxwell en forma covariant (8.32) se satisfà idènticament. Si ara substituïm $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, amb $\partial^\nu \equiv \eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha$, en (8.33) obtenim:

$$\partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad (8.41)$$

que és un sistema diferencial en derivades parcials sobre A^μ .

Si A^μ és solució de (8.41), llavors el camp $F_{\mu\nu}$ que es deriva del potencial A_μ d'acord amb (8.37) és una solució de les equacions de Maxwell.

Per determinar $F_{\mu\nu}$ n'hi ha prou amb un representant de la classe de potencials equivalents. Resulta especialment simplificador escollir el potencial que satisfà la galga de Lorenz (8.40). En aquest cas, el primer terme de l'esquerra de (8.41) s'anul·la, i l'equació es redueix a:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\mu_0 j^\mu \quad (8.42)$$

i s'ha de complementar amb la fixació $\partial_\nu A^\nu = 0$.

Dedicarem el capítol 10 a estudiar les solucions d'aquest sistema.

8.5 Tensor d'energia-moment i lleis de conservació

Anem a veure com podem associar una energia i un moment lineal al camp electromagnètic, de manera que les lleis de conservació dels sistemes de partícules es puguin estendre a situacions en què aquestes interaccionen també amb camps electromagnètics.

Contràriament al que passa amb les partícules puntuals, en què energia i moment estan localitzats sobre les línies d'univers corresponents, els camps estan distribuïts de manera contínua sobre un domini, i així també l'energia i el moment que puguin portar associats. Per tant, aquestes magnituds les haurem de tractar en funció de les densitats corresponents. D'altra banda, els camps —i la seva energia i el seu moment lineal— es propaguen d'un lloc de l'espai a l'altre per interacció entre punts veïns (aquesta característica es manifesta en els termes que depenen de les derivades parcials espacials a les equacions del camp). Aquesta propagació del camp comporta també una propagació de l'energia i el moment associats. D'aquí que un altre concepte que serà útil en la nostra descripció és el de densitat de corrent d'energia i de moment lineal.

Començarem recordant el teorema de Poynting, que no és altra cosa que la llei de conservació de l'energia, i en buscarem una extensió relativista. Aquesta tasca ens serà força simplificada per la utilització del formalisme d'espai-temps, que directament ens donarà lleis covariants.

8.5.1 Conservació de l'energia. Teorema de Poynting

La llei de conservació de l'energia s'haurà de referir al sistema global format per la distribució de càrrega i el camp. L'intercanvi d'energia entre les càrregues i el camp és quantificat pel treball que fa aquest darrer. En el cas d'un conjunt de càrregues puntuals la potència val $\sum_a q_a \vec{v}_a \cdot \vec{E}_a$, on \vec{v}_a és la velocitat de la càrrega q_a i \vec{E}_a , la intensitat del camp elèctric en el punt en què es troba aquesta càrrega (com és ben conegut, el treball del camp magnètic és nul). Si en comptes d'un conjunt discret de càrregues tenim una distribució contínua, aquesta potència val:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x,$$

i és igual al guany d'energia (mecànica, tèrmica, etc.) de la distribució de càrrega:

$$\frac{d\mathcal{E}_{car}}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x. \quad (8.43)$$

Ara reformularem aquesta llei de variació de l'energia de les càrregues com un balanç de l'intercanvi d'energia entre les càrregues —que són uns ens físics localitzats allà on $\rho \neq 0$ i $\vec{j} \neq 0$ — i el camp, que és una entitat difosa que ocupa tot l'espai. Per això convé substituir el corrent \vec{j} del segon membre per mitjà de les equacions de Maxwell (8.1) i (8.2), i tenir en compte la identitat del càlcul vectorial:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}).$$

D'aquesta manera obtenim:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x = - \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}]) d^3x - \int_{\mathcal{V}} (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) d^3x. \quad (8.44)$$

El primer terme de la dreta és la integral d'una divergència i, pel teorema de Gauss, es redueix a la integral sobre la superfície \mathcal{A} que delimita el volum \mathcal{V} .

Si les relacions entre \vec{D} i \vec{E} i entre \vec{B} i \vec{H} són lineals amb coeficients independents de t (i en particular, per a medis isòtrops), el segon terme de la dreta de (8.44) és la variació temporal d'una quantitat que només depèn dels camps, integrada sobre el volum \mathcal{V} , que denotarem per U :

$$U = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}). \quad (8.45)$$

Així, si substituïm (8.44) i (8.45) a (8.43) i tenim en compte les regles de derivació sota la integral, arribem a:

$$\frac{d\mathcal{E}_{car}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} U d^3x + \oint_{\mathcal{A}} \vec{S} \cdot d^2\vec{A} = 0, \quad (8.46)$$

on \mathcal{A} és la superfície que envolta el volum \mathcal{V} , $d^2\vec{A}$ és l'element de superfície orientat cap a fora del volum \mathcal{V} i

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.47)$$

és el *vector de Poynting*.

L'equació (8.46), que hem obtingut de manipular matemàticament la llei de variació de l'energia de les càrregues (8.43), admet una interpretació física immediata. Adonem-nos que $U(\vec{x}, t)$ té dimensions de densitat d'energia, només depèn dels camps electromagnètics i només és nul·la allà on els camps s'anul·len. Aleshores la integral que apareix en (8.46) la podem interpretar, per tant, com l'energia del camp electromagnètic contingut en el volum \mathcal{V} :

$$\mathcal{E}_{camp} \equiv \int_{\mathcal{V}} U d^3x = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) d^3x. \quad (8.48)$$

Per la seva banda, \vec{S} té dimensions de corrent d'energia, només depèn dels camps electromagnètics i la integral de superfície de (8.46) es pot interpretar com el flux d'energia del camp electromagnètic cap a fora del volum \mathcal{V} .

Amb aquesta interpretació, (8.46) és la *lleï de conservació de l'energia del sistema* format per les càrregues i el camp electromagnètic:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{car} + \mathcal{E}_{camp}) = - \oint_{\mathcal{A}} \vec{S} \cdot d^2\vec{A}. \quad (8.49)$$

La variació per unitat de temps de l'energia total —mecànica, tèrmica, electromagnètica, etc.— continguda en un volum \mathcal{V} és igual al flux d'energia que entra per la superfície \mathcal{A} transportada pel vector de Poynting.

Finalment, com que en (8.49) el volum és arbitrari, per aplicació una altra vegada del teorema de Gauss, tenim la forma local de la llei de balanç d'energia (8.43):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (8.50)$$

que en absència de corrents té la forma d'una equació de continuïtat:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0. \quad (8.51)$$

8.5.2 Conservació del quadrimoment lineal. Tensor d'energia-moment

En l'equació de continuïtat (8.50) hi intervenen junts els conceptes de «densitat» i «energia». Com ja hem vist més amunt (secció 8.2) la densitat d'una magnitud és el quart component d'un quadricorrent —els components espacials

corresponen a la densitat de corrent de l'esmentada magnitud. Així, $(\vec{S}/c, U)$ seria el quadricorrent d'energia, que no s'espera que sigui un quadrivector perquè l'energia no és un escalar de Lorentz.

Per la seva banda, l'energia dividida per c és el quart component del quadrimoment lineal. Per la naturalesa tensorial d'aquestes magnituds, si la llei de conservació de l'energia ha de valer en tots els sistemes de referència, s'haurà de complir també la llei de conservació dels tres components espacials del quadrimoment lineal.

De manera semblant a com ho hem fet per a l'energia, podríem obtenir la llei de conservació del trimoment lineal total a partir de la variació del moment lineal del sistema de càrregues i la densitat de força de Lorentz $\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$. Tanmateix, com que la demostració utilitza algunes identitats rebuscades del càlcul vectorial, no la farem aquí directament. El que sí que demostrarem és la llei de conservació covariant, l'anàloga tensorial de l'equació (8.50), que consta de quatre equacions de continuïtat: una llei de conservació local per a cada component del quadrimoment lineal.

Seguirem un camí paral·lel al de l'apartat anterior, però totalment covariant. En comptes de la densitat de treball $\vec{j} \cdot \vec{E} = c F^{4\nu} j_\nu$, partirem de la quantitat covariant $F^{\alpha\nu} j_\nu$ —com correspon a la relació $\mathcal{E} = c P^4$. Per l'equació de Maxwell inhomogènia (8.33), tindrem que:

$$F^{\alpha\nu} j_\nu = \frac{1}{\mu_0} F^{\alpha\nu} \partial_\rho F_\nu{}^\rho = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\rho [F^{\alpha\nu} F_\nu{}^\rho] - F_\nu{}^\rho \partial_\rho F^{\alpha\nu}) . \quad (8.52)$$

Ara, l'equació de Maxwell homogènia (8.32) ens permet de posar:

$$F_{\rho\nu} (\partial^\rho F^{\alpha\nu} + \partial^\nu F^{\rho\alpha} + \partial^\alpha F^{\nu\rho}) = 0 ,$$

que, si tenim en compte l'antisimetria del tensor de Faraday, ens dóna:

$$F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\alpha\nu} = -\frac{1}{2} F_{\rho\nu} \partial^\alpha F^{\nu\rho} = \frac{1}{4} \partial^\alpha [F_{\nu\rho} F^{\nu\rho}] ,$$

que, substituïda a (8.52), ens permet d'escriure:

$$-F^{\alpha\nu} j_\nu = \epsilon_0 c^2 \left(\partial_\rho [F^{\alpha\nu} F_\nu{}^\rho] - \frac{1}{4} \partial^\alpha [F_{\nu\rho} F^{\nu\rho}] \right) ,$$

o bé:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\alpha} = -F^{\alpha\nu} j_\nu , \quad (8.53)$$

on

$$\Theta^{\mu\alpha} = \epsilon_0 c^2 \left(F^{\nu\mu} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \quad (8.54)$$

s'anomena *tensor d'energia-moment* del camp electromagnètic.

Per veure el significat dels components d'aquest tensor, i així poder interpretar l'equació (8.53), les expressarem en funció dels camps \vec{E} i \vec{B} :

$$\Theta^{44} = \frac{\epsilon_0}{2}(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2) = U \quad (8.55)$$

$$\Theta^{4i} = \Theta^{i4} = \epsilon_0 c(\vec{E} \times \vec{B})^i = \frac{1}{c}S^i \quad (8.56)$$

$$\Theta^{ij} = -\epsilon_0 \left[E^i E^j + c^2 B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \right] \equiv -T^{ij}, \quad (8.57)$$

on T^{ij} es coneix com a *tensor d'esforços de Maxwell*.

Els components del segon membre de l'equació (8.53) són:

$$-F^{4\nu} j_\nu = -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (8.58)$$

$$-F^{i\nu} j_\nu = -\left(\rho E^i + (\vec{j} \times \vec{B})^i \right). \quad (8.59)$$

Si ara considerem les igualtats (8.55), (8.56) i (8.58), veiem que el component temporal ($\alpha = 4$) de (8.53) és precisament (8.50).

Per als components espacials de l'equació (8.53), utilitzant (8.56), (8.57) i (8.59), tenim:

$$\partial_t \left(\frac{1}{c^2} S^i \right) - \partial_j T^{ij} = -\left(\rho E^i + (\vec{j} \times \vec{B})^i \right) = -\Phi^i, \quad (8.60)$$

on $\vec{\Phi} dV = \rho \vec{E} dV + \vec{j} \times \vec{B} dV$ es pot interpretar com la força dels camps \vec{E} i \vec{B} sobre les càrregues i corrents presents en el volum dV : el primer terme és la força del camp elèctric \vec{E} sobre la càrrega elemental ρdV i el segon és la força magnètica sobre el corrent elemental $\vec{j} dV$.

Si reagrupem els termes de l'equació (8.60) i integrem a un volum finit \mathcal{V} delimitat per una superfície \mathcal{A} , després d'aplicar el teorema de Gauss arribem a:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{c^2} S^i(\vec{x}, t) d^3V + \frac{d}{dt} P_{\text{càrregues}}^i(\mathcal{V}) = \oint_{\mathcal{A}} T^{ij}(\vec{x}, t) d^2A_j. \quad (8.61)$$

Els termes de l'esquerra donen la variació per unitat de temps del moment lineal total —de les càrregues i el camp— contingut en el volum \mathcal{V} . D'aquesta manera, \vec{S}/c^2 és la densitat de moment lineal del camp electromagnètic.

Per la seva part, el terme de la dreta dóna el flux de component i del moment lineal per unitat de temps cap dins de la superfície \mathcal{A} . Així, $T^{ij} d^2A_j$ s'interpreta com la força dF^i que fa el camp extern a \mathcal{V} sobre el camp i les càrregues interiors a \mathcal{V} , a través de l'element de superfície $d^2\vec{A}$.

Apèndix 8.A: sistemes d'unitats

Al llarg d'aquest text hem utilitzat el sistema internacional d'unitats (SI), també conegut com a MKSA, adoptat des de 1960 per la Conferència General de Pesos i Mesures. Tanmateix, en molts textos d'electromagnetisme que per la seva gran acceptació i difusió es poden considerar clàssics s'utilitzen altres sistemes d'unitats.

El motiu essencial d'aquesta tria és la recomanació abans esmentada però també el fet que, en tractar-se d'un text genèric, no es fan càlculs d'aplicacions que donin nombres massa grans o massa petits per a les magnituds físiques, la qual cosa podria ser una raó per triar un altre sistema d'unitats.

En aquest apèndix comentarem el perquè d'aquesta varietat de sistemes, el seu origen, així com un esboç de l'evolució que ha desembocat en l'SI.

Les magnituds massa, longitud i temps estan basades en una tradició indiscutible i així a la mecànica s'acostumen a prendre com a magnituds fonamentals. Les unitats corresponents en l'SI són el quilogram (kg), el metre (m) i el segon (s), i en el sistema CGS són el gram (g), el centímetre (cm) i el segon.

El desenvolupament de l'electromagnetisme a partir de branques independents (electrostàtica, magnetisme, enginyeria elèctrica, electroquímica, etc.) donà lloc a diverses tradicions i cada una va desenvolupar el sistema d'unitats més adient. La base de cada sistema i la raó per escollir unes determinades magnituds fonamentals sovint és la simplicitat en l'expressió d'una llei fonamental (sistemes d'unitats absolutes) o bé poder disposar d'una unitat patró d'una mida apropiada per a les magnituds que s'acostumen a manejar (sistemes d'unitats pràctiques). Això vol dir, entre altres coses, que aquest patró sigui el més universal possible i «fàcilment» reproduïble amb molta precisió.

Així, un sistema d'unitats absolutes a l'electromagnetisme pot partir de qualsevol de les dues lleis fonamentals: la de Coulomb i la d'Ampère

$$\vec{F} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (8.62)$$

$$\vec{F} = k_2 \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_1 \times (\vec{j}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} dV_1 dV_2, \quad (8.63)$$

on k_1 i k_2 són dues constants universals. Així tenim:

El sistema CGS electrostàtic Si prenem $k_1 = 1$, llavors tenim la relació de dimensions: $[q^2] = [F][r]^2$, és a dir, $[q] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$ i la càrrega no és una magnitud fonamental. Aquesta elecció, juntament amb el sistema CGS per a les unitats mecàniques, va donar lloc al sistema electrostàtic d'unitats (ues). La unitat de càrrega elèctrica és el franklin (Fr) i la unitat d'intensitat és el Fr s^{-1} que, en substituir-la a la llei d'Ampère, implica que $k_2 = 1/9 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^2$.

Notem que, com que en qualsevol sistema d'unitats $[j] = [q] T^{-1} L^{-2}$, les lleis de Coulomb i d'Ampère impliquen que:

$$[k_1] = [k_2] L^2 T^{-2}.$$

El sistema CGS electromagnètic Si prenem $k_2 = 1$, aleshores l'equació (8.63) defineix una unitat de densitat de corrent derivada amb dimensions de $[j] = M^{1/2} L^{-3/2} T^{-1}$. L'elecció $k_2 = 1$, junt amb el sistema CGS per a les unitats mecàniques, dona lloc al sistema d'unitats electromagnètiques (uem). La intensitat és també una magnitud derivada que té per dimensions $M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$. La unitat és l'abampere, la intensitat que circula per cada un d'un parell de corrents rectilinis, infinits i paral·lels que a la distància d'1 cm s'exerceixen una força de 2 dyn per cm. La unitat uem de càrrega, l'abcoulomb, és la càrrega transportada per un corrent d'1 abampere durant 1 s. En aquest sistema d'unitats, la constant de proporcionalitat de la llei de Coulomb és $k_1 = 9 \cdot 10^{20} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$, i té dimensions d'una velocitat al quadrat. La relació entre les unitats uem i ues de càrrega és 1 abampere = $3 \cdot 10^{10}$ fr (En tots els factors de conversió d'aquest apèndix el 3 té a veure amb la velocitat de la llum en el buit i vol dir 2,997 924 56, així com el 9 vol dir el quadrat d'aquest nombre.) Vegeu l'experiment de Weber-Kolrausch en l'apartat 1.2.3.

El sistema internacional d'unitats És un sistema d'unitats absolut i pràctic alhora: manté la manera de definir les unitats dels sistemes absoluts tot conservant-ne les grandàries pràctiques. Es basa a complementar el sistema MKS amb una unitat elèctrica escollida arbitràriament, l'ampere, que es defineix com la intensitat que circula per cada un d'un parell de corrents rectilinis, infinits i paral·lels que a la distància d'1 m s'exerceixen una força per unitat de longitud de $2 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$.³ Això comporta que l'SI té una magnitud fonamental més, la intensitat. Un cop escollida aquesta unitat, queden determinats els valors de les constants de proporcionalitat a les lleis de Coulomb (8.62) i d'Ampère (8.63) i tenim que:

$$k_1 = 9 \cdot 10^9 \text{ A}^{-2} \text{ s}^{-4} \text{ kg m}^3 \quad k_2 = 10^{-7} \text{ kg m A}^{-2} \text{ s}^{-2}.$$

A partir d'aquestes quantitats es defineixen la permeabilitat magnètica i la permitivitat elèctrica del buit, respectivament: $\mu_0 = 4\pi k_2$ i $\epsilon_0 = (4\pi k_1)^{-1}$.

³La definició és aparentment arbitrària i l'origen és l'adopció per la British Association for the Advancement of Science (1868) de l'ohm com a unitat de resistència, perquè la unitat en el sistema uem, que equival a 10^{-9} ohm, no era pràctica per als enginyers del telègraf. El 1884 la Primera Conferència d'Electricistes (París) va adoptar l'ohm com a unitat de resistència i també el volt com a unitat de força electromotriu, 10^8 vegades la unitat uem corresponent.

S. unitats	k_1	k_2	k_3	k_4
electrostàtic (ues)	1	c^{-2}	1	1
electromagnètic (uem)	c^2	1	1	1
gaussiana	1	c^{-2}	c^{-1}	c^1
Heaviside-Lorentz	$1/(4\pi)$	$1/(4\pi c^2)$	c^{-1}	c^1
MKSA racionalitzat	$1/(4\pi\epsilon_0) = 10^{-7}c^2$	$\mu_0/(4\pi) = 10^{-7}$	1	1

Taula 8.1. *Sistemes d'unitats electromagnètiques més comuns. (Tots excepte l'últim fan servir unitats mecàniques CGS)*

Altres lleis i altres constants

El camp elèctric creat per una càrrega q a una distància r és, d'acord amb (8.62), $E = k_1 q/r^2$. El teorema de Gauss de l'electrostàtica en forma diferencial s'expressa en l'equació de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k_1 \rho. \quad (8.64)$$

Una altra llei fonamental de l'electromagnetisme és la llei de Faraday: la força electromotriu induïda en un circuit és proporcional a la variació per unitat de temps del flux magnètic a través d'una superfície tancada pel circuit. En forma diferencial dóna lloc a una altra de les equacions de Maxwell i s'escriu així:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + k_3 \partial_t \vec{B} = 0. \quad (8.65)$$

D'altra banda, la inducció magnètica \vec{B} es defineix a partir de la llei d'Ampère. Així, a una distància d d'un conductor rectilini pel qual circula una intensitat I , tenim $B = k_4 k_2 2I/d$ on la constant k_4 fa referència a la proporcionalitat entre la inducció magnètica i el camp magnètic del conductor $2k_2 I/d$ que resulta de (8.63). En forma diferencial aquesta llei correspon a l'equació de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{k_4 k_2}{k_1} \partial_t \vec{E} + 4\pi k_4 k_2 \vec{j}, \quad (8.66)$$

que relaciona la inducció magnètica amb la densitat de corrent lliure \vec{j} i amb la densitat de corrent de polarització $1/k_1 \partial_t \vec{E}$.

Les dimensions d'aquestes quatre constants, k_1 , k_2 , k_3 i k_4 , no són independents. En efecte, ja hem vist com $[k_1] = [k_2] L^2 T^{-2}$. A més, de (8.62) i de (8.66)

tenim que les dimensions del camp elèctric i la inducció magnètica són, respectivament, $[E] = [k_1] [q] L^{-2}$ i $[B] = [k_4 k_2] [q] T^{-1} L^{-1}$. A més, de (8.65) resulta que $[E] L^{-1} = [k_3] [B] T^{-1}$ i, per tant:

$$[k_3 k_4] = 1 \quad \text{i} \quad \frac{[E]}{[B]} = [k_3] L T^{-1}.$$

Per altra banda, de combinar les equacions de Maxwell obtenim:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{k_3 k_2 k_4}{k_1} \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (8.67)$$

i el quocient $k_1/(k_2 k_3 k_4)$ és el quadrat de la velocitat de propagació de les ones electromagnètiques en el buit.

Segons la tria que es fa de les dues constants arbitràries de la teoria es tenen els diversos sistemes d'unitats de la taula 8.5.2.

Més enllà del context electromagnètic que ens ocupa aquí, en alguns camps en què intervenen la relativitat i la mecànica quàntica, on apareixen sovint les constants universals c i \hbar , per tal de simplificar les expressions es prenen aquestes constants igual a 1. Aleshores, $M L^2 T^{-1} = [\hbar] = 1$ i $L T^{-1} = [c] = 1$, per tant, $L = T$ i $L = M^{-1}$, i només hi ha una magnitud fonamental. Per tant, tot es refereix a una unitat, que acostuma a ser la d'energia (eV).

Problemes

- 8.1 Per aplicació directa de les fórmules de transformació dels camps elèctric i magnètic, \vec{E} i \vec{B} , demostreu que $\vec{B}^2 - \vec{E}^2/c^2$ i $\vec{B} \cdot \vec{E}$ són invariants de Lorentz.
- 8.2 Demostreu que, excepte en el cas que $(\vec{B} \cdot \vec{E})^2/c^2 + (\vec{B}^2 - \vec{E}^2/c^2)^2 = 0$, sempre hi ha un sistema de referència en el qual \vec{E} i \vec{B} són paral·lels. Determineu la velocitat relativa d'aquest sistema.
- 8.3 Un fil recte de longitud infinita i secció A es mou a velocitat v constant en la direcció de la seva longitud respecte a un sistema inercial, \mathcal{S} . En el sistema en repòs del fil, \mathcal{S}' , aquest no té càrrega però porta una intensitat de corrent estacionària I' , uniformement distribuïda en el fil.
- Determineu el camp electromagnètic en el sistema \mathcal{S}' .
 - Transformeu els camps al sistema \mathcal{S} .
 - Transformeu la càrrega i la densitat de corrent a \mathcal{S} .
 - Determineu els camps a \mathcal{S} generats pel resultat de (c) i compareu-los amb els obtinguts a (b).
- 8.4 Calculeu el camp electromagnètic creat per una barra recta de longitud infinita amb distribució uniforme de càrrega que es mou amb velocitat v en la direcció de la barra. Feu, primer, el càlcul del camp electromagnètic creat en el sistema en repòs de la barra.
- 8.5 Un cilindre infinit circular, de radi R , en repòs en un sistema de referència \mathcal{S} està orientat en la direcció de l'eix z . El cilindre té una densitat de càrrega uniforme i hi circula un corrent uniformement distribuït. La càrrega per unitat de longitud és λ i la intensitat de corrent és I .
- Determineu el 4-vector densitat de corrent J^μ corresponent.
 - Trobeu un sistema de referència \mathcal{S}' en què només hi hagi camp elèctric, o només camp magnètic. Doneu la velocitat de \mathcal{S}' respecte de \mathcal{S} .
 - Discutiu quin és el cas (elèctric o magnètic) en funció dels valors de λ i I .
 - Hi ha algun cas en què el problema no tingui solució? Per què?
- (Ajut: no cal calcular els camps)
- 8.6 Demostreu que sempre es pot trobar un quadripotencial A_μ que verifiqui la galga de Coulomb.
- 8.7 a) Trobeu el quadripotencial d'un camp magnètic constant i uniforme.
 b) Trobeu el quadripotencial creat per un conductor rectilini infinit pel qual circula una intensitat I constant.

- 8.8 Trobeu el quadripotencial corresponent a una càrrega en moviment rectilini uniforme.

Capítol 9

Càrregues en un camp electromagnètic

Ens ocuparem aquí del moviment d'una càrrega puntual en un camp electromagnètic donat i en veurem algunes aplicacions. Negligirem els efectes deguts a la radiació electromagnètica associada al moviment accelerat de la mateixa càrrega, que veurem en el capítol 11. També estudiarem els formalismes lagrangiana i hamiltoniana per a una càrrega en un camp electromagnètic extern. El seu interès rau en el fet que tant és la base per a la teoria de perturbacions com per al desenvolupament de la mecànica estadística i de la mecànica quàntica. I per acabar estudiarem l'efecte del camp electromagnètic sobre el moment angular intern.

9.1 Moviment d'una càrrega en un camp electromagnètic uniforme i constant

Les equacions del moviment d'una càrrega puntual en un camp electromagnètic s'obtenen a partir de la força de Lorentz (8.15), de l'expressió (5.6) per al moment lineal i de l'equació de la mecànica (5.40):

$$m \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.1)$$

o, equivalentment, les equacions covariants obtingudes a partir de (8.16) i (5.41):

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q F^\mu_\nu u^\nu. \quad (9.2)$$

La trajectòria depèn de les dades inicials $x^\mu(0)$ i $u^\mu(0)$ que, per mitjà d'una transformació de Poincaré convenient, sempre es poden reduir a formes senzilles. En particular, habitualment escollirem l'origen de coordenades de manera que $x^\mu(0) = 0$, això pot fer-se amb una translació en l'espai i temps.

També podem utilitzar la transformació de Lorentz pura per triar el sistema de coordenades en què el tensor electromagnètic té la forma més simple, resoldre en aquest sistema l'equació diferencial i si ens interessa antitransformar la solució. Així, en funció dels valors dels invariants (8.27) tindrem els quatre casos següents:

Cas elèctric Si $I_2 = 0$ i $I_1 < 0$, hi ha un conjunt de sistemes de referència en què $\vec{B} = 0$ i $\vec{E} \neq 0$.

Cas magnètic Si $I_2 = 0$ i $I_1 > 0$, podem trobar sistemes de referència en què $\vec{E} = 0$ i $\vec{B} \neq 0$.

Cas singular Si $I_2 = 0$ i $I_1 = 0$, en tots els sistemes de referència \vec{B} és perpendicular a \vec{E} i el mòdul és el mateix, a part del factor c .

Cas genèric Si $I_2 \neq 0$, sempre podem trobar un sistema de referència en què \vec{E} i \vec{B} siguin paral·lels.

A continuació estudiarem amb una mica de detall cada un d'aquests casos.

9.1.1 Moviment d'una càrrega en un camp elèctric

Si escollim els eixos d'espai de manera que $\vec{E} = (E, 0, 0)$, que pot fer-se per una rotació d'eixos posant l'eix X en la direcció del camp, les equacions del moviment covariants (9.2) donen:

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{d\tau} &= \frac{qE}{mc} u^4, & \frac{du^4}{d\tau} &= \frac{qE}{mc} u^1, \\ \frac{du^2}{d\tau} &= \frac{du^3}{d\tau} = 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Per simplicitat, com que \dot{u}^1 té signe constant, podem escollir l'origen del paràmetre, $\tau = 0$, com l'instant en què $u^1(0) = 0$. A més, amb una rotació al voltant de l'eix X podem agafar la velocitat inicial en el pla format pels eixos X i Y de manera que $u_0^3 = 0$. Les altres dues dades inicials han de satisfer el lligam (4.17), d'aquí que:

$$\vec{v}_0 = (0, v_0, 0) \quad \text{i} \quad u_0^\mu = \gamma_0(0, v_0, 0, c).$$

Les equacions (9.3) són similars a les del moviment hiperbòlic (secció 4.33) i la solució és:

$$\left. \begin{aligned} u^1(\tau) &= \gamma_0 c \sinh(\alpha\tau), & u^2(\tau) &= \gamma_0 v_0 \\ u^4(\tau) &= \gamma_0 c \cosh(\alpha\tau), & u^3(\tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

amb $\alpha = qE/(mc)$. Si ara prenem l'origen de coordenades i temps de manera que $x^\mu(0) = 0$, l'equació de la trajectòria és:

$$\left. \begin{aligned} x^1(\tau) &= \frac{\gamma_0 c}{\alpha} [\cosh(\alpha\tau) - 1] , & x^2(\tau) &= \gamma_0 v_0 \tau \\ t(\tau) &= \frac{\gamma_0}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) , & x^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

que és la composició d'un moviment hiperbòlic (vegeu l'apartat 4.8.1) segons la direcció X^1 i un moviment uniforme al llarg de l'eix X^2 . La projecció de la trajectòria (9.5) sobre el pla d'espai-temps $X^1 X^4$ és:

$$x^1 = -\frac{\gamma_0 c}{\alpha} + \sqrt{c^2 t^2 + \frac{\gamma_0^2 c^2}{\alpha^2}}.$$

9.1.2 Moviment en un camp magnètic

En absència de camp elèctric les equacions del moviment escrites en forma no covariant (9.1) donen:

$$\frac{d\gamma \vec{v}}{dt} = -\frac{q}{m} \vec{B} \times \vec{v} \quad (9.6)$$

i si projectem aquesta equació sobre \vec{v} tenim l'equivalent a l'equació de l'energia (5.44):

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0.$$

D'aquí que γ és constant i, per tant, també ho és $v = |\vec{v}|$. Si escollim els eixos d'espai de manera que $\vec{B} = (0, 0, B)$, (9.6) expressada en components dóna:

$$\frac{dv^1}{dt} = \frac{qB}{m\gamma} v^2, \quad \frac{dv^2}{dt} = -\frac{qB}{m\gamma} v^1, \quad \frac{dv^3}{dt} = 0. \quad (9.7)$$

Com que encara ens queda llibertat per escollir els eixos X i Y , ho fem de manera que la velocitat inicial sigui $\vec{v} = (0, v_\perp, v_\parallel)$. Així la solució de (9.7) és:

$$\vec{v} = (v_\perp \sin(\omega_L t), v_\perp \cos(\omega_L t), v_\parallel) \quad (9.8)$$

i el vector \vec{v} gira al voltant de la direcció del camp magnètic en sentit horari amb velocitat angular

$$\omega_L = \frac{qB}{m\gamma}, \quad (9.9)$$

també coneguda com a *freqüència de Larmor*.

Per integració de (9.8), i escollint convenientment l'origen de coordenades, obtenim l'equació de la trajectòria:

$$\vec{x}(t) = (-R \cos(\omega_L t), R \sin(\omega_L t), v_\parallel t), \quad \text{on} \quad R = \frac{m\gamma v_\perp}{qB} \quad (9.10)$$

que correspon a una hèlix de radi R i pas $\Delta = 2\pi m\gamma v_\parallel / (qB)$.

9.1.3 Moviment en un camp electromagnètic singular

En aquest cas tenim que \vec{E} i \vec{B} són ortogonals i $E = cB$. Si triem els eixos de manera que l'eix X estigui en la direcció de \vec{E} i l'eix Z en la de \vec{B} , les equacions del moviment covariants (9.2) donen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du^1}{d\tau} &= \frac{qB}{m}(u^2 + u^4), & \frac{du^2}{d\tau} &= -\frac{qB}{m}u^1, \\ \frac{du^3}{d\tau} &= 0, & \frac{du^4}{d\tau} &= \frac{qB}{m}u^1. \end{aligned} \right\}$$

Si sumem la segona i la quarta veiem que $K \equiv u^2 + u^4$ és constant. Això permet d'integrar immediatament la primera equació i dóna:

$$u^1(\tau) = \frac{qBK}{m}\tau \quad \text{amb} \quad K = u_0^2 + u_0^4,$$

on hem triat l'origen de τ de manera que $u^1(0) = 0$. Com que ara ja tenim $u^1(\tau)$ podem integrar les altres equacions i tenim:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^2}{d\tau} &= u^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{qB}{m} \right)^2 K\tau^2 + u_0^2, \\ \frac{dx^3}{d\tau} &= u^3 = u_0^3 & \text{amb} \quad u_0^3 &= \sqrt{(u_0^4)^2 - c^2 - (u_0^2)^2} \\ c \frac{dt}{d\tau} &= u^4 = \frac{1}{2} \left(\frac{qB}{m} \right)^2 K\tau^2 + u_0^4. \end{aligned} \right\}$$

Si ara escollim l'origen de coordenades de manera que $x^\mu(0) = 0$, una segona integració ens dóna:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2} \frac{qBK}{m} \tau^2, & x^2 &= u_0^2 \tau - \frac{1}{6} \left(\frac{qB}{m} \right)^2 K \tau^3 \\ x^3 &= \tau \sqrt{(u_0^4)^2 - c^2 - (u_0^2)^2}, & ct &= u_0^4 \tau + \frac{1}{6} \left(\frac{qB}{m} \right)^2 K \tau^3 \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

D'aquestes expressions s'elimina fàcilment la variable τ i, de substituir la primera d'elles en la quarta, obtenim:

$$t = \frac{1}{c} \left(u_0^4 + \frac{qB}{3m} x^1 \right) \tau = \gamma_0 \left[1 + \frac{\omega_0 x^1}{3c} \right] \tau,$$

on $\omega_0 = qB/(m\gamma_0)$. D'aquesta relació podem aïllar τ i substituir en les altres tres per obtenir:

$$\begin{aligned} x^1 \left[1 + \frac{\omega_0 x^1}{3c} \right]^2 &= \frac{1}{2} \omega_0 (c + v_0^2) t^2 \\ (x^2 - ct) \left[1 + \frac{\omega_0 x^1}{3c} \right] &= t (v_0^2 - c) \\ x^3 \left[1 + \frac{\omega_0 x^1}{3c} \right] &= t v_0^3 \end{aligned}$$

on hem posat: $u_0^4 = \gamma_0 c$ i $\vec{v}_0 = (0, v_0^2, v_0^3)$.

9.1.4 Moviment en un camp electromagnètic genèric

En aquest cas tenim que hi ha sistemes inercials en què \vec{E} i \vec{B} són paral·lels, podem triar els eixos de manera que aquesta sigui la direcció de l'eix Z . Les equacions del moviment covariants (9.2) donen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du^1}{d\tau} &= \omega_0 u^2, & \frac{du^2}{d\tau} &= -\omega_0 u^1, \\ \frac{du^3}{d\tau} &= \alpha u^4, & \frac{du^4}{d\tau} &= \alpha u^3, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

on per simplificar hem posat:

$$\omega_0 = \frac{qB}{m} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{qE}{mc}.$$

Encara ens queda llibertat per escollir l'eix Y i ho fem en la direcció de la velocitat inicial de la càrrega, \vec{v}_0 . A més, com que $u^3(\tau)$ és una funció monòtona, també podem triar l'origen de τ de manera que $u^3(0) = 0$. En aquest sistema de referència i amb aquests eixos les condicions inicials són $u^\mu(0) = \gamma_0(0, v_0, 0, c)$. I la integració dóna:

$$\left. \begin{aligned} u^1(\tau) &= \gamma_0 v_0 \sin(\omega_0 \tau), & u^2(\tau) &= \gamma_0 v_0 \cos(\omega_0 \tau), \\ u^3(\tau) &= \gamma_0 c \sinh(\alpha \tau), & u^4(\tau) &= \gamma_0 c \cosh(\alpha \tau). \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Una segona integració, triant la posició inicial a l'origen de l'espai i temps, ens dóna la trajectòria:

$$\left. \begin{aligned} x^1(\tau) &= -\frac{\gamma_0 v_0}{\omega_0} (\cos(\omega_0 \tau) - 1), & x^2(\tau) &= \frac{\gamma_0 v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau), \\ x^3(\tau) &= \frac{\gamma_0 c}{\alpha} (\cosh(\alpha \tau) - 1), & x^4(\tau) &= \frac{\gamma_0 c}{\alpha} \sinh(\alpha \tau), \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

que és un moviment helicoidal amb freqüència pròpia ω_0 i amb el pas que creix exponencialment. Si eliminem τ de les dues primeres tenim:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{amb} \quad R = \gamma_0 v_0 / \omega_0.$$

A més, de les dues darreres equacions (9.14) tenim:

$$(z + A)^2 - c^2 t^2 = A^2 \quad \text{amb} \quad A = \gamma_0 c / \alpha,$$

on hem fet el canvi de notació $x^\mu = (x, y, z, ct)$.

9.1.5 Acceleradors de càrregues

Tal com se segueix del quart component de la força de Minkowski (8.16) sobre una càrrega en un camp electromagnètic, l'energia de la càrrega varia segons

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = c \frac{dp^4}{dt} = c \gamma^{-1} f^4 = q \vec{E} \cdot \vec{v},$$

i només el camp elèctric contribueix a aquesta variació. Per tant, la manera més eficaç d'accelerar una càrrega consisteix a aplicar-li un camp elèctric en la direcció del seu moviment o a fer-la passar per un camp elèctric paral·lelament a les línies de camp. Aquest és el principi del funcionament d'un tub de TV i d'un accelerador de Van de Graaff.

Com que el guany d'energia per unitat de longitud és qE el poder de l'accelerador augmenta amb la intensitat del camp elèctric. Però el camp de ruptura posa uns límits al valor màxim del camp elèctric que es pot aconseguir i aquesta mena d'acceleradors tenen un límit d'energia d'uns 20 MeV. (Per a un electró això representa una velocitat de $0,9997c$ i per a un protó, $0,2033c$.)

Per accelerar càrregues fins a energies més grans cal recórrer a l'acceleració ressonant, en els acceleradors lineals o *linac's*. Les càrregues injectades en un extrem es fan passar per una successió de tubs metàl·lics buits (tubs guia), que estan connectats alternadament a cada born d'un generador de radiofreqüència. Com que els tubs són conductors, l'espai interior de cada un és pràcticament equipotencial i la càrrega s'hi mou a velocitat constant per la seva inèrcia. Com que cada parell de tubs consecutius estan a potencials diferents, en l'espai buit entre cada dos tubs hi ha un camp elèctric, amb un sentit diferent d'un espai al següent (vegeu la figura 9.1).

Si els potencials dels tubs no fossin variables, la càrrega s'acceleraria en un espai buit i es frenaria en el següent, segons quin fos el sentit del camp elèctric que s'hi trobés. Però gràcies al generador de radiofreqüència cada tub està sotmès a un potencial altern i el sentit del camp elèctric en cada espai també es va alternant amb el temps.

Si la polaritat varia amb una freqüència adient, mentre la càrrega circula per l'espai apantallat de dins del tub després d'haver estat accelerada en l'espai buit

precedent perquè l'orientació del camp era favorable, la polaritat canvia de manera que en sortir al buit següent es torna a trobar el camp elèctric a favor. Resumit, en un semiperíode de la radiofreqüència la càrrega ha de recórrer un espai buit i el tub següent. Com que la càrrega va cada cop més de pressa, aquesta distància, tub més espai, ha de ser més llarga com més al final de l'accelerador siguem. (Vegeu el problema 9.5.)

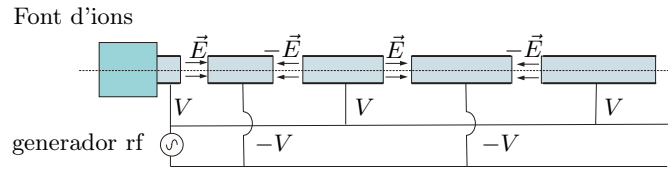


Figura 9.1. Esquema d'un accelerador lineal

Amb el primer *linac*, construït per Wideröe (1928) segons una idea d'Ising (1924), s'acceleraven ions K^+ a 50 keV. Tenia dues seccions, amb un potencial de radiofreqüència de 25 kV a 1 MHz. I ja l'any 1931 Sloan i Lawrence van accelerar ions Hg^+ a 1,2 MeV amb un accelerador de 30 seccions amb un potencial de 42 000 V a 10 MHz.

Per obtenir grans energies s'ha d'augmentar el nombre de seccions i l'aparell es fa massa llarg, llevat que s'augmenti la radiofreqüència. En l'actualitat el més gran és SLAC (de *Stanford Linear Accelerator Center*), que té una longitud de dues milles i accelera electrons i positrons a 50 GeV. A part de l'aplicació a la recerca en física de partícules, els acceleradors lineals d'electrons tenen una gran aplicació en medicina.

Per evitar les dificultats tecnològiques de construir un accelerador lineal, en la dècada de 1930 va prosperar una idea de Lawrence (1929), el *ciclotró*, que resol·lia en part aquests problemes. Consisteix en dos elèctrodes buits en forma de D gairebé plana (vegeu la figura 9.2), immersos en un camp magnètic \vec{B} uniforme i perpendicular, i sotmesos a una polaritat alternant regulada per un generador de radiofreqüència. El moviment de la càrrega injectada en el dispositiu té dos règims que s'alternen: un d'acceleració lineal que es produeix en l'espai entre les D (és atreta per la D a la qual es dirigeix i repel·lida per l'altra), i un de moviment semicircular uniforme en l'interior de cada D, des que hi entra fins que en surt.

Si V és la diferència de potencial entre les cavitats, en cada impuls l'energia cinètica de la càrrega augmenta en $\Delta\mathcal{E} = qV$, mentre que en cada tram semicircular $\mathcal{E} = mc^2\gamma$ és constant, la velocitat angular és la de Larmor (9.9):

$$\omega_L = \frac{qBc^2}{\mathcal{E}},$$

i el radi R del semicercle és (9.10):

$$R = \frac{\mathcal{E}v}{qBc^2}.$$

Notem que R augmenta amb l'energia, \mathcal{E} , i per tant a cada impuls rebut en el pas d'una D a l'altra. D'aquí que les càrregues alliberades en la part central segueixin una trajectòria en forma espiral cap a la part exterior de la carcassa (vegeu la figura 9.2), on abandonen l'accelerador per dirigir-se al collisionador.

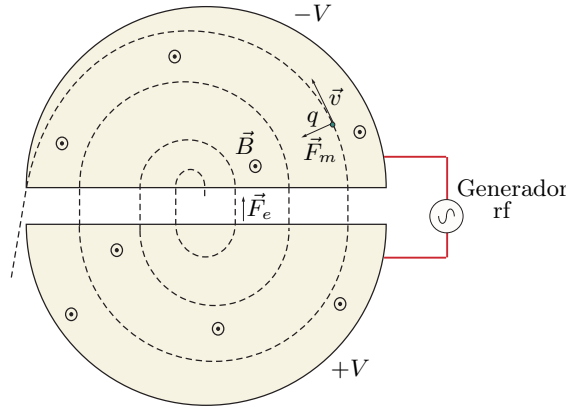


Figura 9.2. Esquema d'un ciclotró. El camp magnètic actua dins de les D i fa que la trajectòria hi sigui semicircular. En els espais buits entre les cavitats hi actua la diferència de potencial que accelera la partícula. En la figura la càrrega és positiva i el camp \vec{B} és perpendicular al pla del paper i va cap dins

A fi que els impulsos es donin en el moment precís i es produeixi l'acceleració ressonant, cal que la polaritat de les D es vagi alternant, de manera que tingui el mateix signe que la càrrega quan aquesta l'abandona i signe contrari quan la càrrega s'hi dirigeix. La polaritat dels elèctrodes ha de canviar cada

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_L} = \frac{\pi\mathcal{E}}{qBc^2}.$$

A baixes energies, $\mathcal{E} \approx mc^2$, i la freqüència amb què ha de canviar la polaritat és pràcticament constant, però a mesura que la càrrega s'accelera, la freqüència de Larmor va disminuint i deixa d'estar en ressonància amb la radiofreqüència. Això posa un límit per al funcionament del ciclotró, que correspon a una energia cinètica d'uns 25 MeV per als protons i uns 50 MeV per als deuterons ($\gamma \approx 1,027$ i $v = 0,226c$). Per la mateixa raó, el ciclotró tampoc no va bé per accelerar electrons, perquè són molt lleugers, $mc^2 = 0,511$ MeV, i amb relativament poca energia arriben al règim relativista.

Per accelerar una càrrega a energies més altes, amb un factor γ gran, s'ha de tenir en compte que ω_L depèn de \mathcal{E} . Aquest problema es va resoldre amb el *sincrociclotró*, modulant la radiofreqüència, de manera que es compensi la disminució de ω_L i es mantingui el sincronisme.

Una altra solució és el *sincrotró*. La càrrega segueix una trajectòria aproximadament fixa, independent de l'energia, formada per trams rectilinis units per arcs de circumferència. En els trams rectilinis la càrrega és accelerada per un camp elèctric oscil·lant a una certa radiofreqüència. En els trams corbats la càrrega es mou sota l'acció d'un camp magnètic, que ha d'anar augmentant amb l'energia de la càrrega perquè el radi R es mantingui fix. A més, la radiofreqüència s'adapta a la freqüència de revolució.

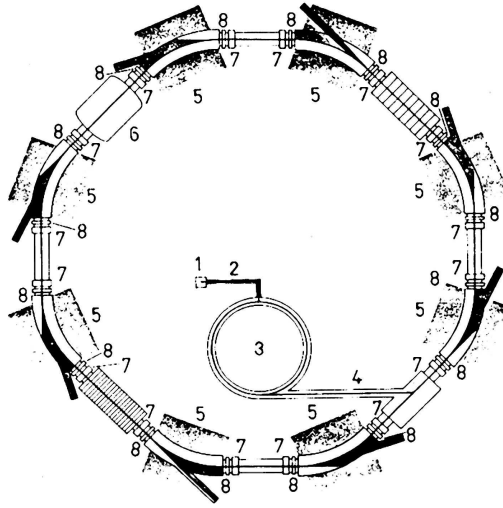


Figura 9.3. Esquema bàsic d'un sincrotró. (1) Font de partícules. (2) Accelerador lineal injector. (3) Preaccelerador. (4) Línia de transferència al sincrotró acumulador. (5) Imants dipolars de curvatura. (6) Cavitat acceleradora de radiofreqüència. (7, 8) Imants de correcció com a quadrupols i sextupols

Els *anells d'emmagatzematge* són una variant dels sincrotrons en els quals circulen les càrregues i es mantenen a la mateixa energia. A cada volta la càrrega rep un impuls per compensar les pèrdues d'energia per radiació (vegeu l'apartat 11.3).

9.2 Moviment en un camp magnètic no uniforme

En general els camps \vec{E} i \vec{B} no són uniformes. Llavors les equacions del moviment no es poden resoldre exactament i s'ha de recórrer als mètodes d'integració

aproximada. Aquest és el cas del moviment de les càrregues en un sincrotró real, dels electrons en un microscopi electrònic, etc.

Tot seguit estudiarem amb un cert detall l'efecte *mirall magnètic*, per l'interès de les seves aplicacions. Considerem un camp magnètic lleugerament no uniforme, que podrem aproximar per:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b},$$

un camp uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \hat{k}$ en la direcció que prenem com a eix Z més una pertorbació $|\vec{b}| \ll B_0$.

El moviment d'una càrrega en aquest camp magnètic es pot descriure en primera aproximació per la trajectòria helicoidal que hem vist a la secció 9.1.2 i que resulta de la composició de dos moviments:

- (a) un de rotació al voltant de l'eix Z amb velocitat angular ω_L i radi $\rho = v_{0\perp}/\omega_L$, i
- (b) l'altre de deriva al llarg de l'eix Z a la velocitat constant $v_{0\parallel}$,

on $v_{0\perp}$ i $v_{0\parallel}$ són els components de la velocitat inicial v_0 transversal i longitudinal respecte a \vec{B}_0 , respectivament.

Prop de l'eix de l'hèlix, que prendrem com a eix Z d'un sistema de coordenades cilíndriques, la pertorbació \vec{b} es pot expressar així:

$$\vec{b} = b_3 \vec{z} + b_1 \vec{\rho} + b_2 \vec{\varphi} + O(2),$$

on b_1 , b_2 i b_3 són constants, $\vec{\rho} = (x, y, 0)$, $\vec{\varphi} = (-y, x, 0)$, $\vec{z} = (0, 0, z)$ i $O(2)$ vol dir termes quadràtics en les variables z i $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La pertorbació \vec{b} no pren qualsevol valor, ja que el camp magnètic \vec{B} ha de satisfer $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (sempre) i també $\nabla \times \vec{B} = 0$ (en absència de corrents). D'aquí se segueix que:

$$\vec{b} = -2b_1 z \hat{k} + b_1 \vec{\rho} + O(2). \quad (9.15)$$

Per tant, en regions d'una dimensió L prou petita ($L \ll |B_0/b_1|$), podrem negligir els termes de segon ordre.

Com que el camp magnètic no és uniforme, el moviment de deriva en la direcció Z té una acceleració:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \hat{k} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \frac{q}{m} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \hat{k} \approx \frac{q}{m} \vec{b} \cdot (\hat{k} \times \vec{v}_0)$$

i, d'acord amb (9.15), tenim que:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} \approx \frac{q^2 B_0 \rho^2}{m^2} b_1. \quad (9.16)$$

Així,

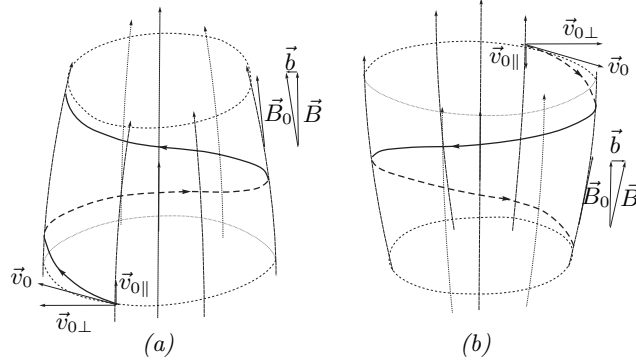


Figura 9.4. Moviment d'una càrrega en un camp magnètic lleugerament no uniforme: (a) quan el camp es fa més intens d'acord amb la deriva del moviment helicoidal i (b) quan es fa menys intens

- (a) si $b_1 < 0$, tenim un espectre de línies de camp magnètic com la de la figura 9.4.a i $\dot{z} < 0$, mentre que
- (b) si $b_1 > 0$, tenim un espectre de línies de camp magnètic com la de la figura 9.4.b i $\dot{z} > 0$.

En el cas (a), una càrrega amb velocitat inicial $\dot{z}_0 = v_{0\parallel} > 0$ experimenta una frenada constant a mesura que avança cap a regions en què el camp és més intens. En el cas (b), si la deriva inicial és $\dot{z}_0 = v_{0\parallel} < 0$, també és frenada a mesura que va cap a regions en què la densitat de línies d'inducció és més gran.

Si la deriva de la càrrega en el seu moviment helicoidal l'aproxima a una regió en què el camp magnètic és més intens —més densitat de línies de camp— aquest moviment de deriva es frena. Fins i tot es pot arribar a invertir i llavors el moviment helicoidal de la càrrega té una deriva en sentit invers. Aquest efecte no depèn del signe de la càrrega q i es coneix amb el nom de *mirall magnètic*.

Aquesta és, de forma simplificada, la dinàmica de les partícules carregades que incideixen sobre la Terra procedents del Sol. El camp magnètic terrestre, més intens prop de la superfície terrestre, impedeix que la major part d'aquestes càrregues hi arribi i les atrapa en els anomenats *cinturons de Van Allen*.

Una combinació de dos miralls magnètics és també el fonament de les ampolles magnètiques, emprades en el confinament magnètic del plasma en un reactor de fusió.

9.3 Formulació lagrangiana i hamiltoniana

Si negligim els efectes associats a la radiació que tractarem en el capítol 10, l'equació (9.1), o la seva forma covariant (9.2), és suficient per descriure el moviment general d'una partícula de prova en un camp electromagnètic extern. Tanmateix,

i pensant en desenvolupaments teòrics més avançats, com ara la formulació d'una teoria quàntica i de la mecànica estadística, és útil trobar els formalismes lagrangiana i hamiltoniana corresponents a aquestes equacions de moviment. Aquests formalismes ens permetran també usar mètodes d'integració de la mecànica clàssica com ara les lleis de conservació i la teoria de pertorbacions.

9.3.1 Lagrangiana d'una càrrega puntual

La derivació de les equacions del moviment (9.1) a partir d'una lagrangiana se simplifica si les escrivim com a:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) - q\vec{E} - q\vec{v} \times \vec{B} = 0, \quad (9.17)$$

on $\vec{E}(\vec{x}, t)$ i $\vec{B}(\vec{x}, t)$ poden dependre de la posició i el temps.

La lagrangiana que busquem és una funció $L(\vec{x}, \vec{v}, t)$, de la qual s'han de derivar les equacions (9.17) per mitjà de l'operador d'Euler-Lagrange:

$$\mathcal{E}^i[L] \equiv \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} L = 0.$$

És obvi que si descomponem la lagrangiana en dues parts: $L = L_0(\vec{v}) + q L_1(\vec{x}, \vec{v}, t)$, on $L_0(\vec{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ és la lagrangiana de la partícula lliure (5.70), llavors la part que dóna compte de la interacció ha de complir:

$$\mathcal{E}^i[L_1] = -E^i - (\vec{v} \times \vec{B})^i. \quad (9.18)$$

Si ara utilitzem les relacions (8.34) i (8.35) entre els camps \vec{E} i \vec{B} , i els potencials \vec{A} i ϕ , tindrem que:

$$\begin{aligned} -E_i - (\vec{v} \times \vec{B})_i &= \partial_i \phi + \partial_t A_i - [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_i \\ &= \frac{d}{dt} A_i(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial x^i} [\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \phi(\vec{x}, t)] \end{aligned}$$

d'on se segueix que:

$$L_1(\vec{x}, \vec{v}, t) = \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \phi(\vec{x}, t)$$

és una solució de (9.18).

En conseqüència, les equacions de moviment d'una càrrega puntual es poden derivar de la lagrangiana:

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + q [\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \phi(\vec{x}, t)]. \quad (9.19)$$

Convé notar que aquesta funció i la lagrangiana no relativista per al mateix problema només difereixen en els termes d'energia cinètica: $-mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ en el

cas relativista i $mv^2/2$ en el cas no relativista. Els termes d'interacció són els mateixos en tots dos casos.

La lagrangiana (9.19) no és un escalar de Lorentz perquè el paràmetre t no ho és. Encara que l'acció que se'n deriva sí que ho és, com hem vist a (5.8.1). La forma covariant de la lagrangiana es pot obtenir canviant el paràmetre t per un paràmetre invariant λ i obtenim:

$$L^* = L \frac{dt}{d\lambda},$$

que, substituït a (9.19) i usant (8.36) ens porta a:

$$L^*(x, \dot{x}) = -mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + q A_\mu(x^\rho) \dot{x}^\mu, \quad (9.20)$$

on el punt indica la derivada respecte al paràmetre invariant λ . Com ja hem notat a la secció 8.4, el potencial $A_\mu(x)$ que descriu una situació física no és únic. La transformació de galga (8.38) dóna un quadripotencial, $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$, físicament equivalent per a qualsevol $f(x)$. La lagrangiana corresponent, \tilde{L}^* , diferirà de la lagrangiana (9.20) en:

$$\tilde{L}^* - L^* = q (\tilde{A}_\mu - A_\mu) \dot{x}^\mu = q \partial_\mu f \dot{x}^\mu = \frac{d}{d\lambda} [q f(x)]$$

(una derivada total respecte del paràmetre λ). Per tant, les lagrangianes L^* i \tilde{L}^* són dinàmicament equivalents.

9.3.2 Formalisme hamiltonià

Per evitar els problemes que comporta la transformació de Legendre per a una lagrangiana singular com ara la (9.20), com ja hem comentat a la secció (5.8) construirem el formalisme hamiltonià a partir de la lagrangiana no covariant (9.19). La transformada de Legendre defineix el moment conjugat de la coordenada x^i com a:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = m\gamma v_i + q A_i(\vec{x}, t). \quad (9.21)$$

(Notem que el moment P_i no coincideix ara amb el component i -èsim de la quantitat de moviment.)

La hamiltoniana s'obté d'aïllar les variables $v_i(\vec{P}, \vec{x}, t)$ de les equacions anteriors i substituir-les en:

$$H = \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L(\vec{x}, \vec{v}, t) = m\gamma c^2 + q\phi. \quad (9.22)$$

Per obtenir γ en funció de \vec{P} utilitzarem la identitat $\gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$, de la qual se segueix que:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \gamma^2 v^2}.$$

D'altra banda, de la transformació de Legendre (9.21) tenim:

$$\gamma^2 v^2 = \frac{1}{m^2} \left(\vec{P} - q\vec{A} \right)^2 ,$$

de manera que, substituint aquestes igualtats en (9.22), arribem fàcilment a:

$$H = \sqrt{c^2 \left(\vec{P} - q\vec{A} \right)^2 + m^2 c^4} + q\phi . \quad (9.23)$$

Les equacions de Hamilton

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{c^2 (P^i - qA^i)}{\sqrt{c^2 (\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2 c^4}} , \\ \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{qc^2 (\vec{P} - q\vec{A}) \cdot \partial_i \vec{A}}{\sqrt{c^2 (\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2 c^4}} - q\partial_i \phi , \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

són equivalents a les equacions de moviment (9.1) i es poden expressar en forma genèrica en termes dels parèntesis de Poisson. Així, per a qualsevol $f(\vec{x}, \vec{P}, t)$ tenim:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \partial_t f , \quad (9.25)$$

on el parèntesi de Poisson està definit per (5.84).

9.3.3 Moviment en un camp elèctric central

Com a exemple de la utilitat d'aquests formalismes de la mecànica clàssica resoldrem el moviment d'una partícula en un camp elèctric central coulombià. En aquest cas el camp magnètic és nul i el camp elèctric és el gradient (canviat de signe) d'un potencial estàtic central:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|} . \quad (9.26)$$

El potencial vector és nul, $\vec{A} = 0$, i la lagrangiana (9.19) és:

$$L = -mc\sqrt{c^2 - v^2} - \frac{\alpha}{|\vec{x}|} \quad \text{on} \quad \alpha = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} . \quad (9.27)$$

Com que aquesta lagrangiana és invariant per rotacions d'espai, pel teorema de Noether es conservarà el moment angular

$$\vec{l} = \vec{x} \times m\gamma\vec{v} . \quad (9.28)$$

Per això la direcció ortogonal a \vec{x} i \vec{v} serà sempre la mateixa, la trajectòria tindrà lloc en un pla que triarem com el pla XY . Dit en altres paraules: donades la posició i la velocitat inicials, ja queda determinat el pla on tindrà lloc el moviment.

Prendrem els eixos de manera que l'eix Z sigui paral·lel a $\vec{x}_0 \times \vec{v}_0$. Si utilitzem les coordenades polars cilíndriques corresponents a aquests eixos, tenim $\vec{x} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$, on ja s'ha tingut en compte que la trajectòria té lloc en el pla XY . En aquestes coordenades la lagrangiana (9.27) s'escriu així:

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (9.29)$$

La coordenada φ és cíclica i porta associada la integral de moviment

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mcr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{c^2 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2}}, \quad (9.30)$$

que és el mòdul del moment angular (9.28).

A més, com que L no depèn explícitament de t , l'energia

$$\mathcal{E} = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2}} + \frac{\alpha}{r} \quad (9.31)$$

també és una integral de moviment.

Si combinem (9.30) i (9.31), podem aïllar $\dot{\varphi}$ i \dot{r} en funció de les constants \mathcal{E} i l . Així tenim:

$$\dot{\varphi} = \frac{lc^2}{r^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1}, \quad (9.32)$$

$$\dot{r} = \pm c \sqrt{1 - \left(m^2 c^4 + \frac{l^2 c^2}{r^2} \right) \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^{-2}}. \quad (9.33)$$

D'aquesta manera el problema ha quedat reduït a quadratures. En efecte, de (9.33) tenim:

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{c \sqrt{1 - \left(m^2 c^4 + \frac{l^2 c^2}{r^2} \right) \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^{-2}}}, \quad (9.34)$$

on haurem de prendre \pm alternativament segons que r augmenti o disminueixi, és a dir, segons si la càrrega s'allunya o s'acosta al centre del camp coulombià.

Per determinar la forma geomètrica de la trajectòria fem el quocient de (9.33) i (9.32) i tenim:

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r^2}{lc} \sqrt{\left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \left(m^2 c^4 + \frac{l^2 c^2}{r^2} \right)}. \quad (9.35)$$

9.4 Partícula amb moment magnètic

Ja hem comentat a la secció 5.6 que representar un cos carregat per una càrrega puntual pot resultar de vegades una simplificació excessiva. En aquests casos hem de pensar en una distribució de càrrega en una regió de l'espai que és petita si la comparem amb les distàncies a altres cossos i, a més de la càrrega i la massa totals, hem de representar el cos pel moment dipolar elèctric \vec{l} i el moment dipolar magnètic \vec{m} .

El model clàssic més senzill consisteix a considerar el cos en el sistema instantàniament comòbil \mathcal{S}_τ^\dagger com una esfera rígida, amb una distribució simètrica de càrrega, i així $\vec{l}^\dagger = 0$. Aquesta distribució de càrrega, animada del moviment de rotació associat a l'spin \vec{s}^\dagger , dóna lloc a un corrent en el sistema \mathcal{S}^\dagger que es manifesta en el moment magnètic:

$$\vec{m}^\dagger = g \frac{q}{2m} \vec{s}^\dagger, \quad (9.36)$$

on $gq/2m$ s'anomena *raó giromagnètica* i depèn de la distribució de càrrega i la massa en el model d'esfera rígida.

La relació anterior es pot prendre també com una llei fenomenològica que val per a partícules carregades més enllà de la validesa del model mecànic rígid que hem usat per justificar-la. Així, és vàlida per a partícules subatòmiques com ara l'electró i el protó i també per al neutró, tot i que en aquest cas es tracti d'una partícula neutra. En aquests casos, el factor g de la raó giromagnètica es pot explicar en el marc de l'electrodinàmica quàntica i els valors mesurats són:¹

$$g_e = 2,0023193043738(82), \quad g_p = 2,792847337(29), \quad g_n = -1,91304272(45).$$

En un camp magnètic extern, una partícula amb moment magnètic experimentarà un parell de moment no nul i, per tant, el moment angular de spin variarà d'acord amb l'equació (5.57) amb $N^\mu \neq 0$.

Per determinar el valor d'aquest moment extern, suposarem que en un sistema inercial \mathcal{S}_τ^\dagger instantàniament comòbil amb la partícula val la llei newtoniana:

$$\vec{N}^\dagger = \vec{m}^\dagger \times \vec{B}^\dagger \quad (9.37)$$

i $N^{4\dagger} = 0$, tal com es desprèn de l'equació (5.51). D'acord amb l'equació (5.57), N^μ ha de ser un quadrivector i estarà totalment determinat per els seus quatre components en el sistema \mathcal{S}_τ^\dagger . D'altra banda, segons es desprèn de (9.37), podem expressar N^μ en funció del moment magnètic m^μ i del tensor de Faraday $F^{\nu\alpha}$. Un possible candidat seria la contracció $F^\mu_\nu m^\nu$, perquè en \mathcal{S}_τ^\dagger té els components espacials que busquem:

$$(F^\mu_\nu m^\nu)^\dagger = (F^\mu_j)^\dagger m^{j\dagger} = (\vec{m}^\dagger \times \vec{B}^\dagger)^i.$$

¹HAGIWARA, K. et al., Particle Data Group, *Phys. Rev.*, **D 66**, 010001 (2002).

Tanmateix, el component temporal no és nul

$$(F_{\nu}^4 m^{\nu})^{\dagger} = (F_j^4)^{\dagger} m^{j\dagger} = \frac{1}{c} \vec{E}^{\dagger} \cdot \vec{m}^{\dagger} \neq 0$$

i per això l'hem de corregir i quedar-nos amb:

$$N^{\mu} = F_{\nu}^{\mu} m^{\nu} + \frac{u^{\mu}}{c^2} u^{\alpha} F_{\alpha\nu} m^{\nu}, \quad (9.38)$$

que sí que té els components demanats en el sistema instantàniament comòbil.

Així, l'equació de moviment de l'spin (5.57) per a una partícula amb moment magnètic queda:

$$\frac{ds^{\mu}}{d\tau} = F_{\nu}^{\mu} m^{\nu} + \frac{u^{\mu}}{c^2} (b_{\nu} s^{\nu} + u^{\alpha} F_{\alpha\nu} m^{\nu}). \quad (9.39)$$

Si la relació entre el moment magnètic i l'spin és la (9.36), tindrem:

$$\frac{ds^{\mu}}{d\tau} = g \frac{q}{2m} F_{\nu}^{\mu} s^{\nu} + \frac{u^{\mu}}{c^2} \left(b_{\nu} - g \frac{q}{2m} F_{\nu\alpha} u^{\alpha} \right) s^{\nu}.$$

I si finalment utilitzem l'equació del moviment (9.2) que ens dona l'acceleració pròpia d'una càrrega puntual, arribem a:

$$\frac{ds^{\mu}}{d\tau} = g \frac{q}{2m} F_{\nu}^{\mu} s^{\nu} + \frac{q}{m} \frac{u^{\mu}}{c^2} s^{\nu} F_{\nu\alpha} u^{\alpha} \left(1 - \frac{g}{2} \right), \quad (9.40)$$

que es coneix com a *equació de Bargman, Michel i Telegdi*.² Notem que $s^{\mu} \dot{s}_{\mu} = 0$ i per tant $s^{\mu} s_{\mu} \equiv s^2$ és constant.

Aquesta equació s'utilitza per predir l'evolució de l'spin en moltes situacions pràctiques de la física de partícules elementals. Per ser més precisos, el que s'utilitza és la variable *polarització*, que és el component de l'spin en la direcció del moviment. Per a això considerarem un quadrivector unitari, ortogonal a u^{μ} i amb la part espacial paral·lela a \vec{v} (vegeu el problema 4.8):

$$l^{\mu} = \gamma(\hat{v}, \beta), \quad \text{que compleix} \quad l^{\mu} u_{\mu} = 0, \quad l^{\mu} l_{\mu} = 1.$$

La polarització és el component de l'spin paral·lel a l^{μ} .

Com ja hem vist a la secció 5.6 l'spin s^{μ} és ortogonal a u^{μ} i es podrà expressar com a:

$$s^{\mu} = s \cos \phi l^{\mu} + s \sin \phi w^{\mu},$$

on w^{μ} és un quadrivector unitari en la direcció del component de l'spin ortogonal a l^{μ} . És obvi que: $w^{\mu} = (\hat{w}, 0)$, amb \hat{w} unitari i ortogonal a \hat{v} . (Vegeu la figura 9.5.)

²BARGMANN, V., MICHEL, L., i TELEGDİ, V. L., *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 435 (1959).

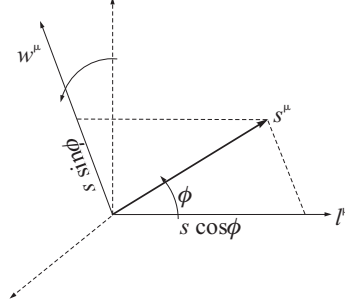


Figura 9.5. Representació de l'spin en l'espai de quadrivectors ortogonals a u^μ . Els canvis en ϕ signifiquen que la polarització varia. A més, el component ortogonal w^μ pot tenir un moviment de precessió

Si tenim en compte que s és constant, l'evolució de la direcció de l'spin és:

$$\frac{1}{s} \dot{s}^\mu = \cos \phi \dot{l}^\mu + \sin \phi \dot{w}^\mu - \dot{\phi} \sin \phi l^\mu + \dot{\phi} \cos \phi w^\mu, \quad (9.41)$$

on $\dot{\phi}$ dóna el canvi en la polarització i \dot{w}^μ dóna la precessió (cal tenir present que el canvi en \hat{w} es produeix per la precessió i, si la direcció del moviment canvia, \hat{w} s'ha de mantenir perpendicular a \hat{v}). Si projectem aquesta equació sobre l^μ , tenim:

$$-\dot{\phi} \sin \phi = \frac{1}{s} \dot{s}^\mu l_\mu + \sin \phi w^\mu \dot{l}_\mu,$$

on hem tingut en compte que $\dot{w}^\mu l_\mu + w^\mu \dot{l}_\mu = 0$. Si ara derivem l^μ , obtenim $w^\mu \dot{l}_\mu = \vec{l} \cdot \dot{\hat{w}}/v$ i, finalment, usant (9.40) i els components d'espai de (9.2) arribem a:

$$\Omega_1 \equiv \frac{1}{\gamma} \dot{\phi} = \frac{q}{m} \left[\left(\frac{g\beta}{2} - \frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{c} \hat{w} \cdot \vec{E} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \vec{B} \cdot (\hat{v} \times \hat{w}) \right]. \quad (9.42)$$

Per determinar la precessió de \hat{w} al voltant de \hat{v} , completem la base de quadrivectors: u^μ , l^μ , w^μ i t^μ , amb $t^\mu = (\hat{v} \times \hat{w}, 0)$. Com que es tracta d'una base ortogonal i $w^\mu w_\mu = 1$, tenim que:

$$\dot{w}^\mu = \frac{1}{c^2} (w^\rho \dot{b}_\rho) u^\mu - (w^\rho \dot{l}_\rho) l^\mu + \gamma \Omega_2 t^\mu,$$

on Ω_2 s'ha de determinar. (Si analitzem el component espacial de l'equació anterior veiem com el primer terme de la dreta reflecteix el canvi de direcció de \hat{v} , mentre que el segon està associat a la precessió.)

Si ara utilitzem (9.41), arribem a:

$$\Omega_2 = \frac{1}{\gamma} t_\mu \dot{w}^\mu = \frac{1}{\sin \phi} t_\mu \left[\frac{1}{s} \dot{s}^\mu - \cos \phi \dot{l}^\mu \right],$$

que, si usem (9.40) i els components d'espai de (9.2), dóna finalment:

$$\Omega_2 = \frac{q}{m} \cot \phi \left[\left(\frac{g}{2} - 1 \right) \vec{B} \cdot \hat{w} + \left(\frac{g\beta}{2} - \frac{1}{\beta} \right) \frac{\vec{E}}{c} \cdot (\hat{v} \times \hat{w}) \right] - \frac{gq}{2m\gamma} \vec{B} \cdot \hat{v}.$$

Alguns casos particulars interessants

- $\vec{E} \parallel \vec{B} \parallel \hat{v}$ No canvia la polarització: $\Omega_1 = 0$ i té una precessió a $\Omega_2 = \frac{g}{2} \omega_L$, on ω_L és la freqüència de Larmor, (9.9).

- $\vec{E} = 0$ i $\vec{B} \perp \hat{v}$ (Moviment circular)

$$\Omega_1 = \frac{q}{m} \left(1 - \frac{g}{2} \right) \vec{B} \cdot (\hat{v} \times \hat{w}) \qquad \Omega_2 = \frac{q}{m} \cot \phi \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \vec{B} \cdot \hat{w}$$

- $\vec{E} \parallel \hat{w}$, $\vec{B} = 0$ No hi ha precessió: $\Omega_2 = 0$ i

$$\Omega_1 = \frac{qE}{mc} \left(\frac{g\beta}{2} - \frac{1}{\beta} \right)$$

Problemes

- 9.1 Calculeu la força, en el sistema del laboratori, entre dos electrons que es mouen en trajectòries paral·leles separades 1 mm si: (a) cada un d'ells té una energia cinètica d'1 eV i (b) cada un d'ells té una energia cinètica d'1 milió de eV.

$$(m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}, e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

- 9.2 Quant val l'acceleració newtoniana $d^2\vec{x}/dt^2$ d'una partícula de massa m i càrrega q en un camp electromagnètic, \vec{E} i \vec{B} .

- 9.3 Una partícula de càrrega q i massa m es mou circularment amb un radi R en el si d'un camp \vec{B} constant. (a) Determineu \vec{B} en funció de q , m , R i la velocitat angular. La velocitat de la partícula és constant perquè el camp magnètic no fa treball. No obstant això, un observador que es mogui perpendicularment a \vec{B} no ho veu així. (b) Calculeu com depèn del temps l'energia mesurada per aquest observador i comproveu que és compatible amb el treball fet pel camp elèctric que apareix en el sistema de referència de l'observador.

- 9.4 Donada l'energia \mathcal{E} , el radi de la circumferència i la massa d'una partícula carregada que es mou en el si d'un camp magnètic constant, demostreu que la freqüència angular es pot escriure

$$\omega = \frac{c}{R\mathcal{E}} \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}.$$

Quant val el camp magnètic necessari?

- 9.5 En un accelerador de partícules lineal com el de l'apartat 9.1.5 una càrrega inicialment en repòs passa per una successió de tubs equidistants i de polaritat alternant (figura 9.1). Supposeu que entre cada parell de tubs hi ha una diferència de potencial V i que la distància entre tubs és negligible comparada amb la seva longitud.

- Si alternem la polaritat dels tubs amb una freqüència constant ω , quina ha de ser la longitud del tub n -èsim perquè la partícula sempre sigui accelerada en el mateix sentit en els espais entre els tubs.
- Compareu les longituds dels tubs inicials (partícula no relativista) amb les longituds dels tubs finals quan la partícula és molt relativista i interpreteu-ne els resultats.

- 9.6 Una càrrega puntual q de massa m es mou en el laboratori en una regió en què hi ha uns camps elèctric \vec{E} i magnètic \vec{B} , perpendiculars entre si, estàtics, uniformes i tals que $[c^{-1}|\vec{E}| < |\vec{B}|$.

- Passeu a un sistema de referència en què un dels dos camps s'anul·li.

- (b) Solucioneu l'equació del moviment de la partícula en aquest sistema.
- (c) Doneu l'equació de la trajectòria en el laboratori.

9.7 En un sistema de referència inercial tenim un condensador de longitud l orientat perpendicularment a l'eix OY . En l'instant $t = 0$ una partícula de càrrega q i massa m , amb energia total \mathcal{E}_0 i quantitat de moviment \vec{p}_0 dirigit segons l'eix OX , entra en el condensador. Sigui T el temps que triga la càrrega a travessar el condensador. Demostreu que:

- (a) En l'instant $t < T$ l'energia es pot posar en la forma:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sqrt{1 + a^2 t^2},$$

on a és un paràmetre que depèn de q , E , \mathcal{E}_0 i c .

- (b) Expressen els components de la velocitat \vec{v} en funció del temps per a $t < T$.
- (c) Deduïu les equacions paramètriques de la trajectòria $x(t)$ i $y(t)$.
- (d) Expressen T en funció de c , q , l , E i \mathcal{E}_0 .
- (e) Determineu la desviació θ de la càrrega en sortir del condensador.

9.8 En l'instant $t = 0$ una partícula de càrrega q i massa m és a l'origen d'un sistema de referència inercial, amb energia \mathcal{E}_0 i quantitat de moviment \vec{p}_0 en la direcció de l'eix Y . Hi ha un camp electromagnètic constant i uniforme, amb els vectors \vec{E} i \vec{B} paral·lels entre ells i perpendiculars a \vec{p}_0 . Demostreu que:

- (a) El quadrat de l'impuls varia amb el temps segons la llei: $p^2 = p_0^2 + q^2 E^2 t^2$.
- (b) L'energia varia com:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cosh \left[\frac{E}{Bc} \theta(t) \right], \quad \text{on} \quad \sinh \left[\frac{E}{Bc} \theta(t) \right] = \frac{cqEt}{\mathcal{E}_0}.$$

- (c) Demostreu que, si prenem l'eix OZ en la direcció dels camps \vec{E} i \vec{B} , llavors: $p_1 + ip_2 = ip_0 e^{-i\theta}$.
- (d) Trobeu les equacions paramètriques $x(\theta)$, $y(\theta)$ i $z(\theta)$ de la trajectòria de la partícula.

9.9 Un accelerador lineal produeix un feix d'electrons amb una energia de 100 MeV. El feix no és continu, sinó que està format per impulsos de duració 25×10^{-12} s que contenen $3,0 \times 10^9$ electrons cada un. A la sortida de l'accelerador, el feix té un radi de 5,0 mm i segueix un moviment rectilini i uniforme. Com que els electrons es repellen, el feix s'anirà fent cada cop més ample (divergirà). Usarem un model simplificat en què cada impuls és un cilindre que es mou longitudinalment en la direcció del seu eix, amb una densitat de càrrega elèctrica interior uniforme.

- (a) Calculeu la longitud, el radi i la densitat lineal de càrrega d'un impuls a la sortida de l'accelerador, en el sistema comòbil amb els electrons.
- (b) Per determinar la divergència del feix, estudiarem el moviment dels electrons de la superfície lateral del cilindre en el sistema \mathcal{S}^* comòbil amb el feix. Imagineu un cilindre infinit amb densitat lineal de càrrega fixa. Quina força actua sobre un electró posat a una distància r de l'eix? Si l'electró està inicialment en repòs a una distància r_0 , integreu l'equació de moviment per saber quant triga a arribar a una distància r_1 . (Suposeu que el moviment de l'electró a \mathcal{S}^* és no relativista).
- (c) Utilitzeu aquests resultats per determinar quant triga un impuls a tenir un radi de 2 cm des que ha sortit de l'accelerador. És correcte suposar que el moviment de l'electró en \mathcal{S}^* és no relativista?

(Dades: $m_e = 0,511$ MeV, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m²/C²)

Capítol 10

Solució de les equacions de Maxwell

Ens plantegem trobar el camp electromagnètic produït per una distribució coneguda de càrregues i corrents. Utilitzarem les equacions del potencial electromagnètic en la galga de Lorenz perquè són particularment simples. Suposarem que els valors del quadripotencial electromagnètic a qualsevol punt de l'espai són coneguts per a un instant inicial.

10.1 Problema de valors inicials. Funció de Green

En la galga de Lorenz (8.40) el quadripotencial electromagnètic A^μ satisfà l'equació (8.41)

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\mu_0 j^\mu, \quad (10.1)$$

juntament amb la condició de galga (8.40): $\partial_\mu A^\mu = 0$. Trobarem primer la solució general de l'equació (10.1) i després en seleccionarem aquelles que satisfan la condició de galga de Lorenz.

Es tracta de quatre equacions diferencials en derivades parcials que tenen l'avantatge d'estar desacoblades —cada component A^μ obeeix una equació que no depèn dels altres components— i cada equació es pot resoldre independentment de la resta. A més, totes quatre tenen la mateixa forma:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 A - \vec{\nabla}^2 A = \mu_0 j, \quad (10.2)$$

amb $j(\vec{x}, t)$ donada i la incògnita és $A(\vec{x}, t)$.

Aquesta darrera és una equació d'ona lineal (la incògnita només apareix elevada a la primera potència) i inhomogènia, per la presència del terme independent j . El conjunt de solucions és molt ampli: si a una solució particular de (10.2) li sumem qualsevol solució de l'equació homogènia, obtenim una nova solució de l'equació inhomogènia.

10.1.1 Solucions de l'equació d'ona

Per entendre la gran varietat de solucions d'aquesta equació i fer-se una idea de quines dades calen per seleccionar-ne una, és útil pensar en el model mecànic següent. Considerem un medi continu que ompli l'espai i indiquem cada punt del medi pel lloc de l'espai que ocupa, \vec{x} . Imaginem que $A(\vec{x}, t)$ dóna el «desplaçament» d'una certa magnitud física que varia independentment a cada punt. Tindrem, doncs, un sistema mecànic amb una infinitat de graus de llibertat, un per a cada punt \vec{x} de l'espai. Suposem que l'evolució d'aquest sistema mecànic és governada per l'equació (10.2), que ara escriurem així:

$$\partial_t^2 A(\vec{x}, t) = c^2 \vec{\nabla}^2 A(\vec{x}, t) + c^2 \mu_0 j(\vec{x}, t). \quad (10.3)$$

Si a cada grau de llibertat li atribuïm una «massa» unitat, podem llegir el primer membre d'aquesta equació com a producte de la massa del grau de llibertat \vec{x} per la seva «acceleració» $\partial_t^2 A(\vec{x}, t)$. Per la seva banda, el primer terme del segon membre, $c^2 \vec{\nabla}^2 A(\vec{x}, t)$, depèn dels desplaçaments relatius del grau de llibertat \vec{x} i els seus veïns $\vec{x} + d\vec{x}$ en l'instant t , i es pot interpretar com una força d'interacció entre veïns, mentre que l'últim terme, $c^2 \mu_0 j(\vec{x}, t)$, es pot interpretar com una acció exterior.

Així doncs, podem mirar l'equació (10.3) com l'expressió de la segona llei de Newton per a cada grau de llibertat d'aquest medi continu. Extrapolant el que sabem de mecànica newtoniana, l'evolució del sistema $A(\vec{x}, t)$ queda completament determinada si coneixem els valors inicials del «desplaçament» $A(\vec{x}, 0)$ i de la «velocitat» $\partial_t A(\vec{x}, 0)$ per a cada grau de llibertat.

Trobar la solució de (10.2) per a unes dades inicials conegudes:

$$A(\vec{x}, 0) = u(\vec{x}), \quad \partial_t A(\vec{x}, 0) = v(\vec{x}), \quad (10.4)$$

és el que es coneix com a *problema de Cauchy* o *de dades inicials*.¹

En la majoria de casos que ens interessaran, $j(\vec{x}, t) = 0$, per a $|\vec{x}|$ més gran que una certa fita superior, és a dir, les càrregues i els corrents estaran confinats a un volum finit. Per tant, la seva transformada de Fourier:

$$\hat{j}(\vec{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} j(\vec{x}, t) \quad (10.5)$$

estarà ben definida. A partir d'ara, \hat{f} indicarà la transformada de Fourier de la funció f (vegeu l'apèndix C).

Si introduïm la transformada de Fourier de la incògnita:

$$\hat{A}(\vec{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} A(\vec{x}, t), \quad (10.6)$$

¹No ens plantejarem aquí altres tipus de problemes, com ara el *problema mixt*, que correspondria a conèixer els valors inicials de A i la derivada temporal en un recinte tancat i també A i la derivada normal sobre la frontera.

i transformem l'equació (10.2) per mitjà de les relacions (C.3) i (C.5)

$$\begin{aligned} -i\vec{k}\hat{A}(\vec{k}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{\nabla} A(\vec{x}, t) \quad \text{i} \\ \partial_t \hat{A}(\vec{k}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \partial_t A(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Llavors la transformada de Fourier $\hat{A}(\vec{k}, t)$ ha de satisfer l'equació:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \hat{A} + \vec{k}^2 \hat{A} = \mu_0 \hat{j}. \quad (10.7)$$

Per la seva banda, les dades inicials (10.4) esdevenen

$$\hat{A}(\vec{k}, 0) = \hat{u}(\vec{k}), \quad \partial_t \hat{A}(\vec{k}, 0) = \hat{v}(\vec{k}). \quad (10.8)$$

A l'equació (10.7) hi intervenen també derivades parcials de les incògnites $\hat{A}(\vec{k}, t)$, però només les temporals, i per a cada \vec{k} fix tenim una equació diferencial ordinària, lineal, de segon ordre i no homogènia, que depèn dels tres paràmetres $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$. A diferència de (10.2) en què, a més de les derivades temporals, intervenen les derivades parcials espacials ∂_i .

Notem que la simplificació del problema que hem aconseguit en substituir les incògnites $A(\vec{x}, t)$ per la transformada de Fourier $\hat{A}(\vec{k}, t)$ és anàloga a la que s'aconsegueix en el problema d'un sistema d'oscil·ladors acoblats en substituir les posicions de cada un pels modes normals d'oscil·lació.

Per a cada valor fixat de \vec{k} tindrem unes dades inicials (10.8) que determinaran una única solució:

$$\hat{A}(\vec{k}, t) = \mu_0 c^2 \int_0^t dt' \hat{j}(\vec{k}, t') \frac{\sin[\omega(t-t')]}{\omega} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \hat{v}(\vec{k}) + \cos(\omega t) \hat{u}(\vec{k}) \quad (10.9)$$

amb $\omega = c|\vec{k}|$. La solució $A(\vec{x}, t)$ de l'equació (10.2) s'obté d'aplicar la transformada inversa de Fourier

$$A(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{A}(\vec{k}, t)$$

a l'expressió anterior i, si tenim en compte la linealitat, podem aplicar-la per separat a cada un dels tres termes del segon membre de (10.9).

El problema ens portarà a calcular integrals del tipus:

$$\left. \begin{aligned} I_0(\vec{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \hat{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ I_1(\vec{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \cos(\omega t) \hat{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

que es redueix a calcular només la primera perquè $I_1(\vec{x}, t) = \partial_t I_0(\vec{x}, t)$. [Els detalls del càlcul es poden trobar a l'apèndix C, equacions (C.23) i (C.24)]. Amb això arribem a:

$$A(\vec{x}, t) = A_u(\vec{x}, t) + A_v(\vec{x}, t) + A_j(\vec{x}, t)$$

amb

$$\begin{aligned} A_u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{u(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} [\delta'(ct - |\vec{x} - \vec{y}|) - \delta'(ct + |\vec{x} - \vec{y}|)] \\ A_v(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{v(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} [\delta(ct - |\vec{x} - \vec{y}|) - \delta(ct + |\vec{x} - \vec{y}|)] \\ A_j(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \int_0^t dt' j(\vec{y}, t') [\delta(c(t - t') - |\vec{x} - \vec{y}|) - \\ &\quad \delta(c(t - t') + |\vec{x} - \vec{y}|)] , \end{aligned}$$

on $\delta(s)$ és la funció de Dirac, que s'anul·la sempre que $s \neq 0$ (vegeu l'apèndix C per a més detalls) i $\delta'(s)$ és la derivada de la funció $\delta(s)$.

Les propietats de la funció δ ens permeten de simplificar el terme A_j , així podem integrar respecte a t' i, segons que t sigui positiu o negatiu, tindrem dos casos:

$0 < t' < t$ Llavors $c(t - t') + |\vec{x} - \vec{y}|$ sempre és positiu i la segona δ del terme A_j no contribuirà a la integral, i

$0 > t' \geq t$ Llavors $c(t - t') - |\vec{x} - \vec{y}|$ sempre és negatiu i serà la primera δ la que no hi contribuirà.

La integral en t' del terme A_j dona, doncs,

$$\Theta(\pm t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) \frac{1}{c} j(\vec{y}, t \mp |\vec{x} - \vec{y}|/c) .$$

Les mateixes consideracions relatives al signe de t valen per a les funcions δ dels termes A_u i A_v .

De manera que finalment podrem escriure per al potencial electromagnètic (tot recuperant els quatre components):

$$\begin{aligned} A^\nu(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} j^\nu(\vec{y}, t \mp |\vec{x} - \vec{y}|/c) \Theta(\pm t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) \\ &\quad \pm \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left[\frac{1}{c} \partial_t A^\nu(\vec{y}, 0) \delta(ct \mp |\vec{x} - \vec{y}|) + A^\nu(\vec{y}, 0) \delta'(ct \mp |\vec{x} - \vec{y}|) \right] \end{aligned} \quad (10.11)$$

El signe superior correspon a $t > 0$ i l'inferior a $t < 0$) on $\Theta(s)$ és la funció de Heaviside i val 0 si s és negatiu i 1 en cas contrari.

En l'expressió (10.11) es veu clarament com el potencial $A^\nu(\vec{x}, t)$ és la superposició del potencial produït pel corrent j^ν , d'una banda, i el potencial del

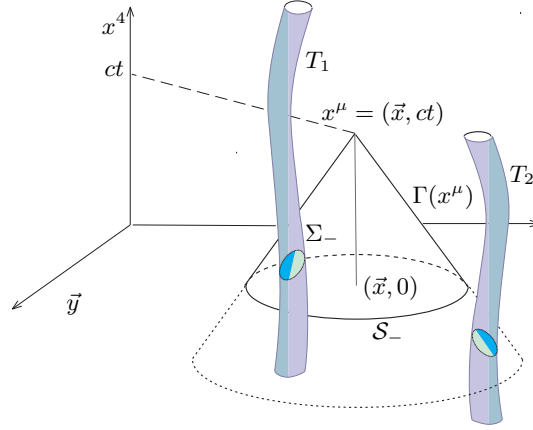


Figura 10.1. Per a $t > 0$, només contribueixen a $A^\nu(\vec{x}, t)$: el corrent $j^\nu(\vec{y}, t')$ per a $(\vec{y}, ct') \in \Sigma_-$ i els valors de les dades inicials sobre l'esfera $S_- = \{|\vec{y} - \vec{x}| = ct\}$

camp electromagnètic lliure que resulta de l'evolució dels valors inicials $A^\nu(\vec{x}, 0)$ i $\partial_t A^\nu(\vec{x}, 0)$, de l'altra. Aquest segon terme és una solució de les equacions de Maxwell lliures (sense càrregues ni corrents).

La presència de les funcions δ i Θ en l'expressió (10.11) delimita quines parts de les dades inicials i del corrent contribueixen al potencial en el punt (\vec{x}, t) (tal com il·lustren els diagrames d'espai-temps de les figures 10.1 i 10.2). Pel que fa a les dades inicials A^ν i $\partial_t A^\nu$, només compten els valors en l'esfera $|\vec{y} - \vec{x}| = c|t|$, és a dir, els esdeveniments $y^\mu = (\vec{y}, 0)$ connectats amb $x^\mu = (\vec{x}, ct)$ per un quadrivector de tipus llum. Mentre que, pel que fa al corrent, si $t > 0$ (respectivament, $t < 0$), només contribueixen a A^ν els valors de j^ν en els esdeveniments $y^\mu = (\vec{y}, ct')$ sobre el con de llum passat $\Gamma_-(x^\mu)$ i amb $t' > 0$ (respectivament, con de llum futur $\Gamma_+(x^\mu)$ i amb $t' < 0$).

En el cas de la solució per a $t > 0$ aquest fet admet una interpretació causal senzilla. El potencial $A^\nu(\vec{x}, t)$ és la superposició dels efectes de dues causes: els valors inicials de A^ν i de $\partial_t A^\nu$, i els corrents $j^\nu(\vec{y}, t')$. La informació de les causes sembla haver-se propagat a velocitat c , per indicar el valor que ha de prendre A^ν al punt \vec{x} en l'instant t . Semblaria com si els valors del quadricorrent a la intersecció del con de llum passat Γ_- amb la branca T_2 del tub de corrent a la figura 10.1, en estar connectats causalment amb x^μ , haurien de contribuir a A^ν i tanmateix aquesta aportació no és palesa a l'expressió (10.11). De fet, sí que hi és, però amagada en les dades inicials, que contenen tant l'aportació de potencials lliures aliens als corrents j^ν i que entren al sistema per l'infinít (les «parets» del laboratori) com les dels potencials produïts pels corrents del mateix sistema en

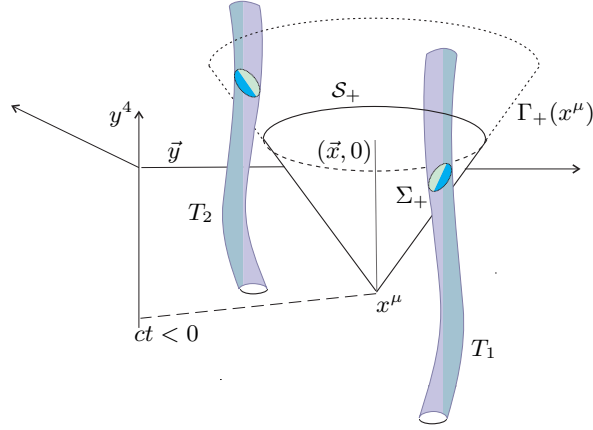


Figura 10.2. Per a $t < 0$, només contribueix al quadripotencial: el corrent $j(\vec{y}, t')$ per a $(\vec{y}, ct') \in \Sigma_+$ i els valors de les dades inicials sobre l'esfera $S_+ = \{|\vec{y} - \vec{x}| = ct\}$

instants anteriors al que hem pres com a inicial, $t = 0$.

Per contra, el cas $t < 0$, que correspon a un «problema de dades finals», no admet una interpretació causal tan òbvia.

10.1.2 La condició de galga

Tanmateix l'expressió (10.11) encara no resol del tot el problema del potencial. Hem de seleccionar aquelles solucions $A^\nu(x)$ que satisfacin la condició de Lorenz, $\Lambda = 0$, amb:

$$\Lambda \equiv \partial_\mu A^\mu. \quad (10.12)$$

Si prenem la quadridivergència de (10.1), en resulta $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0$, és a dir:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda - \vec{\nabla}^2 \Lambda = 0,$$

una equació d'ona com la (10.2) homogènia, que acabem de resoldre. Del que hem vist a la secció anterior tenim que si prenem dades inicials $\Lambda(\vec{x}, 0) = 0$ i $\partial_t \Lambda(\vec{x}, 0) = 0$, llavors $\Lambda(\vec{x}, t)$ s'anul·larà per a qualsevol t .

La primera és una restricció directa sobre les dades inicials:

$$\Lambda(\vec{x}, 0) \equiv \frac{1}{c} \partial_t A^4(\vec{x}, 0) + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, 0) = 0. \quad (10.13)$$

Mentre que la segona es pot escriure així:

$$\partial_t \Lambda(\vec{x}, 0) \equiv \frac{1}{c} \partial_t^2 A^4(\vec{x}, 0) + \vec{\nabla} \cdot [\partial_t \vec{A}(\vec{x}, 0)] = 0,$$

que, com que $A^4(\vec{x}, t)$ és solució de (10.2), ens porta a:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\partial_t \vec{A} + c \vec{\nabla} A^4 \right]_{(\vec{x}, 0)} + \mu_0 c j^4(\vec{x}, 0) = 0. \quad (10.14)$$

Per tant, el potencial electromagnètic (10.11) satisfarà la condició de galga de Lorenz sempre que les dades inicials satisfacin les restriccions (10.13) i (10.14).

Notem que els valors de $\vec{A}(\vec{x}, 0)$ i de $\partial_t \vec{A}(\vec{x}, 0)$ es poden fixar arbitràriament. Pel que fa a la resta, $\partial_t A^4(\vec{x}, 0)$ queda determinat per (10.13) i $A^4(\vec{x}, 0)$ s'obté de resoldre (10.14) que dóna l'equació de Poisson:

$$\vec{\nabla}^2 A^4(\vec{x}, 0) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{A}(\vec{x}, 0) + \mu_0 c j^4(\vec{x}, 0).$$

10.1.3 Propagadors

L'expressió final (10.11) es pot posar en una forma més compacta per mitjà del que s'anomena *els propagadors: retardat* (cas $t > 0$) i *avançat* (cas $t < 0$):

$$D_R(x^\mu) \equiv \frac{1}{2\pi} \Theta(x^4) \delta(x^\nu x_\nu) \quad \text{i} \quad D_A(x^\mu) \equiv \frac{1}{2\pi} \Theta(-x^4) \delta(x^\nu x_\nu). \quad (10.15)$$

En efecte, si usem la propietat (C.16) tenim que:

$$\delta(x^\nu x_\nu) = \delta(-(x^4)^2 + |\vec{x}|^2) = \frac{1}{2|\vec{x}|} [\delta(ct - |\vec{x}|) + \delta(ct + |\vec{x}|)],$$

que, un cop substituïda en (10.15), dóna

$$D_R(\vec{x}, ct) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(ct - |\vec{x}|) \quad \text{i} \quad D_A(\vec{x}, ct) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(ct + |\vec{x}|). \quad (10.16)$$

10.2 El potencial retardat

Es tracta ara de saber quin és el potencial electromagnètic produït exclusivament per una distribució donada de càrregues, contingudes en un cert tub de corrent, és a dir, en el supòsit que no hi ha cap camp electromagnètic extern que incideixi sobre el sistema.

Podríem pensar a formular aquesta condició com a $\lim_{t \rightarrow -\infty} A^\mu(\vec{x}, t) = 0$, però això no expressaria bé el que volem, ja que com que la història de la distribució de càrrega és infinita cap al passat i cap al futur, sempre hi haurà un potencial no nul. En el cas que les càrregues siguin lliures en l'infinit passat, és a dir, si $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \dot{z}^\mu(\tau) = u_{\text{in}}^\mu$, pel cap baix anirà acompanyada del seu propi potencial electromagnètic coulombià, A_{coul}^μ . La condició d'*absència de camps incidents* s'expressarà per:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} A^\mu(\vec{x}, t) = A_{\text{coul}, \text{in}}^\mu. \quad (10.17)$$

Si en lloc de donar les dades inicials per a $t = 0$ les haguéssim donat per a $t = t_0$, la solució per a $t > t_0$ seria semblant a la (10.11):

$$\begin{aligned} A^\nu(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} j^\nu(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) \Theta(t - t_0 - |\vec{x} - \vec{y}|/c) + \\ &\quad \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \partial_t A^\nu(\vec{y}, t_0) \delta(c(t - t_0) - |\vec{x} - \vec{y}|) + \\ &\quad \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} A^\nu(\vec{y}, t_0) \delta'(c(t - t_0) - |\vec{x} - \vec{y}|). \end{aligned}$$

Prendrem com a potencial electromagnètic produït pel corrent j^ν la primera línia de l'expressió anterior en el límit $t_0 \rightarrow -\infty$:

$$A^\nu(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} j^\nu(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c), \quad (10.18)$$

on hem tingut en compte que $\Theta(t - t_0 - |\vec{x} - \vec{y}|/c) = 1$ per a t_0 suficientment petit.

La justificació la donarem a la secció 11.1.1, en demostrar que en el cas d'una càrrega puntual que asimptòticament té moviment uniforme, aquest potencial té el límit coulombià (10.17). En l'apartat 8.3.2 hem trobat el camp creat per una càrrega en moviment uniforme.

10.3 Camps d'una font sinusoidal localitzada

Suposem que tenim una distribució de càrregues i corrents localitzada en un cert volum aïtat per una esfera de radi d i que, a més, no hi ha radiació electromagnètica incident sobre aquesta distribució. Hem vist que (10.18) dona el quadripotencial com a funció del corrent.

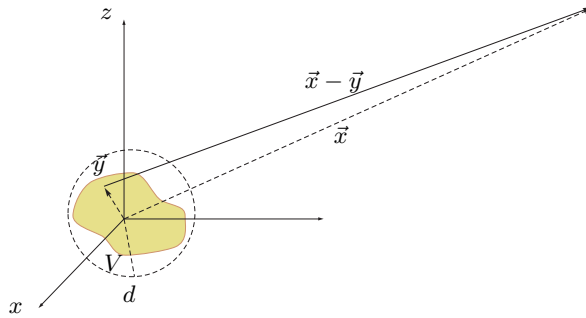


Figura 10.3. Distribució de càrregues i corrents amb el sistema de referència adient per als desenvolupaments aproximats

Prendrem uns eixos coordenats amb l'origen dins de la distribució. La condició de confinament l'expressarem com a:

$$j^\nu(\vec{y}, t) = 0 \quad \text{sempre que} \quad |\vec{y}| > d,$$

és a dir, fora de l'esfera de radi d no hi ha càrrega ni corrent.

Donat el corrent $j^\nu(\vec{y}, t)$, primer l'analitzarem en freqüències i tindrem:

$$j^\nu(\vec{y}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \hat{j}^\nu(\vec{y}, \omega). \quad (10.19)$$

(Això equival a buscar la seva transformada de Fourier respecte al temps.) Si substituïm aquesta expressió a (10.18) i canviem l'ordre d'integració arribem a:

$$A^\nu(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \hat{j}^\nu(\vec{y}, \omega) e^{-i\omega|\vec{x} - \vec{y}|/c}.$$

Així, A^ν també pot expressar-se com una superposició de components de diverses freqüències:

$$A^\nu(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \hat{A}^\nu(\vec{x}, \omega), \quad (10.20)$$

amb $\hat{A}^\nu(\vec{x}, \omega)$ definit per

$$\hat{A}^\nu(\vec{x}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \hat{j}^\nu(\vec{y}, \omega) e^{-i\omega|\vec{x} - \vec{y}|/c}. \quad (10.21)$$

Així, per a cada freqüència podem fer la integració per separat i després trobar la solució total per superposició dels components espectrals segons l'expressió (10.20). Noteu que, com que (10.1) és lineal i $j^\nu(\vec{x}, t)$ està descompost en freqüències (10.19), és com si cada component espectral del potencial $\hat{A}^\nu(\vec{x}, \omega)e^{i\omega t}$, fos produït pel component corresponent del corrent, $\hat{j}^\nu(\vec{x}, \omega)e^{i\omega t}$.

A partir d'ara analitzarem cada component per separat. Així, suposarem que el quadricorrent és de la forma:

$$j^\mu(\vec{x}, t) = J^\mu(\vec{x}) e^{i\omega t}, \quad \text{amb} \quad J^\mu = (\vec{J}, c\Psi),$$

i el quadripotencial serà:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \mathbb{A}^\mu(\vec{x}) e^{i\omega t}, \quad \text{amb} \quad \mathbb{A}^\mu = (\vec{\mathbb{A}}, \Phi/c),$$

on $\mathbb{A}^\mu(\vec{x})$ i $J^\mu(\vec{x})$ tenen una relació semblant a la (10.21) entre $\hat{A}^\nu(\vec{x}, \omega)$ i $\hat{j}^\nu(\vec{y}, \omega)$.

Per tant, la dependència temporal del camp electromagnètic és:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad \text{i} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\mathbb{B}}(\vec{x}) e^{i\omega t}$$

i les equacions (8.34) i (8.35) ens permeten d'establir les relacions:

$$\vec{\mathbb{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}}, \quad \vec{\mathbb{E}} = -i\omega \vec{\mathbb{A}} - \vec{\nabla} \Phi.$$

Si substituïm (10.21) en aquestes relacions, tenim:

$$\vec{\mathbb{B}}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3y \left(ik + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \hat{n} \times \vec{J}(\vec{y}) \quad (10.22)$$

$$\vec{\mathbb{E}}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3y \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left(\left[ik + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] \Psi(\vec{y}) \hat{n} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{J}(\vec{y}) \right). \quad (10.23)$$

on $k = \omega/c$, \hat{n} és el vector unitari en la direcció $\vec{x} - \vec{y}$, hem tingut en compte que $\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}$ i hem limitat la integració al volum V en què les densitats de càrrega i corrent són diferents de zero.

Les expressions (10.22) i (10.23) per al camp magnètic i el camp elèctric són exactes i hi distingim dos tipus de termes, segons la dependència de la distància: els que disminueixen proporcionalment a $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ i els que ho fan proporcionalment a $1/|\vec{x} - \vec{y}|^2$. Això ens permet d'expressar cada un d'aquests camps com a suma de dos termes anomenats *camp radiat* o *llunyà* i *camp induït* o *pròxim*, respectivament:

$$\vec{\mathbb{B}} = \vec{\mathbb{B}}^I + \vec{\mathbb{B}}^{II} \quad \text{i} \quad \vec{\mathbb{E}} = \vec{\mathbb{E}}^I + \vec{\mathbb{E}}^{II}.$$

Així, tenim per als camps induïts:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{E}}^I &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3y \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \Psi(\vec{y}) \hat{n}, \\ \vec{\mathbb{B}}^I &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3y \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \hat{n} \times \vec{J}(\vec{y}), \end{aligned} \quad (10.24)$$

i per als camps de radiació:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{E}}^{II} &= \frac{ik\mu_0 c^2}{4\pi} \int_V d^3y \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left(\Psi(\vec{y}) \hat{n} - \frac{\vec{J}(\vec{y})}{c} \right), \\ \vec{\mathbb{B}}^{II} &= -\frac{ik\mu_0}{4\pi} \int_V d^3y \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \hat{n} \times \vec{J}(\vec{y}). \end{aligned} \quad (10.25)$$

Si $|\vec{x} - \vec{y}| \ll 1/k$, tenim $k/|\vec{x} - \vec{y}| \ll 1/|\vec{x} - \vec{y}|^2$, i dominen els camps induïts. Noteu que $\lambda = 2\pi/k$ és la longitud d'ona corresponent a la freqüència angular ω , per tant, la condició anterior es dóna quan $|\vec{x} - \vec{y}| \ll \lambda/2\pi$, és a dir, per a punts molt pròxims a la distribució de càrregues (en aquest cas, l'escala de proximitat la determina la longitud d'ona del component de la radiació considerada). L'equació (10.24) per a $\vec{\mathbb{E}}^I$ és la llei de Coulomb amb una fase de retard $e^{-ik|\vec{x} - \vec{y}|}$ a l'integrand i l'expressió per a $\vec{\mathbb{B}}^I$ és la llei de Biot i Savart amb el mateix retard a la fase.

Per contra, si $|\vec{x} - \vec{y}| \gg 1/k$, tenim $k/|\vec{x} - \vec{y}| \gg 1/|\vec{x} - \vec{y}|^2$ i dominen els camps de radiació.

10.3.1 Camps de radiació lluny de la font

En punts \vec{x} allunyats de la distribució de càrregues es compliran les dues desigualtats:

$$(i) \quad |\vec{x} - \vec{y}| \gg d, \quad (ii) \quad |\vec{x} - \vec{y}| \gg 1/k,$$

per a qualsevol punt \vec{y} dins del volum V .

De la segona condició tenim que dominen els camps de radiació i podem negligir els d'inducció. A més, la primera desigualtat ens permet aproximar la distància $|\vec{x} - \vec{y}|$ per la seva aproximació de Taylor de primer ordre (vegeu la figura 10.3):

$$|\vec{x} - \vec{y}| = r - \hat{r} \cdot \vec{y} + O(r^{-1}), \quad \text{on} \quad r \equiv |\vec{x}|$$

i \hat{r} és el vector unitari en la direcció de \vec{x} .

Si tenim en compte també que $\hat{n} = \hat{r} + O(r^{-1})$, obtenim la relació:

$$\frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ik\hat{r} \cdot \vec{y}},$$

on s'han negligit termes d'ordre r^{-2} .

Si utilitzem aquestes aproximacions a les expressions (10.25), obtenim per al camp magnètic:

$$\vec{\mathbb{B}} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times \int_V d^3y e^{ik\hat{r} \cdot \vec{y}} \vec{J}(\vec{y}) \quad (10.26)$$

i per al camp elèctric:

$$\vec{\mathbb{E}} = \frac{i c \mu_0 \omega}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\hat{r} \int_V d^3y e^{ik\hat{r} \cdot \vec{y}} \Psi(\vec{y}) - \int_V d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y})}{c} e^{ik\hat{r} \cdot \vec{y}} \right) \quad (10.27)$$

on hem prescindit dels superíndexs II perquè en la regió que ens interessa els camps d'inducció són negligibles.

De la segona expressió es pot eliminar la dependència en la densitat Ψ . En efecte, per a aquest component espectral l'equació de continuïtat diu:

$$-i\omega\Psi(\vec{y}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y}). \quad (10.28)$$

Una integració per parts permet d'escriure:

$$\int_V d^3y e^{ik\hat{r} \cdot \vec{y}} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y}) = \int_V d^3y \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J}(\vec{y}) e^{ik\hat{r} \cdot \vec{y}} \right) - \int_V d^3y \vec{\nabla} (e^{ik\hat{r} \cdot \vec{y}}) \cdot \vec{J}(\vec{y}).$$

El primer terme de la dreta és una integral d'una divergència que, pel teorema de Gauss, es pot convertir en una integral sobre la superfície que envolta el volum V i, com que sobre aquesta superfície el corrent $\vec{J}(\vec{y})$ és nul, també serà nul·la

aquesta primera integral. Per a la segona integral tenim $\vec{\nabla}(e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}}) = ik\hat{r}e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}}$, i així la contribució de Ψ al camp elèctric és finalment:

$$\int_V d^3y e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}} \Psi(\vec{y}) = \frac{i}{\omega} \int_V d^3y e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y}) = \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \int_V d^3y e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}} \vec{J}(\vec{y}).$$

Si tenim en compte la identitat vectorial $\hat{r}(\vec{J}(\vec{y}) \cdot \hat{r}) - \vec{J}(\vec{y}) = \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{J}(\vec{y}))$ i substituïm l'expressió anterior a (10.27), arribem a:

$$\vec{\mathbb{E}} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times \left[\hat{r} \times \int_V d^3y e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}} \vec{J}(\vec{y}) \right]. \quad (10.29)$$

Finalment, si ens adonem que en aquesta aproximació (10.21) el potencial vector és:

$$\vec{\mathbb{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V d^3y e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}} \vec{J}(\vec{y}), \quad (10.30)$$

a partir de (10.29) i (10.26) obtenim les expressions més breus:

$$\vec{\mathbb{E}} = i\omega \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\mathbb{A}}), \quad \vec{\mathbb{B}} = -\frac{i\omega}{c} \hat{r} \times \vec{\mathbb{A}}, \quad (10.31)$$

en les quals es manifesta la relació $c\vec{\mathbb{B}} = \hat{r} \times \vec{\mathbb{E}}$, típica d'una ona que es propaga en la direcció radial \hat{r} a velocitat c (vegeu la secció 12.1).

Notem també que, si hi incloem la dependència temporal, tant \vec{E} com \vec{B} són proporcionals a $e^{i\omega(t-r/c)}/r$, com correspon a una ona esfèrica que es propaga a velocitat c .

10.4 Aproximacions multipolars

Aquestes aproximacions consisteixen a considerar els termes dominants de (10.30) quan la longitud d'ona és gran comparada amb les dimensions de la font. Aleshores la fase que intervé en l'integrand es pot aproximar per:

$$e^{ik\hat{r}\cdot\vec{y}} \approx 1 + ik\hat{r} \cdot \vec{y} + \dots \quad (10.32)$$

10.4.1 Radiació dipolar elèctrica

El primer terme del desenvolupament esmentat dona lloc a la *radiació dipolar elèctrica*. Es coneix amb aquest nom perquè només depèn del moment dipolar elèctric de la distribució de càrregues. Així, al primer ordre del desenvolupament per al potencial vector (10.30) tenim:

$$\vec{\mathbb{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V d^3y \vec{J}(\vec{y}).$$

Amb l'ajut de l'equació de continuïtat (10.28) podrem expressar la integral del segon membre en funció del moment dipolar elèctric. En efecte, d'una banda tenim la identitat:

$$\partial_i(y^k J^i) = J^k + y^k \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y})$$

i, de l'altra, pel teorema de Gauss i el fet que \vec{J} s'anul·la a la superfície \mathcal{A} que envolta V , tenim:

$$\int_V d^3y \partial_i(y^k J^i) = \int_{\mathcal{A}} d^2\mathcal{A}_i J^i(\vec{y}) y^k = 0.$$

Per tant, la integral del segon membre de més amunt serà:

$$\int_V d^3\vec{y} \vec{J}(\vec{y}) = - \int_V d^3y \vec{y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y})),$$

que, usant l'equació de continuïtat (10.28), finalment dóna:

$$\int_V d^3y \vec{J}(\vec{y}) = i\omega \vec{p},$$

on

$$\vec{p} \equiv \int_V d^3y \vec{y} \Psi(\vec{y}) \quad (10.33)$$

és el component espectral del moment dipolar elèctric de la distribució de càrregues.

El potencial vector és, doncs:

$$\vec{A} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{p}, \quad (10.34)$$

i, fent servir (10.31), tenim per als camps de radiació dipolars:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c} \frac{e^{-ikr}}{r} (\hat{r} \times \vec{p}), \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \hat{r}. \quad (10.35)$$

La potència mitjana radiada $P(\theta, \phi)$ en l'angle sòlid $d\Omega$ i en la direcció \hat{r} ve donada pel flux mitjà del vector de Poynting a través de la superfície $r^2 d\Omega \hat{r}$. D'acord amb (12.21) obtenim:

$$\frac{dP(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{\mu_0\omega^4}{32c\pi^2} |\hat{r} \times \vec{p}|^2. \quad (10.36)$$

Exemple 10.1 El dipol curt

Consisteix en una antena lineal alimentada pel centre amb un corrent altern de freqüència fixada i que té una longitud molt més petita que la longitud d'ona $\lambda = c\omega/2\pi$.

Considerem una antena lineal com la de la figura i prenem els eixos coordenats de manera que OZ sigui paral·lel a l'antena. Prendrem una densitat de corrent de la forma $\vec{J} = I(z)\delta(x)\delta(y)\hat{z}$ amb

$$I(z) = I_0 \left[1 - \frac{2|z|}{d} \right]$$

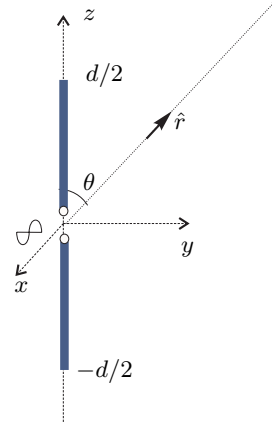
que s'anul·la als extrems, $I(\pm d/2) = 0$.

Si ara tenim en compte l'equació de continuïtat (10.28), la densitat de càrrega és:

$\Psi = \psi(z)\delta(x)\delta(y)$, amb $\psi(z) = iI'(z)/\omega$.

De manera que el moment dipolar val $\vec{p} = p\hat{z}$, amb

$$p = \frac{i}{\omega} \int_{-d/2}^{d/2} dz I'(z) z = \frac{iI_0 d}{2\omega}.$$



A partir d'aquí, si substituïm \vec{p} en les equacions (10.35) i (10.36), obtenim els camps de radiació i la potència emesa. En particular, la potència radiada per unitat d'angle sòlid en la direcció θ i la potència total emesa són, respectivament:

$$\frac{dP(\theta)}{d\Omega} = \frac{c\mu_0(I_0 k d)^2}{128\pi^2} \sin^2 \theta \quad \text{i} \quad P = \frac{c\mu_0(I_0 k d)^2}{48\pi}.$$

Que prova que per a longituds d'ona grans comparades amb d i per a una intensitat de corrent donada la potència emesa augmenta com el quadrat de la freqüència.

Si el moment dipolar elèctric és nul, també s'anul·larà la radiació dipolar elèctrica. En aquest cas, haurem d'afinar l'aproximació i tenir en compte el segon terme del desenvolupament (10.32). El potencial vector (10.30) fins a aquest ordre és:

$$\vec{A} = \frac{i\omega\mu_0}{4c\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V d^3y (\hat{r} \cdot \vec{y}) \vec{J}(\vec{y}). \quad (10.37)$$

Usant identitats vectorials, l'integrand es pot escriure de la manera següent:

$$(\hat{r} \cdot \vec{y}) \vec{J} = \frac{1}{2} \left[(\hat{r} \cdot \vec{y}) \vec{J} + (\hat{r} \cdot \vec{J}) \vec{y} \right] + \frac{1}{2} (\vec{y} \times \vec{J}) \times \hat{r}, \quad (10.38)$$

on el primer terme de la dreta és simètric sota l'intercanvi $\vec{y} \leftrightarrow \vec{J}$ i el segon és antisimètric. En substituir-los a (10.37) donen lloc a dues contribucions diferents: la dipolar magnètica i la quadrupolar elèctrica.

10.4.2 Radiació dipolar magnètica

És la que resulta de la contribució del terme antisimètric de (10.38) al potencial vector (10.37):

$$\vec{A} = \frac{-i\omega\mu_0}{8c\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times \int_V d^3y [\vec{y} \times \vec{J}(\vec{y})].$$

La integral del segon membre està relacionada amb el moment dipolar magnètic \vec{m} . En efecte, la imantació associada al corrent és $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\vec{y} \times \vec{J}(\vec{y})$ i el moment magnètic és la suma de les imantacions:

$$\vec{m} = \int_V d^3y \vec{\mathcal{M}}(\vec{y}). \quad (10.39)$$

Per tant, la contribució del terme antisimètric de (10.38) al potencial vector és:

$$\vec{\mathbb{A}} = \frac{-i\omega\mu_0}{4c\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times \vec{m}. \quad (10.40)$$

I fent servir (10.31), tenim per a la contribució als camps:

$$\vec{\mathbb{B}} = \frac{\omega^2\mu_0}{4c^2\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{m}) \quad \text{i} \quad \vec{\mathbb{E}} = \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{-ikr}}{r} (\hat{r} \times \vec{m}). \quad (10.41)$$

Notem com aquestes expressions coincideixen amb les de la radiació dipolar elèctrica (10.35) si fem els canvis:

$$\vec{\mathbb{E}} \rightarrow c\vec{\mathbb{B}}, \quad c\vec{\mathbb{B}} \rightarrow -\vec{\mathbb{E}} \quad \text{i} \quad \vec{m} \rightarrow c\vec{p}.$$

L'única diferència amb el cas dipolar elèctric és la polarització: el camp magnètic radiat per un dipol elèctric oscil·lant està polaritzat en el pla determinat pels vectors \vec{p} i \hat{r} , mentre que el camp elèctric radiat per un dipol magnètic està polaritzat en el pla perpendicular a \vec{m} i \hat{r} .

Exemple 10.2 Potència radiada per un imant que gira

Considerem un dipol magnètic que gira amb velocitat angular ω al voltant de l'eix Z , tal com mostra la figura. El moment dipolar varia segons: $\vec{m}(t) = (m_0 \cos \omega t, m_0 \sin \omega t, m_1)$, amb m_0 i m_1 constants, i es pot expressar com a:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{m}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \vec{m}_0^* e^{-i\omega t} + \vec{m}_1$$

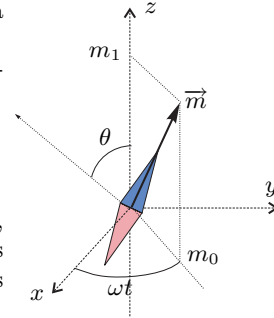
amb $\vec{m}_0 = (m_0, -im_0, 0)$ i $\vec{m}_1 = (0, 0, m_1)$. És a dir, tres components espectrals: un d'estàtic i els altres dos de freqüències $+\omega$ i $-\omega$. Els moments dipolars magnètics respectius són \vec{m}_1 , \vec{m}_0 i \vec{m}_0^* .

Els camps de radiació són la superposició de les contribucions de cada freqüència i, si apliquem (10.41), tenim que el component estàtic no contribueix i que

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \vec{\mathbb{E}}_0^* e^{-i\omega t} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \vec{\mathbb{B}}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \vec{\mathbb{B}}_0^* e^{-i\omega t}$$

amb

$$\vec{\mathbb{E}}_0 = \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{-ikr}}{r} (\hat{r} \times \vec{m}_0) \quad \text{i} \quad \vec{\mathbb{B}}_0 = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{\mathbb{E}}_0. \quad (10.42)$$



El vector de Poynting és:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left(\vec{\mathbb{E}}_0 \times \vec{\mathbb{B}}_0 e^{2i\omega t} + \vec{\mathbb{E}}_0 \times \vec{\mathbb{B}}_0^* \right),$$

que, si tenim en compte (10.42), dóna:

$$\vec{S} = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c^3 r^2} \hat{r} \operatorname{Re} \left[(\hat{r} \times \vec{m}_0)^2 e^{2i\omega(t-r/c)} + (\hat{r} \times \vec{m}_0) \cdot (\hat{r} \times \vec{m}_0^*) \right].$$

Com que tenim:

$$\begin{aligned} (\hat{r} \times \vec{m}_0)^2 &= \vec{m}_0^2 - (\hat{r} \vec{m}_0)^2 = m_0^2 \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \quad \text{i} \\ (\hat{r} \times \vec{m}_0)(\hat{r} \times \vec{m}_0^*) &= m_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

arribem finalment a:

$$\vec{S} = \frac{\omega^4 \mu_0 m_0^2}{32\pi^2 c^3 r^2} \hat{r} \left[-\sin^2 \theta \cos(2\omega(t-r/c) - \varphi) + 1 + \cos^2 \theta \right],$$

que és la suma d'un component fix proporcional a $1 + \cos^2 \theta$ i un component periòdic d'amplitud proporcional a $\sin^2 \theta$ i de període la meitat del període de rotació del dipol.

10.4.3 Radiació quadrupolar elèctrica

És la que resulta de la contribució del terme simètric de (10.38) al potencial vector. Abans de fer la substitució a la integral del segon membre de (10.37), tindrem en compte la identitat següent:

$$\vec{\nabla} \cdot (y^k y^i \vec{J}(\vec{y})) = \vec{J}(\vec{y}) \cdot \vec{\nabla} (y^k y^i) + y^k y^i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y}) = J^i(\vec{y}) y^k + J^k(\vec{y}) y^i + y^k y^i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y}),$$

que, un cop integrada a tot el volum V de la distribució de càrregues, usant el teorema de Gauss i tenint en compte que a la superfície que envolta V el corrent s'anul·la, ens porta a:

$$\int_V d^3 \vec{y} J^i(\vec{y}) y^k + \int_V d^3 y J^k(\vec{y}) y^i = - \int_V d^3 y y^k y^i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y}).$$

Si ara usem l'equació de continuïtat (10.28) i ho contraïem amb \hat{r}^i , obtenim:

$$\frac{1}{2} \left[\int_V d^3 y (\hat{r} \cdot \vec{J}(\vec{y})) y^k + \int_V d^3 y J^k(\vec{y}) (\hat{r} \cdot \vec{y}) \right] = i \frac{\omega}{2} \int_V d^3 y y^k (\hat{r} \cdot \vec{y}) \Psi(\vec{y}).$$

Així, la contribució de la part simètrica de (10.38) al potencial vector (10.37) queda:

$$\vec{\mathbb{A}} = -\frac{\omega^2 \mu_0}{8c\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V d^3 y \vec{y} (\hat{r} \cdot \vec{y}) \Psi(\vec{y}). \quad (10.43)$$

La integral està relacionada amb el tensor *moment quadrupolar elèctric*:

$$Q^{ij} \equiv \int_V d^3y (3y^i y^j - \vec{y}^2 \delta^{ij}) \Psi(\vec{y}). \quad (10.44)$$

En efecte, la contracció amb \hat{r} dóna:

$$\mathbf{Q}(\hat{r}) \equiv 3 \int_V d^3y \vec{y}(\vec{y} \cdot \hat{r}) \Psi(\vec{y}) - \hat{r} \int_V d^3y \vec{y}^2 \Psi(\vec{y}),$$

d'on s'obté fàcilment que:

$$\hat{r} \times \int_V d^3y \vec{y}(\hat{r} \cdot \vec{y}) \Psi(\vec{y}) = \frac{1}{3} \hat{r} \times \mathbf{Q}(\hat{r}).$$

L'expressió dels camps radiats per un quadrupol elèctric oscil·lant se segueix immediatament de substituir (10.43) en (10.31):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{B}} &= -\frac{i\omega^3 \mu_0}{24c^2 \pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times \mathbf{Q}(\hat{r}), \\ \vec{\mathbb{E}} &= -\frac{i\omega^3 \mu_0}{24c\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} (\hat{r} \times \mathbf{Q}(\hat{r})) \times \hat{r}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Problemes

10.1 Demostreu que l'equació d'ona en una dimensió

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

amb les condicions de contorn $\psi(0, t) = f(t)$ i $\partial\psi(0, t)/\partial x = F(t)$ té com a solució general:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(t - x/c) + f(t + x/c) + c \int_{t-x/c}^{t+x/c} F(t') dt' \right).$$

- 10.2 Trobeu el moment quadrupolar d'un el·lipsoide carregat uniformement respecte al seu centre.
- 10.3 Trobeu el moment quadrupolar de dos anells concèntrics de radis a i b , $a > b$, coplanaris amb càrregues q i $-q$ respectivament.
- 10.4 Trobeu la radiació dipolar d'un dipol que gira en un pla amb velocitat angular constant.
- 10.5 Es té una distribució de dipols idèntics amb moment dipolar \vec{p} dirigit segons l'eix de les z situats en els punts $(s\lambda/2, 0, 0)$ amb $s = -3, \dots, 3, s \in \mathbb{Z}$. Determineu la distribució angular de la radiació amb longitud d'ona λ si tots estan excitats en fase.
- 10.6 Determineu la distribució angular de la radiació emesa per un sistema de càrregues que es mouen alhora amb velocitat uniforme v si coneixem la distribució en el sistema que estan en repòs.

Capítol 11

Radiació per càrregues en moviment

11.1 El camp electromagnètic d'una càrrega puntual

A la primera part del capítol 10 hem donat raons que justifiquen que la solució retardada de les equacions de Maxwell és la que descriu el camp electromagnètic produït per una càrrega que segueix un moviment arbitrari però que és asimptòticament lliure en el passat. Aquesta situació és comuna al tipus de problemes que considerarem d'ara endavant i, per això, ens limitarem a la solució retardada de les equacions del camp.

11.1.1 Els potencials retardats de Liénard-Wiechert

Per determinar el potencial electromagnètic creat per una càrrega puntual en absència de camp electromagnètic extern incident, aplicarem els resultats de la secció (10.2) al quadricorrent corresponent. Com que en l'instant t la càrrega q està tota concentrada en el punt $\vec{z}(t)$, donat per l'equació de la trajectòria, la densitat de càrrega és $\rho(\vec{x}, t) = q \delta^3[\vec{x} - \vec{z}(t)]$. A més, com que el corrent és de convecció pura, perquè es deu exclusivament al moviment de la càrrega, tindrem que la densitat de corrent és: $\vec{j}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(t)$. Per tant, d'acord amb (8.12), el quadricorrent és:

$$j^\nu(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) [\vec{v}(t), c] \quad \text{amb} \quad \rho(\vec{x}, t) = q \delta^3[\vec{x} - \vec{z}(t)].$$

Si substituïm aquesta expressió a l'equació (10.18) del potencial electromagnètic, obtenim

$$A_R^\nu(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{R^3} \frac{d^3 y}{|\vec{x} - \vec{y}|} v^\nu(t'_R) \delta^3[\vec{y} - \vec{z}(t'_R)], \quad (11.1)$$

on $v^\nu = (\vec{v}, c)$ i hem usat la variable *temps retardat*:

$$t'_R = t - |\vec{x} - \vec{y}|/c. \quad (11.2)$$

La presència de la triple funció δ a la integral de volum de la dreta en simplificarà el càlcul. Tanmateix, la simplificació no és immediata perquè la funció δ^3 depèn de la variable d'integració \vec{y} d'una manera no trivial. Això es deu al fet que $t'_R(\vec{y}, \vec{x}, t)$, com indica (11.2).

Per tant, haurem de recórrer al canvi de variable $\vec{Y} = \vec{y} - \vec{z}(t'_R)$. Per la seva part, el canvi d'element de volum vindrà donat pel determinant jacobí

$$d^3y = d^3Y \left| \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{Y}} \right| = d^3Y \left| \frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{y}} \right|^{-1}.$$

La matriu jacobiana es calcula fàcilment:

$$\frac{\partial Y^i}{\partial y^j} = \delta_j^i - v^i(t'_R) \frac{\partial t'_R}{\partial y^j} = \delta_j^i - \beta_R^i \hat{r}_j$$

amb

$$\hat{r} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad \text{i} \quad \vec{\beta}_R = \frac{\vec{v}(t'_R)}{c},$$

i el determinant jacobí és:

$$\left| \frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{y}} \right| = 1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta}_R > 0.$$

D'aquí que la relació entre els elements de volum és $d^3y = (1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta}_R)^{-1} d^3Y$ i, substituïda a l'equació (11.1), ens dóna:

$$A_R^\nu(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{R^3} \frac{d^3Y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta^3(\vec{Y}) \frac{v^\nu(t'_R)}{1 - \hat{r} \cdot \vec{\beta}_R}. \quad (11.3)$$

Ara el càlcul de la integral se simplifica per la triple funció δ : només s'ha de substituir $\vec{Y} = 0$ a l'integrand. Si examinem el canvi de variables $\vec{Y} = \vec{y} - \vec{z}(t'_R)$ i l'equació (11.2) és obvi que:

$$\vec{y}|_{\vec{Y}=0} = \vec{z}(t_R) \quad \text{i} \quad t'_R|_{\vec{Y}=0} = t_R,$$

on $t_R(\vec{x}, t)$ és la solució de la nova equació implícita:

$$t_R = t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{z}(t_R)|. \quad (11.4)$$

Com a resultat d'aquestes substitucions, el quadripotencial és:

$$A_R^\nu(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{v_R^\nu}{|\vec{x} - \vec{z}_R|(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_R)}, \quad (11.5)$$

on \hat{n} és el vector unitari en la direcció $\vec{x} - \vec{z}_R$. A més,

$$\vec{z}_R = \vec{z}(t_R), \quad v_R^\nu = v^\nu(t_R), \quad \vec{\beta}_R = \vec{\beta}(t_R).$$

(A partir d'ara el subíndex R indica que el temps en què s'avalua la quantitat corresponent és el *temps retardat* t_R .)

Exemple 11.1 Unicitat del temps retardat t_R

Vegem ara com l'equació implícita (11.2) té una única solució $t_R(\vec{x}, t) < t$.

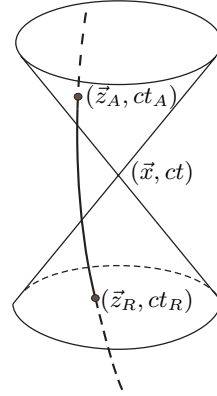
L'equació implícita es pot posar també com a:

$ct - ct_R = |\vec{x} - \vec{z}(t_R)| \geq 0$. Per tant, els esdeveniments $x^\mu = (\vec{x}, ct)$ i $z_R^\mu = (\vec{z}_R, ct_R)$ estan connectats per un quadrivector $R^\mu = x^\mu - z_R^\mu$ que és de tipus llum i apunta al futur.

La trajectòria de la càrrega $z^\mu(\tau)$ només pot tallar el con de llum de vèrtex x^μ en dos llocs, un z_R^μ en el passat de x^μ i un altre z_A^μ en el futur. Si hi hagués dues interseccions en el passat, $z^\mu(\tau_{R1})$ i $z^\mu(\tau_{R2})$ (amb $\tau_{R2} < \tau_{R1}$), llavors els quadriectors $x^\mu - z^\mu(\tau_{R1})$ i $x^\mu - z^\mu(\tau_{R2})$ serien de tipus llum i orientats al futur. Però, per altra banda, tindrem que:

$$[x^\mu - z^\mu(\tau_{R1})] + [z^\mu(\tau_{R1}) - z^\mu(\tau_{R2})] = x^\mu - z^\mu(\tau_{R2})$$

i, com que els dos quadriectors de l'esquerra apunten al futur i el primer és de tipus llum i el segon és temporal, el quadrivector de la dreta no pot ser de tipus llum. Per tant, $z^\mu(\tau_{R2})$ no pot estar en el con de llum de x^μ .



Per simplificar el càlcul del camp electromagnètic serà útil tenir una expressió covariant del quadripotencial que només depengui de quantitats escalars o quadrivectorials. Per a això introduïrem la línia d'univers de la càrrega $z^\mu(\tau) = (\vec{z}(t), ct)$, la velocitat pròpia serà $\dot{z}^\mu = \gamma v^\mu$ i escriurem $z_R^\mu = (\vec{z}_R, ct_R)$ (vegeu la figura 11.1). Per l'equació implícita (11.4) tindrem que $c(t - t_R) = |\vec{x} - \vec{z}_R|$ i el quadrivector $R^\mu = x^\mu - z_R^\mu$ és de tipus llum i orientat al futur. El podem escriure com a:

$$R^\nu = |\vec{x} - \vec{z}_R| n^\mu \quad \text{amb} \quad n^\mu = (\hat{n}, 1).$$

Per tant, $R_\mu \dot{z}_R^\mu = |\vec{x} - \vec{z}_R| (\hat{n} \cdot \vec{\beta}_R - 1) c \gamma_R$, que substituït a (11.8) dóna els potencials retardats de Liénard-Wiechert:

$$A_R^\nu(\vec{x}, t) = -\frac{q}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{\dot{z}_R^\nu / \gamma_R}{R_\mu \dot{z}_R^\mu / c \gamma_R} = -\frac{q}{4\pi c \epsilon_0} \frac{\dot{z}_R^\nu}{R_\mu \dot{z}_R^\mu}, \quad (11.6)$$

on $z_R^\mu = z^\mu(\tau_R)$ i $\tau_R(x)$ està definit per la relació:

$$(x^\nu - z^\nu(\tau_R))(x_\nu - z_\nu(\tau_R)) = 0. \quad (11.7)$$

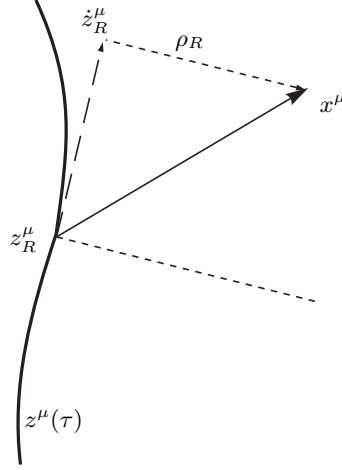


Figura 11.1. La variable ρ_R és la distància a la càrrega en el sistema inercial instantàniament comòbil amb la càrrega a $z^\mu(\tau_R)$

Finalment, de l'expressió (11.6) podem separar el potencial elèctric $\phi_R = cA_R^4$ i el potencial magnètic:

$$\phi_R(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}_R|(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_R)}, \quad \vec{A}_R(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \phi_R(\vec{x}, t) \vec{\beta}_R. \quad (11.8)$$

11.1.2 Camp electromagnètic retardat

El camp electromagnètic associat al potencial (11.6) s'obté d'aplicar la relació (8.37). A l'hora de calcular les derivades dels potencials A_R^ν cal tenir present que τ_R depèn de x^ρ d'acord amb la relació implícita (11.7). De derivar-la tenim $[\delta_\nu^\lambda - \dot{z}_\nu(\tau_R) \partial^\lambda \tau_R][x^\nu - z^\nu(\tau_R)] = 0$, i d'aquí podem aïllar el gradient :

$$\partial^\lambda \tau_R = \frac{R^\lambda}{R\dot{z}_R}, \quad (11.9)$$

on $R\dot{z}_R$ indica el producte dels quadriectors corresponents.

El camp electromagnètic dóna, després d'una mica de càlcul:

$$F^{\lambda\mu} = \frac{q}{4\pi c\epsilon_0} \left[\frac{\ddot{z}_R^\mu R^\lambda - \ddot{z}_R^\lambda R^\mu}{(R\dot{z}_R)^2} - \frac{\dot{z}_R^\mu R^\lambda - \dot{z}_R^\lambda R^\mu}{(R\dot{z}_R)^3} (c^2 + R\ddot{z}_R) \right]. \quad (11.10)$$

Per apreciar com els diversos termes del camp electromagnètic depenen de la distància a la càrrega ens hem de fixar en la variable posició relativa R^μ . En

distingirem una part, ρ_R , que donarà idea de la magnitud, i una altra, r^μ , que n'indicarà la direcció:

$$\rho_R \equiv -\frac{R\dot{z}_R}{c} \quad \text{i} \quad r^\mu \equiv \frac{R^\mu}{c\rho_R}. \quad (11.11)$$

Aquestes dues variables tenen una interpretació senzilla en el sistema inercial \mathcal{S}_R^\dagger instantàniament comòbil amb la càrrega en l'esdeveniment z_R^μ . D'una banda, el quadrivector r^μ té les propietats: $r\dot{z}_R = -1$ i $r^2 = 0$, per tant, com que en \mathcal{S}_R^\dagger tenim:

$$\dot{z}^{\mu\dagger} = (\vec{0}, c), \quad \text{llavors} \quad r^{\mu\dagger} = (\hat{n}^\dagger/c, 1/c).$$

D'altra banda, $-R\dot{z}_R/c$ dona la distància espacial $|\vec{x}^\dagger - \vec{z}_R^\dagger|$ (vegeu la figura 11.1).

Les variables (11.11) ens permeten de separar el camp electromagnètic (11.10) en dues parts segons la dependència en ρ_R :

$$F^{\lambda\mu} = F_I^{\lambda\mu} + F_{II}^{\lambda\mu} \quad (11.12)$$

$$\left. \begin{aligned} F_I^{\lambda\mu} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c \rho_R^2} [\dot{z}_R^\lambda r^\mu - \dot{z}_R^\mu r^\lambda] \\ F_{II}^{\lambda\mu} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 \rho_R} [\ddot{z}_R^\lambda r^\mu - \ddot{z}_R^\mu r^\lambda + (r\ddot{z}_R)(\dot{z}_R^\lambda r^\mu - \dot{z}_R^\mu r^\lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

El primer component, que s'anomena també *camp de velocitat*, correspon al camp coulombià creat per una càrrega q en moviment rectilini i uniforme segons la tangent a la trajectòria real en el punt z_R^μ . Disminueix proporcionalment a la segona potència inversa de la distància ρ_R^2 . Per la seva banda, la segona component, o *camp d'acceleració*, depèn linealment de l'acceleració \ddot{z}_R^μ i disminueix de manera inversament proporcional a la distància. S'anomena també *camp de radiació* perquè, com veurem, és el component que domina a distàncies grans.

En aquesta expressió és palès que la solució donada satisfà la condició asimptòtica (10.17). Efectivament, per a $x^4 \rightarrow -\infty$, $\tau_R \rightarrow -\infty$, i si la càrrega és asimptòticament lliure en l'infinit passat: $\ddot{z}_R^\mu = 0$ i \dot{z}_R^μ és la velocitat pròpia constant u_{in}^μ en l'infinit passat. Així, en aquest límit tindrem que $F_{II} \rightarrow 0$ i $F_I \rightarrow F_{\text{coul, in}}$.

A partir de (11.13) podem tenir les expressions dels camps elèctric i magnètic de radiació en funció de l'acceleració \vec{a}_R i de la velocitat $\vec{\beta}_R$ de la càrrega. Tenim:

$$E_{II}^i = cF_{II}^{4i} \quad \text{i} \quad B_{II}^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{II}^{jk}$$

i en l'expressió (11.13) del camp de radiació hem de substituir:

$$R^\mu = |\vec{x} - \vec{z}_R|(\hat{n}, 1), \quad \dot{z}_R^\mu = c\gamma(\vec{\beta}_R, 1), \quad \rho_R = \gamma_R |\vec{x} - \vec{z}_R|(1 - \hat{n}\vec{\beta}_R)$$

i també:

$$r^\mu = \frac{1}{c\gamma_R(1 - \hat{n}\vec{\beta}_R)}(\hat{n}, 1) \quad \text{i} \quad \ddot{z}_R^\mu = \gamma_R^4(\vec{a}_R + \vec{\beta}_R \times [\vec{\beta}_R \times \vec{a}_R], \vec{\beta}_R \cdot \vec{a}_R).$$

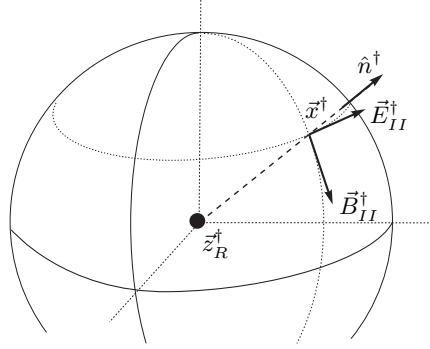


Figura 11.2. Ona esfèrica dels camps de radiació en el sistema instantàniament comòbil

D'ara endavant, per no recarregar la notació, ometrem el subíndex R , amb el benentès que totes les quantitats que facin referència a propietats de la càrrega corresponen als seus valors en el temps retardat $t_R = t - |\vec{x} - \vec{z}(t_R)|/c$. Així, tenim que:

$$\vec{E}_{II} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{a}]}{|\vec{x} - \vec{z}_R| (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \quad \text{i} \quad \vec{B}_{II} = \frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{E}_{II}. \quad (11.14)$$

És il·lustratiu comparar les expressions dels camps de radiació i dels coulombians en el sistema instantàniament comòbil \mathcal{S}_R^\dagger . Per als camps de radiació tenim:

$$\vec{E}_{II}^\dagger = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{R}^\dagger|} \hat{n}^\dagger \times (\hat{n}^\dagger \times \vec{a}^\dagger), \quad \vec{B}_{II}^\dagger = \frac{1}{c} \hat{n}^\dagger \times \vec{E}_{II}^\dagger, \quad (11.15)$$

mentre que per al component coulombià dels camps elèctric i magnètic, de (11.13) tenim:

$$\vec{E}_I^\dagger = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}^\dagger|^2} \hat{n}^\dagger \quad \text{i} \quad \vec{B}_I^\dagger = 0, \quad (11.16)$$

amb $|\vec{R}^\dagger| = |\vec{x}^\dagger - \vec{z}_R^\dagger|$. (Vegeu l'equació (8.28) on es dedueix el camp d'una càrrega en moviment uniforme.)

La segona d'aquestes relacions reflecteix clarament el caràcter coulombià dels camps \vec{E}_I^\dagger i \vec{B}_I^\dagger : el camp elèctric és inversament proporcional al quadrat de la distància a la càrrega en el sistema comòbil i no hi ha camp magnètic. En contrast, els camps d'acceleració \vec{E}_{II}^\dagger i \vec{B}_{II}^\dagger disminueixen amb una llei de proporcionalitat inversa a la distància. Per tant, a grans distàncies de la regió en què es troba la càrrega dominen els camps de radiació, mentre que prop de la càrrega domina el component coulombià. En seccions posteriors veurem com aquests diferents comportaments a grans distàncies tenen com a conseqüència que les contribucions

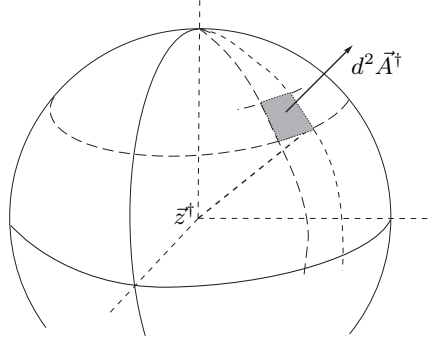


Figura 11.3. Element de flux a través de l'esfera

de cada component al valor del vector de Poynting siguin diferents. El component F_{II} serà el responsable que el sistema presenti una pèrdua d'energia, que associarem al fenomen de la radiació, i d'aquí ve el nom.

Notem que per a punts \vec{x}^\dagger que estiguin lluny de $\vec{z}^\dagger(t_R)$ només són apreciables els camps variables \vec{E}_{II}^\dagger i \vec{B}_{II}^\dagger , els quals guarden amb \hat{n}^\dagger la mateixa relació d'ortogonalitat que en el cas d'una ona plana que es propaga en la direcció \hat{n}^\dagger (vegeu la figura 11.2 i la secció 12.1). Aquesta ona està polaritzada en el pla determinat per l'acceleració en el sistema propi \vec{a}^\dagger i la direcció de propagació \hat{n}^\dagger .

11.2 Potència radiada per una càrrega

D'acord amb allò que hem vist a la secció 8.5, el camp electromagnètic porta associades una densitat d'energia, U , i una densitat de corrent d'energia, \vec{S} . A més, en absència de càrregues i corrents, la variació de la densitat U és deguda exclusivament al flux del vector de Poynting \vec{S} .

Si fem el balanç total d'energia per al camp electromagnètic d'una càrrega puntual, trobarem que hi ha un flux net d'energia a través d'una esfera de radi infinitament gran. És a dir, el sistema perd energia per radiació.

Per començar farem aquest balanç en el sistema de referència \mathcal{S}^\dagger instantàniament comòbil amb la càrrega. L'energia que, per unitat de temps t^\dagger , surt d'una esfera de radi L centrada en la càrrega (que podem prendre com a origen de \mathcal{S}^\dagger) ve donada pel flux del vector de Poynting \vec{S}^\dagger a través de la superfície $|\vec{x}^\dagger| = L$, orientada cap a fora:

$$W_{\text{camp}}^\dagger = \int_{|\vec{x}^\dagger|=L} \vec{S}^\dagger \cdot d^2 \vec{A}^\dagger. \quad (11.17)$$

D'acord amb (8.47) i usant (11.12), tenim que:

$$\vec{S}^\dagger = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E}_I^\dagger + \vec{E}_{II}^\dagger \right) \times \left(\vec{B}_I^\dagger + \vec{B}_{II}^\dagger \right) \quad \text{i} \quad d^2 \vec{A}^\dagger = L^2 \hat{n}^\dagger d^2 \Omega^\dagger,$$

on $d^2 \Omega^\dagger$ és l'element d'angle sòlid en \mathcal{S}^\dagger . Si ara substituïm (11.16) i (11.15) en les expressions anteriors, obtenim:

$$\vec{S}^\dagger \cdot d^2 \vec{A}^\dagger = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} (\hat{n}^\dagger \times \vec{a}^\dagger)^2 d^2 \Omega^\dagger,$$

que no depèn de L i, per tant, valdrà el mateix quan fem el límit $L \rightarrow \infty$.

Per calcular la integral (11.17) sobre la superfície de l'esfera usem coordenades polars esfèriques amb l'eix Z^\dagger orientat paral·lelament a \vec{a}^\dagger i obtenim:

$$W_{\text{camp}}^\dagger = \frac{q^2 |\vec{a}^\dagger|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi^\dagger \int_0^\pi \sin^3 \theta^\dagger d\theta^\dagger = \frac{q^2 |\vec{a}^\dagger|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (11.18)$$

Per determinar la potència radiada segons un altre sistema de referència inercial, calcularem el moment lineal radiat per unitat de temps t^\dagger en el sistema comòbil i tindrem en compte que $dP^\mu = (d\vec{P}, d\mathcal{E}/c)$ és un quadrivector.

11.2.1 Moment lineal radiat per unitat de temps

De manera semblant a com hem fet en l'apartat anterior amb el flux d'energia, per calcular el moment lineal del camp que surt de l'esfera $|\vec{x}^\dagger| = L$ per unitat de temps t^\dagger utilitzarem que $\Theta^{ij} = -T^{ij}$ és la densitat de corrent de component P^i del moment lineal del camp. Per tant, el moment lineal que surt per l'esfera de radi L en el sistema \mathcal{S}^\dagger és:

$$\frac{dP_j^\dagger}{dt^\dagger} = - \int_{|\vec{x}^\dagger|=L} \sum_i T_{ij}^\dagger d^2 A_i^\dagger = -L^2 \int_{|\vec{x}^\dagger|=L} \sum_i T_{ij}^\dagger \hat{n}_i^\dagger d^2 \Omega^\dagger, \quad (11.19)$$

on T_{ij}^\dagger és el tensor d'esforços de Maxwell (8.57). Igual com passava a l'apartat anterior amb el vector de Poynting, T_{ij}^\dagger és una funció quadràtica dels camps. Si substituïm (11.16) i (11.15) en (8.57), sobre l'esfera $|\vec{x}^\dagger| = L$ tenim:

$$\begin{aligned} - \sum T_{ij}^\dagger \hat{n}_i^\dagger &= - \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 L^4} \hat{n}_j^\dagger + \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4 L^2} (\hat{n}^\dagger \times \vec{a}^\dagger)^2 \hat{n}_j^\dagger - \\ &\quad \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^2 L^3} \hat{n}^\dagger \times (\hat{n}^\dagger \times \vec{a}^\dagger)_j, \end{aligned}$$

que, introduïda en (11.19) i després de negligir els termes proporcionals a L^{-3} o L^{-4} que no contribuïran en el límit per a $L \rightarrow \infty$, tenim:

$$\frac{d\vec{P}^\dagger}{dt^\dagger} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \int_{|\vec{x}^\dagger|=L} d^2 \Omega^\dagger \frac{1}{c^4} (\hat{n}^\dagger \times \vec{a}^\dagger)^2 \hat{n}^\dagger + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) = 0.$$

Aquesta equació combinada amb la (11.18) ens dona el quadrimoment total que surt per l'esfera de l'infinit —i abandona el sistema— per unitat de temps t^\dagger :

$$\frac{dP^{\mu\dagger}}{dt^\dagger} = \frac{q^2 |\vec{a}^\dagger|^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} (\vec{0}, c),$$

que, si fem les substitucions òbvies:

$$\dot{z}_R^{\mu\dagger} = (\vec{0}, c) \rightarrow \dot{z}_R^\mu, \quad |\vec{a}^\dagger|^2 = \dot{z}^\dagger \dot{z}^\dagger \rightarrow \dot{z} \dot{z} \quad \text{i} \quad dt^\dagger \rightarrow d\tau,$$

ens porta a l'expressió covariant:

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} (\dot{z} \dot{z}) \dot{z}^\mu, \quad (11.20)$$

que dona el quadrimoment lineal radiat per la càrrega per unitat de temps propi en qualsevol sistema de referència.

Si en prenem el component temporal i usem les relacions (5.16) i (4.27), tindrem la potència radiada en termes del temps del laboratori:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{cdP^4}{\gamma d\tau} = \frac{q^2 \gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\vec{a}^2 - (\vec{\beta} \times \vec{a})^2 \right), \quad (11.21)$$

que s'anomena *fórmula de Larmor relativista*, perquè a l'aproximació de velocitats petites, $|\vec{\beta}| \ll 1$, dona la coneguda *fórmula de Larmor*:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\vec{a}|^2. \quad (11.22)$$

11.3 Pèrdues radiatives

Pel simple fet de ser accelerada una càrrega elemental radia i al cap de molta estona, per una esfera de radi molt gran, surt una quantitat neta d'energia en forma de radiació electromagnètica. Com que un dels principis més acceptats en la física és el de conservació de l'energia, és raonable preguntar-se d'on surt aquesta energia radiada. La resposta àmpliament acceptada és que l'energia perduda en forma de radiació és a costa de l'energia cinètica de la mateixa càrrega i, per tant, aquesta es frenarà pel fet d'estar accelerada i radiar. Una conseqüència d'aquest fet sobre la teoria és que l'equació (8.15) de la força de Lorentz només és aproximada, en la mesura que l'efecte de la pèrdua radiativa sigui petita. A l'apartat 11.6 ho discutirem més a fons.

D'altra banda, un efecte pràctic notable de les pèrdues radiatives es dona en els acceleradors de partícules. En una d'aquestes màquines una partícula carregada és accelerada fins a tenir una energia cinètica gran. Com que en el procés d'acceleració la partícula radia, part de l'energia que rep de la màquina la perd en forma de radiació, i el procés d'acceleració no pot tenir un rendiment del cent per cent.

El paper i la importància d'aquestes pèrdues és diferent segons que es tracti d'acceleradors lineals, circulars o d'anells d'emmagatzematge. Aquesta diferència correspon als diferents resultats de la fórmula de Larmor relativista (11.21) si s'aplica als dos casos extrems de moviment accelerat: el rectilini i el circular uniforme.

En els casos extrems de moviment rectilini ($\vec{a} \parallel \vec{\beta}$) i de moviment circular de radi R ($\vec{a} \perp \vec{\beta}$ i $|\vec{a}| = v^2/R$) la pèrdua d'energia per radiació (11.21) dona, respectivament:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 a^2, \quad (11.23)$$

i

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 R^2} \gamma^4 v^4. \quad (11.24)$$

Per saber si aquestes pèrdues són significatives i en quin dels dos casos són més importants, no les podem comparar directament, tot i que aparentment les pèrdues siguin més grans en el cas lineal, a causa del factor γ^6 .

En el cas rectilini és interessant comparar l'energia que la càrrega perd per radiació amb la que li comunica l'accelerador lineal. Pel teorema de les forces vives (5.44), la potència subministrada per l'aparell és $m\gamma^3 av$; per tant:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\gamma^3 a,$$

que substituïda en (11.23) dona:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}}{d\mathcal{E}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^4} \frac{1}{\beta} \frac{d\mathcal{E}}{dx}.$$

Per als electrons $6\pi\epsilon_0 m^2 c^4 / q^2 = 2 \cdot 10^{14} \text{ MeV m}^{-1}$, mentre que el guany d'energia per unitat de longitud d'un accelerador lineal típic és $d\mathcal{E}/dx \approx 10 \text{ MeV m}^{-1}$. D'aquí que, en general, l'energia perduda per radiació és negligible en comparació amb l'energia subministrada ($d\mathcal{E}_{\text{rad}} \ll d\mathcal{E}$).

En el cas del moviment circular el mòdul de la velocitat no canvia i és interessant comparar l'energia perduda per radiació en una volta amb l'energia de la càrrega, $\mathcal{E} = mc^2 \gamma$. D'acord amb (11.24), tenim:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{rad}}}{\mathcal{E}} = \frac{q^2 \gamma^4 v^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 R^2 \mathcal{E}} \frac{2\pi R}{v} = \frac{q^2 \mathcal{E}^3 \beta^3}{3\epsilon_0 R m^4 c^8}.$$

En la taula 11.1 donem les dades (\mathcal{E}_{max} i R_{max}) d'alguns acceleradors circulars junt amb l'estimació de la raó $\Delta\mathcal{E}_{\text{rad}}/\mathcal{E}_{\text{max}}$.

11.4 Distribució angular de la radiació

La radiació emesa per una càrrega no es distribueix de manera uniforme en totes les direccions. Per estudiar-ne la distribució i veure en quines direccions es

Accelerador	partícules	R/m	$\mathcal{E}_{\text{max}}/\text{GeV}$	$\Delta\mathcal{E}_{\text{rad}}/\mathcal{E}_{\text{max}}$
primers sincrotrons		1	0.3	$2,5 \cdot 10^{-6}$
SPEAR (Stanford, 1972-90)	e^-	40	4	$1,5 \cdot 10^{-4}$
LEP2 (CERN (1989-95))	e^-	4 243	180	$1,2 \cdot 10^{-1}$
LHC (CERN (2007-))	p	4 243	7 000	$6,3 \cdot 10^{-10}$
ESRF (Grenoble,)	e^-	135	6	$1,5 \cdot 10^{-4}$
LLS (Bellaterra, <i>projecte</i>)	e^-	40	2,5	$3,5 \cdot 10^{-5}$
PETRA II (Hamburg,)	e^-	367	12	$4 \cdot 10^{-4}$

Taula 11.1. *Característiques de diversos sincrotrons*

concentra la radiació considerarem el vector de Poynting, \vec{S} , que dóna la densitat de corrent d'energia del camp electromagnètic. A grans distàncies de la regió en què es troba la càrrega accelerada, l'única contribució no negligible a aquest corrent és la que correspon als camps de radiació (11.14). Enfocarem el problema del punt de vista del procés d'emissió de radiació, que passa en el lloc $\vec{z}(t_R)$, i no del procés de detecció que eventualment tindrà lloc en el punt \vec{x} en un instant posterior t . Per això serà important distingir entre el temps t de la detecció i el temps t_R de l'emissió. (Per tal d'evitar confusions, mantindrem explícit el subíndex en les variables \vec{z}_R i t_R , però no en les $\vec{\beta} = \vec{v}(t_R)/c$ ni en $\vec{a} = \vec{a}(t_R)$.)

La part no negligible del vector de Poynting (8.47) és:

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 |\vec{x} - \vec{z}_R|^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6} \left(\hat{n} \times [(\vec{\beta} - \hat{n}) \times \vec{a}] \right)^2 \hat{n}.$$

La finestra elemental, $d^2\vec{A}$, situada en el punt \vec{x} en l'instant t i orientada en la direcció de propagació \hat{n} és, en coordenades esfèriques:

$$d^2\vec{A} = \hat{n} |\vec{x} - \vec{z}_R|^2 d^2\Omega.$$

Per tant, com que l'energia que travessa la finestra elemental en la unitat de temps t és $d^3\mathcal{E}/dt = \vec{S}_{\text{rad}} \cdot d^2\vec{A}$, tenim que:

$$d^3\mathcal{E} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6} \left(\hat{n} \times [(\vec{\beta} - \hat{n}) \times \vec{a}] \right)^2 d^2\Omega dt, \quad (11.25)$$

és l'energia *rebuda* a la finestra entre t i $t + dt$.

S'interpreta que aquesta energia va ser emesa per la càrrega entre els instants t_R i $t_R + dt_R$, en un angle sòlid $d^2\Omega$ al voltant de la direcció \hat{n} . La potència *emesa* per la càrrega per unitat d'angle sòlid serà $d^3\mathcal{E}/dt_R d^2\Omega$.

Si diferenciem la relació $c^2(t - t_R)^2 - (\vec{x} - \vec{z}_R)^2 = 0$, amb \vec{x} fix i $d\vec{z}_R = c\vec{\beta}dt_R$, tot tenint en compte que $t - t_R > 0$, obtenim fàcilment que:

$$dt = dt_R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}),$$

que substituïda en (11.25) dóna:

$$\frac{d^2 \mathcal{W}_{\text{rad}}}{d^2 \Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5} \left(\hat{n} \times [(\vec{\beta} - \hat{n}) \times \vec{a}] \right)^2, \quad (11.26)$$

amb $\mathcal{W}_{\text{rad}} \equiv d\mathcal{E}/dt_R$.

Si ara hi substituïm $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$ i $\vec{a} = (a_1, 0, a_3)$ —que correspon a mesurar els angles θ i ϕ a partir d'un triedre d'eixos amb el pla XZ determinat pel pla osculador de la trajectòria— i integrem a totes les direccions, $0 < \theta < \pi$ i $0 < \phi < 2\pi$, tornem a obtenir la fórmula de Larmor relativista (11.21).

Tot seguit considerarem els dos casos extrems de moviment accelerat: el rectilini i el circular uniforme.

11.4.1 Càrrega en moviment rectilini

El sistema té una direcció distingida, la del moviment, que prendrem com a eix Z . Així tindrem: $\vec{\beta} = (0, 0, v/c)$ i $\vec{a} = (0, 0, \dot{v})$ i si usem coordenades esfèriques, l'equació (11.26) dóna:

$$\frac{d^2 \mathcal{W}_{\text{rad}}}{d^2 \Omega} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (11.27)$$

La distribució angular de la potència radiada té simetria de rotació al voltant de la direcció del moviment i la representarem per la fracció de la potència radiada que surt per unitat d'angle sòlid en una direcció determinada:

$$f(\theta) = N \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \quad (11.28)$$

on $N \equiv 3(1 - \beta^2)^3/8\pi$ és un factor de normalització per tal que $\int f(\theta) d^2 \Omega = 1$.

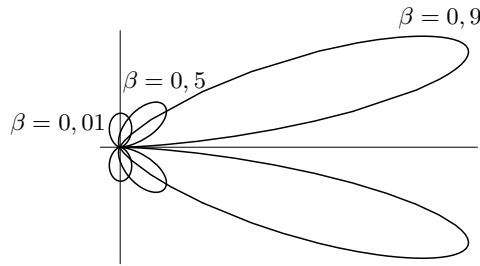


Figura 11.4. Diagrama polar de la potència radiada per una càrrega en moviment rectilini per a diversos valors de la velocitat ($\beta_1 = 0,01$, $\beta_2 = 0,5$ i $\beta_3 = 0,9$)

Les direccions en què la potència radiada és màxima s'obtenen de trobar els màxims i mínims de la funció de distribució. Així tenim que:

$$\cos \theta_{\max} = \frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right).$$

A l'aproximació de petites velocitats $\beta \ll 1$ dóna:

$$\cos \theta_{\max} \approx \frac{5\beta}{2}, \quad \theta_{\max} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{5\beta}{2},$$

és a dir, la radiació és emesa preferentment en les direccions gairebé perpendiculars a la direcció del moviment de la càrrega i lleugerament cap endavant.

En el cas d'una càrrega en moviment relativista ($\beta \approx 1$), el paràmetre que s'ha de considerar en l'aproximació és $\gamma^{-1} \ll 1$ i tenim:

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{16 - 15\gamma^{-2}} - 1}{3\sqrt{1 - \gamma^{-2}}} \approx 1 - \frac{1}{8}\gamma^{-2}, \quad \theta_{\max} \approx \frac{1}{2}\gamma^{-1}.$$

La radiació és emesa preferentment en una direcció gairebé paral·lela a la velocitat de la càrrega.

Per visualitzar millor aquesta distribució angular és útil la representació polar que, com que el cas que ens ocupa té simetria de revolució al voltant de l'eix Z , consisteix en una corba plana (figura 11.4) que en coordenades polars té per equació $I = f(\theta)$. Així, com més lluny de l'origen és el punt $f(\theta)$, més gran és la fracció de radiació emesa en la direcció θ . Té la forma d'una lemniscata que no és simètrica respecte a l'eix $\theta = \pi/2$, excepte si $\beta = 0$. Les dues fulles de la corba s'inclinen cap endavant segons la direcció del moviment.

Com més gran és la velocitat, veiem com no hi ha radiació en la direcció perpendicular al moviment i com, tot i que estrictament parlant no hi ha radiació en la direcció del moviment, la màxima intensitat s'assoleix per a angles aguts que són més petits com més gran és la velocitat. També hi veiem com l'interval de valors de θ per als quals la intensitat és significativa es fa més estret a mesura que β augmenta. Així, per a velocitats grans, la radiació es concentra en un con estret al voltant de la direcció del moviment. Una mesura de l'amplitud d'aquest pinzell de radiació la dóna:

$$\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\int d^2\Omega f(\theta) \theta^2} \approx \gamma^{-1}.$$

11.4.2 Moviment circular uniforme

En aquest cas no hi ha simetria de revolució perquè en cada instant el moviment selecciona dues direccions perpendiculars a l'espai: la de la velocitat i la de l'acceleració. Escollirem un sistema d'eixos instantani de manera que (vegeu la figura):

$$\vec{\beta} = (0, 0, v/c) \text{ i } \vec{a} = (a, 0, 0).$$

Si usem unes coordenades esfèriques basades en aquests eixos, l'equació (11.26) ens dóna:

$$\frac{d^2 \mathcal{W}_{\text{rad}}}{d^2 \Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right], \quad (11.29)$$

i la funció de distribució angular de la potència radiada normalitzada a la unitat és:

$$f(\theta, \phi) = \frac{3}{8\pi\gamma^4 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (11.30)$$

Aquesta funció ara no té simetria de revolució com en el cas del moviment rectilini, però si observem els diagrames polars de la intensitat de radiació per a diversos valors de β (figura 11.5), veiem com per a grans velocitats la radiació també es concentra en la direcció del moviment. En l'aproximació relativista, $\beta \approx 1 - \gamma^{-2}/2$, i per a angles petits $\theta \ll 1$ l'expressió (11.30) dóna:

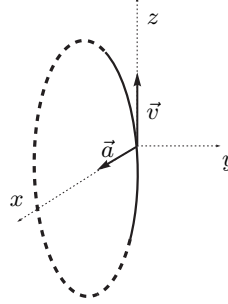
$$f(\theta, \phi) = \frac{3}{\pi} \gamma^2 \frac{1}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right], \quad (11.31)$$

i, igual que en el cas del moviment rectilini, la major part de la radiació es concentra en un con d'amplitud:

$$\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\int d^2 \Omega f(\theta, \phi) \theta^2} \approx \gamma^{-1}.$$

Tanmateix, a diferència del cas rectilini, la direcció de l'eix d'aquest con va canviant solidàriament amb la direcció del moviment.

La figura 11.5 representa la distribució de la intensitat de radiació en funció de la direcció (θ, ϕ) per a diversos valors de β . Com en el cas de la figura 11.4 per al moviment rectilini, es tracta d'un diagrama polar: la superfície dibuixada té l'equació $I = f(\theta, \phi)$ en coordenades polars (esfèriques). Els diagrames polars per als diferents valors de β estan a la mateixa escala, per facilitar la comparació visual. Hi veiem com, en augmentar β , la radiació es concentra en la direcció frontal.



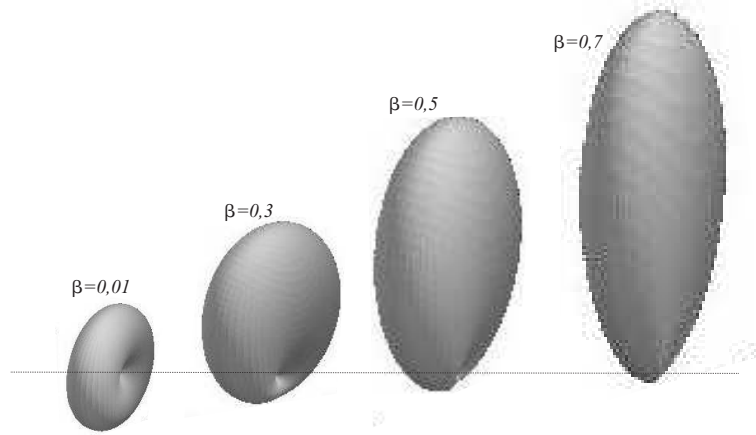


Figura 11.5. Diagrama polar de la intensitat de radiació per a diferents valors de β

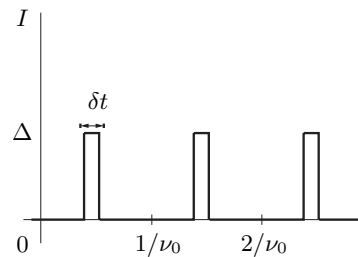
11.5 Radiació de sincrotró

Del punt de vista dels físics d'altres energies, la pèrdua d'energia que experimenta una càrrega accelerada pel fet de radiar era un inconvenient. Si es pretén accelerar una càrrega, tot allò que la freni és un entrebanc. Tanmateix, es va descobrir que la radiació emesa per una càrrega en moviment circular té un component molt important de radiació d'alta freqüència que la fa molt interessant com a font de raigs X, amb aplicacions a la física de l'estat sòlid i la biologia molecular. Actualment hi ha al món una cinquantena de laboratoris de llum sincrotró.

Primer farem un estudi qualitatiu de la naturalesa i la composició de la radiació emesa pels electrons ultrarelativistes en un sincrotró. Considerarem que el moviment d'aquests electrons és aproximadament circular i uniforme, de radi r i freqüència ν_0 , i a més és ultrarelativista: $\nu_0 2\pi r \approx c$ i $\gamma^{-1} \ll 1$.

Per allò que hem discutit en l'apartat 11.4.2, la radiació es concentrarà en un pinzell estret d'amplada $\delta\theta \approx \gamma^{-1}$. En un punt P llunyà, es rebrà radiació cada cop que P caigui dins d'aquest

pinzell. Per tant, només es rebrà radiació en punts propers al pla del sincrotró i aquesta serà en forma de flaixos periòdics, de manera que si representem la intensitat rebuda en P en funció del temps tindrem una gràfica de la forma indicada a la figura, amb una periodicitat $1/\nu_0$.



La duració d'un flaix en P és la diferència de temps, $\delta t = t_2 - t_1$, entre el final del pas del pinzell de radiació per P —(b) a la figura de més avall— i el

començament de la il·luminació de P —(a) a la figura.

Els instants t_1 i t_2 de l'inici i el final del flaix en el receptor P estan relacionats amb els instants d'emissió t_A i t_B , respectivament, per l'equació de retard:

$$c(t_1 - t_A) = \overline{PA}$$

i

$$c(t_2 - t_B) = \overline{PB}.$$

En tractar-se d'angles petits, tenim:

$\overline{PA} - \overline{PB} \approx \overline{AB}$, que coincideix aproximadament amb la longitud de l'arc,

$r\delta\theta$. A més, com que es tracta d'un moviment circular uniforme, tenim que

$(t_B - t_A)2\pi\nu_0 = \delta\theta$. D'aquestes dues relacions combinades amb les equacions de retard obtenim:

$$\delta t \approx (t_B - t_A) - \frac{1}{c} \overline{AB} \approx \frac{r}{c} \delta\theta (\beta^{-1} - 1) \approx \frac{r}{2c} \delta\theta \gamma^{-2},$$

que, si introduïm el valor de l'obertura del con $\delta\theta \approx 2\gamma^{-1}$ i utilitzem que $\beta \approx 1$, ens dóna:

$$\delta t \approx \frac{1}{2\pi\nu_0} \gamma^{-3}.$$

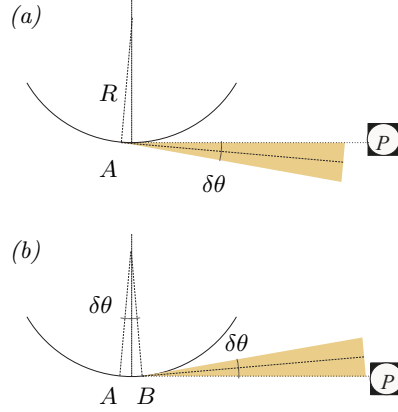
El perfil temporal de la radiació rebuda és periòdic de freqüència ν_0 (vegeu la figura) i es pot descompondre en una sèrie de Fourier de sinus i cosinus de $2\pi\nu_0 n t$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Físicament això significa que la radiació rebuda a P és una superposició d'ones monocromàtiques de freqüències $\nu_n = n\nu_0$, múltiples enters de la freqüència fonamental ν_0 del moviment circular de les càrregues en el sincrotró. El coeficient d'un determinat component de la sèrie de Fourier és una mesura del pes de la contribució d'aquesta freqüència a la intensitat total. A causa de la convergència de la sèrie, la importància del component de freqüència ν_n tendeix a 0 per a $n \rightarrow \infty$.

Per fer una estimació dels valors de n per als quals la contribució del component ν_n és notable farem servir un argument qualitatiu basat en la relació d'incertesa (C.9) que comentem en l'apèndix C per a transformades de Fourier. Si apliquem aquesta relació a les variables conjugades de Fourier $\omega = 2\pi\nu$ i t , obtenim:

$$\delta\nu \approx \frac{1}{2\pi\delta t} \approx \nu_0 \gamma^3.$$

Com que $\gamma \gg 1$, resulta que la radiació rebuda a P presenta components de freqüència molt alta respecte a la freqüència fonamental.

Si considerem les màquines de la taula 11.1 tenim que:



Accelerador	part.	r/m	$\mathcal{E}_{\text{max}}/\text{GeV}$	$\delta\nu/\text{Hz}$
primers sincrotrons	e^-	1	0.3	10^{16}
SPEAR (Stanford, 1972-90)	e^-	40	4	$6 \cdot 10^{17}$
LEP2 (CERN, 1989-95)	e^-	4 243	180	$5 \cdot 10^{20}$
LHC (CERN, 2007-)	p	4 243	7 000	$5 \cdot 10^{15}$
ESRF (Grenoble,)	e^-	135	6	$6 \cdot 10^{17}$
LLS (Bellaterra, <i>projecte</i>)	e^-	40	2,5	$1,4 \cdot 10^{17}$
PETRA II (Hamburg,)	e^-	367	12	$1,7 \cdot 10^{18}$

Taula 11.2. Freqüències de la radiació de sincrotró ($m_e = 0,511 \text{ MeV} c^{-2}$ i $m_p = 938 \text{ MeV} c^{-2}$)

Anàlisi freqüencial de la radiació de sincrotró

Suposem que tenim una càrrega amb moviment circular uniforme de freqüència angular ω i radi r en el pla XY i que el receptor és sobre l'eix Y , molt lluny, com s'esquematitza a la figura. En aquest cas, $\hat{n} = (0, 1, 0)$ i $\vec{z}_R = r(\cos \omega t_R, \sin \omega t_R, 0)$, i també:

$$\vec{v}_R = r\omega(-\sin \omega t_R, \cos \omega t_R, 0) \quad \vec{a}_R = -r\omega^2(\cos \omega t_R, \sin \omega t_R, 0). \quad (11.32)$$

(Al llarg d'aquest càlcul explicitarem el subíndex R , perquè serà molt important distingir entre el temps t de recepció de la radiació en el detector de l'instant t_R de l'emissió per la càrrega.) Escrivem: $\beta := r\omega/c$, $T = 2\pi/\omega$ i tindrem $\vec{\beta}_R \cdot \hat{n} = \beta \cos \omega t_R$.



La intensitat de la radiació rebuda es determina amb l'equació (11.25) i és:

$$I(t) dt = \frac{d^3 \mathcal{E}}{d^2 \Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \vec{M}_R^2 dt \quad (11.33)$$

amb

$$\vec{M}_R = \frac{\hat{n} \times [(\vec{\beta}_R - \hat{n}) \times \vec{a}_R]}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_R)^3} \quad \text{i} \quad dt = dt_R (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_R). \quad (11.34)$$

Per determinar la intensitat mitjana per unitat d'angle sòlid

$$\langle I \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T I(t) dt \quad (11.35)$$

haurem de calcular la integral de \vec{M}_R^2 sobre tot un període.

Com que t_R és una funció periòdica de t i $\vec{M}_R = \vec{M}(t_R)$ és una funció periòdica de t_R , i en tots dos casos el període és T , llavors $\vec{M}(t_R(t))$ també serà una funció periòdica de t amb el mateix període, i la podem desenvolupar en sèrie de Fourier:

$$\vec{M}_R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} \vec{M}_n \quad \text{amb} \quad \vec{M}_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T dt e^{-in\omega t} \vec{M}(t_R(t)), \quad (11.36)$$

de la qual se segueix fàcilment (identitat de Parseval) que:

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \vec{M}_R^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{M}_n \cdot \vec{M}_{-n} = \vec{M}_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \vec{M}_n \cdot \vec{M}_{-n}.$$

Substituïm aquest resultat a (11.35) i tenint en compte (11.33), obtenim que $\langle I \rangle$ és la suma de les contribucions de totes les freqüències, $n\omega$:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{amb} \quad I_n = \frac{q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \vec{M}_n \cdot \vec{M}_{-n}. \quad (11.37)$$

Si tenim en compte (11.34) i la identitat:

$$d \left(\frac{\vec{\beta}_R - \hat{n}}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_R} \right) = dt \frac{1}{c} \vec{M}_R,$$

podem integrar (11.36) per parts i tenim:

$$\vec{M}_n = \frac{inc\omega^2}{2\pi} \int_0^T dt e^{-in\omega t} \frac{\vec{\beta}_R - \hat{n}}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_R} = \frac{inc\omega^2}{2\pi} \int_0^T dt_R (\vec{\beta}_R - \hat{n}) e^{-in\omega t}.$$

Si ara substituïm $t = t_R - \beta/\omega \sin \omega t_R$, fem el canvi de variables $\xi = \omega t_R$ i utilitzem (11.32), arribem a:

$$\vec{M}_n = \frac{inc\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi e^{-in(\xi - \beta \sin \xi)} [-\beta \sin \xi, \beta \cos \xi - 1, 0],$$

és a dir, $\vec{M}_n = (M_n, 0, 0)$, amb

$$M_n = \frac{-\beta\omega c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^{2\pi} d\xi e^{-in(\xi - \beta \sin \xi)} = -\beta\omega c \partial_\beta J_n(n\beta), \quad (11.38)$$

on J_n és la funció de Bessel d'ordre n . Substituït a (11.37), dóna finalment:

$$I_n = \frac{q^2 \beta^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} [\partial_\beta J_n(n\beta)]^2. \quad (11.39)$$

De l'anàlisi qualitativa de l'apartat anterior sabem que, per a $\beta \approx 1$, les contribucions de I_n seràn apreciables per a valors de n grans. En aquest cas, podem usar l'aproximació asimptòtica:¹

$$J_n(n\beta) \approx \frac{e^{-2\gamma^{-3}n/3}}{\sqrt{2\pi n \gamma^{-1}}} \quad \text{amb} \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2},$$

per tant,

$$[\partial_\beta J_n(n\beta)]^2 \approx \frac{2}{\pi} \gamma^{-1} \beta^2 n e^{-4\gamma^{-3}n/3}$$

i la intensitat del component $n\omega$ és:

$$I_n \approx \frac{q^2 \beta^4 \omega^2 \gamma^{-1}}{4\pi^3 \epsilon_0 c} n e^{-4\gamma^{-3}n/3}, \quad (11.40)$$

que és màxima per a $n_1 \approx 3\gamma^3/4$ i val:

$$I_{n_1} \approx \frac{3q^2 \beta^4 \omega^2 \gamma^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} e^{-1}.$$

La figura 11.6 mostra com el valor de la freqüència n_1 en què aquesta contribució és màxima augmenta amb la velocitat β , i també com les contribucions de les freqüències $n\omega$ són més importants en un entorn molt ampli de $n_1\omega$. Això últim és degut al fet que, segons (11.40), I_n augmenta linealment amb n i disminueix exponencialment. Com que γ^{-1} és molt petit i l'exponent d'amortiment és proporcional a $\gamma^{-3}n$, el seu efecte no és notable fins a valors molt grans de n .

11.6 La frenada per radiació

A l'apartat 11.3 hem estudiat les pèrdues d'energia que experimenta una càrrega puntual a conseqüència de la radiació. Aquest fet posa de relleu una inconsistència de la dinàmica d'una càrrega elèctrica tal com l'hem considerada fins ara. Una càrrega puntual en un camp electromagnètic és accelerada per la força de Lorentz (8.15) i, a causa d'aquesta mateixa acceleració, radia i perd energia i moment lineal. Per tant, l'equació (9.1) que fins ara hem pres com a equació del moviment —o la forma covariant (9.2)— no representa el balanç correcte de quadrimoment lineal.

¹Vegeu, per exemple, GRADSHTEYN, I. S. i RYZHIK, I. M., *Table of integrals, series and products*, pàg. 963, eq. 8.452, Academic Press (1992).

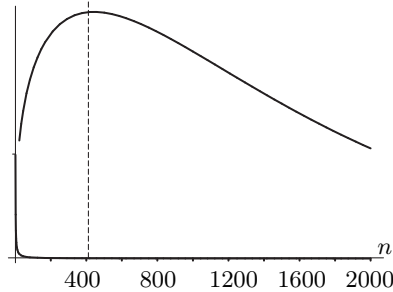


Figura 11.6. Cas $\beta = 0,99$. La contribució màxima es dona aproximadament per a l'harmonia $n = 400$, però són notables les contribucions de freqüències 2.000 vegades la fonamental

En els exemples de pèrdues radiatives analitzats en l'apartat 11.3, l'energia radiada és petita si la comparem amb una energia típica del sistema: l'energia cinètica de la càrrega en el cas de l'accelerador circular o el guany d'energia cinètica en el cas de l'accelerador lineal. L'efecte de la radiació és petit i, en conseqüència, obtenim un resultat força bo si fem l'aproximació senzilla següent: primer es negligeix l'efecte de la frenada per radiació i es determina la trajectòria aproximada de la càrrega, i després s'utilitza aquest moviment aproximat per avaluar l'energia i el moment lineal radiats.

Tanmateix, la pèrdua radiativa és un efecte secular, s'acumula a mesura que passa el temps. Pensem per exemple en el moviment d'un electró en el model atòmic de Rutherford. L'electró descriu aproximadament un cercle de radi r , perquè l'energia radiada al cap d'una volta és petita comparada amb l'energia cinètica de l'electró (vegeu l'exemple 11.2). Però al cap d'un nombre gran de voltes i a conseqüència de l'energia perduda acumulada, l'energia ha disminuït i ja no és suficient perquè l'electró es mantingui en moviment a la distància r del nucli. El resultat és un moviment en espiral en què a cada volta la caiguda cap al centre és negligible, però que és significativa al cap de moltes voltes. Si l'escala de temps que ens interessa és de l'ordre de magnitud del període del moviment, llavors podem negligir la frenada per radiació, però si ens interessen lapsos de temps llargs, en què la pèrdua acumulada d'energia és comparable a l'energia del sistema, llavors haurem de tenir en compte aquest efecte de frenada.

11.6.1 L'equació d'Abraham-Lorentz-Dirac

Per obtenir l'equació correcta del moviment d'una càrrega elemental que tingui en compte la frenada per radiació, hem de fer un balanç instantani d'energia-moment entre la partícula, el camp electromagnètic radiat i les forces aplicades. D'entrada, el que primer se'ns acudeix és modificar la llei de Newton relativista

(5.41), tot afegint un terme que doni compte de la taxa de quadrimoment lineal perdut per radiació:

$$f^\mu d\tau = dp^\mu(\tau) + \mathcal{R} u^\mu d\tau \quad \text{amb} \quad \mathcal{R} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} (a^\rho a_\rho). \quad (11.41)$$

És a dir, el quadrimoment lineal $f^\mu d\tau$ aportat per l'acció externa —que pot incloure l'acció d'un camp electromagnètic extern, entre d'altres— s'inverteix en augmentar el quadrimoment lineal de la partícula dp^μ i en la pèrdua radiativa representada pel segon terme de la dreta, com resultaria d'aplicar de manera ingènua l'equació (11.20).

Tanmateix, aquest enfocament no pot ser consistent perquè, atès que la correcció radiativa afegida és proporcional a u^μ , la força de Minkowski total no seria ortogonal a la quadrivelocitat, i la massa m seria variable, cosa que no pot passar si es tracta d'una càrrega elemental. Això no ens ha d'estranyar perquè el balanç d'energia-moment (11.41) està mal plantejat. En efecte, mentre que l'intercanvi de moment lineal entre la càrrega i la força aplicada es produeix en l'instant τ i allà on és la càrrega, la contribució radiativa $\mathcal{R}u^\mu$ correspon a un quadrimoment lineal que en l'instant $\tau + L/c$ abandona el sistema a través d'una esfera de radi L en el sistema comòbil amb la càrrega \mathcal{S}_τ^\dagger (amb el radi molt gran, $L \rightarrow \infty$). Suposar que això que ha passat en aquest instant del futur llunyà i sobre aquesta esfera llunyana reflecteix exactament un intercanvi que passa d'una manera localitzada en $z^\mu(\tau)$ i en l'instant τ potser és forçar massa les coses, i d'aquí la inconsistència de l'equació (11.41).

El balanç fi que porta a l'equació d'Abraham-Lorentz-Dirac es basa en la conservació local del tensor d'energia-moment total: el del camp electromagnètic retardat més la contribució material de la mateixa càrrega. És una anàlisi molt tècnica que escapa de l'abast d'aquest text.² Tanmateix aquí presentarem una justificació heurística d'aquesta equació, a partir del balanç total de moment lineal per a una càrrega que és asimptòticament lliure en el passat i el futur.

Suposem que la força de Minkowski aplicada sobre la càrrega només actua sobre un interval de temps finit: $f^\mu(\tau) \neq 0$, només si $\tau_1 < \tau < \tau_2$. En aquest cas, com que en l'infinit passat i en l'infinit futur no hi ha cap força aplicada sobre la càrrega, és raonable suposar que $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} a^\mu(\tau) = 0$ i que $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} u^\mu(\tau) = u_-^\mu$ i $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u^\mu(\tau) = u_+^\mu$. Si tenim en compte la relació (11.20), el balanç de quadrimoment lineal és:

$$p_+^\mu - p_-^\mu + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} \int_{-\infty}^{\infty} a^\rho a_\rho u^\mu d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f^\mu d\tau. \quad (11.42)$$

Si ara tenim en compte que el moviment és asimptòticament lliure,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{a}^\mu d\tau = a_+^\mu - a_-^\mu = 0,$$

²Per a una deducció detallada vegeu ROHRLICH (1990) o JACKSON (1975).

podem afegir un terme nul a l'equació (11.42), que també es pot posar com a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ dp^{\mu}(\tau) - d\tau \left(f^{\mu} - \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} [a^{\rho} a_{\rho} u^{\mu} - c^2 \dot{a}^{\mu}] \right) \right\} = 0. \quad (11.43)$$

L'equació d'Abraham-Lorentz-Dirac resulta d'igualar a zero l'integrand i de posar $p^{\mu} = mu^{\mu}$, on m és la massa pròpia (constant) de la càrrega. Així tenim:

$$ma^{\mu} = f^{\mu} + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\dot{a}^{\mu} - \frac{a^{\rho} a_{\rho}}{c^2} u^{\mu} \right). \quad (11.44)$$

El segon terme de la dreta

$$\Gamma^{\mu} \equiv \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\dot{a}^{\mu} - \frac{a^{\rho} a_{\rho}}{c^2} u^{\mu} \right) \quad (11.45)$$

és el quadrivector d'Abraham i dona la correcció associada a la radiació. El terme proporcional a \dot{a}^{μ} s'anomena *terme de Schott* i la resta, que val $-\mathcal{R}u^{\mu}$, és l'efecte de frenada per radiació. Notem que el quadrivector Γ^{μ} sí que compleix la condició de ser ortogonal a la velocitat pròpia, ja que:

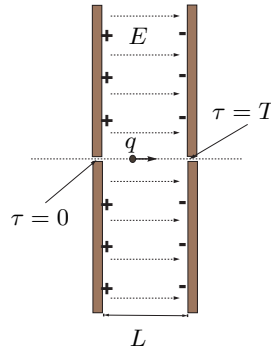
$$\left(\frac{a^{\rho} a_{\rho}}{c^2} u^{\mu} - \dot{a}^{\mu} \right) u_{\mu} = -a^{\rho} a_{\rho} - \dot{a}^{\mu} a_{\mu} = -\frac{d}{d\tau} (a^{\rho} u_{\rho}) = 0.$$

L'equació (11.44), tot i que ben fonamentada en l'electrodinàmica clàssica, presenta uns quants problemes. D'entrada és una equació diferencial de tercer ordre ja que, si bé el terme extern f^{μ} dependrà de la posició i la velocitat de la càrrega, el terme de Schott depèn de la derivada de l'acceleració. Per tant, per determinar el moviment de la càrrega per a $\tau > 0$, no n'hi ha prou a donar $x^{\mu}(0)$ i $u^{\mu}(0)$, sinó que necessitarem conèixer també $a^{\mu}(0)$. Però el pitjor és que aquesta equació admet solucions en què, sense força externa ($f^{\mu} = 0$), la càrrega s'accelera cada vegada més. És el que es coneix com a *solucions autoaccelerades* o *runaway*.

Exemple 11.2 Solucions unidimensionals

Considerem una càrrega que es mou lliurement en la direcció de l'eix X fins que entra en una regió de gruix finit en què hi ha un camp elèctric constant $\vec{E} = (E, 0, 0)$, (per exemple, entre les plaques infinites d'un condensador de gruix L , com el de la figura). Prenem $\tau = 0$, el valor del temps propi quan entra en el condensador i $\tau = T$, el temps propi quan surt. Com que el moviment inicial i la força de Lorentz aniran en la direcció de l'eix X , la trajectòria serà unidimensional i podrem expressar la quadrivelocitat com a:

$$u^{\mu} = c(\sinh \zeta, 0, 0, \cosh \zeta),$$



on $\zeta(\tau)$ és la rapidesa. La quadriacceleració serà:

$$a^\mu = c \dot{\zeta} \hat{a}^\mu, \quad \text{amb} \quad \hat{a}^\mu = (\cosh \zeta, 0, 0, \sinh \zeta),$$

i la derivada $\dot{a}^\mu = c \ddot{\zeta} \hat{a}^\mu + \dot{\zeta}^2 u^\mu$. D'altra banda, la força de Lorentz és:

$$f^\mu(\tau) = q F^\mu_\nu u^\nu = q E \hat{a}^\mu, \quad \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq T$$

i, si substituïm aquests valors a l'equació (11.44), obtenim:

$$c \dot{\zeta} = \frac{qE}{m} h(\tau) + c \tau_0 \ddot{\zeta} \quad \text{amb} \quad \tau_0 \equiv \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (11.46)$$

i $h(\tau)$ val 1 si $0 \leq \tau \leq T$, i 0 a la resta. L'equació (11.46) es pot resoldre per separat en els intervals: (i) $\tau \leq 0$, (ii) $0 \leq \tau \leq T$ i (iii) $T \leq \tau$. En cada un d'ells és una equació diferencial lineal amb coeficients constants i les solucions són:

$$\dot{\zeta}(\tau) = \begin{cases} k_1 e^{\tau/\tau_0} & \tau \leq 0 \\ \frac{qE}{mc} + k_2 e^{\tau/\tau_0} & 0 \leq \tau \leq T \\ k_3 e^{\tau/\tau_0} & T \leq \tau \end{cases} \quad (11.47)$$

i, de la condició de continuïtat en $\tau = 0$ i $\tau = T$, tenim, respectivament, que:

$$k_1 = \frac{qE}{mc} + k_2 \quad \text{i} \quad \frac{qE}{mc} + k_2 e^{T/\tau_0} = k_3 e^{T/\tau_0},$$

que implica

$$k_3 - k_1 = \frac{qE}{mc} (e^{-T/\tau_0} - 1).$$

Un cop coneguda $\zeta(\tau)$, la relació entre el gruix L del condensador i el temps de trànsit T es pot determinar a partir de:

$$L = z^1(T) - z^1(0) = \int_0^T u^1(\tau) d\tau = c \int_0^T \sinh \zeta(\tau) d\tau,$$

que permet d'aïllar $T(L)$.

La solució (11.47) presenta alguns inconvenients inevitables. Com que sobre la càrrega no hi actua cap força abans d'entrar en l'espai del condensador, esperem que el moviment sigui uniforme i, per tant, que la rapidesa ζ sigui constant per a $\tau < 0$. Això vol dir que $\dot{\zeta}(\tau) = 0$ i en conseqüència la constant d'integració $k_1 = 0$. A més, com que després de sortir del condensador tampoc no hi actua cap força, també esperem que a partir d'aquest moment el moviment sigui uniforme, és a dir, $\dot{\zeta}(\tau) = 0$ per a $\tau > T$. D'acord amb la tercera de les igualtats (11.47) això vol dir que $k_3 = 0$. Però totes dues condicions no es poden demanar alhora perquè la diferència $k_3 - k_1$ té un valor fixat, que només depèn de q , E , m i $T(L)$.

Això que hem il·lustrat amb aquest exemple senzill és característic de les solucions de l'equació d'Abraham-Lorentz-Dirac (11.45): o s'autoacceleren exponencialment en el futur (solucions *runaway*) o s'acceleren abans que hagi començat a actuar la força (*preacceleració*).

Per fer-nos una idea de la magnitud d'aquesta inconsistència, considerem una solució del tipus (11.47) que no s'autoacceleri en el futur, és a dir, $k_3 = 0$. En aquest cas, l'efecte de preacceleració consistirà en el fet que abans d'entrar en el condensador l'acceleració pròpia és:

$$a = c\dot{\zeta}(\tau) = k_1 e^{-|\tau|/\tau_0} \quad \text{amb} \quad \tau < 0 \quad \text{i} \quad k_1 = \frac{qE}{mc} \left(1 - e^{-T/\tau_0}\right),$$

que és diferent de zero però decreix a mesura que $|\tau|$ augmenta. De fet, $a(\tau)$ només és apreciable per a $|\tau| \sim \tau_0$. Per als electrons (11.46) dóna $\tau_0 = 6,2 \cdot 10^{-24}$ s i, en ser inversament proporcional a m , encara és més petit per a altres partícules elementals i per a càrregues macroscòpiques.

Poder mesurar τ amb un error menor que τ_0 cau més enllà dels límits de validesa de la física clàssica. Per aquesta raó, alguns autors consideren que la preacceleració no representa una inconsistència fatal de la teoria clàssica de la dinàmica d'una càrrega i la seva radiació electromagnètica.³ Tanmateix, la inconsistència hi és i l'equació clàssica de la reacció a la radiació és encara un problema obert.

³En certa manera, trobar una teoria clàssica millor no val gaire la pena, ja que una teoria física coherent que descrigui correctament la dinàmica de la càrrega haurà de tenir en compte efectes quàntics.

Problemes

- 11.1 Fent servir els potencials de Liénard-Wiechert calculeu la mitjana en el temps de la potència radiada per unitat d'angle sòlid per a una partícula no relativista de càrrega q que es mou: (a) al llarg de l'eix z amb trajectòria $z(t) = a \cos(\omega_0 t)$, i (b) en un cercle de radi R en el pla XY amb velocitat angular ω_0 . Discutiu la distribució angular de la radiació i calculeu la potència total radiada.
- 11.2 Una partícula no relativista de càrrega ze , massa m i energia total E col·lisiona radialment amb una força central repulsiva descrita per un potencial $V(r)$, el qual es fa més gran que E a petites distàncies. (a) Demostreu que l'energia total radiada és:

$$\Delta W = \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \frac{z^2 e^2}{m^2 c^3} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_m}^{\infty} dr \left| \frac{dV}{dr} \right|^2 [V(r_m) - V(r)]^{-1/2},$$

on r_m = distància mínima en la col·lisió. (b) Si $V(r) = zZe^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ (potencial coulombià), demostreu que $\Delta W = \frac{8}{45} zmv_0^5 Z^{-1} c^{-3}$, v_0 = velocitat a l'infinit.

- 11.3 Considereu un condensador de plaques planes i paral·leles separades una distància d i sotmeses a una diferència de potencial V . Un electró relativista entra amb una energia E_0 pel centre del condensador paral·lelament a les plaques. Calculeu:
- (a) La trajectòria de l'electró.
 - (b) El temps que triga l'electró a ser capturat per la placa positiva.
 - (c) La longitud mínima del condensador perquè l'electró sigui capturat.
 - (d) L'energia total emesa per l'electró abans de la captura.
- 11.4 Una partícula de massa m i càrrega q es mou amb una velocitat relativista \vec{v}_0 en direcció perpendicular a un fil recte i amb un paràmetre d'impacte b respecte a aquest fil. El fil es troba carregat amb una densitat lineal de càrrega uniforme λ del mateix signe que la càrrega.
- (a) Doneu la potència instantània radiada per la càrrega en funció de m , q , λ , la velocitat i la posició.
 - (b) Suposant que la càrrega es desvia molt poc de la trajectòria inicial i que la variació de la seva velocitat és molt petita en relació amb la velocitat inicial, calculeu l'energia total radiada per la càrrega en tota la seva trajectòria (en aquesta aproximació la trajectòria és una recta recorreguda a velocitat constant).
 - (c) En el límit no relativista calculeu la distribució angular de la radiació en el punt on la potència radiada és màxima.

- 11.5 Una partícula de massa m i càrrega q entra en una regió on hi ha un camp magnètic \vec{B} uniforme amb una velocitat \vec{v}_0 , propera a c , que forma un angle θ amb \vec{B} .
- (a) Demostreu que la partícula segueix una trajectòria helicoidal.
 - (b) Quina energia perdrà la partícula en un cicle de la seva trajectòria com a conseqüència de la radiació emesa?
 - (c) Tenint en compte que un observador molt llunyà només rebrà radiació emesa quan la velocitat de la partícula apunta cap a l'observador (recordeu que l'angle on es concentra la radiació és molt petit), calculeu el temps que separa l'arribada dels polsos a l'observador.
- Nota: negligiu les pèrdues per radiació.
- 11.6 Una partícula relativista de massa m i càrrega q entra en un semiespai on hi ha un camp magnètic \vec{B} uniforme i paral·lel al pla límit del semiespai. La velocitat \vec{v}_0 de la partícula a l'entrada és perpendicular a \vec{B} i forma un angle de $\pi/4$ amb el pla límit del semiespai. Calculeu l'energia radiada per la partícula durant tot el trajecte en els casos:
- (a) quan $q > 0$ i (b) quan $q < 0$.
- 11.7 Considereu una partícula relativista de càrrega q que es mou a l'eix z amb trajectòria $z(t') = a \cos(\omega_0 t')$. (a) Demostreu que la potència instantània radiada per unitat d'angle sòlid és:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 c \beta^4}{16\pi^2 \epsilon_0 a^2} \frac{\sin^2 \Theta \cos^2(\omega_0 t')}{(1 + \beta \cos \Theta \sin(\omega_0 t'))^5},$$

on $\beta \equiv a\omega_0/c$ i (b) que la mitjana en el temps ve donada per:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_T = \frac{e^2 c \beta^4}{128\pi^2 \epsilon_0 a^2} \left(\frac{4 + \beta \cos^2 \Theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \Theta)^{7/2}} \right) \sin^2 \Theta.$$

(c) Compareu-ho amb el cas no relativista (problema 11.1).

- 11.8 Una partícula de massa m i càrrega q es mou en un pla perpendicular a un camp magnètic estàtic i uniforme \vec{B} .
- (a) Si a $t = 0$ l'energia de la partícula és E_0 calculeu com decreix aquesta energia a causa de la radiació.
 - (b) Demostreu que en el cas de velocitats properes a c

$$t \simeq \frac{6\pi\epsilon_0 m^3 c^5}{q^4 B^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \right)$$

on $\gamma_0 = \gamma(t = 0)$.

- (c) Calculeu l'energia $E(t)$ de la partícula en el cas no relativista.
- (d) Tenint en compte que la partícula perd energia per radiació, calculeu el radi de la seva òrbita en funció del temps si inicialment el seu radi és r_0 .

- 11.9 Demostreu que si el moviment d'una partícula de càrrega e i massa m és periòdic amb període T , l'espectre de freqüències és discret, amb freqüències múltiples de la freqüència fonamental $\omega_0 = 2\pi/T$. Demostreu que la mitjana en el temps de la potència radiada per unitat d'angle sòlid en cada múltiple m de la freqüència fonamental és:

$$\left\langle \frac{dP_m}{d\Omega} \right\rangle_T = \frac{e^2 \omega_0^4 m^2}{(8\pi^2 \epsilon_0 c)^3} \left| \int_0^{2\pi/\omega_0} dt (\vec{v}(t) \times \vec{n}) \exp\left(im\omega_0 \left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}(t)}{c}\right)\right) \right|^2.$$

Capítol 12

Ones electromagnètiques en el buit

12.1 Les ones electromagnètiques en el buit

En el buit, la relació entre els camps elèctric i magnètic, \vec{E} i \vec{H} , d'una banda, i el desplaçament \vec{D} i la inducció \vec{B} , de l'altra, és:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{i} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (12.1)$$

Així, les equacions de Maxwell en el buit, (8.5) i (8.6), en absència de càrregues i corrents, són:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (12.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (12.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (12.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = 0. \quad (12.5)$$

Si prenem el rotacional de (12.3), li restem la derivada temporal de (12.5) i tenim en compte la identitat vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$$

arribem a:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0, \quad (12.6)$$

on $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ és la «velocitat crítica de l'electromagnetisme», que, com ja hem dit al capítol 1, coincideix amb la velocitat de la llum en el buit.

Els tres components de l'equació (12.6) estan desacoblats i, per tant, podem resoldre cada component independentment dels altres.

Unes solucions que tenen un paper molt rellevant són les anomenades *solucions d'ona plana monocromàtica*. Es tracta de solucions ondulatòries de la forma:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^3 E_0^j \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_j) \hat{e}_j, \quad (12.7)$$

on \hat{e}_j és una base ortonormal de l'espai, les constants \vec{k} i ω són el vector d'ona i la freqüència angular, E_0^j és l'amplitud real del component j i ϕ_j n'és la fase.

L'equació d'ona (12.6) imposa una certa restricció sobre \vec{k} i ω . Abans d'analitzar-la, convé notar que, per la linealitat de l'equació (12.6), qualsevol superposició de solucions de la forma (12.7) també és solució de l'equació d'ona en el buit. A més, la solució (12.7) es pot posar també així:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] = \frac{1}{2} \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \frac{1}{2} \vec{\mathbb{E}}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (12.8)$$

on

$$\vec{\mathbb{E}}_0 = \mathbb{E}_0^j \hat{e}_j = E_0^j e^{i\phi_j} \hat{e}_j \quad (12.9)$$

és un vector amb tres components complexos que guarden la informació tant de l'amplitud com de la fase.

Si ara substituïm (12.8) en l'equació d'ona (12.6) obtenim:

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \text{Re} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] = 0, \quad (12.10)$$

que es complirà si, i només si,

$$k \equiv |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}. \quad (12.11)$$

Ens queda encara imposar que el camp elèctric sigui solució de les equacions de Maxwell en el buit. D'una banda, de (12.8) tenim:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{Re} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] = \text{Re} \left[i\vec{k} \cdot \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right]$$

i l'equació (12.4) implica que:

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathbb{E}}_0 = 0. \quad (12.12)$$

De l'altra, a partir de (12.3) podem obtenir el camp magnètic \vec{B} que acompanya el camp elèctric variable (12.8):

$$\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} = -\text{Re} \left[\nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \times \vec{\mathbb{E}}_0 \right] = -\text{Re} \left[i\vec{k} \times \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right]$$

i, si integrem respecte a t :

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[\frac{\vec{k} \times \vec{\mathbb{E}}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] + \vec{B}_{\text{est}}(\vec{x}), \quad (12.13)$$

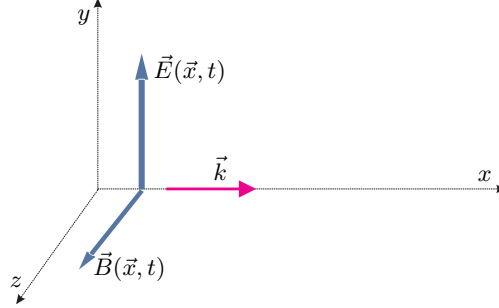


Figura 12.1. Configuració del camp elèctric \vec{E} , la inducció magnètica \vec{B} i el vector d'ona \vec{k} , en una ona plana monocromàtica

on la contribució magnetostàtica és arbitrària, però ha de tenir divergència i rotacional nuls.

Resumint, si deixem de banda la contribució magnetostàtica, els camps elèctric i magnètic d'una ona plana monocromàtica són:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \left[\vec{\mathbb{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

amb:

$$\vec{\mathbb{B}}_0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{\mathbb{E}}_0, \quad \hat{k} \cdot \vec{\mathbb{E}}_0 = 0 \quad \text{i} \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}, \quad (12.15)$$

on \hat{k} és el vector unitari en la direcció de \vec{k} .

Les expressions (12.14) recorden l'equació (3.2) de les ones planes. S'anomenen *solucions d'ona plana* perquè en cada instant els llocs de fase constant són plans perpendiculars al vector d'ona \vec{k} . La velocitat a què es desplacen aquests plans és $\omega/|\vec{k}| = c$, i s'anomena *velocitat de fase de l'ona*.

A conseqüència de la relació (12.15), el camp electromagnètic d'una ona plana monocromàtica és singular: tots dos invariants s'anul·len. En efecte, de (12.14) tenim:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{B}}_0 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{B}}_0^* \right].$$

Ara bé, de (12.15) se segueix que $\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{B}}_0 = 0$ i també, com que \hat{k} és real, tindrem que:

$$\text{Re} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{B}}_0^* \right] = \frac{1}{2} \hat{k} \cdot \left(\vec{\mathbb{E}}_0^* \times \vec{\mathbb{E}}_0 \right) + \frac{1}{2} \hat{k} \cdot \left(\vec{\mathbb{E}}_0 \times \vec{\mathbb{E}}_0^* \right) = 0.$$

D'on resulta que $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

De manera semblant es demostra que l'altre invariant també és nul:

$$\vec{E}^2/c^2 - \vec{B}^2 = 0.$$

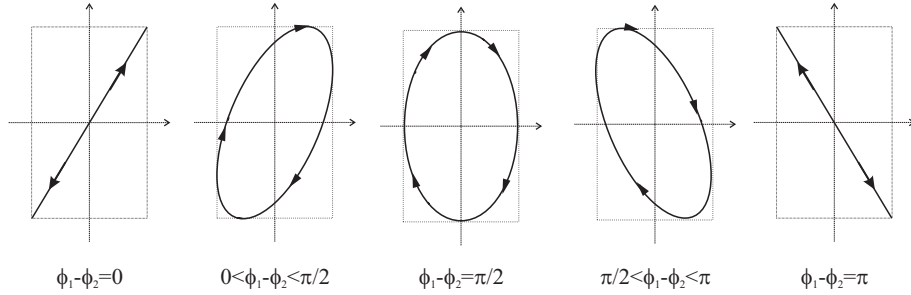


Figura 12.2. Diferents formes de polarització lineal i elíptica, segons el valor del desfasament $\phi_1 - \phi_2$

Per a més endavant ens convindrà utilitzar la següent expressió tensorial de les solucions d'ona plana i monocromàtica:

$$F^{\mu\nu}(x) = \text{Re} \left[\mathbb{F}_0^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \right] \quad (12.16)$$

amb

$$\mathbb{F}_0^{4j} = \frac{\mathbb{E}_0^j}{c}, \quad \mathbb{F}_0^{jl} = \frac{1}{c} (\hat{k}^j \mathbb{E}_0^l - \hat{k}^l \mathbb{E}_0^j), \quad (12.17)$$

com se segueix fàcilment de (12.14) i (12.15).

12.1.1 Polarització

Vegem ara el paper de les fases ϕ_j dels components complexos del vector $\vec{\mathbb{E}}_0$. Si, per simplificar, escollim els eixos de l'espai de manera que $\hat{e}_3 = \hat{k}$, la segona de les relacions (12.15) i la definició (12.9) ens diuen que:

$$\vec{\mathbb{E}}_0 = \mathbb{E}_0^1 \hat{e}_1 + \mathbb{E}_0^2 \hat{e}_2 = E_0^1 e^{i\phi_1} \hat{e}_1 + E_0^2 e^{i\phi_2} \hat{e}_2, \quad (12.18)$$

que, substituïdes a (12.14), donen per al camp elèctric:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0^1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_1) \hat{e}_1 + E_0^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_2) \hat{e}_2. \quad (12.19)$$

És a dir, és la superposició de dos components —perpendiculars a \hat{k} i ortogonals entre ells— que oscil·len amb fases diferents.

Per a un punt \vec{x} fixat, l'extrem del vector elèctric $\vec{E}(\vec{x}, t)$ descriu una corba en el pla perpendicular a la direcció de propagació \hat{k} . La forma d'aquesta corba depèn de les amplituds E_0^1 i E_0^2 i de la diferència de fases $\phi_1 - \phi_2$. (Vegeu la figura 12.2.) Per a $\phi_1 - \phi_2 = 0$ o π la polarització és lineal. En els altres casos tenim polarització el·líptica (circular si les amplituds són iguals, $E_0^1 = E_0^2$): dextrogira si $\pi < \phi_1 - \phi_2 < 2\pi$ i levogira si $0 < \phi_1 - \phi_2 < \pi$.

12.1.2 El tensor d'energia-moment

La densitat d'energia en un camp electromagnètic, així com el corrent d'energia que transporta estan relacionats amb alguns dels components del tensor d'energia-moment (com ja hem vist a la secció 8.5). En el cas d'una ona plana, si substituïm l'expressió tensorial (12.16) del camp electromagnètic en la definició (8.54) del tensor d'energia-moment, tenim:

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbb{F}_0^{\mu\rho} \mathbb{F}_0^{*\nu}{}_\rho - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \mathbb{F}_0^{\sigma\rho} \mathbb{F}_0^{*}{}_{\sigma\rho} \right] \\ &\quad + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \operatorname{Re} \left[\left(\mathbb{F}_0^{\mu\rho} \mathbb{F}_0^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \mathbb{F}_0^{\sigma\rho} \mathbb{F}_0^{*}{}_{\sigma\rho} \right) e^{2i k^\lambda x_\lambda} \right].\end{aligned}$$

Hi veiem dues contribucions: la primera és constant i la segona varia sinusoidalment segons la variable $2 k^\lambda x_\lambda = 2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$.

Una mesura de qualsevol dels components de $\Theta^{\mu\nu}$ (la densitat d'energia, per exemple) no és instantània, sinó que comporta la interacció de l'ona amb l'aparell de mesura durant un cert temps τ . La lectura de l'aparell no donarà, doncs, el valor instantani de $\Theta^{\mu\nu}$, sinó una mitjana temporal. Si el temps d'interacció inclou molts períodes d'oscil·lació ($\omega\tau \gg 2\pi$), llavors aquesta mitjana temporal és sobre un interval pràcticament infinit i, per la periodicitat de l'ona, solament queda la contribució constant:

$$\langle \Theta^{\mu\nu}(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \Theta^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbb{F}_0^{\mu\rho} \mathbb{F}_0^{*\nu}{}_\rho - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \mathbb{F}_0^{\sigma\rho} \mathbb{F}_0^{*}{}_{\sigma\rho} \right].$$

D'acord amb allò que hem vist en la secció 8.5, el component $\langle \Theta^{44} \rangle$ dona la densitat d'energia de l'ona:

$$\langle U \rangle = \langle \Theta^{44} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \left(\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{E}}_0^* + c^2 \vec{\mathbb{B}}_0 \cdot \vec{\mathbb{B}}_0^* \right)$$

i si usem (12.15), tenim:

$$\langle U \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{E}}_0^* \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \left| \vec{\mathbb{E}}_0 \right|^2. \quad (12.20)$$

El vector de Poynting està relacionat amb els components $\langle \Theta^{4i} \rangle$ —secció 8.5— i si tenim en compte (12.15), arribem a:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 \times \vec{\mathbb{B}}_0^* \right] = \frac{\epsilon_0 c}{2} \left[\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{E}}_0^* \right] \hat{k} = \langle U \rangle c \hat{k}, \quad (12.21)$$

que, comparada amb l'expressió (12.20) de la densitat d'energia, correspon a una convecció a velocitat c en la direcció de propagació de l'ona \hat{k} .

La resta de components estan relacionats amb el tensor d'esforços de Maxwell (8.57):

$$\langle \Theta^{ij} \rangle = -T^{ij} = \frac{\epsilon_0}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbb{E}_0^i \mathbb{E}_0^{*j} + c^2 \mathbb{B}_0^i \mathbb{B}_0^{*j} - \frac{1}{2} \delta^{ij} \left(\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{\mathbb{E}}_0^* + c^2 \vec{\mathbb{B}}_0 \cdot \vec{\mathbb{B}}_0^* \right) \right].$$

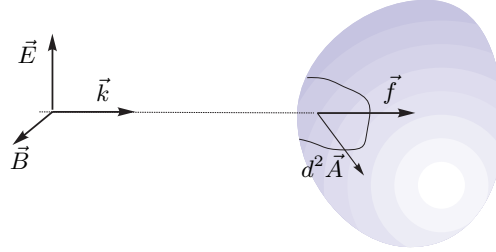


Figura 12.3. Pressió de radiació d'una ona electromagnètica

Un càlcul senzill en un sistema d'eixos en què $\hat{e}_1 = \hat{k}$, i que té en compte les relacions (12.15), ens dona que l'únic component no nul és:

$$T^{11} = -\frac{\epsilon_0}{2}(E_2^2 + c^2 B_3^2) = -\langle U \rangle.$$

I en un sistema d'eixos qualsevol tenim:

$$\langle T^{ij} \rangle = -\langle U \rangle \hat{k}^i \hat{k}^j. \quad (12.22)$$

Si ara recordem l'equació (8.61), el segon membre donava la força exercida pel camp sobre el volum delimitat per la superfície \mathcal{A} :

$$\oint_{\mathcal{A}} T^{ij}(\vec{x}, t) d^2 A_j.$$

Així, si \hat{n} és el vector unitari normal a la superfície \mathcal{A} , orientat cap a l'interior, $f^i \equiv -T^{ji}\hat{n}_j$ és la força que fa el camp per unitat de superfície o *pressió de radiació* (vegeu la figura 12.3). De l'expressió (12.22) se segueix òbviament que:

$$\vec{f} = \langle U \rangle (\hat{k} \cdot \hat{n}) \hat{k}.$$

Notem, per acabar, que les expressions (12.21) i (12.22) es poden resumir en la igualtat tensorial:

$$\langle \Theta^{\mu\nu} \rangle = \frac{\langle U \rangle}{(k^4)^2} k^\mu k^\nu. \quad (12.23)$$

Exemple 12.1 Les solucions d'ona plana. Forma covariant

Si ens haguéssim proposat des del principi trobar les solucions d'ona plana en la forma covariant, hauríem substituït l'expressió (12.16):

$$F^{\mu\nu}(x) = \text{Re} \left[f^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \right]$$

en les equacions de Maxwell en forma tensorial i sense càrregues, (8.32) i (8.33),

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{i} \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (12.24)$$

Hauríem obtingut:

$$\operatorname{Re} \left[i(k_\mu f_{\nu\alpha} + k_\nu f_{\alpha\mu} + k_\alpha f_{\mu\nu}) e^{ik_\rho x^\rho} \right] = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{Re} \left[i k_\nu f^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \right] = 0,$$

respectivament, que impliquen les següents relacions algebraiques entre les constants k_μ i $f_{\mu\nu}$:

$$k_\mu f_{\nu\alpha} + k_\nu f_{\alpha\mu} + k_\alpha f_{\mu\nu} = 0 \quad (12.25)$$

$$k_\nu f^{\mu\nu} = 0 \quad (12.26)$$

Si contraïem la primera amb k^μ i tenim en compte la segona i que $f_{\mu\nu} \neq 0$ arribem a $k^\mu k_\mu = 0$, que vol dir que el 4-vector d'ona k^μ és de tipus llum [l'expressió covariant de (12.11)].

Escollim ara un 4-vector arbitrari l^μ tal que $k_\mu l^\mu = 0$ i definim $h_\mu \equiv f_{\mu\nu} l^\nu$. Per contracció de (12.25) amb l^μ obtenim:

$$f_{\nu\alpha} = k_\nu h_\alpha - h_\nu k_\alpha,$$

que substituïda en (12.26) ens porta a $k_\mu h^\mu = 0$.

Resumint, un camp electromagnètic del tipus (12.16) satisfà les equacions de Maxwell en el buit sempre que:

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad \text{i} \quad f_{\nu\alpha} = k_\nu h_\alpha - h_\nu k_\alpha \quad (12.27)$$

amb $k_\mu h^\mu = 0$. El 4-vector k^μ té els quatre components reals, però els de h^μ podrien ser complexos i, com que k^μ és de tipus llum, tant la part real com la imaginària de h^μ han de ser espacials.

Un camp electromagnètic com aquest ha de ser forçosament singular. En efecte, de les relacions anteriors tenim que:

$$f^{\mu\nu} f_{\nu\alpha} = (h^\nu h_\nu) k^\mu k_\alpha \quad \text{i} \quad f^{\mu\nu} f_{\nu\alpha}^* = (h^\nu h_\nu^*) k^\mu k_\alpha$$

i s'arriba fàcilment a:

$$F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} = H^\nu H_\nu k^\mu k_\alpha \quad \text{amb} \quad H^\nu \equiv \operatorname{Re} \left[h^\nu e^{ik_\rho x^\rho} \right],$$

de la qual se segueixen immediatament, d'una banda, els invariants:

$$F^{\mu\nu} F_{\nu\mu} = 0 \quad \text{i} \quad F^{\mu\nu} F_{\nu\beta} F^{\beta\alpha} F_{\alpha\mu} = 0$$

i, de l'altra, el tensor energia-moment:

$$\langle \Theta^{\mu\nu} \rangle = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} h^\alpha h_\alpha^* k^\mu k^\nu.$$

Problemes

- 12.1 Descomponeu el camp electrostàtic solució de l'equació de Laplace per a una càrrega puntual q en ones planes que no satisfan l'equació d'ona homogènia, és a dir, que no compleixen $|\vec{k}| = \omega/c$. Comproveu que a més són ones longitudinals i no transversals.
- 12.2 Trobeu la polarització de la radiació emesa per la càrrega relativista del problema 11.7.
- 12.3 Determineu la polarització de la radiació electromagnètica emesa pel dipol magnètic que gira de l'exemple 10.2. (És una ona esfèrica.)
- 12.4 Un paquet d'ones aproximadament monocromàtiques en una dimensió té la forma instantània $u(x, 0) = f(x)e^{ik_0x}$, on $f(x)$ és l'envolupant moduladora. Per a les següents funcions $f(x) = N \exp(-\alpha|x|/2)$ i $f(x) = N \exp(-\alpha^2 x^2/4)$ calculeu l'espectre i les desviacions quadràtiques mitjanes, Δx i Δk respecte a les mitjanes i comproveu la desigualtat $\Delta x \Delta k \geq 1/2$.

Capítol 13

Ones electromagnètiques en medis materials

Estudiarem alguns aspectes de la propagació d'ones electromagnètiques en medis dispersius. La selecció de temes que conformen el capítol està orientada a entendre els experiments recents en què es mesuren velocitats supralumíniques per a ones electromagnètiques en medis dispersius. Sense pretendre ser exhaustius, es presenten unes pinzellades de la teoria de medis dispersius (apèndixs 13.A i 13.B), el fenomen de la dispersió anòmala i també diferents definicions possibles de la velocitat d'una ona.

13.1 Camps electromagnètics en medis materials

Com ja hem comentat a la secció 8.1, les equacions de Maxwell (8.1) i (8.2) són indeterminades llevat que precisem les relacions entre el camp elèctric \vec{E} i el desplaçament \vec{D} , i el camp magnètic \vec{H} i la inducció \vec{B} , respectivament. És a dir, les relacions constitutives (8.3):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

on la polarització \vec{P} i la magnetització \vec{M} donen la resposta als camps \vec{E} i \vec{H} aplicats per part de les càrregues presents en el medi.

El cas més senzill és el dels medis lineals i isòtrops, però no és tan simple com hem avançat a la secció 8.1 perquè un mateix medi pot respondre de manera diferent a les diverses freqüències del camp aplicat.

Per mitjà de la transformada de Fourier, el camp elèctric $\vec{E}(\vec{x}, t)$ es pot expressar així:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, \omega), \quad (13.1)$$

on, per la relació de la transformada inversa de Fourier:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \vec{E}(\vec{x}, t). \quad (13.2)$$

Com que \vec{E} és un vector real, tenim immediatament que:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, -\omega) = \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{x}, \omega). \quad (13.3)$$

La relació (13.1) admet una interpretació simple. Com que el primer membre és real, gràcies a (13.3) tindrem que per a cada component:

$$E^j(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega |\mathcal{E}^j(\vec{x}, \omega)| \cos[\omega t - \phi_j(\vec{x}, \omega)],$$

on $|\mathcal{E}^j|$ és el mòdul del nombre complex \mathcal{E}^j i ϕ_j n'és la fase. Així $E^j(\vec{x}, t)$ és el resultat de superposar una infinitat de components monocromàtics de freqüència angular ω , fase ϕ_j i amplitud $|\mathcal{E}^j| d\omega$.

Tenim també relacions de Fourier anàlogues a les (13.1) i (13.2) per a \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{P} i \vec{M} d'una banda, i $\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, $\vec{\mathcal{P}}$ i $\vec{\mathcal{M}}$ de l'altra.

En els medis lineals la resposta del medi és lineal però, en general, diferent per a cada freqüència:

$$\mathcal{P}^j(\vec{x}, \omega) = \epsilon_0 \sum_{l=1}^3 \chi_l^j(\omega) \mathcal{E}^l(\vec{x}, \omega), \quad \mathcal{M}^j(\vec{x}, \omega) = \mu_0 \sum_{l=1}^3 \kappa_l^j(\omega) \mathcal{H}^l(\vec{x}, \omega).$$

Aquí ens limitarem a considerar medis lineals i isòtrops, per als quals les matrius $\chi_l^j(\omega)$ i $\kappa_l^j(\omega)$ són proporcionals a δ_l^j , i tindrem:

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{x}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, \omega), \quad \vec{\mathcal{M}}(\vec{x}, \omega) = \mu_0 \kappa(\omega) \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, \omega), \quad (13.4)$$

on $\chi(\omega)$ i $\kappa(\omega)$ són, respectivament, les susceptibilitats elèctrica i magnètica del medi. Aquestes relacions són lleis fenomenològiques que es poden entendre d'acord amb un model microscòpic del medi. En veurem un exemple senzill a l'apèndix 13.B.

Si tenim en compte la relació entre la polarització i el desplaçament i entre la magnetització i la inducció magnètica, les relacions anteriors ens porten a:

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{x}, \omega) = \epsilon_r(\omega) \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, \omega), \quad \vec{\mathcal{B}}(\vec{x}, \omega) = \mu_r(\omega) \mu_0 \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, \omega),$$

on

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) \quad \text{i} \quad \mu_r(\omega) = 1 + \kappa(\omega) \quad (13.5)$$

són els coeficients dielèctric i magnètic relatius.

En principi $\chi(\omega)$ és una funció qualsevol de ω , però si la relació entre el camp elèctric $\vec{E}(\vec{x}, t)$ i la polarització $\vec{P}(\vec{x}, t)$ ha de complir una sèrie de condicions molt generals i força raonables del punt de vista físic, com ara:

- (a) $\vec{P}(\vec{x}, t)$ no pot dependre de $\vec{E}(\vec{x}, t')$ per a $t' > t$,
- (b) un camp elèctric finit i constant no produeix una polarització infinita i
- (c) el medi està en equilibri termodinàmic,

llavors la funció χ , considerada com a funció de la variable complexa ω , no pot tenir singularitats ni zeros per a $\text{Im } \omega > 0$. (Vegeu l'apèndix 13.A per a més detalls.)

Tal com s'il·lustra a l'apèndix 13.B, la forma de $\epsilon_r(\omega)$ depèn del mecanisme d'interacció del medi amb la radiació de freqüència angular ω . Per a un gas, amb un espectre d'absorció discret, ϵ_r és pràcticament constant excepte a la proximitat de cada freqüència ω_j de l'espectre d'absorció, en què val aproximadament:

$$\epsilon_r(\omega) \approx 1 + \frac{a_j^2}{\omega_j^2 - 2i\omega\rho_j - \omega^2}$$

per a uns valors de a_j i ρ_j convenients.

13.2 Ones electromagnètiques en un medi dispersiu

Per estudiar les ones electromagnètiques en medis materials partirem de les equacions de Maxwell (8.1) i (8.2) en absència de càrregues lliures. Si hi substituïm $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{D}(\vec{x}, t)$, $\vec{H}(\vec{x}, t)$ i $\vec{B}(\vec{x}, t)$ per les expressions de Fourier corresponents (13.1), obtenim:

$$\text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = i\omega \vec{\mathcal{B}}, \quad (13.6)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{D}} = 0, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = -i\omega \vec{\mathcal{D}}. \quad (13.7)$$

I si ara tenim en compte les relacions constitutives (13.4) i (13.5), després de combinar el rotacional de la segona equació (13.6) amb la segona (13.7), arribem a:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} + \frac{n^2(\omega)}{c^2} \omega^2 \vec{\mathcal{E}} = 0. \quad (13.8)$$

El nombre $n(\omega) = \sqrt{\mu_r(\omega)\epsilon_r(\omega)}$ és el que anomenem *índex de refracció* i és en molts casos un nombre complex.

13.2.1 Ones planes

Un conjunt particular de solucions de (13.8) el formen les ones planes (els punts de fase constant es troben sobre un pla) amb polarització lineal. Per a una d'aquestes ones, i escollint convenientment els eixos de l'espai (vegeu la figura

12.1), tenim $\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, \omega) = \mathcal{E}(x, \omega) \hat{e}_2$ (el vector elèctric és: $\vec{E} = E(x, t) \hat{e}_2$) i l'equació (13.8) es redueix a:

$$\partial_x^2 \mathcal{E} + \frac{n^2(\omega)}{c^2} \omega^2 \mathcal{E} = 0, \quad (13.9)$$

que té per solució general:

$$\mathcal{E}(x, \omega) = A_+(\omega) e^{ik(\omega)x} + A_-(\omega) e^{-ik(\omega)x}$$

amb $k(\omega) = \omega n(\omega)$. Si ara utilitzem (13.1) tenim per al camp elèctric:

$$E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[A_+(\omega) e^{ik(x-c't)} + A_-(\omega) e^{-ik(x+c't)} \right], \quad (13.10)$$

on $c'(\omega) = c/n(\omega)$ té dimensions de velocitat i és habitualment un nombre complex.

L'expressió (13.10) ens permetrà d'entendre el significat físic de la part real i la part imaginària d'un índex de refracció complex, $n(\omega) = n_1(\omega) + in_2(\omega)$, com ara el que resulta de prendre la constant dielèctrica $\epsilon_r(\omega)$ complexa donada per (13.5) i la permeabilitat magnètica $\mu_r = 1$ (medi sense activitat magnètica).

El camp elèctric $E(x, t)$ resulta de la superposició d'ones sinusoïdals de freqüència ω ,

- una que viatja cap a la dreta de l'eix X

$$\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} A_+(\omega) e^{ik(x-c't)} = \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} A_+(\omega) e^{-\omega n_2 x/c} e^{-i\omega(t-xn_1/c)}$$

- i l'altra que viatja cap a l'esquerra de l'eix X

$$\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} A_-(\omega) e^{-ik(x+c't)} = \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} A_-(\omega) e^{\omega n_2 x/c} e^{-i\omega(t+xn_1/c)}.$$

En tots dos casos la velocitat de fase és $W(\omega) = c/n_1(\omega)$, i totes dues ones es van amortint a mesura que es desplacen, una en el sentit positiu de l'eix X i l'altra en el negatiu. La *longitud de penetració*, o distància recorreguda per l'ona abans d'amortir-se en un factor $1/e$, és:

$$\delta = \frac{c}{\omega n_2(\omega)}.$$

El fet que la velocitat de fase depengui de la freqüència té com a conseqüència el fenomen conegut amb el nom de *dispersió*, la diferent desviació que experimenten els diversos components monocromàtics en travessar un prisma òptic.

Una solució de l'equació (13.9) consistirà en dos paquets d'ones, l'un que es desplaça en el sentit positiu de l'eix X i l'altre, en sentit contrari. Així, un senyal electromagnètic que en $x = 0$ respongui al perfil:

$$E(0, t) = \text{Re} \left[\int_0^{\infty} d\omega f(\omega) e^{-i\omega t} \right] \quad (13.11)$$

i viatgi en el sentit positiu de l'eix X , en arribar al punt $x > 0$ dona un senyal de la forma:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty d\omega f(\omega) e^{-i\omega t + ik(\omega)x} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty d\omega f(\omega) e^{-i\omega[t-x/W(\omega)]} e^{-xk_2(\omega)} \right] \end{aligned} \quad (13.12)$$

amb $k(\omega) = k_1(\omega) + ik_2(\omega)$.

Si comparem les expressions (13.11) i (13.12), veiem que el senyal que arriba a $x > 0$ és una superposició de components monocromàtics, com a $x = 0$, però afectats cada un d'un retard $x/W(\omega)$, que a causa de la dispersió depèn de la freqüència, i amortits en un factor que també depèn de la freqüència. Com a conseqüència, el perfil temporal del senyal rebut a $x > 0$ està deformat si el comparem amb el senyal rebut en $x = 0$.

13.2.2 L'índex de refracció

S'anomena així el nombre $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)}$ que en general és una funció complexa de ω i, a causa de l'arrel, és bivaluada. Nosaltres la prendrem de manera que:

$$n(\omega) = n_1(\omega) + i n_2(\omega), \quad n_1(\omega) > 0.$$

Per a un medi dispersiu sense activitat magnètica, $\mu_r = 1$, tenim:

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = \sqrt{1 + \chi(\omega)}.$$

Si el medi compleix, a més, els requisits força generals comentats al final de la secció 13.1, llavors $\chi(\omega)$ no té singularitats ni zeros en el semiplà $\operatorname{Im}(\omega) > 0$. En conseqüència, $n(\omega)$ és analítica en el mateix semiplà. A més, del comportament de $\chi(\omega)$ per a freqüències grans (13.31), tenim:

$$n(\omega) - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad |\omega| \rightarrow \infty. \quad (13.13)$$

Notem que hi ha dispersió quan n_1 depèn de la freqüència. En aquest cas, ϵ_r i χ també n'han de dependre. Però per les relacions de Kramers-Krönig (apèndix 13.A), la part imaginària $\operatorname{Im} \chi(\omega) \neq 0$ i tampoc no s'anul·larà la part imaginària $n_2(\omega)$. Per tant, la dispersió sempre va acompanyada d'absorció. Per il·lustrar-ho, veurem una representació gràfica de $n_1(\omega)$ i $n_2(\omega)$ en la proximitat d'una ratlla d'absorció en el cas d'un medi gasós. L'índex de refracció té molt aproximadament la forma:

$$n(\omega) = n_1(\omega) + i n_2(\omega) = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - 2i\rho\omega - \omega^2}}. \quad (13.14)$$

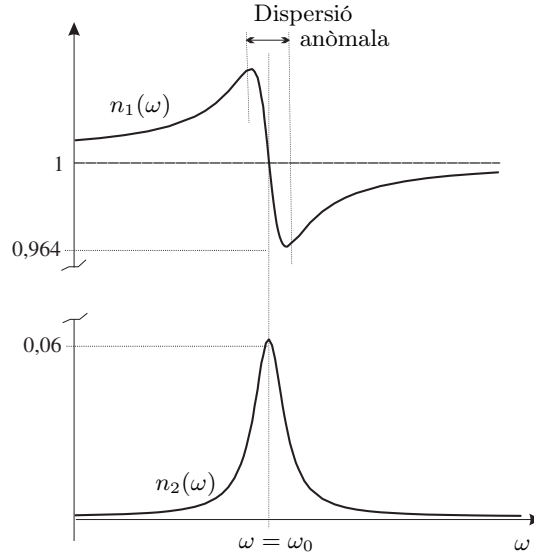


Figura 13.1. Part real n_1 i part imaginària n_2 de l'índex de refracció en funció de la freqüència ω , a la proximitat d'una línia d'absorció

A la figura 13.1 representem aquestes funcions per als valors «raonables» dels paràmetres: $a = 1,1\omega_0$ i $\rho = 0,07\omega_0$. Veiem com el medi és transparent, $n_2(\omega) \approx 0$, excepte en l'entorn de la freqüència característica ω_0 . Precisament en la regió estreta en què n_1 és molt decreixent, $n'_1(\omega) < 0$, que s'anomena *zona de dispersió anòmala*. Més endavant en veurem les peculiaritats i els fenòmens que comporta.

Notem també com la dispersió anòmala està molt lligada a l'absorció. En efecte, si no hi hagués absorció, $\rho = 0$, $n_2(\omega) = 0$ i la gràfica de $n_1(\omega)$ seria la que il·lustra la figura 13.2:

$$n_1(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + a^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}},$$

que no està definit en l'interval $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + a^2}$, i sempre és creixent (sense dispersió anòmala).

13.3 Les velocitats d'una ona

La velocitat d'un punt material és un concepte simple però una ona és un objecte extens i definir-ne la velocitat no té una resposta senzilla i inequívoca.¹

¹Per a un estudi complet d'aquest tema vegeu BRILLOUIN (1960).

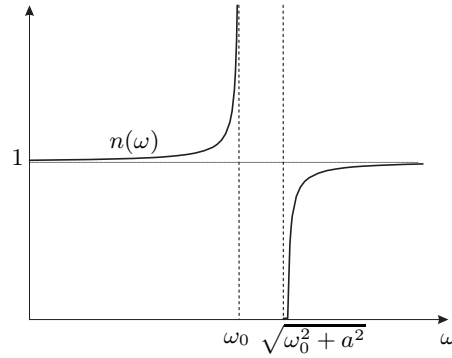


Figura 13.2. Quan no hi ha absorció, l'índex de refracció de fase sempre és creixent i no hi ha dispersió anòmala

La velocitat és el quocient d'un desplaçament per un interval de temps i no sempre és clar quant s'ha desplaçat un objecte extens, i més si es deforma.

Una ona plana monocromàtica és un objecte ideal que ocupa tot l'espai, amb una densitat d'energia $\langle U \rangle$ homogènia. Amb aparells de mesura —que per les raons adduïdes en la secció 12.1 mesuren $\langle U \rangle$ — posats en diferents llocs de l'espai no detectaríem cap diferència i tampoc cap moviment. Tanmateix, podem associar-li una *velocitat de fase*, la velocitat a què es desplacen els plans de fase constant. Aquest concepte té significat físic perquè podem comparar velocitats de fase per mitjà d'experiments d'interferometria. En les ones electromagnètiques de la secció anterior, la velocitat de fase és el quocient

$$W(\omega) = \frac{c}{n_1(\omega)}$$

i per a algunes freqüències pot tenir valors supralumínics, superiors a c (vegeu la figura 13.1 per a les freqüències de la dreta de ω_0).

Aquest fet no està en conflicte amb el paper de velocitat límit que la teoria de la relativitat assigna a c , perquè la fase d'una ona no transporta ni informació ni energia, com ja discutirem més a fons al llarg d'aquesta secció.

La velocitat de grup

Per tenir una ona amb $\langle U \rangle$ confinada a una regió de l'espai, hem de recórrer a superposar moltes ones monocromàtiques d'amplituds i fases diferents segons la freqüència, el que s'anomena *un paquet d'ones*. En aquest cas té sentit parlar de la velocitat del paquet o *velocitat de grup* sempre que en propagar-se el paquet mantingui la mateixa forma, si més no, aproximadament.

Així passa quan l'índex de refracció és real i no depèn de la freqüència. En aquest cas la velocitat de grup i la de fase coincideixen i no depenen de ω . La

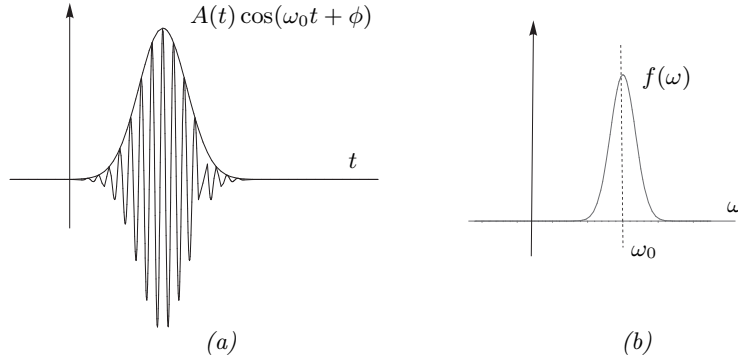


Figura 13.3. (a) Senyal que modula una ona portadora de freqüència ω_0 i (b) components espectrals del mateix senyal

comparació de les equacions (13.11) i (13.12) ens mostra com el senyal que arriba a $x > 0$ és la mateixa superposició de senyals harmònics que a $x = 0$, tots afectats pel mateix retard x/W . Per tant, $E(x, t) = E(0, t - x/W)$.

També té sentit utilitzar una descripció anàloga si, per a l'interval de freqüències que contribueixen significativament al paquet d'ones, l'absorció i el desfasament no en produeixen una deformació excessiva.

Considerem un paquet com el representat per (13.11) en $x = 0$ i per (13.12) en $x > 0$, format per un senyal $A(t)$ que modula una ona portadora de freqüència ω_0 (figura 13.3). Suposem que només contribueixen significativament al senyal les freqüències $|\omega - \omega_0| < \delta\omega$, compreses en un interval d'amplada $2\delta\omega$ al voltant d'una freqüència central ω_0 . En $x = 0$ tenim:

$$E(0, t) \approx \text{Re} \left[e^{-i\omega_0 t} \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} d\zeta \tilde{f}(\zeta) e^{-i\zeta t} \right] = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (13.15)$$

amb $\tilde{f}(\zeta) = f(\omega_0 + \zeta)$.

Si ara usem (13.12) i posem $k(\omega_0) = k_1(\omega_0) + ik_2(\omega_0)$, el senyal que arriba a $x > 0$ es pot expressar així:

$$E(x, t) \approx \text{Re} \left[e^{-i[\omega_0 t - k_1(\omega_0)x]} e^{-xk_2(\omega_0)} \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} d\zeta \tilde{f}(\zeta) e^{-i\zeta t + ix[k(\omega) - k(\omega_0)]} \right], \quad (13.16)$$

que suggereix la interpretació d'un senyal que modula una ona portadora de freqüència ω_0 , que es propaga a la velocitat de fase $W(\omega_0) = \omega_0/k_1(\omega_0)$ i s'amorteix en un factor $e^{-xk_2(\omega_0)}$. Per analitzar l'evolució del factor modulador usarem l'aproximació de Taylor de primer ordre:

$$k(\omega) - k(\omega_0) = \zeta k'(\omega_0) + O(\delta\omega^2), \quad k'(\omega) = \frac{dk(\omega)}{d\omega} = k'_1(\omega) + ik'_2(\omega),$$

que substituïda en (13.16) dóna per al factor modulador:

$$\approx \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} d\zeta \tilde{f}(\zeta) e^{-i\zeta[t-xk'_1(\omega_0)]} e^{-\zeta x k'_2(\omega_0)} + O(\delta\omega^3).$$

Si $k'_2(\omega_0)\delta\omega \ll 1$, l'amortiment es pot negligir (l'absorció deforma poc el paquet) i el senyal en $x > 0$ és aproximadament:

$$E(x, t) \approx e^{-xk_2(\omega_0)} \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega_0[t-x/W_0]} \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} d\zeta \tilde{f}(\zeta) e^{-i\zeta[t-xk'_1(\omega_0)]} \right]. \quad (13.17)$$

És a dir, té la mateixa forma que el senyal a $x = 0$, però afectada per un factor d'absorció $e^{-xk_2(\omega_0)}$. L'ona portadora es desplaça a la velocitat de fase W_0 , mentre que la moduladora es desplaça a la *velocitat de grup* $U_g = U(\omega_0)$ amb:

$$\frac{1}{U(\omega)} = k'_1(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega n_1(\omega)}{c} \right) = \frac{n_1(\omega) + \omega n'_1(\omega)}{c}.$$

Com que canvia poc de forma, sembla com si el paquet d'ones es desplaçés com un tot a la velocitat

$$U_g = \frac{c}{n_1(\omega_0) + \omega_0 n'_1(\omega_0)} \quad (13.18)$$

que normalment és sublumínica, $U(\omega) < c$, excepte en les regions de dispersió anòmala, en què $n'_1(\omega) < 0$, i es poden donar velocitats de grup supralumíniques i fins i tot negatives, com veurem en la secció 13.4. Però aquest fet tampoc no està en conflicte amb la teoria de la relativitat, perquè no té implicacions causals. En efecte, la velocitat de grup representa de fet la velocitat a què es desplaça el màxim del paquet, però la posició d'aquest punt en un instant no està determinada només per la seva posició un instant abans, sinó per la forma de tot el paquet. Precisament quan hi ha dispersió anòmala, l'absorció és important i depèn molt de la freqüència, de manera que afecta de manera molt diferent els diversos components monocromàtics, el perfil del senyal es deforma molt i no té sentit parlar de «paquet».

Velocitat del front

Aquesta definició de velocitat és particularment notable pel que fa a la causalitat. Es pot aplicar als casos en què el senyal té un inici ben delimitat, que constitueix el front de l'ona: en el punt que prenem com a $x = 0$ el camp és nul abans de $t = 0$ i a partir d'aquest moment hi comença a arribar senyal. Amb quin retard arriba la pertorbació a un altre punt x ?

Considerem un tren finit format per N ones sinusoidals que es propaga en el sentit positiu de l'eix X . Suposarem que en $x = 0$ el perfil del senyal és:

$$E(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ o } T < t \\ \sin(\omega_1 t) & \text{si } 0 < t < T \end{cases} \quad (13.19)$$

amb $\omega_1 = 2\pi N/T$. En l'instant $t = 0$ el front de l'ona és a $x = 0$.

El camp elèctric en els punts $x > 0$ vindrà donat per una expressió com la (13.10) amb $A_-(\omega) = 0$ perquè l'ona es propaga en el sentit de x creixent, i tindrem:

$$E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-xn(\omega)/c)} A_+(\omega), \quad (13.20)$$

on la funció $A_+(\omega) = 0$ es pot obtenir d'especificar la relació anterior per a $x = 0$ i invertir la transformada de Fourier, tot tenint en compte (13.19). Així tenim:

$$A_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} E(0, t) = \frac{\omega_1 (e^{i\omega T} - 1)}{\sqrt{2\pi} (\omega^2 - \omega_1^2)}, \quad (13.21)$$

que, substituïda en (13.20) i tenint en compte que, per a valors reals de ω , $n(-\omega) = n^*(\omega)$, ens permet de posar:

$$E(x, t) = F(x, t) - F(x, t - T) \quad (13.22)$$

amb

$$F(x, t) = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-x/c)}}{\omega^2 - \omega_1^2} e^{ix\omega[n(\omega)-1]/c}, \quad (13.23)$$

que és real perquè $n(-\omega) = n^*(\omega)$.

Per avaluar aquesta integral seguirem mètodes d'integració en el pla complex ω i tindrem en compte que:

- (a) les singularitats de l'integrand són: d'una banda els dos pols simples $\omega = \pm\omega_1$ i, de l'altra, les que pugui tenir $\omega n(\omega)$,
- (b) que de l'equació (13.13) se segueix que, per a freqüències grans, $\omega[n(\omega) - 1] \approx O(\omega^{-1})$, i resulta que:

$$e^{i\frac{x}{c}[n(\omega)-1]\omega} \approx 1 + O(\omega^{-1}) \text{ per a } |\omega| \rightarrow \infty,$$

- (c) l'exponencial $e^{-i\omega(t-x/c)}$ és regular per a qualsevol ω i per a $|\omega| \rightarrow \infty$

- tendeix a 0 quan $\text{Im } \omega > 0$, si $t - x/c < 0$ [circuit \mathcal{C}_+ de la figura 13.4(a)],
o
- tendeix a 0 quan $\text{Im } \omega < 0$, si $t - x/c > 0$ [circuit \mathcal{C}_- de la figura 13.4(b)],

D'acord amb tot això, si $t - x/c < 0$, la integral del segon membre de (13.23) serà igual a la integral sobre el circuit \mathcal{C}_+ de la figura 13.4(a) i, com que l'integrand no té singularitats a l'interior de \mathcal{C}_+ , tenim:

$$F(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad t < \frac{x}{c} \quad \text{i} \quad F(x, t - T) = 0 \quad \text{si} \quad t < T + \frac{x}{c}.$$

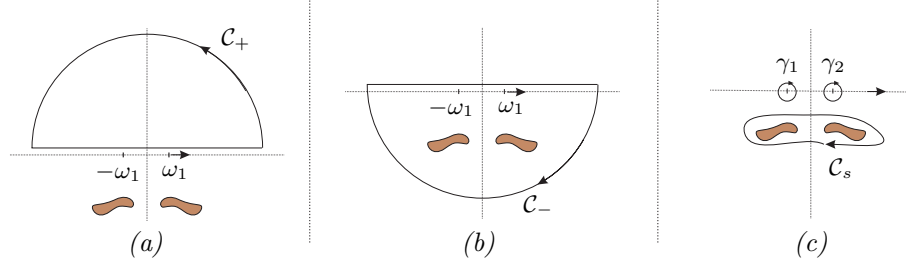


Figura 13.4. Diversos circuits d'integració per a (13.23), amb les singularitats de l'integrand, $\pm\omega_1$ (les zones ombrējades representen altres possibles singularitats). (a) $t - x/c < 0$, (b) i (c) $t - x/c > 0$

És a dir, a la profunditat x dins del medi no hi arriba senyal abans de $t = x/c$ i, per tant, la *velocitat del front* mai no supera la velocitat de la llum en el buit.

Si $t - x/c > 0$, llavors s'anul·la la integral al semicercle infinit del semiplà inferior i la integral (13.23) equival a la integral al circuit C_- de la figura 13.4(b) i, a causa de les singularitats incloses dins del contorn, el càlcul no és tan simple com en el cas anterior.

La integral $F(x, t)$ dóna el mateix si deformem el contorn sense excloure cap singularitat. En aquest sentit, podem substituir C_- per $\gamma_1 + \gamma_2 + C_s$ (vegeu la figura 13.4.c), i tenim:

$$F(x, t) = \sin\left(\omega_1\left[t - \frac{x}{c}n_1(\omega_1)\right]\right) e^{-\omega_1 \frac{x}{c}n_2(\omega_1)} + B_s(x, t),$$

on B_s és la contribució de C_s i resulta ser un terme transitori. El primer terme ve de la integral al voltant dels pols $\pm\omega_1$, correspon al senyal sinusoidal incident, amb l'amortiment que correspon a l'absorció del medi i és la contribució que queda a la llarga, per a valors grans de $t \gg x/c$.

13.4 Propagació supralumínica en un medi transparent

En una banda de freqüència propera a una ratlla d'absorció hi ha dispersió anòmala i un senyal es podria propagar a una velocitat de grup superior a c . Però per a aquestes freqüències properes l'absorció és important i, com que és molt variable, afecta de manera diferent cada component cromàtic. D'això en resulta una deformació fatal del senyal a mesura que es desplaça en el medi i així deixa de tenir sentit interpretar la velocitat de grup com la velocitat d'alguna cosa, el senyal, que es mou com un tot mentre preserva una suposada *identitat*.

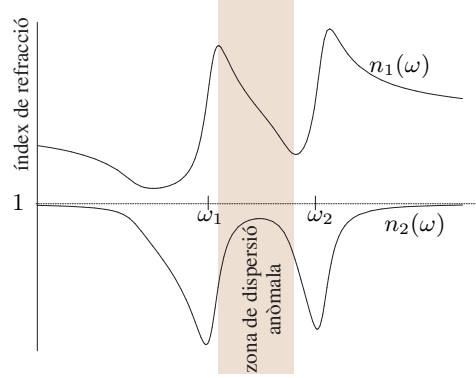


Figura 13.5. Índex de refracció i coeficient d'amplificació per a un medi amb dues línies properes

Per a un medi amb dues línies d'absorció properes, ω_1 i ω_2 , el coeficient dielèctric té la forma:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{M_1}{\omega - \omega_1 + i\gamma} - \frac{M_2}{\omega - \omega_2 + i\gamma}$$

per a una estreta banda de freqüències propera a ω_1 i ω_2 . Els coeficients M_1 i M_2 són positius i depenen de la intensitat de l'absorció, la qual depèn dels paràmetres anomenats *força d'oscil·lador* i *freqüència de plasma*.

Si en comptes d'absorció hi ha amplificació, llavors el coeficient dielèctric en aquesta banda de freqüència és:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{M_1}{\omega - \omega_1 + i\gamma} + \frac{M_2}{\omega - \omega_2 + i\gamma}. \quad (13.24)$$

Aquesta situació es dona en particular quan fem incidir una ona electromagnètica en un medi preparat de manera que els àtoms estan en un estat excitat (per mitjà de bombeig òptic, per exemple). Llavors es produeix el que s'anomena *emissió estimulada*: els àtoms del medi emeten una radiació que té la mateixa freqüència que l'ona incident, a la qual se superposa coherentment (en fase) i l'amplifica.

La figura 13.5 representa les parts real i imaginària de $n(\omega)$ per a un medi amb un coeficient dielèctric com ara el donat per (13.24) en la proximitat de les freqüències ω_1 i ω_2 . Hi veiem una zona de dispersió anòmala pràcticament lineal i, en una banda estreta, l'amplificació és pràcticament constant. Un senyal lluminós similar al representat per l'equació (13.15), amb una amplada de banda que caigui dins d'aquesta zona, mantindrà el mateix perfil mentre es propaga i pràcticament no es deformarà. A més, si el pendent cap avall (negatiu) de la gràfica de l'índex de refracció és gran, el denominador de (13.18) és petit i la velocitat de grup pot ser molt gran. Fins i tot, si $n'_1(\omega)$ és prou negatiu, el denominador $n_1(\omega) + \omega n'_1(\omega)$ pot ser negatiu i llavors la velocitat de grup U_g és negativa.

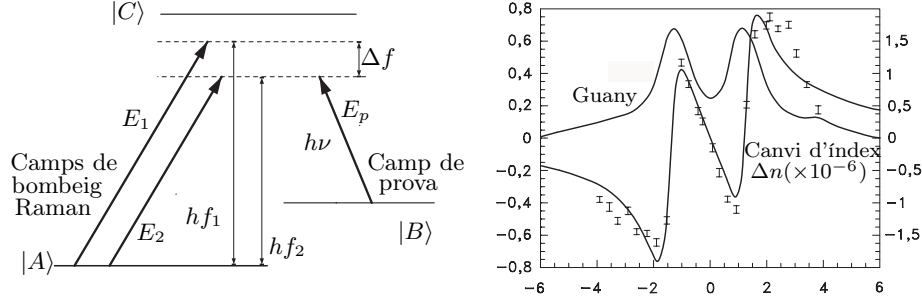


Figura 13.6. Esquema del doblet d'amplificació

Per preparar un dispositiu experimental en què es reproduïxin unes condicions de dispersió anòmala com les esmentades, Wang et al.² van preparar un medi que presenta dues ratlles d'amplificació prou properes. El medi és el vapor de cesi atòmic a 30°C contingut en una cèl·lula de 6 cm de longitud. Per bombeig òptic es fa que la majoria dels àtoms de Cs passin al subnivell hiperfí magnètic $F = 4$ i $m = -4$ del nivell $6S_{1/2}$, i que denotarem per estat $|A\rangle$.³ Pel que fa a l'experiment, seran importants altres dos estats: l'estat $F = 4, m = -3$ del nivell $6P_{3/2}$, que denotarem $|C\rangle$, amb una energia superior i accessible per una transició òptica (per absorció d'un fotó) i l'estat que indicarem per $|B\rangle$, que correspon al subnivell $F = 4$ i $m = -2$ del mateix nivell $6S_{1/2}$. Les regles de selecció prohibeixen que la transició $|A\rangle \rightarrow |B\rangle$ es produeixi per l'absorció d'un sol fotó, però permeten que la transició tingui lloc per efecte Raman no ressonant, en què intervenen dos fotons.

S'hi apliquen dos camps d'ona contínua (sinusoïdals i d'amplitud constant) de bombeig Raman, E_a , $a = 1, 2$, amb freqüències f_a separades per $\Delta f = 80$ MHz i que no són suficients per produir la transició òptica $|A\rangle \rightarrow |C\rangle$ (és a dir, la diferència d'energies $\mathcal{E}_C - \mathcal{E}_A$ és més gran que $h\nu_a$).

En un medi preparat així s'estudia la propagació d'un feix de prova Raman. Aquest feix experimenta una amplificació ressonant per emissió Raman estimulada per a les freqüències que corresponen al balanç d'energia:

$$\mathcal{E}_A + hf_a = h\nu + \mathcal{E}_B \quad \text{amb} \quad a = 1, 2.$$

D'aquesta manera es té un doblet d'amplificació, amb dues freqüències ressonants ν_1 i ν_2 separades per $\Delta\nu = \Delta f = 80$ MHz (figura 13.6).

S'ha d'aconseguir un doblet de línies d'amplificació que es pugui mantenir estable durant el temps que dura l'experiment. L'emissió espontània i el fet que

²WANG, L. J., DOGARIU, A. i KUZMICH, A., *Phys. Rev.*, **A63**, 053806 (2001).

³El nombre quàntic F és el moment angular total dels electrons i el nucli i el m és el component del moment angular en la direcció del camp magnètic.

l'estat excitat tingui una vida mitjana curta són factors que juguen contra aquesta estabilitat. A més, el feix de prova ha de ser prou feble perquè el nombre de fotons en joc sigui petit en comparació al nombre d'àtoms i no se saturi l'efecte d'amplificació Raman.

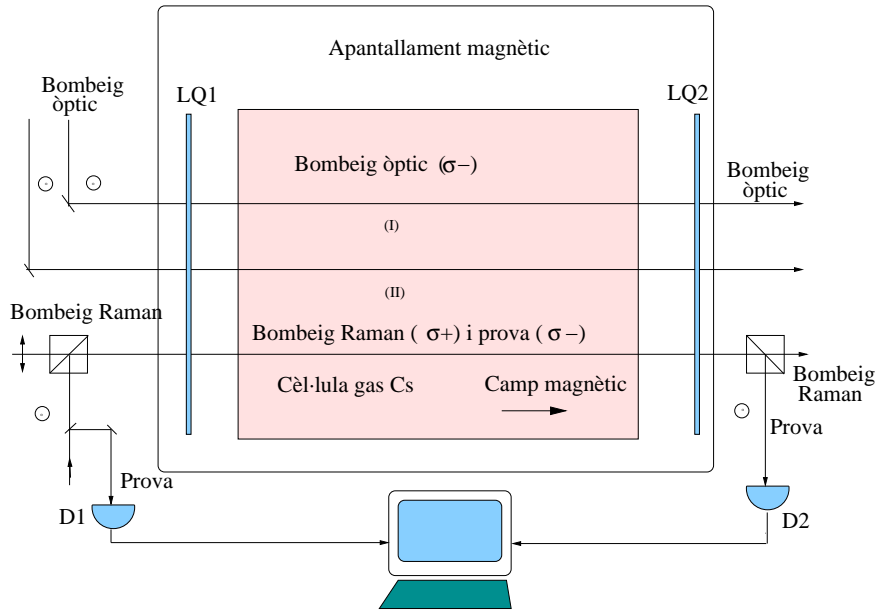


Figura 13.7. Esquema del dispositiu experimental

La cèl·lula es manté a una temperatura de 30°C , aïllada del camp magnètic terrestre i en el si d'un camp magnètic d'1 G d'una bobina de Helmholtz, paral·lela a la direcció de propagació de tots els feixos de llum, que serveix per establir l'eix de quantització del moment angular. Per bombeig òptic es porten els àtoms de cesi a l'estat $|A\rangle$. Al mateix temps, tres feixos de llum làser es propaguen paral·lelament dins la cèl·lula: dos són feixos de bombeig Raman intensos, d'ona contínua, amb polarització dextrogira ($\sigma+$) i freqüències que difereixen en uns 80 MHz, i el tercer és un feix de prova Raman feble i amb polarització levogira ($\sigma-$). La freqüència d'aquest feix de prova també es pot regular i tant pot funcionar en mode d'ona contínua com en mode polsant.

Primer es fa funcionar el feix de prova en mode d'ona contínua i es mesura el coeficient d'amplificació i l'índex de refracció en funció de la freqüència (figura 13.6.b). Les dues corbes s'obtenen per ajust dels resultats a l'expressió (13.24).

Després es fa funcionar en mode polsant. S'envien a través de la cèl·lula polsos quasi gaussians de $2,4\,\mu\text{s}$ d'amplada (a la meitat del màxim), amb una freqüència de repetició de 50 kHz. Es recull el senyal en el detector D2 de la figura 13.7

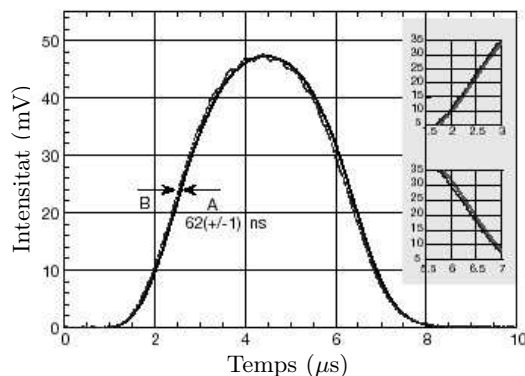


Figura 13.8. El gràfic A correspon al pols de llum no ressonant i el B al pols de la banda de dispersió anòmala (la magnitud de A s'ha normalitzat a la de B). Les dues amplificacions corresponen a les parts del davant i del darrere del pols i permeten de mesurar l'avançament de B respecte de A

i s'envia a un oscil·loscopi. Primer se sintonitza el làser de manera que els tres camps Raman són molt lluny de la ressonància; els àtoms de Cs no fan cap efecte i la velocitat de propagació del pols de prova dins la cèl·lula és c , com en el buit. Tot seguit se sintonitza el làser de manera que els tres camps Raman estan en ressonància i s'enregistra la dependència temporal de la intensitat del pols de prova mesurada pel detector D2. Finalment, per comprovar que no es produeix cap deriva sistemàtica, es torna a sintonitzar lluny de la ressonància i es troba que el pols transmès és idèntic al del primer cas, amb una tolerància de menys d'1 ns.

A la figura 13.8 es presenten els dos tipus de pols: el no ressonant, A, que es propaga a la velocitat c al llarg dels 6 cm de la cèl·lula i el B, format per freqüències en la banda de dispersió anòmala. S'observa un avançament del màxim del pols B d'uns 63 ± 1 ns, que si el comparem amb els 2 ns que triga el pols A a travessar la cèl·lula, ens dóna un índex de refracció de grup efectiu de $n_g = -315 \pm 5$. (El que es mesura directament és l'avançament dels punts semimàxims del pols, que són els que permeten millor precisió, i en el supòsit que la forma del pols es manté — com d'altra banda suggereix clarament la figura 13.8 — s'atribueix l'avançament corresponent al màxim del pols.)

L'experiment no detecta, doncs, una velocitat supralumínica (que segons la relativitat violaria la causalitat) sinó, cosa que sembla encara pitjor, una velocitat negativa: el màxim del pols surt de la cèl·lula abans d'entrar-hi. Però, com els mateixos autors de l'experiment assenyalen, una velocitat de grup supralumínica o fins i tot negativa no representa una violació de la causalitat. En efecte, la posició del màxim del pols en un instant donat no és la causa de les posicions del màxim en instants posteriors. Més aviat és tota l'ona en un instant la que determina quin

serà el perfil després.

Per aprofundir una mica més en l'anàlisi causal, acceptem que el mecanisme que regeix la propagació del pols és descrit per l'equació d'ona (13.9), i cada component cromàtic es propaga independentment dels altres, amb un índex de refracció $n(\omega)$. La propagació d'una ona és causal si l'estat de l'ona en un instant donat t_0 , és a dir, l'amplitud complexa $E(x, t_0)$ en qualsevol punt x , determina l'estat de l'ona en un instant posterior $E(x', t)$, per a $t > t_0$ i en qualsevol punt x' .

El perfil del pols enregistrat pel detector dona una mesura de la intensitat del pols, $I(x, t) \propto |E(x, t)|^2$, però no té en compte la fase. Per tant, la relació causal entre $E(x, t_0)$ i $E(x', t)$ no es tradueix en una relació causal entre el perfil del pols en l'instant t_0 i el perfil del pols més tard, a $t > t_0$.

És més, si ens parem a examinar els ordres de magnitud que hi intervenen, ens adonarem de com de pretenciosa resulta la transposició que inconscientment hom estaria temptat de fer: entendre «el pols surt de la cèl·lula abans d'entrar-hi», en comptes del que realment mesura l'experiment: «el màxim del pols surt de la cèl·lula abans d'entrar-hi». Amb els ordres de magnitud en joc, no sembla raonable aproximar tot el pols per un punt. En efecte, a causa del gran valor de c , els $2,4 \mu\text{s}$ d'amplada temporal del pols indiquen que la llargada del pols és d'uns 720 m (vegeu figura 13.4), unes 10^4 vegades la mida de la cèl·lula. L'avançament del màxim de 63 ns indica que el màxim que surt ho fa quan el que ha d'entrar encara és 19 m més enrere. En qualsevol cas, quan el màxim del pols surt de la cèl·lula, ja hi ha entrat gairebé la meitat del senyal.

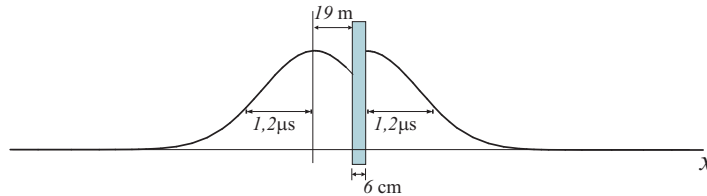


Figura 13.9. El màxim del senyal surt de la cèl·lula quan el màxim del senyal que entra encara és 19 m més enrere però quan gairebé ja hi ha entrat la meitat del senyal (la figura no és a escala)

Apèndix 13.A: Les relacions de Kramers-Krönig

La primera de les equacions (13.4) és una relació entre les transformades de Fourier de la polarització i el camp elèctric, \vec{P} i \vec{E} , que són vectors complexos. La susceptibilitat $\chi(\omega)$ serà, doncs, una funció complexa de ω . A continuació veurem com un seguit de condicions molt genèriques i plausibles sobre la resposta al camp extern impliquen un conjunt de restriccions sobre la forma d'aquesta funció $\chi(\omega)$.

Si apliquem el teorema de convolució (vegeu l'apèndix C), l'equació (13.4) ens porta a una relació entre polarització i camp del tipus:

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') \vec{E}(\vec{x}, t'), \quad (13.25)$$

on $G(t)$ és la *funció resposta* i està relacionada amb l'antitransformada de Fourier de la susceptibilitat elèctrica:

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt G(t) e^{i\omega t}. \quad (13.26)$$

La relació (13.25) no és local en el temps. Això reflecteix el fet que en general la resposta del medi no és instantània i $\vec{P}(\vec{x}, t)$ depèn dels valors del camp elèctric en qualsevol instant t' .

Sembla raonable que els valors del camp en instants anteriors $t' < t$ puguin influir en el valor de la polarització en l'instant t , perquè el medi ha trigat a reaccionar. Però del punt de vista d'una relació causal entre camp elèctric i polarització, resultaria del tot estrany que $\vec{P}(\vec{x}, t)$ depengués dels valors del camp en instants posteriors, $t' > t$. Sembla, doncs, raonable imposar que:

$$G(\tau) = 0 \quad \text{si} \quad \tau < 0. \quad (13.27)$$

Així, l'integrand de (13.25) és nul per a $t' > t$.

Aquesta condició es tradueix en una restricció sobre $\chi(\omega)$. En efecte, si introduïm (13.27) en la segona de les equacions (13.26) tenim:

$$\sqrt{2\pi} \chi(\omega) = \int_0^{\infty} dt G(t) e^{i\omega t} = \int_0^{\infty} dt G(t) e^{-t(-i\omega)} = g(-i\omega), \quad (13.28)$$

on $g(s)$ és la transformada de Laplace de $G(t)$. Aquesta relació matemàtica, junt amb algunes suposicions suplementàries sobre $G(t)$, ens portaran a limitacions importants sobre la susceptibilitat. (A partir d'ara considerarem $\chi(\omega)$ com una funció d'una variable complexa.)

Com que les magnituds que intervenen en (13.25) són reals, també ho serà la funció de resposta $G(t)$ i, per tant, de (13.26) se segueix immediatament que:

$$\chi(\omega) = \chi^*(-\omega^*). \quad (13.29)$$

Com a conseqüència, $\chi(\omega)$ pren valors reals sobre l'eix imaginari $\omega = iy$.

En el cas d'un medi no conductor sembla raonable suposar que:

$$\int_0^\infty d\tau G(\tau) < \infty.$$

Si no fos així, l'aplicació d'un camp elèctric finit i constant donaria lloc [per (13.25)] a una polarització infinita. Per tant, la transformada de Laplace $g(s)$ serà una funció analítica de la variable complexa s en tot el semiplà $\text{Re}(s) > 0$ i, si tenim en compte (13.28), això equival a:

$$\chi(\omega) \text{ és analítica en el semiplà } \text{Im}(\omega) > 0. \quad (13.30)$$

I en el cas, físicament raonable per a un dielèctric, que $G(\tau) \rightarrow 0$ per a $\tau \rightarrow \infty$, la funció $\chi(\omega)$ és analítica també sobre l'eix real. (Aquesta condició no es compleix per als conductors, perquè la susceptibilitat té un pol simple a $\omega = 0$, $\chi(\omega) \approx i\sigma/\omega$, on σ és la conductivitat.)

Comportament a altes freqüències

Si en l'expressió (13.28) substituïm $G(\tau)$ per la seva sèrie de Taylor en $\tau = 0$ i integrem formalment la sèrie terme a terme, obtenim la sèrie asimptòtica

$$\sqrt{2\pi} \chi(\omega) = i \frac{G(0+)}{\omega} - \frac{G'(0+)}{\omega^2} + O(\omega^{-3}),$$

on $f(0+)$ vol dir el límit per la dreta de la funció f en el 0. Si $G(\tau)$ és contínua en $\tau = 0$, és a dir, no deixa de ser nul·la sobtadament en passar de $\tau < 0$ a $\tau > 0$, llavors $G(0+) = G(0-) = 0$, i ens queda:

$$\chi(\omega) \sim -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{amb} \quad \omega_p^2 \equiv \frac{G'(0+)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (13.31)$$

que ens dona el comportament de χ a freqüències grans. Aquest és el cas per exemple en el model simple de la secció 13.4 [equació (13.45)].

La dissipació de l'energia

En presència d'un camp electromagnètic, un medi dispersiu (que suposarem sense activitat magnètica) intercanvia contínuament energia amb el camp. Si es tracta d'un camp extern periòdic, com ara $\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}]$, al llarg d'un període hi ha conversió d'energia del camp en energia cinètica de les càrregues del medi i a la inversa. Mentrestant, part de l'energia que adquireixen les càrregues es dissipa en forma de calor. La taxa d'aquesta dissipació per unitat de temps i de volum ve donada per l'efecte Joule:

$$Q(\vec{x}) = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (13.32)$$

és a dir, la mitjana temporal del treball que fa el camp sobre el sistema de càrregues al llarg d'un període $T = 2\pi/\omega$.

En el dielèctric no hi ha càrregues lliures i tot el corrent és degut a les variacions de la polarització: $\vec{j} = \partial_t \vec{P}$. Si tenim en compte la relació (13.4) entre la polarització i el camp elèctric, tenim que:

$$\vec{j} = \text{Re} \left(-i\omega\epsilon_0\chi(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{x},\omega) e^{-i\omega t} \right) \equiv \text{Re} \left(\vec{\mathcal{J}}(\vec{x},\omega) e^{-i\omega t} \right). \quad (13.33)$$

En calcular el producte $\vec{j} \cdot \vec{E}$ ens trobarem amb uns termes que varien com $e^{-2i\omega t}$, uns altres que varien com $e^{2i\omega t}$ i uns altres que no depenen del temps. Aquests darrers són els únics que contribueixen a la mitjana temporal al llarg d'un període. Així:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{\mathcal{J}}^*(\vec{x},\omega) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{x},\omega) \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[i\omega\epsilon_0\chi^*(\omega)\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{x},\omega) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{x},\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left| \vec{\mathcal{E}}(\vec{x},\omega) \right|^2 \omega \text{Im} [\chi(\omega)]. \end{aligned} \quad (13.34)$$

La part imaginària de $\chi(\omega)$ és la que té a veure amb la dissipació d'energia en forma de calor: és l'energia que el medi absorbeix i no retorna al camp ondulatori incident. Si el medi estava en equilibri termodinàmic, la llei d'augment de l'entropia implica que $Q > 0$ i, per tant:

$$\omega \text{Im} \chi(\omega) > 0 \quad \text{per a} \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (13.35)$$

Els zeros de la constant dielèctrica

A partir d'una condició molt genèrica com ara el caràcter causal de la relació (13.25) entre la polarització i el camp aplicat, hem obtingut que la susceptibilitat $\chi(\omega)$, i també la constant dielèctrica del medi $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega)$, no poden tenir singularitats en el semiplà complex $\text{Im}(\omega) > 0$.

Ara veurem que, si $\epsilon_r(\omega)$ compleix la condició (13.31) a l'infinit i el medi està en equilibri termodinàmic —condició (13.35)—, llavors en la regió $\text{Im} \omega > 0$ no hi ha tampoc zeros de $\epsilon_r(\omega)$. Per demostrar-ho s'invoca el teorema de Rouché per a integrals en el pla complex:

Si $F(\omega)$ és una funció analítica sobre el contorn \mathcal{C} i meromorfa en el seu interior i no s'anul·la sobre \mathcal{C} , llavors:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} d\omega = Z - P,$$

on Z i P són, respectivament, el nombre de zeros i el nombre de pols de F en l'interior de \mathcal{C} .

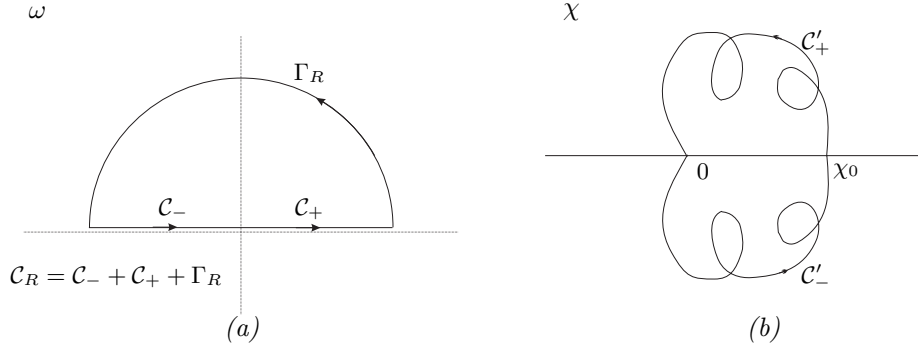


Figura 13.10. Camins d'integració complexa en els plans ω i χ per determinar el nombre de zeros

Si apliquem aquest resultat a $F(\omega) = \chi(\omega) + A$, on A és un nombre real, amb el circuit C_R de la figura 13.10.a, i si tenim en compte que $\chi(\omega)$ no té singularitats en el semiplà superior i per tant $P = 0$, obtenim:

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega) + A} d\omega.$$

Pel canvi de variable complexa $\chi = \chi(\omega)$ podem traduir aquesta integral al pla complex χ (figura 13.10.b):

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{C}_R} \frac{d\chi}{\chi + A}. \quad (13.36)$$

Ara, per la condició (13.31) tindrem que sobre el semicercle $|\omega| = R$

$$|\chi(\omega)| \approx \frac{|\omega_p^2|}{R^2}.$$

Així el punt $\omega = \infty$ es converteix en $\chi = 0$, i el semicercle Γ_R de la figura 13.10 (a) es converteix en un bocí de circuit $\tilde{\Gamma}_R$ que no s'allunya de $\chi = 0$ més de ω_p^2/R^2 .

Per a $\omega = 0$, $\chi(0)$ és el valor estàtic de la susceptibilitat i és positiu.

Com a conseqüència de (13.29) tindrem que les dues semirectes reals C_+ i C_- del pla ω es converteixen en els camins C'_+ i C'_- , complexos conjugats l'un de l'altre. El troç de recta $0 < \chi < \chi(0)$ en el gràfic de la figura 13.10.b és la imatge del semieix imaginari positiu del pla ω .

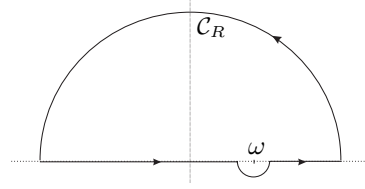
La integral (13.36) dona $Z = 1$ o 0 , segons si $\chi = -A$ és interior o exterior al circuit \tilde{C}_R (teorema de Cauchy). Per a $A = 1$, tenim $Z = 0$ i, per tant, $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ no té zeros en el semiplà $\text{Im } \omega > 0$.

Les relacions de Kramers-Krönig

Com que $\chi(\omega)$ és analítica per a $\text{Im } \omega \geq 0$ podem aplicar el teorema de Cauchy i tenim:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{C}_R} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}$$

per a qualsevol ω interior al circuit \mathcal{C}_R de la figura.



Per a valors reals de la freqüència ω , una transformació senzilla de l'expressió anterior ens porta a:

$$\chi(\omega) = \frac{-i}{\pi} \mathcal{P} \int_R d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \frac{-i}{\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{\omega-\rho} + \int_{\omega+\rho}^{\infty} \right) d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (13.37)$$

on \mathcal{P} vol dir la part principal de la integral. A més, hem usat (13.31) per negligir la integral al semicercle de radi R , perquè per a $R \rightarrow \infty$ tendeix a zero com $1/R^2$.

Si ara separem la part real de la imaginària i tenim en compte (13.29), obtenim les relacions de Kramers-Krönig (per a $\omega \geq 0$):

$$\text{Re } \chi(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im } \chi(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (13.38)$$

$$\text{Im } \chi(\omega) = \frac{-2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re } \chi(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (13.39)$$

que relacionen els components dispersiu, $\text{Re } \chi(\omega)$, i absortiu, $\text{Im } \chi(\omega)$, de la susceptibilitat. Aquest resultat té molta importància a la pràctica, perquè permet determinar $\text{Re } \chi(\omega)$ a partir de $\text{Im } \chi(\omega)$, que es pot obtenir a partir de mesures de penetració.

Apèndix 13.B: Un model simple de dielèctric

Per fixar les idees estudiarem un model de dielèctric senzill que ens permetrà de concretar les propietats que acabem de comentar de la funció $\chi(\omega)$. El dielèctric estarà format per molècules que, o no són polars o, si ho són, l'agitació tèrmica fa que els dipols moleculars estiguin orientats a l'atzar, de manera que la densitat de polarització mitjana és nul·la. En qualsevol cas, l'aplicació d'un camp elèctric extern té dos efectes: d'una banda augmenta la polarització de cada dipol individual i, de l'altra, fa que els dipols s'orientin preferentment en la direcció del camp aplicat.

El moment dipolar mitjà de les molècules del medi serà $\vec{\pi} = \gamma \vec{E}_{ef}$, on γ és un coeficient de polaritzabilitat que depèn de la resposta de cada molècula al camp elèctric efectiu \vec{E}_{ef} en el lloc que es troba la molècula. A aquest camp hi contribueixen tant el camp extern aplicat \vec{E} , com el camp mitjà produït per la distribució de dipols moleculars. Un raonament d'electrostàtica que val també per a camps aplicats lentament variables,⁴ dóna:

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}, \quad (13.40)$$

on \vec{P} és la polarització o densitat de moment dipolar.

Si N és el nombre de molècules per unitat de volum, $\vec{P} = N\gamma \vec{E}_{ef}$ i, usant (13.40), tenim que:

$$\vec{P} = \frac{3\epsilon_0 N \gamma}{3\epsilon_0 - N \gamma} \vec{E}.$$

Suposem que apliquem un camp oscil·lant $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(\omega)e^{-i\omega t}$. Llavors la polarització serà $\vec{P} = \vec{\mathcal{P}}(\omega)e^{-i\omega t}$, amb

$$\vec{\mathcal{P}}(\omega) = \frac{3\epsilon_0 N \gamma}{3\epsilon_0 - N \gamma} \vec{\mathcal{E}}(\omega) \quad (13.41)$$

i si comparem amb (13.4) i (13.5), obtenim:

$$\epsilon_r(\omega) = \frac{3\epsilon_0 + 2N\gamma}{3\epsilon_0 - N\gamma}. \quad (13.42)$$

D'aquesta relació aïllem la polaritzabilitat

$$\gamma = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

que, en medis sense activitat magnètica (amb $\epsilon_r = n^2$), dóna la coneguda fórmula de Lorentz-Lorenz.

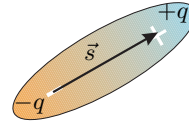
⁴Per a una discussió més completa, vegeu JACKSON (1975, 2a ed.)

El model anterior implica un seguit d'aproximacions que en limiten la validesa. En primer lloc hem suposat que cada molècula veu les altres com si fossin dipols, i això vol dir que el medi és prou enrarit perquè les distàncies intermoleculars siguin grans i els efectes quadrupolars i superiors siguin negligibles. Les molècules no poden tenir formes complicades, com ara els llargs filaments típics dels cristalls líquids. Finalment, tot i que el raonament que condueix a (13.40) es basa en l'electrostàtica, també val sempre que els efectes ondulatoris siguin petits en una regió que en mitjana contingui només un dipol molecular. En el cas d'un gas aquesta condició deixa de complir-se en la regió ultraviolada de l'espectre.

Si el medi és prou enrarit, $N\gamma \ll 1$ i l'equació (13.42) es pot aproximar per:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\gamma}{\epsilon_0}. \quad (13.43)$$

Com ja hem dit més amunt, ϵ_r pot dependre de la freqüència ω del camp aplicat. D'acord amb (13.42), això vol dir que el coeficient de resposta també en depèn: $\gamma(\omega)$. Per fer-nos una idea del mecanisme i de la forma d'aquesta dependència, considerarem un model de dipol molecular que consisteix en dues càrregues $+q$ i $-q$ desplaçades un cert valor \vec{s} (tal com es mostra a la figura). El moment dipolar molecular serà $\vec{\pi} = q\vec{s}$.



Per simplicitat suposarem que les càrregues estan lligades per una força tipus oscil·lador harmònic, $m\omega_0^2\vec{s}$, de manera que sota el camp elèctric efectiu $\vec{E}_{ef} = \vec{\mathcal{E}}_{ef}(\omega)e^{-i\omega t}$, l'equació del moviment serà:

$$\ddot{\vec{s}} + 2\rho\dot{\vec{s}} + \omega_0^2\vec{s} = \frac{q}{m}\vec{\mathcal{E}}_{ef}e^{-i\omega t}. \quad (13.44)$$

El terme dissipatiu $2\rho\dot{\vec{s}}$ és una simplificació per donar compte de la pèrdua d'energia, per exemple per emissió de radiació electromagnètica.

La solució de (13.44) és:

$$\vec{s}(t) = \frac{q}{m(\omega_0^2 - 2i\omega\rho - \omega^2)}\vec{E}_{ef},$$

a part d'un terme transitori que s'amorteix com $e^{-\rho t}$. (El fet que es tracti d'un vector complex es deu al fet que estem usant un camp \vec{E}_{ef} complex, però com que les equacions usades són totes lineals, s'obté un resultat amb sentit físic si ens quedem només amb la part real.)

Com que $\vec{\pi} = q\vec{s}$, si combinem l'expressió anterior amb $\langle\vec{\pi}\rangle = \gamma\vec{E}_{ef}$, arribem a:

$$\gamma(\omega) = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - 2i\omega\rho - \omega^2)},$$

que, substituïda a (13.43), dóna:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - 2i\omega\rho - \omega^2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}, \quad (13.45)$$

on ω_p s'anomena *frequència de plasma*.

Notem que l'expressió anterior dona per a χ el comportament a freqüències grans predit per l'equació (13.31), amb $G'(0+) = \omega_p^2$.

El model simple presentat aquí és vàlid per a un gas i per a freqüències aplicades properes a una ratlla d'absorció, ω_0 , ja que la resposta de les càrregues atòmiques i moleculars està descrita raonablement bé per l'aproximació de l'oscil·lador harmònic (13.44). Si volem abastar una banda més àmplia de freqüències, haurem de substituir (13.45) per:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \sum_j \frac{a_j^2}{\omega_j^2 - 2i\omega\rho_j - \omega^2},$$

on ω_j són les diverses freqüències de l'espectre del material. (Per a líquids i sòlids no val un model tan senzill, especialment perquè a causa de la major proximitat dels àtoms, cada electró pot interaccionar amb més d'un àtom a la vegada.)

Apèndix A

Tensors i mètriques

A.1 Vectors, escalars i tensors

En els cursos previs de física newtoniana ens hem habituat a parlar del vector velocitat, diem que la força és un vector i tenim una idea intuïtiva de què vol dir això. Són magnituds amb tres components, com també ho són el camp elèctric, el camp magnètic, l'acceleració, etc. D'altra banda, no trobem estranyes afirmacions com ara que l'energia és un escalar, i que també ho són la pressió, la temperatura, etc. Per contra, no diem que el component v_1 de la velocitat sigui un escalar (és un nombre, però no un escalar) i tampoc se'ns acudiria de fer un vector que tingui per components la pressió, la temperatura i la densitat d'un gas.

Què és el que fa que (v_1, v_2, v_3) sigui un vector i que, en canvi, (p, T, ρ) no? Doncs *les lleis de transformació a què obeeixen sota canvis de coordenades*.

A.1.1 Escalars

Suposem que les lleis de transformació entre dos sistemes de coordenades espacials «rectilínies», \mathcal{C} i \mathcal{C}' , a \mathbb{R}^n són:

$$x^{i'} = \sum_{j=1}^n A_j^{i'} x^j + C^{i'} \equiv A_j^{i'} x^j + C^{i'}, \quad (\text{A.1})$$

on $(A_j^{i'})$, $i, j = 1, \dots, n$ és una matriu quadrada de rang n invertible: $(A_j^{i'}) \in GL(n, \mathbb{R})$. En l'equació anterior hem introduït el *conveni de la suma* segons el qual un índex repetit en un mateix monomi, un cop a dalt i l'altre a baix, significa *suma per a tots els possibles valors d'aquest índex*. (A partir d'ara aplicarem aquest conveni llevat que indiquem explícitament el contrari.)

Les transformacions del tipus (A.1) s'anomenen *afinitats* i formen el *grup afi* n -dimensional. L'element neutre és la transformació identitat, amb $A_j^{i'} = \delta_j^{i'}$ i

$C^{i'} = 0$, i la inversa de la transformació (A.1) és:

$$x^j = B_{i'}^j x^{i'} + C^j, \quad (\text{A.2})$$

on $C^j = -B_{i'}^j C^{i'}$ i la matriu $B_{i'}^j$ és la inversa de la $A_j^{i'}$:

$$B_{i'}^j A_k^{i'} = \delta_k^j \quad A_j^{i'} B_{k'}^j = \delta_{k'}^{i'}. \quad (\text{A.3})$$

Direm que una magnitud és un *escalar*, si el seu valor no canvia en usar unes coordenades diferents.

Així, com que la massa d'un cos, la seva càrrega elèctrica o l'energia cinètica no depenen de quin sistema de coordenades estem utilitzant:

$$m' = m, \quad e' = e, \quad T' = T,$$

i diem que aquestes magnituds són escalars.

Sovint les magnituds que es consideren són funció del punt de l'espai, com ara el potencial gravitatori, el potencial electrostàtic o la temperatura. Una *funció escalar* es caracteritza per la llei de transformació:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f'(x'_1, \dots, x'_n). \quad (\text{A.4})$$

Aquesta llei expressa el fet següent: per (x_1, \dots, x_n) identifiquem en les coordenades \mathcal{C} el mateix punt de l'espai que en les coordenades \mathcal{C}' identifiquem per (x'_1, \dots, x'_n) i, com que el valor de la magnitud escalar en aquest punt no depèn de les coordenades utilitzades, se segueix immediatament la igualtat anterior.

De vegades aquesta invariància no es compleix per a totes les transformacions $(A_j^{i'})$ del grup $GL(n, \mathbb{R})$, però continua sent vàlida si ens restringim a un subgrup. Així per exemple, la densitat d'un medi en l'espai de tres dimensions, que es defineix per:

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{d^3 m(x_1, x_2, x_3)}{dx_1 dx_2 dx_3},$$

mentre que en el sistema de coordenades \mathcal{C}' tenim:

$$\rho'(x'_1, x'_2, x'_3) \equiv \frac{d^3 m'(x'_1, x'_2, x'_3)}{dx'_1 dx'_2 dx'_3}.$$

Com que el contingut en massa en un mateix element de volum és el mateix en els dos sistemes de coordenades, $d^3 m(x_1, x_2, x_3) = d^3 m'(x'_1, x'_2, x'_3)$ i, com que la relació entre els elements de volum és:

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3 = |A| dx_1 dx_2 dx_3,$$

on $|A|$ és el valor absolut del determinant de la matriu $(A_j^{i'})$, tenim finalment que:

$$\rho'(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{1}{|A|} \rho(x_1, x_2, x_3)$$

i, per tant, ρ només és un escalar per a transformacions de determinant unitat. Així diem que: la densitat és un escalar sota transformacions *lineals especials* (del subgrup $SL(n, \mathbb{R})$ de matrius de determinant 1), o també que la densitat és un escalar sota rotacions (del subgrup $SO(n, \mathbb{R})$ de les matrius que compleixen $A^T A = I$ i $\det A = 1$), però en canvi la densitat no és un escalar sota transformacions del grup lineal general $GL(n, \mathbb{R})$.

En general diem, doncs, que «tal magnitud» és un escalar «sota un subgrup de transformacions» si es compleix la igualtat (A.4) per a canvis de coordenades d'aquest subgrup.¹

A.1.2 Vectors i covectors

Direm que n magnituds V^1, \dots, V^n són els components d'un *vector* si en fer un canvi de coordenades (A.1) es transformen d'acord amb la llei:

$$V^{i'} = A_j^{i'} V^j, \quad i' = 1, \dots, n. \quad (\text{A.5})$$

Com a exemples tenim la posició relativa de dos punts de \mathbb{R}^n o la velocitat d'un punt mòbil.

Exemple A.1 Posició relativa

Siguin $P, Q \in \mathbb{R}^n$, amb coordenades (x_P^1, \dots, x_P^n) i (x_Q^1, \dots, x_Q^n) respectivament en el sistema \mathcal{C} . I siguin $(x_P^{1'}, \dots, x_P^{n'})$ i $(x_Q^{1'}, \dots, x_Q^{n'})$ les coordenades d'aquests punts en el sistema \mathcal{C}' . Llavors la posició de P relativa a Q en l'un i l'altre sistema ve donada per les diferències de coordenades,

$$\Delta x^i = x_P^i - x_Q^i, \quad \Delta x^{i'} = x_P^{i'} - x_Q^{i'}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se segueix immediatament d'aplicar (A.1) que:

$$\Delta x^{i'} = A_j^{i'} \Delta x^j, \quad i' = 1, \dots, n.,$$

que prova que $\Delta x^1, \dots, \Delta x^n$ són els components d'un vector.

Exemple A.2 El vector velocitat

Per a un punt mòbil les coordenades varien en funció del temps t , d'acord amb l'equació paramètrica de la trajectòria: $x^i = x^i(t)$. El paràmetre *temps* és un escalar perquè no canvia en variar el sistema de coordenades espacials. Així, d'acord amb la llei de transformació (A.1), l'equació paramètrica de la trajectòria en les coordenades \mathcal{C}' és:

$$x^{i'}(t') = A_j^{i'} x^j(t') + C^{i'}.$$

¹Si bé sovint no esmentarem explícitament aquest subgrup, serà el context en què estiguem treballant qui el determinarà.

Els components de la velocitat s'obtenen derivant respecte al paràmetre *temps*, usant la relació anterior i tenint en compte que $t = t'$:

$$V^{i'}(t') = \frac{dx^{i'}(t')}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(A_j^{i'} x^j(t') + C^{i'} \right) = A_j^{i'} \frac{dx^j(t')}{dt'} = A_j^{i'} V^j(t).$$

Exemple A.3 La diferencial

Diferenciant directament a l'expressió (A.1) tenim:

$$dx^{i'} = A_j^{i'} dx^j, \quad i' = 1, \dots, n,$$

que prova que dx^1, \dots, dx^n són els components d'un vector.

De manera semblant, direm que n magnituds $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ són els components d'un *covector* si en fer un canvi de coordenades (A.1) es transformen d'acord amb la llei:

$$\alpha_{i'} = B_{i'}^j \alpha_j, \quad i' = 1, \dots, n, \quad (\text{A.6})$$

on la matriu $B_{i'}^j$ és la inversa de la $A_j^{i'}$, definida per les relacions (A.3).

Exemple A.4 L'equació d'una família de plans paral·lels

En coordenades rectilínies l'equació d'un pla en \mathbb{R}^n té la forma: $k_1 x^1 + \dots + k_n x^n + D = 0$, on k_1, \dots, k_n i D són constants. Si canviem D sense variar els k_j , $j = 1, \dots, n$ obtenim un pla paral·lel a l'anterior. Per tant, un n -pla (k_1, \dots, k_n) caracteritza una família de plans paral·lels per mitjà de l'equació:

$$k_j x^j + D = 0, \quad D \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

Si passem a unes altres coordenades rectilínies $x^{i'}$ relacionades amb les x^j per una transformació del tipus (A.1), tindrem que l'equació de la família de plans en les noves coordenades és:

$$k_{i'} x^{i'} + D' = 0, \quad \text{amb} \quad k_{i'} = k_j B_{i'}^j \quad \text{i} \quad D' = D + k_j C^j. \quad (\text{A.8})$$

Aquesta relació s'obté fàcilment de substituir (A.2) en (A.7) i reagrupar els termes. En conseqüència, les n quantitats k_1, \dots, k_n són els components d'un covector.

Exemple A.5 La força

A la mecànica newtoniana la força té tres components, F_1, F_2, F_3 , i es caracteritza perquè en aplicar-la a un cos al llarg d'un desplaçament qualsevol $\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$ fa un treball $W = F_j \Delta x^j$. Com que el treball de les forces aplicades a un cos es converteix en energia cinètica i aquesta magnitud és escalar, tindrem que en unes altres coordenades:

$$F_{i'} \Delta x^{i'} = W' = W = F_j \Delta x^j,$$

que, si utilitzem (A.2) i reagrupem els termes, ens porta immediatament a:

$$F_{i'} = B_{i'}^j F_j.$$

De manera semblant als escalars, quan les n magnituds depenen del punt de l'espai,

- direm que $V^1(x^1, \dots, x^n), \dots, V^n(x^1, \dots, x^n)$ són els components d'un vector, quan

$$V^{i'}(x^1, \dots, x^n) = A_j^{i'} V^j(x^1, \dots, x^n), \quad i' = 1, \dots, n$$

- i direm que $\alpha_1(x^1, \dots, x^n), \dots, \alpha_n(x^1, \dots, x^n)$ són els components d'un covector, quan

$$\alpha_{i'}(x^1, \dots, x^n) = B_{i'}^j \alpha_j(x^1, \dots, x^n), \quad i' = 1, \dots, n.$$

Exemple A.6 L'operador gradient

Com a conseqüència immediata del que acabem de dir, les derivades parcials d'una magnitud escalar constitueixen el covector *gradient*. En efecte, si substituïm la llei de transformació (A.2) en la igualtat $f'(x') = f(x)$ i apliquem la regla de la cadena, tenim

$$\partial_{i'} f'(x') = B_{i'}^j \partial_j f(x).$$

A.1.3 Objectes invariants

Per mitjà d'objectes algebraics més abstractes, com ara un espai vectorial n -dimensional i el seu espai dual, E_n i E_n^* , respectivament, intentarem justificar el perquè de les definicions donades fins aquí.

Sigui $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ una base de E_n i sigui $\omega^1, \dots, \omega^n$ la base dual de E_n^* , de manera que

$$\langle \omega^j, \vec{e}_i \rangle = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.9})$$

Siguin ara $\vec{e}_{1'}, \dots, \vec{e}_{n'}$ i $\omega^{1'}, \dots, \omega^{n'}$ les bases de l'espai vectorial E_n i del seu dual E_n^* definides, respectivament, per:

$$\vec{e}_{i'} = B_{i'}^j \vec{e}_j, \quad \omega^{i'} = A_j^{i'} \omega^j,$$

on $(A_j^{i'})$ i $(B_{i'}^j)$ són les matrius regulars definides en (A.1) i (A.2). De les relacions (A.3) i (A.9) tenim que: $\langle \omega^{j'}, \vec{e}_{i'} \rangle = \delta_{i'}^{j'}$. Per tant, la base $\omega^{1'}, \dots, \omega^{n'}$ és la base dual de la $\vec{e}_{1'}, \dots, \vec{e}_{n'}$.

Si ara V^1, \dots, V^n són els components d'un vector en el sistema de coordenades \mathcal{C} i $V^{1'}, \dots, V^{n'}$ són els components en el sistema de coordenades \mathcal{C}' , llavors la combinació

$$V^j \vec{e}_j = V^{j'} \vec{e}_{j'} \in E_n$$

és un objecte invariant (independent de les coordenades).

Semblantment, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ i $\alpha_{1'}, \dots, \alpha_{n'}$ són els components d'un covector en els sistemes de coordenades \mathcal{C} i \mathcal{C}' , respectivament, llavors la combinació

$$\alpha_j \omega^j = \alpha_{j'} \omega^{j'} \in E_n^*$$

és un objecte invariant.

A.1.4 Tensors

La definició de tensor és una generalització de les de vector i covector que hem donat més amunt.

Direm que n^{p+q} magnituds són els components d'un *tensor p-covariant i q-contravariant* si els valors $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ d'aquestes magnituds en el sistema de coordenades \mathcal{C} i els seus valors $T_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q}$ en el sistema de coordenades \mathcal{C}' estan relacionats per:

$$T_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} = A_{i'_1}^{j'_1} \dots A_{i'_p}^{j'_p} \cdot T_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q} \cdot B_{i'_1}^{k_1} \dots B_{i'_p}^{k_p}. \quad (\text{A.10})$$

Notem que, d'acord amb aquesta definició, un escalar correspon al cas particular $p = q = 0$, un vector, al cas $p = 0$ i $q = 1$, i un covector, al cas $p = 1$ i $q = 0$.

Exemple A.7 La delta de Kronecker

Es coneix per aquest nom la matriu:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

en qualsevol sistema de coordenades. És obvi que satisfà la relació (A.10) amb $p = q = 1$.

Exemple A.8 La matriu de l'energia cinètica

En les coordenades generalitzades x_1, \dots, x_n d'un sistema mecànic natural de n graus de llibertat, l'energia cinètica té la forma: $T = T_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$, on \dot{x}^i són les velocitats generalitzades. El valor de T no canvia sota un canvi de coordenades (A.1) i, per tant,

$$T_{i'j'} \dot{x}^{i'} \dot{x}^{j'} = T_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Si ara utilitzem la llei de transformació per als components de la velocitat, que és un vector, com ja hem vist en l'exemple (1.2), obtenim que les magnituds T_{ij} es transformen com un tensor 2-covariant.

Exemple A.9 La delta de Kronecker covariant

Considerem ara les quantitats que en tots els sistemes de coordenades valen:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Per a una matriu regular $(B_{i'}^j)$ no se satisfà en general que:

$$\delta_{i'j'} = B_{i'}^k B_{j'}^l \delta_{kl}.$$

En canvi, aquesta relació sí que se satisfà si ens limitem a matrius $(B_{i'}^j)$ de rotació (del subgrup $SO(n)$). Així, doncs, si bé δ_{ij} no és un tensor 2-covariant *general*, sí que és un tensor 2-covariant *sota rotacions*.

Exemple A.10 El tensor de Levi-Civita

En tres dimensions, es coneix per aquest nom el símbol ϵ_{ijk} que en tots els sistemes de coordenades pren els valors:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, j = k \text{ o } i = k \\ 1 & \text{si } i, j, k \text{ estan en permutació cíclica} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ estan en permutació anticíclica} \end{cases}$$

És obvi que:

$$\epsilon_{ijk} B_{l'}^i B_{m'}^j B_{h'}^k = \det(B) \epsilon_{l'm'h'}$$

i que per tant, ϵ_{ijk} no és un tensor 3-covariant *general*, però sí que és un tensor 3-covariant *sota transformacions especials* (del subgrup $SL(n)$ de determinant unitat).

De la llei de transformació (A.10) resulta que, si coneixem el valor de tots els components d'un tensor en un sistema de coordenades, queden immediatament determinats en qualsevol altre sistema. També que, si tots els components d'un tensor són nuls en un sistema de coordenades ho són també en qualsevol altre.

Disposició dels components d'un tensor

Per raons pràctiques que veurem més endavant, els components d'un tensor es poden disposar en «matrius». Així, per a un tensor p -covariant i q -contravariant, amb $p + q = 2$, escrivim les matrius quadrades:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}_{p=2, q=0}, \quad \begin{pmatrix} B^{11} & \dots & B^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{n1} & \dots & B^{nn} \end{pmatrix}_{p=0, q=2}, \quad \begin{pmatrix} T_1^1 & \dots & T_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^n & \dots & T_n^n \end{pmatrix}_{p=q=1}$$

o bé, per a un vector ($p = 0, q = 1$) la matriu columna:

$$\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^n \end{pmatrix}$$

i per a un covector ($p = 1, q = 0$) la matriu fila:

$$\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n \right).$$

Per a tensors de rangs $p + q > 2$ hauríem d'utilitzar «matrius» $(p + q)$ -dimensionals que no es visualitzen tan fàcilment ni són tan pràctiques de manejar.

Simetries i antisimetries

En les disposicions matricials anteriors resulta obvi que A_{12} no és necessàriament igual a A_{21} , i en general $A_{ij} \neq A_{ji}$.

Direm que un tensor, T_{klm}^{ij} per exemple, és *simètric* respecte a dos índexs covariants, posem el primer i el tercer, si

$$T_{klm}^{ij} = T_{mlk}^{ij}, \quad \forall i, j, k, l, m = 1, \dots, n. \quad (\text{A.11})$$

La definició es generalitza de manera evident a qualsevol altra parella d'índexs del mateix tipus, tots dos covariants o tots dos contravariants.

Si en permutar dos índexs els components del tensor canvien de signe, en comptes de romandre igual com en el cas anterior, direm que el tensor és *antisimètric*.

Si apliquem les regles de transformació (A.10) es comprova fàcilment que si els components d'un tensor tenen una simetria (respectivament, antisimetria) en un determinat sistema de coordenades, també la tenen en qualsevol altre.

A.1.5 Operacions amb tensors

Amb les quantitats tensorials dels diversos tipus podem fer les operacions següents:

Suma Si $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ i $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ són els components de dos tensors del mateix rang, les n^{p+q} quantitats

$$W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

són els components d'un tensor del mateix tipus. La demostració és immediata a partir de la linealitat de l'expressió (A.10).

Producte Si $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ i $U_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$ són els components de dos tensors, de tipus no necessàriament iguals, llavors les quantitats:

$$Z_{i_1 \dots i_{p+s}}^{j_1 \dots j_{q+r}} = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot U_{i_{p+1} \dots i_{p+s}}^{j_{q+1} \dots j_{q+r}}$$

són els components d'un tensor $(p + s)$ -covariant i $(q + r)$ -contravariant.

Contracció interior Suposem que T_{klh}^{ij} és un tensor 3-covariant 2-contravariant, llavors les quantitats:

$$V_{lh}^i = T_{jlh}^{ij}$$

són els components d'un tensor 2-covariant 1-contravariant, que s'anomena la *contracció* del segon índex contravariant i el primer índex covariant del tensor original.

La demostració segueix la cadena d'igualtats següent:

$$V_{l'h'}^{i'} = T_{j'l'h'}^{i'j'} = A_m^{i'} \cdot A_k^{j'} \cdot T_{abc}^{mk} \cdot B_{j'}^a \cdot B_{l'}^b \cdot B_{h'}^c$$

que per la relació (A.3) i la commutativitat del producte és igual a

$$A_m^{i'} \cdot \delta_k^a \cdot T_{abc}^{mk} \cdot B_{l'}^b \cdot B_{h'}^c = A_m^{i'} \cdot T_{kbc}^{mk} \cdot B_{l'}^b \cdot B_{h'}^c = A_m^{i'} \cdot V_{bc}^m \cdot B_{l'}^b \cdot B_{h'}^c.$$

De manera semblant es defineix la contracció interior per a qualsevol parella d'índexs, l'un covariant i l'altre contravariant, d'un tensor de rang p -covariant i q -contravariant. El resultat és un tensor de rang $(p-1)$ -covariant i $(q-1)$ -contravariant.

Dels comentaris que hem fet més amunt relatius a la permutació d'índexs, es desprèn que, en general,

$$T_{j'l'h'}^{i'j'} \neq T_{j'l'h'}^{j'i'} \neq T_{l'j'h'}^{i'j'} \quad \text{etc.}$$

A.1.6 Criteris de tensorialitat

Donarem tot seguit uns criteris que ens permeten d'inferir immediatament el caràcter tensorial d'un conjunt de magnituds, així com el rang.

Proposició 1 *Les magnituds α_i , $i = 1, \dots, n$ són un covector si, i només si, per a qualsevol vector V^j , $j = 1, \dots, n$ la suma $\alpha_j V^j$ és un escalar.*

En efecte:

1. Si α_i és un covector, per a qualsevol vector V^j , els productes $\alpha_i V^j$ formen un tensor 1-covariant, 1-contravariant, i la contracció interior és un escalar (tensor 0-covariant, 0-contravariant).
2. Si $\alpha_j V^j$ és un escalar per a qualsevol vector V^j , en un sistema de coordenades x' , relacionades amb les x per (A.1) tindrem:

$$\alpha_j V^j - \alpha_{i'} V^{i'} = 0$$

i com que V^j són els components d'un vector els podem expressar en termes de les $V^{i'}$ usant la relació inversa de (A.5), que ens portarà a

$$\left(\alpha_j B_{i'}^j - \alpha_{i'} \right) V^{i'}, \quad \forall V^{i'},$$

que implica

$$\alpha_j B_{i'}^j - \alpha_{i'} = 0,$$

és a dir, α_j és un covector.

Les dues propietats següents són generalitzacions de l'anterior i es demostren d'una manera semblant.

Proposició 2 n^{p+q} magnituds $T_{k\dots lm}^{i\dots j}$ són els components d'un tensor p -covariant, q -contravariant si, i només si, per a qualsevol vector V^j , $j = 1, \dots, n$ la suma $T_{k\dots lm}^{i\dots j} V^m$ és un tensor $(p-1)$ -covariant, q -contravariant.

Proposició 3 n^{p+q} magnituds $T_{k\dots l}^{i\dots jm}$ són els components d'un tensor p -covariant, q -contravariant si, i només si, per a qualsevol covector α_j , $j = 1, \dots, n$ la suma $T_{k\dots l}^{i\dots jm} \alpha_m$ és un tensor p -covariant, $(q-1)$ -contravariant.

Per aplicació iterada d'aquestes dues propietats es demostra el criteri general:

Proposició 4 n^{p+q} magnituds $T_{j_1\dots j_p}^{i_1\dots i_q}$ són els components d'un tensor p -covariant, q -contravariant si, i només si, donats r covectors α_i, \dots, β_j qualssevol i s vectors V^j, \dots, W^k qualssevol, la suma $T_{j_1\dots j_p}^{i_1\dots i_q} \alpha_{i_1} \dots \beta_{i_r} V^{j_1} \dots W^{j_s}$ és un tensor $(p-s)$ -covariant, $(q-r)$ -contravariant.

A.2 Mètriques

Una *mètrica* és un tensor 2-covariant i simètric.

Si denotem els components de la mètrica per g_{ij} , i V^i i T^j són dos vectors qualssevol, la contracció $g_{ij} V^i T^j$ és sempre un escalar que anomenem *producte mètric de V^i i T^j per g_{ij}* .

Aquest producte mètric és:

bilineal perquè si λ i μ són escalars i V^i , W^j i T^k són vectors, es compleix:

$$\begin{aligned} g_{ij}(\lambda V^i + \mu W^i) T^j &= \lambda g_{ij} V^i T^j + \mu g_{ij} W^i T^j \\ g_{ij} V^i (\lambda T^j + \mu W^j) &= \lambda g_{ij} V^i T^j + \mu g_{ij} V^i W^j \end{aligned}$$

simètric perquè $g_{ij} V^i T^j = g_{ij} T^i V^j$, gràcies al fet que $g_{ij} = g_{ji}$.

A.2.1 Mètriques no degenerades

Direm que els vectors T^i i V^j són *ortogonals* (respecte a la mètrica g_{ij}) quan:

$$g_{ij} T^i V^j = 0.$$

És evident que el vector $T^i = 0$, $i = 1, \dots, n$ és ortogonal a qualsevol altre, però en general pot donar-se que una mètrica admeti vectors T^i que, sense ser nuls, siguin ortogonals a tots els altres. En aquest cas, la relació d'ortogonalitat $g_{ij} T^i V^j = 0$, $\forall V^j$ vector, implica que la contracció

$$g_{ij} T^i = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.12})$$

per a alguns $T^i \neq 0$.

Direm que una mètrica és *no degenerada* quan (A.12) només es compleix per a $T^i = 0$.

Notem que, donada g_{ij} , la igualtat (A.12) és un sistema lineal homogeni que han de satisfer els components d'aquells vectors T^i que són ortogonals a tots els altres. La mètrica és no degenerada si (A.12) només admet la solució trivial, és a dir, si i només si

$$\det(g_{ij}) \neq 0.$$

De la propietat multiplicativa del determinant del producte de matrius i del fet que en canviar de coordenades els components de la mètrica siguin $g_{i'j'} = g_{kl} B_{i'}^k B_{j'}^l$, resulta que $\det(g_{i'j'}) = \det(g_{kl}) \det(B_{i'}^k)^2$, i la propietat anterior és independent de les coordenades.

Exemple A.11 El producte escalar ordinari

En coordenades cartesianes ortogonals, el producte escalar de dos vectors T^i i V^j es defineix com:

$$\sum_{i=1}^n T^i V^i = T^i V^j \delta_{ij}.$$

Els components de la mètrica són doncs —en coordenades cartesianes— $g_{ij} = \delta_{ij}$. En un sistema de coordenades qualssevol, $x^{i'}$, relacionat amb el cartesià, x^j , per una relació del tipus (A.1), tindrem

$$g_{i'j'} = \delta_{kl} B_{i'}^k B_{j'}^l$$

i en general $g_{i'j'} \neq \delta_{i'j'}$, si no és que ens limitem a canvis de coordenades cartesianes ortogonals, per als quals les matrius jacobianes pertanyen al subgrup ortogonal $O(n) = \{B_{i'}^k \in Gl(n); \delta_{kl} B_{i'}^k B_{j'}^l = \delta_{i'j'}\}$.

El producte escalar ordinari és, a més, una mètrica no degenerada, perquè $\det(\delta_{ij}) = 1 \neq 0$.

Direm que una mètrica és *definida positiva* (respectivament, *negativa*) si per a qualsevol vector $T^i \neq 0$ es té:

$$g_{ij} T^i T^j > 0, \quad (\text{respectivament, } < 0).$$

A.2.2 La mètrica inversa

Si una mètrica és no degenerada, com que la matriu (g_{ij}) té determinant diferent de zero, té una inversa que denotarem momentàniament per γ^{ij} :

$$\gamma^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad g_{ij} \gamma^{jk} = \delta_i^k \quad (\text{A.13})$$

Teorema 1 Les quantitats γ^{ij} formen un tensor 2-contravariant.

En efecte, si contraïem amb $A_j^{k'}$ la relació (A.10) per a g_{jr} , obtenim:

$$A_j^{k'} g_{k'j'} = g_{jr} B_{j'}^r.$$

Això ens permet d'escriure:

$$\gamma^{lj} A_l^{i'} A_j^{k'} g_{k'j'} = \gamma^{lj} A_l^{i'} g_{jr} B_{j'}^r,$$

que reordenant les contraccions dóna

$$\delta_r^l A_l^{i'} B_{j'}^r = A_l^{i'} B_{j'}^l = \delta_{j'}^{i'}.$$

Si ara contraïem la igualtat $\gamma^{lj} A_l^{i'} A_j^{k'} g_{k'j'} = \delta_{j'}^{i'}$ amb $\gamma^{j's'}$ s'arriba a la relació que prova el teorema.

A.2.3 L'operació de pujar i baixar índexs

Donat un tensor mixt, T_{klm}^{ij} , per exemple, podem assignar-li un tensor covariant (5-contravariant en el cas de l'exemple), que denotarem per la mateixa lletra amb subíndexs, definit per la contracció:

$$T_{ijklm} \equiv T_{klm}^{rs} g_{ir} g_{js}. \quad (\text{A.14})$$

Aquesta operació s'anomena *baixar índexs* i és invertible ja que, per contracció amb la mètrica inversa tantes vegades com calgui, tenim també

$$T_{ijklm} \gamma^{ir} \gamma^{js} = T_{klm}^{rs}. \quad (\text{A.15})$$

L'operació inversa s'anomena *pujar índexs*.

Amb aquestes operacions, una mètrica no degenerada permet d'establir una correspondència biunívoca entre els tensors mixtos p -covariants, q -contravariants i els tensors $(p+q)$ -covariants. De manera que podem mirar tots els tensors com tensors covariants als quals s'han pujat tots o alguns dels índexs.

En aquest punt és convenient introduir dues puntualitzacions en la notació:

1. La mètrica inversa γ^{ij} coincideix amb el tensor que resulta de pujar els índexs de g_{ij} , com es desprèn de la cadena d'igualtats següent:

$$g^{ij} = g_{rs} \gamma^{ir} \gamma^{js} = \gamma^{ir} \delta_r^j = \gamma^{ij}.$$

Per això, d'ara endavant emprem g^{ij} en comptes de γ^{ij} .

2. Quan pujem un índex covariant o en baixem un de contravariant hem d'especificar de quin índex es tracta. En el cas general que el tensor T_{ijk} no tingui cap simetria, no és el mateix $g^{ri} T_{ijk}$ que $g^{ri} T_{jik}$ i seria ambigu denotar aquests dos tensors pel mateix símbol T_{jk}^r . Una notació convenient és:

$$\begin{aligned} T_{.jk}^r &\equiv g^{ri} T_{ijk} & T_{j.k}^r &\equiv g^{ri} T_{jik} \\ T_{ijk} &\equiv g_{ir} T_{.jk}^r & T_{jik} &\equiv g_{ir} T_{j.k}^r \end{aligned}$$

Els llocs buits entre els subíndexs i els superíndexs marquen quin és l'índex que ha pujat o ha baixat.

Apèndix B

Hipersuperfícies

B.1 Element d'hipersuperfície

Una hipersuperfície és una varietat d'una dimensió menys que l'espai que la conté. En l'espai temps quadridimensional, una hipersuperfície té tres dimensions. Per descriure un element d'hipersuperfície en l'espai temps procedirem de manera semblant a com es fa amb un element de superfície (2 dimensions) en \mathbb{R}^3 , el qual és descrit per un vector de tres components que té per mòdul la magnitud de la superfície elemental i està orientat perpendicularment a ella.

Una hipersuperfície Σ en \mathbb{R}^{n+1} ve donada per les seves equacions paramètriques:

$$x^\mu = x^\mu(a^1, \dots, a^n), \quad \mu = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{B.1})$$

Per a cada valor fixat dels paràmetres (a^1, \dots, a^n) tenim un punt a \mathbb{R}^{n+1} . Suposem que les funcions $x^\mu(a^i)$ són derivables amb continuïtat tantes vegades com convingui, i suposem que la matriu jacobiana té rang n .

L'hiperplà tangent a Σ en el punt $x^\mu(a^1, \dots, a^n)$ és generat per les combinacions lineals dels n vectors independents:

$$t_i^\mu = \partial_{a^i} x^\mu(a^1, \dots, a^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Considerem ara un vector $e^\nu \in \mathbb{R}^{n+1}$ que no sigui tangent a Σ en cap dels seus punts. Si introduïm ara el paràmetre auxiliar a^0 , les $n+1$ relacions:

$$x^\mu = x^\mu(a^1, \dots, a^n) + a^0 e^\mu, \quad \mu = 0, 1, \dots, n \quad (\text{B.2})$$

defineixen un canvi de coordenades a \mathbb{R}^{n+1} . En efecte, el jacobinià és:

$$J \equiv \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} \right) = \det(e^\mu, t_1^\nu, \dots, t_n^\nu),$$

on e^μ i t_j^ν són vectors columna de $n+1$ components. Com que hem escollit e^μ linealment independent dels t_j^μ , el determinant jacobinià és diferent de zero i les

relacions (B.2) es poden invertir. La relació inversa:

$$a^\nu = a^\nu(x^0, \dots, x^n)$$

defineix unes coordenades curvilínies *adaptades* a la hipersuperfície, ja que en tots els punts de Σ es compleix:

$$a^0(x^0, \dots, x^n) = 0,$$

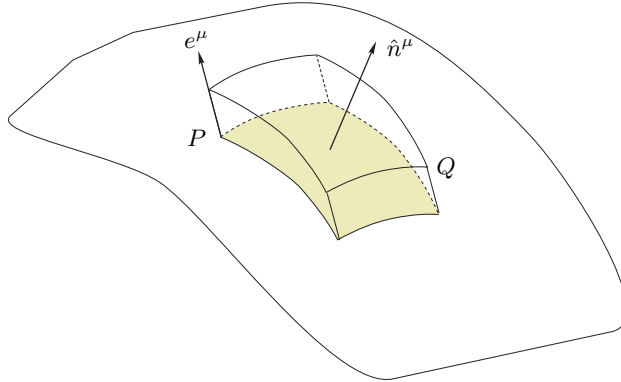
que dóna també una equació implícita per a la hipersuperfície.

Si usem el símbol totalment antisimètric de Levi-Civita a $n + 1$ dimensions, $\epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n}$, que val 0, si hi ha dos índexs iguals, i ± 1 segons si $\mu_0 \dots \mu_n$ és una permutació parella o senar de $0 \dots n$, podem expressar J com a:

$$J = \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} e^{\mu_0} t_1^{\mu_1} \dots t_n^{\mu_n},$$

llavors la condició que e^μ no és tangent a la hipersuperfície es pot escriure així:

$$e^\mu V_\mu = J \neq 0 \quad \text{amb} \quad V_\mu = \epsilon_{\mu \nu_1 \dots \nu_n} t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}. \quad (\text{B.3})$$



Considerem ara el $(n + 1)$ -cub curvilini determinat pels vèrtexs diagonalment oposats $x_P^\mu = x^\mu(a^i)$ i $x_Q^\mu = x^\mu(a^i + da^i) + da^0 e^\mu$ (vegeu la figura). D'acord amb la regla de canvi de coordenades curvilínies en una integral múltiple, l'element de volum és:

$$d^{n+1}x = |J| da^0 d^n a = |(da^0 e^\mu) (V_\mu d^n a)|, \quad (\text{B.4})$$

on $d^n a = da^1 \dots da^n$. En la figura es representa gràficament aquest volum. És un $(n + 1)$ -paralelepípede que té per base l'element d'hipersuperfície $d^n \Sigma$ i per aresta lateral $da^0 e^\mu$. Si \hat{n}_μ és el covector unitari ortogonal a Σ en P , l'altura és $da^0 |e^\mu \hat{n}_\mu|$, i el $(n + 1)$ -volum del paralelepípede és:

$$d^n \Sigma da^0 |e^\mu \hat{n}_\mu|,$$

que, comparat amb (B.4), ens porta a:

$$d^n \Sigma_\mu \equiv d^n \Sigma \hat{n}_\mu = \pm V_\mu d^n a, \quad (\text{B.5})$$

que s'anomena *covector element d'hipersuperfície*. L'arbitrarietat en el signe està associada a l'elecció de l'orientació de Σ .

Exemple B.1 Hiperplà temporal en l'espai-temps

L'equació implícita d'un hiperplà té la forma:

$$b_\mu x^\mu = k, \quad (\text{B.6})$$

on $b_\mu \neq 0$ és un covector (vegeu l'exemple A.1.2), k és un escalar i tant l'un com l'altre són constants. Suposarem que el covector és de tipus temps i, per tant, $b_4 \neq 0$.

Podem prendre com a equacions paramètriques de l'hiperplà:

$$x^i = a^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad x^4 = \frac{1}{b_4} (k - \vec{b} \cdot \vec{a}). \quad (\text{B.7})$$

La base de vectors tangents a l'hiperplà és:

$$t_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial a^i} = (\delta_i^1, \delta_i^2, \delta_i^3, -\frac{b_i}{b_4}).$$

Si apliquem (B.3), tenim: $V_\mu = b_\mu/b_4$, i l'element d'hipersuperfície és:

$$d^3 \Sigma_\mu = \pm \frac{b_\mu}{b_4} d^3 a = \pm \frac{b_\mu}{b_4} d^3 x. \quad (\text{B.8})$$

Com que b_μ és de tipus temps, hi ha un sistema de referència \mathcal{S}^\dagger en què: $b_\mu^\dagger = \pm b^\dagger \delta_\mu^4$ (amb signe $-$ si apunta cap al futur). L'equació implícita en \mathcal{S}^\dagger és: $x^{4\dagger} = -k/b^\dagger$ i correspon a un hiperplà d'esdeveniments simultanis segons \mathcal{S}^\dagger . Les equacions paramètriques en \mathcal{S}^\dagger són:

$$x^{i\dagger} = a^{i\dagger}, \quad i = 1, 2, 3 \quad x^{4\dagger} = \text{constant}$$

i l'element de superfície (B.8) és:

$$d^3 \Sigma_\mu^\dagger = \pm (0, 0, 0, d^3 a^\dagger) = \pm (0, 0, 0, d^3 x^\dagger), \quad (\text{B.9})$$

que, si $\hat{b}_\mu^\dagger = b_\mu^\dagger/b^\dagger$ és el covector unitari, es pot expressar com a:

$$d^3 \Sigma_\mu^\dagger = \pm \hat{b}_\mu^\dagger d^3 x^\dagger.$$

En el sistema propi, l'element d'un hiperplà d'esdeveniments simultanis té tots els components nuls excepte el temporal, que és igual a l'element de volum propi.

Notem que, si L_ν^μ és la transformació de Lorentz que passa de \mathcal{S} a \mathcal{S}^\dagger , de manera que $x^{\mu\dagger} = L_\nu^\mu x^\nu$, els components del covector estan relacionats per:

$$b_\mu = L_\mu^\nu b_\nu^\dagger = L_\mu^4 b^\dagger.$$

Com que $L_4^4 = \gamma^{-1}$, (B.8), (B.9) i el fet que l'element d'hipersuperfície és un covector ens permeten escriure la relació entre els elements de volum tridimensionals:

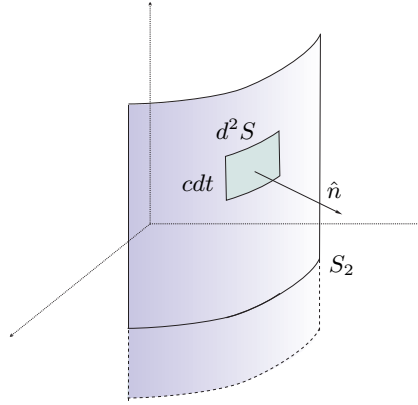
$$d^3 x = \frac{1}{L_4^4} d^3 x^\dagger = \gamma^{-1} d^3 x^\dagger,$$

que concorda amb el fet que la dimensió espacial paral·lela a la direcció del moviment de \mathcal{S} respecte a \mathcal{S}^\dagger es contrau en un factor γ^{-1} , mentre que les dimensions transversals no es contrauen.

Exemple B.2 Superfície espacial

Considerem la hipersuperfície Σ d'equacions paramètriques:

$$x^i = x^i(u, v), \quad i = 1, 2, 3, \quad x^4 = ct \quad t_0 < t < t_1$$



Representa les línies d'univers dels punts d'una superfície S_2 estacionària en el sistema de referència, entre els instants t_0 i t_1 . D'aplicar (B.3) resulta:

$$V_\mu = ([\partial_u \vec{x} \times \partial_v \vec{x}], 0)$$

i, de (B.5), tenim:

$$d^3\Sigma_\mu = \pm c dt du dv ([\partial_u \vec{x} \times \partial_v \vec{x}], 0),$$

és a dir,

$$d^3\Sigma_\mu = \pm c dt d^2S (\hat{n}, 0),$$

on $du dv [\partial_u \vec{x} \times \partial_v \vec{x}] = d^2S \hat{n}$ és el vector element de superfície en l'espai tridimensional (vegeu la figura).

B.2 El teorema de Gauss-Ostrogradski

La versió del teorema de Gauss-Ostrogradski que utilitzem en algunes parts d'aquest text és la següent:

Teorema *Sigui $A^\mu(x^\nu)$ un camp de quadrivectors, amb derivades parcials contínues en un cert domini \mathcal{D} de l'espai-temps i també en la seva frontera $\partial\mathcal{D}$. Suposem, a més, que aquesta frontera és diferenciable i orientable, i n'escollim l'orientació cap a l'exterior. Llavors:*

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_\mu A^\mu(x) d^4x = \int_{\partial\mathcal{D}} A^\mu(x) d^3\Sigma_\mu. \quad (\text{B.10})$$

També utilitzem el següent corollari:

Corollari *Si $A^{\mu\nu_1\ldots\nu_n}(x)$ és un camp de tensors que compleix les mateixes condicions de derivabilitat en \mathcal{D} i $\partial\mathcal{D}$ que en el teorema anterior, llavors també:*

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_\mu A^{\mu\nu_1\ldots\nu_n}(x) d^4x = \int_{\partial\mathcal{D}} A^{\mu\nu_1\ldots\nu_n}(x) d^3\Sigma_\mu. \quad (\text{B.11})$$

Apèndix C

Transformada de Fourier i funcions generalitzades

Presentem aquí alguns resultats i propietats de la transformada de Fourier i algunes funcions generalitzades que apliquem a la integració de l'equació del potencial del capítol 10.

C.1 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier d'una funció $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$, es defineix per:

$$\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}(\vec{k}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} d^n \vec{x} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} f(\vec{x}). \quad (\text{C.1})$$

En rigor, la transformada de Fourier d'una funció només està definida si la funció és absolutament integrable, és a dir, si $\int_{\mathbb{R}} |f(\vec{x})| d^n \vec{x} < +\infty$.

La primera propietat que fa interessant la transformada de Fourier és que sota determinades condicions (que es compleixen generalment en els casos que ens interessin aquí) es pot invertir i la inversa és:

$$f(\vec{x}) = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) \equiv (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} d^n \vec{k} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{f}(\vec{k}). \quad (\text{C.2})$$

Aquesta darrera expressió es pot interpretar com una descomposició de la funció $f(\vec{x})$ en superposició d'ones planes, on \vec{k} és el vector d'ona.

Altres tres propietats que fan útil la transformada de Fourier per a la resolució d'equacions en derivades parcials són les següents:

La transformada de Fourier de les derivades:

$$\mathcal{F}(\vec{\nabla} f) = -i\vec{k} \hat{f}(\vec{k}). \quad (\text{C.3})$$

La transformada de Fourier del producte per la variable:

$$\mathcal{F}(\vec{x}f) = -i\vec{\nabla}_k \hat{f}(\vec{k}). \quad (\text{C.4})$$

La transformada de Fourier de la derivada respecte a un paràmetre:

$$\mathcal{F}(\partial_t f(\vec{x}, t)) = \partial_t \hat{f}(\vec{k}, t), \quad (\text{C.5})$$

on \hat{f} és la transformada de Fourier respecte a la variable \vec{x} .

El teorema de convolució

Donades dues funcions $f(\vec{x})$ i $g(\vec{x})$, el seu producte de convolució es defineix per:

$$f * g(\vec{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} d^n y f(\vec{x} - \vec{y}) g(\vec{y}) \quad (\text{C.6})$$

si la integral és convergent. En aquest cas, si la transformada de Fourier de $f * g$ existeix, es té que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n y f(\vec{x} - \vec{y}) g(\vec{y}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n z \int_{\mathbb{R}^n} d^n y e^{i\vec{k} \cdot (\vec{z} + \vec{y})} f(\vec{z}) g(\vec{y}) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\vec{k}) \hat{g}(\vec{k}). \end{aligned}$$

Aquesta relació entre la transformada del producte de convolució i el producte de transformades de Fourier es coneix com a *teorema de convolució*. La relació inversa de l'anterior és:

$$\bar{\mathcal{F}}(\hat{f} \hat{g}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f * g. \quad (\text{C.7})$$

La identitat de Parseval s'obté com a cas particular d'aquesta última relació, per a $g(\vec{x}) = f^*(-\vec{x})$. En aquest cas $\hat{g}(\vec{k}) = \hat{f}^*(\vec{k})$ i per a $\vec{x} = 0$ el primer membre de (C.7) dóna:

$$\bar{\mathcal{F}}(\hat{f} \hat{f}^*)_{\vec{x}=0} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \hat{f}(\vec{k}) \hat{f}^*(\vec{k})$$

i si fem el canvi $\vec{z} = -\vec{y}$, el segon membre és:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (f * g)_{\vec{x}=0} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n z f(\vec{z}) \hat{f}^*(\vec{z}).$$

D'aquí resulta el que s'anomena *identitat de Parseval*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \vec{x} |f(\vec{x})|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2. \quad (\text{C.8})$$

Exemple C.1 Una interpretació física de la identitat de Parseval

Imaginem un camp electromagnètic lliure, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ i $\vec{B}(\vec{x}, t)$. L'expressió anàloga a (C.2) per als camps és:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} d^3k \hat{\vec{E}}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} d^3k \hat{\vec{B}}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}\end{aligned}$$

La identitat de Parseval diu en aquest cas que:

$$\int_{R^3} d^3x \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) = \int_{R^3} d^3k \left(\frac{|\hat{\vec{E}}|^2}{c^2} + |\hat{\vec{B}}|^2 \right), \quad \text{amb} \quad |\hat{\vec{E}}|^2 \equiv \hat{\vec{E}} \cdot \hat{\vec{E}}^*$$

que dóna l'energia total del camp expressada com a suma de les contribucions $d^3\mathcal{E} = d^3k \left(|\hat{\vec{E}}|^2/c^2 + |\hat{\vec{B}}|^2 \right)$, de cada ona plana.

Relació d'incertesa

Una altra propietat molt important que fa referència a la complementarietat de les dispersions d'una funció i la seva transformada de Fourier és la *relació d'incertesa*. Siguin $f(t)$ i $\hat{f}(\omega)$, $t, \omega \in R$ la seva transformada de Fourier. Suposarem que $f(t)$ està normalitzada, és a dir, $\int |f(t)|^2 dt = 1$, i com a conseqüència de la identitat de Parseval, $\hat{f}(\omega)$ també ho estarà. Sigui δt la desviació estàndard de la variable t respecte a la distribució de probabilitat $|f(t)|^2$:

$$(\delta t)^2 \equiv \int_R dt (t - \langle t \rangle)^2 |f(t)|^2, \quad \text{amb} \quad \langle t \rangle \equiv \int_R dt |f(t)|^2 t.$$

Si $\delta\omega$ és la desviació estàndard de ω en un sentit anàleg, es pot demostrar que, en general,

$$\delta t \cdot \delta\omega \geq 1. \quad (\text{C.9})$$

(Compareu aquesta relació amb les relacions d'incertesa: $\delta p \cdot \delta x \geq \hbar$ i $\delta E \cdot \delta t \geq \hbar$.)

A tall d'il·lustració considerarem l'exemple:

$$f(t) = (2\pi\sigma)^{-1/4} e^{-t^2/4\sigma},$$

en què $|f(t)|^2$ és una gaussiana centrada en $t = 0$ (amb $\langle t \rangle = 0$) amb desviació estàndard $\delta t = \sqrt{\sigma}$. La transformada de Fourier és:

$$f(\omega) = \left(\frac{2\sigma}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\omega^2 \sigma},$$

i $|f(\omega)|^2$ és una altra gaussiana centrada en $\omega = 0$ i de desviació estàndard $\delta\omega = 1/(2\sqrt{\sigma})$. D'aquí resulta que: $\delta t \cdot \delta\omega = 1/2 \sim 1$.

C.2 Funcions generalitzades

En la utilització que en farem, les funcions generalitzades sempre apareixen sota un signe d'integral i multiplicades per altres funcions que són derivables amb continuïtat fins a un cert ordre.

La funció de Heaviside

La funció de Heaviside o salt unitat es defineix per:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

Si la multipliquem per una funció contínua $f(x)$ de suport afinitat (és a dir, $f(x) = 0$ per a $|x|$ suficientment gran) i integrem dóna:

$$\int_R dx f(x) \Theta(x) = \int_0^\infty dx f(x). \quad (\text{C.10})$$

La funció δ de Dirac

La funció Θ no té derivada en $x = 0$, i per tant $\Theta'(x)$ no és una funció definida a tot arreu. Tanmateix, si $f(x)$ és una funció contínua, sí que està ben definida la integral $\int_{\mathbb{R}} dx f(x) \Theta'(x)$. Si integrem per parts i utilitzem que f és de suport afinitat, tenim:

$$\int_R dx f(x) \Theta'(x) = - \int_R dx f'(x) \Theta(x) = - \int_0^\infty dx f'(x) = - [f(x)]_0^\infty = f(0).$$

Aquesta propietat serveix per definir la *funció δ de Dirac*:

$$\int_R dx f(x) \delta(x) = f(0), \quad f \in \mathcal{C}^0(R). \quad (\text{C.11})$$

Del que hem dit fins ara, resulta que:

$$\Theta'(x) = \delta(x). \quad (\text{C.12})$$

Notem que $\delta(x)$ no és pròpiament una funció. Hauria de valer 0 per a qualsevol $x \neq 0$ i ∞ per a $x = 0$. En certa manera es pot entendre com el límit per a $\epsilon \rightarrow 0$ de la successió de funcions:

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \epsilon/2 \\ 1/\epsilon & \text{si } |x| < \epsilon/2 \end{cases}$$

però no un límit punt a punt, que no existeix perquè $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(0) = \infty$, sinó en el sentit que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) g_\epsilon(x) dx = f(0)$$

per a qualsevol funció contínua f .

Si apliquem (C.11), la transformada de Fourier de la funció δ és:

$$\hat{\delta}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_R dx e^{ikx} \delta(x) = (2\pi)^{-1/2}, \quad \text{constant}, \quad (\text{C.13})$$

i per la definició (C.2) de la transformada inversa:

$$\delta(x) = (2\pi)^{-1/2} \int dk e^{-ikx} (2\pi)^{-1/2} = (2\pi)^{-1} \int_R dk e^{-ikx}. \quad (\text{C.14})$$

Notem que la part real dóna:

$$\int_R dk \cos(kx) = 2\pi \delta(x). \quad (\text{C.15})$$

Una propietat que ens serà molt útil és:

$$\delta(g(x)) = \sum_{g(a)=0} \frac{1}{|g'(a)|} \delta(x-a). \quad (\text{C.16})$$

La derivada de la funció δ

Si utilitzem la regla d'integració per parts a la definició (C.11), podem definir la derivada de la funció δ com a:

$$\int_R dx f(x) \delta'(x) = [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_R dx f'(x) \delta(x) = -f'(0), \quad (\text{C.17})$$

on hem anul·lat el terme de frontera perquè suposem que $f(x)$ és de suport afinit.

C.3 Càlcul de les integrals 10.10

Aquí calculem les integrals:

$$\left. \begin{aligned} I_0(\vec{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \hat{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ I_1(\vec{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \cos(\omega t) \hat{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \right\}$$

necessàries per avaluar la solució de l'equació diferencial parcial (10.2). És fàcil adonar-se que la segona s'obté de la primera per derivació respecte a t :

$$I_1(\vec{x}, t) = \partial_t I_0(\vec{x}, t). \quad (\text{C.18})$$

Per calcular I_0 recordarem que $\hat{f}(\vec{k})$ és la transformada de Fourier de $f(\vec{x})$ i tindrem:

$$I_0(\vec{x}, t) = (2\pi)^{-3} \int_{R^3} d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \int_{R^3} d^3y f(\vec{y}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{y}},$$

o, si invertim l'ordre de les integrals,

$$I_0(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 c} \int_{R^3} d^3y f(\vec{y}) \int_{R^3} d^3k e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{\sin(ckt)}{k}. \quad (\text{C.19})$$

La integral sobre \vec{k} la podem calcular utilitzant coordenades esfèriques, amb la direcció $\vec{x} - \vec{y}$ com a eix polar. Obtenim així:

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, t) &\equiv \int_{R^3} d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\sin(ckt)}{k} \\ &= \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin(ckt)}{k} e^{-ikr\xi}, \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

amb $\xi = \cos \theta$. Si calculem les integrals respecte a ϕ i ξ , usem que:

$$\int_{-1}^1 d\xi e^{-ikr\xi} = \left[\frac{e^{-ikr\xi}}{-ikr} \right]_{-1}^1 = \frac{2 \sin(kr)}{kr}$$

i simplifiquem, obtenim:

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty dk \sin(ckt) \sin(kr) \\ &= \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dk \{ \cos[k(ct - r)] - \cos[k(ct + r)] \}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Finalment, si tenim en compte la relació (C.15), arribem a:

$$\int_{R^3} d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\sin(ckt)}{k} = \frac{2\pi^2}{r} [\delta(ct - r) - \delta(ct + r)], \quad (\text{C.22})$$

que substituïda a (C.19) dóna:

$$I_0(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{R^3} d^3y \frac{f(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} [\delta(ct - |\vec{x} - \vec{y}|) - \delta(ct + |\vec{x} - \vec{y}|)]. \quad (\text{C.23})$$

També, usant (C.18) tindrem:

$$I_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} d^3y \frac{f(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} [\delta'(ct - |\vec{x} - \vec{y}|) - \delta'(ct + |\vec{x} - \vec{y}|)]. \quad (\text{C.24})$$

Bibliografia complementària

Els textos que enumerem tot seguit poden servir com a complement per aprofundir en la major part dels temes que hem tractat aquí.

Relativitat especial (introductori)

- (1) BORN, M., *Einstein's theory of relativity*. Dover, 1962.
- (2) FRENCH, A. P., *Relatividad especial*. Reverté, 1974.
- (3) MASSÓ, E., *Curs de relativitat especial*. UAB Servei de Publicacions, 1998.

Relativitat especial

- (1) RINDLER, W., *Introduction to Special Relativity*. 2a ed., Oxford Univ. Press, 1991.
- (2) BERGMANN, P. G., *Introduction to the theory of relativity*. Dover, 1976.
- (3) LANDAU, L. D. i LIFSHITZ, E. M., *Teoría clásica de los campos*. 2a ed., Reverté, 1973.

Relativitat (aspectes històrics)

- (1) EINSTEIN, A. et al., *The Principle of Relativity*. Dover, 1952.
- (2) MILLER, A. I., *Special theory of relativity*. Addison-Wesley, 1981.
- (3) PAIS, A., 'El Señor es sutil ...' *La ciencia y la vida de Albert Einstein*. Ariel, 1984.

Electromagnetisme

- (1) JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*. 2a ed., John Wiley, 1975.
- (2) MARION, J. B., *Classical electromagnetic radiation*. Academic Press, 1965.
- (3) PANOFSKY, W. K. H. i PHILLIPS, M., *Classical electricity and magnetism*. 2a ed., Addison Wesley, 1971.
- (4) ROHRLICH, F., *Classical charged particles*. Addison Wesley, 1990.

Òptica i ones

- (1) BORN, M. i WOLF, E., *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1999.
- (2) BRILOUIN, L., *Wave propagation and group velocity*, Academic Press, 1960.

Mecànica i mètodes matemàtics

- (1) GOLDSTEIN, H., *Mecànica clàssica*. Reverté, 2002.
- (2) SUDARSHAN, E. C. G. i MUKUNDA, N., *Classical dynamics: a modern perspective*. John Wiley and sons, 1974.

Solucions dels problemes

Capítol 1

1.1 $t = 2 \text{ h}$ $t_{\perp} = \sqrt{81/20} \text{ h}$ $t_{\parallel} = 2,025 \text{ h}$

1.3 $M = 0,44 \cdot 10^{-4} \text{ dines cm}$

1.4 30,7 segons i 16,55 minuts respectivament.

1.5 $\beta = 26,57^{\circ}$, $\theta = 60,77^{\circ}$, $d = 0,18 \text{ anys llum}$, quan l'estel més proper està a 4 anys llum.

1.6 coeficient $= 0,435 \pm 0,051$ i per a l'aigua 0,437.

1.7 $3,3 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$

Capítol 2

2.1 $x = 225000012,5 \text{ m}$ $t = 1,2500000417 \text{ s}$

2.3 $v = 0,0995 c$, $v = 0,7071 c$ i $v = 0,995 c$

2.4 $t = 12 \text{ h } 50 \text{ m}$, $d = 7,2 \cdot 10^8 \text{ km}$, $t = 13 \text{ h } 30 \text{ m}$ i $t = 16 \text{ h } 30 \text{ m}$.

2.5 (a) $\mu_r = \frac{c}{D} \frac{\beta \sin \theta}{(1 + \beta \cos \theta)}$, $\mu_a = \frac{c}{D} \frac{\beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)}$

(b) $\beta = 0,91$, $\cos \theta = 0,35$

2.7 A S' , $t' = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \text{ s}$. A S , $t = 10^{-7} \text{ s}$. La tornada a S' , $t' = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \text{ s}$ i a S $t = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.

2.8 $\tan \alpha' = \frac{\tan \alpha}{\gamma}$, $L_{\text{ombra}} = \frac{l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 + (1 - v^2/c^2) \tan^2 \alpha}} \left(1 - \frac{v}{c} \tan \alpha\right)$,
 $L_{\text{max}} = l_0$, $L_{\text{min}} = 0$.

2.9 $\tau_0 = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$

2.10 a) $d' = 3l$, b) $d' = l/3$, c) No hi ha cap sistema en què es pugui aturar els fotons i superposar un regle a la seva separació. De fet es tracta d'efecte Doppler i no de contracció de longituds.

2.11 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = c.$

Capítol 3

3.1 a) $\Delta\tau = t_0 \sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)}$, b) $\Delta\tau = t_0(1-v/c)/(1+v/c).$

3.2 a) $v_0 = c/11$, b) $v = 11c/61.$

3.3 a) $\nu' = \omega_0 \sqrt{(1-w/c)/(1+w/c)}$ on $w = 2v/(1+v^2/c^2)$
b) $\nu' = \omega_0 \sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)}$

3.4 Moviment perpendicular:

$$\tan \frac{\theta_r}{2} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \tan \frac{\theta_i}{2}, \quad \nu_r = \nu_i \frac{1+2\beta \cos \theta_i + \beta^2}{1-\beta^2}.$$

Moviment paral·lel: $\theta_r = \theta_i$ i $\nu_i = \nu_r.$

3.5 a) $\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1-v^2/c^2}{(1-v/c \cos \theta)^2}.$

b) Si diem q a la fracció N_f/N_b , tenim $v = c \frac{q-1}{q+1}.$

3.6 a) $u' = c \sqrt{1 - \frac{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}{(1-uv/c^2 \cos \theta)^2}}$, on cal posar $\theta(\theta')$ que val

$$\cos \theta = \frac{u \cos \theta' + v}{\sqrt{u^2 + v^2(1-u^2/c^2 \sin^2 \theta') + 2vu \cos \theta'}}.$$

Si són fotons, $u = c$, i la fórmula anterior se simplifica i dona:

$$\cos \theta = \frac{u \cos \theta' + v}{c + v \cos \theta'}.$$

Per a un t' la figura que formen les partícules ve donada per:

$$x' = u'(\theta') \sin \theta' \cos \phi', \quad y' = u'(\theta') \sin \theta' \sin \phi' \quad \text{i} \quad z' = u'(\theta') \cos \theta'.$$

b) $\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{N}{4\pi} \frac{u^2(1-v^2/c^2)(u+v \cos \theta')}{(u^2+v^2-u^2v^2/c^2 \sin^2 \theta' + 2vu \cos \theta')^{3/2}}.$

3.7 $B_a = B_r \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2.$

Capítol 4

4.1

$$L = \begin{pmatrix} (1+\gamma)/2 & (1-\gamma)/2 & 0 & -\gamma v/(c\sqrt{2}) \\ (1-\gamma)/2 & (1+\gamma)/2 & 0 & \gamma v/(c\sqrt{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/(c\sqrt{2}) & \gamma v/(c\sqrt{2}) & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

4.2 a) Sí. No. b) No. Sí, un que es mou amb velocitat $\vec{v} = c(0, 9, -0, 3, 0)$ respecte al sistema en el qual hem mesurat els esdeveniments B_1 i B_2 .

4.3 a)

$$L = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_3 + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \vec{\beta} \vec{\beta}^\top & -\gamma \vec{\beta} \\ \hline -\gamma \vec{\beta}^\top & \gamma \end{array} \right)$$

amb $\vec{\beta} = -\vec{a}/a^4 = -\vec{a}/\sqrt{\vec{a}^2 + m^2}$.

b) Igual però ara $\vec{\beta} = \frac{2(a^4 + b^4)}{(a^4 + b^4)^2 + |\vec{b} - \vec{a}|^2} (\vec{a} - \vec{b})$.

4.5 $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$ s.

4.8 (a) $l^\mu = \gamma(\hat{v}, v/c)$, (b) $w^\mu = (\hat{w}, 0)$ i $t^\mu = (\hat{v} \times \hat{w}, 0)$, amb $\hat{w} \perp \hat{v}$,

(c) $\dot{l}^\mu = \frac{1}{v} b^\mu + \frac{b^4}{v\gamma} \left(\frac{u^\mu}{c} - \frac{l^\mu}{\beta} \right)$, $\dot{w}^\mu = \omega t^\mu$, $\dot{t}^\mu = -\omega w^\mu$, amb ω arbitrari.

Capítol 5

5.1 $E = 4\sqrt{2}$ GeV, $m = 4/c^2$ GeV, $v = 0,18c$.

5.2 a) $M_0 = 2 \left(\sqrt{\frac{m_p T}{2c^2}} + m_p^2 - m_p \right) = 17,6/c^2$ GeV, b) $\gamma_m = 1,298$.

5.3 $\nu = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2mc^2} \right)$.

5.4 a) $\nu = 2m_e c^2/h$. b) $\Delta E = \sqrt{M_0 c^4 + 4h^2 \nu^2} - M_0 c^2$.

5.5 $E_m = 4m_e c^2$.

$$5.6 \text{ a) } E_\gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{2Tm_\pi c^2 + T^2} + T + m_\pi c^2) = 1131 \text{ MeV},$$

$$E_{\gamma'} = \frac{1}{2}(-\sqrt{2Tm_\pi c^2 + T^2} + T + m_\pi c^2) = 4 \text{ MeV}.$$

$$\text{b) } \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2Tm_\pi c^2 + T^2}}{T + m_\pi c^2}\right) = 6,8^\circ.$$

$$5.7 \cos \theta = \frac{h\nu(n^2 - 1) + 2E}{2n\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}, \quad \text{b) } \theta_m = \arccos\left(\frac{E}{n\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}\right),$$

$$\text{c) } E \geq mc^2 \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

$$5.8 \vec{F}' = \frac{\vec{F} + \{(\gamma_w - 1)(\vec{F}\vec{w})/w^2 - \gamma_w(\vec{F}\vec{v})/c^2\}\vec{w}}{\gamma_w(1 - \vec{v}\vec{w}/c^2)}.$$

$$5.9 T = \frac{4}{\omega} \int_0^A dx \frac{1 + \omega^2(A^2 - x^2)/(2c^2)}{(A^2 - x^2)^{1/2} \sqrt{1 + \omega^2(A^2 - x^2)/(4c^2)}} \approx \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{3\omega^2 A^2}{16c^2}\right).$$

Capítol 8

$$8.2 \vec{\beta} = \beta \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E} \times \vec{B}|} \quad \text{amb} \quad \frac{\beta}{1 + \beta^2} = \frac{c|\vec{E} \times \vec{B}|}{\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2}.$$

8.3 Escollim el fil en la direcció de l'eix Z . En les coordenades cilíndriques r, φ, z tenim:

$$\text{a) } \vec{E}' = 0, \quad \vec{B}' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\varphi. \quad \text{b) } \vec{E} = \frac{\gamma v \mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_r, \quad \vec{B} = \frac{\gamma \mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\varphi.$$

$$\text{c) } \rho = \gamma I v / c^2 \delta(x) \delta(y), \quad \vec{j} = \gamma I \delta(x) \delta(y) \hat{k}. \quad \text{d) } \text{Dóna el mateix que b).}$$

8.4 Usem les mateixes coordenades del problema anterior. En el sistema de la barra $\vec{E}' = \frac{\gamma^{-1} \rho}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{e}_r$ i $\vec{B}' = 0$, en el sistema de l'observador $\vec{E} = \gamma \vec{E}'$ i $\vec{B} = \frac{v \rho}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} \hat{e}_\varphi$.

8.5 a) Si $\sqrt{x^2 + y^2} > R$, $j^\mu = 0$; si $\sqrt{x^2 + y^2} < R$, $j^\mu = 1/(\pi[x^2 + y^2])(\hat{k}, \lambda c)$.
b) Si j^μ és de tipus temps hi haurà un sistema \mathcal{S}' en el qual $\vec{j}' = 0$, on solament hi ha camp elèctric. La velocitat de \mathcal{S}' respecte a \mathcal{S} és $\vec{v} = \hat{k}I/\lambda$. Si j^μ és de tipus espai hi haurà un sistema \mathcal{S}' en el qual $j^{4'} = 0$, on solament hi ha camp magnètic. La velocitat de \mathcal{S}' respecte a \mathcal{S} és $\vec{v} = \hat{k}c^2\lambda/I$.
c) Si $c\lambda > I$, existeix \mathcal{S}' en què $\vec{B}' = 0$. Si $c\lambda < I$, existeix \mathcal{S}' en què $\vec{E}' = 0$.
d) Si $c\lambda = I$, el camp electromagnètic és singular.

8.6 Si $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ fem $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$, amb $\nabla^2 \phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ i aleshores $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$.

- 8.7** a) Si $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{A} = (0, Bx, 0) + \vec{\nabla}f(x, y, z)$.
 b) Suposem que el fil està sobre l'eix Z , en coordenades cilíndriques (r, φ, z) , tindrem $A^4 = 0$, $A_r = A_\varphi = 0$, $A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r$.
- 8.8** Suposem que la càrrega es mou en l'eix de les X i que en l'instant $t = 0$, passa per l'origen de coordenades aleshores tenim:

$$A^\mu = (v/c, 0, 0, 1) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma}{c\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Capítol 9

- 9.1** $F = 2,3 \cdot 10^{-22}$ N i $F = 7,8 \cdot 10^{-23}$ N respectivament.

9.2
$$\vec{a} = \frac{q}{m\gamma} \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - (\vec{E} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{c^2} \right].$$

9.3 (a)
$$B = \frac{m\Omega}{q} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2 R^2/c^2}}.$$

(b) Suposem que $\vec{B} = (0, 0, B)$ i que \mathcal{S}' es mou amb velocitat $\vec{w} = (w, 0, 0)$ respecte de \mathcal{S} . L'energia en el sistema \mathcal{S}' varia segons la llei:

$$\mathcal{E}' = \frac{mc^2\gamma_w}{\sqrt{1 - R^2\Omega^2/c^2}} \left(1 + \frac{wR\Omega}{c^2} \sin \Omega t \right), \text{ on } t(t') \text{ s'obté de l'equació implícita: } t' = \gamma_w \left(t + \frac{wR}{c^2} [\cos \Omega t - 1] \right).$$

La variació temporal de l'energia en \mathcal{S}' és:

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = \frac{mwR\Omega^2 \cos \Omega t}{\left(1 + \frac{wR\Omega}{c^2} \sin \Omega t\right) \sqrt{1 - R^2\Omega^2/c^2}}, \text{ que s'ha de comparar i coincideix amb la potència del camp elèctric en } \mathcal{S}', \vec{E}' = (0, -\gamma_w Bw, 0).$$

9.4
$$B = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}}{qcR}.$$

9.5 a)
$$L_n = \frac{\pi c}{\omega} \frac{\sqrt{(nqV)^2 + 2mc^2 nqv}}{mc^2 + nqV}.$$

b) Inicialment $L_n \approx \frac{\pi c}{\omega} \left(\frac{2nqV}{mc^2} \right)^{1/2}$, finalment $L_n \approx \frac{\pi c}{\omega}$.

- 9.6** a) Agafem l'eix Z en la direcció \vec{B} , l'eix X en la direcció de \vec{E} , aleshores la transformació de Lorentz amb velocitat $\vec{u} = \vec{E} \times \vec{B}/|\vec{B}|^2$ anul·la el camp elèctric i té la direcció positiva de l'eix de les X , a \mathcal{S}' solament hi ha camp magnètic en la direcció de Z i val $B' = B(1 - E^2/(c^2 B^2))$. En \mathcal{S}' podem

agafar les mateixes condicions inicials que a l'apartat 9.1.2.

$$\text{b) } \vec{x}'(t') = (-R \cos(\omega_L t'), R \sin(\omega_L t'), v_{\parallel}' t'), \quad \text{on } R = \frac{m\gamma_{v'} v_{\perp}'}{qB'} \quad \text{i} \quad \omega_L = \frac{qB'}{m\gamma_{v'}}.$$

c) $t = \gamma_u(t' + ux'/c^2) = \gamma_u(t' - uR \cos(\omega_L t')/c^2)$ dóna de forma implícita el canvi de paràmetre. $y = y' = R \sin(\omega_L t')$, $z = z' = v_{\parallel}' t'$ i finalment $x = \gamma_u(x' + ut') = \gamma_u(-R \cos(\omega_L t') + ut')$.

$$\mathbf{9.7} \quad \text{a) } a = qEc/\mathcal{E}_0, \quad \text{b) } v_x = \frac{v_0}{\sqrt{1+a^2t^2}}, \quad v_y = \frac{cat}{\sqrt{1+a^2t^2}}, \quad \text{on } v_0 = p_0c^2/\mathcal{E}_0$$

$$\text{c) } x(t) = x_0 + \frac{v_0}{a} \operatorname{arcsinh}(at), \quad y(t) = y_0 + \frac{c}{a} \sqrt{1+a^2t^2}$$

$$\text{d) } T = \frac{\mathcal{E}_0}{qEc} \sinh \left(\frac{qEl}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m^2c^4}} \right),$$

$$\text{e) } \tan \theta = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m^2c^4}} \sinh \left(\frac{qEl}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m^2c^4}} \right).$$

$$\mathbf{9.8} \quad \text{d) } x = -\frac{p_0}{qB}(\cos \theta - 1), \quad y = \frac{p_0}{qB} \sin \theta, \quad z = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \left[\cosh \left(\frac{E\theta}{Bc} \right) - 1 \right].$$

$$\mathbf{9.9} \quad \text{a) } l = 1,47 \text{ m}, \lambda = 3,27 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}.$$

$$\text{b) } F^{\dagger} = \frac{2,36 \cdot 10^{-16}}{r} \text{ N m} \quad t_1 = r_0 \sqrt{2/k} \int_0^{y_1} e^{y^2} dy, \quad \text{on } y = \sqrt{\ln(r/r_0)}, \text{ i}$$

$$k = 2,88 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-2}.$$

$$\text{c) } t_1 = 0,132 \int_0^{\sqrt{\ln 4}} e^{y^2} dy.$$

Capítol 10

10.2 Els únics components diferents de zero són $Q_{xx} = q/5(2a^2 - b^2 - c^2)$, $Q_{yy} = q/5(2b^2 - a^2 - c^2)$, $Q_{zz} = q/5(2c^2 - a^2 - b^2)$. On q és la càrrega total, i a, b, c són els semieixos. Hem triat l'origen de coordenades en el centre de l'el·lipsoide.

10.3 Els únics components diferents de zero són $Q_{xx} = q/2(a^2 - b^2)$, $Q_{yy} = q/2(a^2 - b^2)$, $Q_{zz} = q(b^2 - a^2)$.

10.4 Un cop feta la mitjana temporal tenim $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{p^2}{8\pi} \omega^4 (1 + \cos^2 \theta)$.

$$\mathbf{10.5} \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{p^2}{8\pi} \omega^4 \sin^2 \theta \frac{\sin^2(7\pi/2 \sin \theta \cos \varphi)}{\sin^2(\pi/2 \sin \theta \cos \varphi)}.$$

$$10.6 \quad dI = f' \left(\frac{\cos \theta - v/c}{1 - v/c \cos \theta}, \varphi \right) \left(\frac{1 - v^2/c^2}{1 - v/c \cos \theta} \right)^2.$$

Capítol 11

$$11.1 \quad a) \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{q^2 \omega_0^4 a^2}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \sin^2 \theta, \quad P = \frac{q^2 \omega_0^4 a^2}{12\pi c^3 \epsilon_0}.$$

$$b) \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{q^2 \omega_0^4 R^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right), \quad P = \frac{q^2 \omega_0^4 R^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}.$$

$$11.3 \quad a) x(t) = \frac{d\sqrt{E_0^2 - m_e^2 c^4}}{eV} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\text{ceV}}{dE_0} t\right), \quad y(t) = 0,$$

$$z(t) = \frac{dE_0}{eV} \left[\sqrt{1 + \frac{c^2 e^2 V^2}{d^2 E_0^2} t^2} - 1 \right].$$

$$b) t_c = \frac{d}{2c} \sqrt{1 + \frac{4E_0}{eV}}. \quad c) L_m = \frac{d\sqrt{E_0^2 - m_e^2 c^4}}{eV} \operatorname{arccosh}\left(\frac{d}{2} + \frac{dE_0}{eV}\right).$$

$$d) E(t_c) = \frac{e^4 V^2 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 m_e^4 c^8 d} \sqrt{1 + \frac{4E_0}{eV}}.$$

$$11.4 \quad a) \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^4 \lambda^2 \gamma^2}{24\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m^2} \frac{1}{r^2} \left[1 - \frac{(x\beta_x + y\beta_y)^2}{r^2} \right].$$

$$b) \mathcal{E} = \frac{q^4 \lambda^2 \gamma_0^2}{24\pi^2 \epsilon_0^3 c^3 m^2} \frac{1}{bv_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{2c^2} \right). \quad c) \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^4 \lambda^2}{32\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m^2} \frac{\sin^2 \theta}{b^2}.$$

$$11.5 \quad b) \frac{dE}{dt} = -\frac{q^3 B \gamma_0^3 v_0^2}{3\epsilon_0 c^3 m} \sin^2 \theta. \quad c) \tau = T(1 - \beta_0 \cos^2 \theta).$$

$$11.6 \quad a) \mathcal{E}_+ = \frac{q^3 B v_0^2}{12\epsilon_0 c^3 m(1 - v_0^2/c^2)^{3/2}}. \quad b) \mathcal{E}_- = -\frac{q^3 B v_0^2}{4\epsilon_0 c^3 m(1 - v_0^2/c^2)^{3/2}}.$$

$$11.8 \quad a) \mathcal{E}(t) = mc^2 \frac{E_0 + mc^2 \tanh k(t - t_0)}{mc^2 + E_0 \tanh k(t - t_0)} \quad \text{on} \quad k = \frac{q^4 B^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m^3}.$$

$$c) E = E_0 e^{-2k(t-t_0)}. \quad d) r = ro \frac{1}{\cosh kt + \gamma_0 \sinh kt}.$$

Capítol 12

$$12.1 \quad \vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k, \quad \text{amb} \quad \vec{E}_k = -i \frac{q\vec{k}}{2\pi^2 k^2}, \quad \omega = 0.$$

12.2 La polarització és plana perpendicular a \hat{n} i en el pla format per \vec{a} i \hat{n} , és a dir $\vec{\epsilon} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$.

12.3 En coordenades esfèriques:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_\theta \sin(\omega t - kr - \varphi + \pi) \tilde{\theta} + E_\varphi \sin\left(\omega t - kr - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tilde{\varphi}.$$

$$\text{Polarització el·líptica amb } E_\theta = \frac{\omega^2 \mu_0 m_0}{4\pi c r}, \quad E_\varphi = E_\theta \cos \theta$$

$$\text{i } \phi_1 - \phi_2 = \pi/2.$$

12.4 Per a f_1 tenim $\Delta x = \sqrt{2}/\alpha$ i $\Delta k = \alpha/2$. Per a f_2 tenim $\Delta x = 1/\alpha$ i $\Delta k = \alpha/2$.

Índex alfabètic

- abampere, 205
- aberració, estel·lar, 31, 38, 73, 75
- Abraham, quadrivector, 272
- absorció ressonant, 83, 86
- acceleració pròpia, 110
- accelerador lineal, 216
- afinitats, 311
- àlgebra Poisson, grup Poincaré, 155
- Ampère, llei d', 204
- ampere, 206
- amplada
 - natural, 80
 - tèrmica, 81
- amplitud, 280

- Baladin et al., 106
- Bargmann, Michel i Telegdi, equació de, 227
- Bayley et al., 105
- Bel, 163
- Bergmann, 148
- bessons, paradoxa dels, 60, 104, 107
- Biot i Savart, llei de, 243
- Blondlot, 27
- Bradley, 31
- Brillouin, 293

- càrrega total, 187
- camp electromagnètic
 - coulombià, 255
 - d'acceleració, 255
 - de radiació, 243, 255
 - de velocitat, 255
 - induït, 242
 - llunyà, 242
 - pròxim, 242
 - radiat, 242
 - retardat, 254
 - singular, 193, 281
- camp de velocitats del medi, 177
- Cauchy, problema de, 234
- Cauchy, teorema de, 307
- causalitat, 18, 51, 94, 100, 101, 148, 295, 301, 303, 305
- CGS, sistema d'unitats, 204
 - electrostàtic, 204
 - electromagnètic, 205
- Champeney i Moon, 86
- Chasles, teorema de, 135
- ciclotró, 217
- cinemàtica, 42
- col·lisions
 - newtonianes, 116
 - elàstiques, 117
 - relativistes, 117
 - elàstiques, 120
 - inelàstiques, 120
- coeficient dielèctric, 288
- coeficient magnètic, 288
- con de llum, 98
 - futur, 99
 - passat, 99
- conductor, 304
- constant dielèctrica, zeros de la, 305
- conveni de la suma, 311
- coordenades, 15,17
 - canòniques, 148
 - canvis de, 24, 118, 311, 315, 316, 321

- cartesianes, 17
- cilíndriques, 220
- curvilínies adaptades, 324
- origen de, 17
- polars cilíndriques, 225
- polars esfèriques, 258
- rectilínies, 311
- Coulomb, llei de, 204, 243
- covector, 314
- Cowan i Reines, 123
- Currie, 163
- dades inicials, problema de, 234
- De Broglie, 124
- defecte màssic, 121
- densitat
 - de càrrega, 25, 187
 - d'energia, 257, 283
 - de flux de moment angular, 174
 - de flux de quadrimoment lineal, 168
 - de massa, 177
 - de moment lineal del camp electromagnètic, 203
 - de quantitat de moviment, 177
 - d'un medi, 312
 - d'una magnitud, 166, 201
 - pròpia, 179, 180
 - pròpia de partícules, 180
- densitat de corrent, 166, 187
 - de massa, 177
 - d'energia, 257, 283
 - d'una magnitud, 202
- desintegració beta, 121
- desplaçament Doppler, 31, 73
 - cap al blau, 73
 - cap al roig, 73
 - cosmològic, 87
 - gravitatori, 87
- desplaçament, vector, 279, 287, 288
- dielèctric, 304
- dielèctric, model de, 308
- dipol curt, 245
- Dirac, derivada funció delta, 333
- Dirac, delta de, 332
- dispersió, 290
 - anòmala, 292, 295
- dissipació de l'energia, 304
- Doppler, efecte, 31, 73
 - transvers, 73
 - mesures, 76
- Einstein, conveni, 94
- Einstein, principi de relativitat, 41
- emissió estimulada, 298
- energia
 - cinètica, 120
 - del camp electromagnètic, 199, 201
 - d'enllaç, 126
 - en repòs, 120
 - lleis de conservació, 201
 - llindar, 128
 - total, 120
- equació de continuïtat, 187
- equació d'estat, 179, 181
- equació d'ona, solucions, 234
- equacions constitutives, 178, 179, 181
- escalar, 312
- esdeveniment, 15, 93
 - coordenades d'un, 54, 93
- espai de referència, 15, 16
- espectres, 79
- estels fixos, 16, 20
- estels, sistema doble, 30
- èter electromagnètic, 25
- èter, propagació en l', 33, 37
- fórmula de Larmor, 259
- Fermi, 122
- Fermi-Walker, transport per, 137
- fissió nuclear, 126
- FitzGerald-Lorentz, contracció de, 38
- Fizeau
 - arrossegament de l'èter, 34
 - velocitat de la llum, 29
- fluid
 - newtonià, 179

- perfecte, 179
 - relativista, 180
- flux de quadrimoment lineal, 168
- font sinusoidal localitzada, 240
- força
 - d'oscil·lador, 298
 - de Minkowski, 190
- forces vives, teorema, 132
- forces volúmiques, 178
- fotons, 123
- Foucault, pèndol, 20
- Fourier, transformada, 329
- freqüència, 70, 71
 - angular, 280
 - de Larmor, 213
 - de plasma, 298, 310
- Fresnel, arrossegament, 34, 75
- Frisch i Smith, 59
- front d'ona, 69
 - transformació del, 71
- funció
 - generatriu, 150
 - d'una transformació de Poincaré, 154
 - resposta, 303
 - generalitzada, 332
- fusió nuclear, 126
- futur, absolut, 99
- galga, condició de, 198, 238
 - Coulomb, 198
 - Lorenz, 198
 - radiació, 198
 - transversal, 198
- Galileu
 - addició de velocitats, 23
 - grup de, 23
 - principi de relativitat, 20, 24
 - transformacions de, 21
- gas
 - de fotons, 182
 - de Maxwell-Boltzmann relativista, 182
 - fred de partícules, 182
- Gauss, 17
 - teorema de, 326
- generadors
 - infinitesimals, 151
 - cinemàtics, 162
 - dinàmics, 162
- geometria, euclidiana, 16, 17, 20, 42, 104
- Goldstein, 148
- grup
 - afí, 311
 - euclidià, 18, 46, 95
 - Galileu, 23
 - Lorentz, 52
- Hafele i Keating, 107
- Hamilton
 - equacions de, 144, 149, 154, 224
 - principi variacional de, 141
- hamiltoniana
 - càrrega puntual, 224
 - partícula lliure, 143
- Harres, 34
- Hasselcamp et al., 78
- Hay et al., 85
- Heaviside, funció de, 236, 332
- Hertz, teoria de, 26
- Hill, 163
- hipercilindre, 171
- hiperplà, 325
- hipersuperfície, 323
 - element de, 325
 - equacions paramètriques, 323
- homogeni
 - espai, 20
 - temps, 20
- Huygens, principi de, 69
- incertesa, relació, 331
- índex de refracció, 289, 291
- índexs, pujar i baixar, 322
- inducció, vector, 287
- interval
 - de temps, 18, 23, 52, 54, 97

- hiperbòlic, 52
- invariant, 52, 95
 - classificació dels, 96
- invariants, 315
 - del camp electromagnètic, 192
- isòtrop, espai, 20
- Ives-Stilwell, 77
- Jackson, 271
- Júpiter, 28
- Kramers-Krönig, relacions de, 291, 303, 307
- Kronecker, delta de, 316
- Kundig, 87
- línia d'univers, 100
- lagrangiana
 - càrrega puntual, 222
 - partícula lliure, 141
- Lange, 41
- Levi-Civita, tensor, 317
- lineal, medi, 288
- llum sincrotró, 265
- longitud
 - contracció de, 26
 - de penetració, 290
 - d'extinció, 38
 - d'ona, 71
 - d'una corba, 104
 - mesura de, 46, 55
 - patró de, 17
 - pròpia, 56
 - terrestre, 16
- Lorentz
 - electrodinàmica de, 26
 - força de, 25, 190
 - grup de, 52
 - transformacions de, 46
 - composició de, 139
 - matriu d'una, 94
 - pura, 49, 152
 - vectorial, 53
 - infinitesimal, 152
- Lorentz-Dirac, equació de, 270, 272, 274
- Lorentz-Lorenz, fórmula de, 308
- Mösbauer, efecte, 84
- mètrica, 320
 - definida negativa, 321
 - definida positiva, 321
 - inversa, 321
 - no degenerada, 320
- magnetització, vector, 287
- magnituds fonamentals, 204
- massa-energia, conversió, 124
- massa, inert, 23, 116
- matriu, 317
- Maxwell
 - tensor de, 258, 283
 - tensor d'esforços, 203
 - equacions de, 24, 279
 - compatibilitat, 187
 - covariants, 185, 196
 - medis materials, 185
 - invariància, 185
 - solució, 233
 - transformació, 25, 46
- Maxwell-Boltzmann, distribució, 82, 182
- medi
 - dispersiu, 304
 - isòtrop, 288
 - refrigent, 33, 75
- Michelson
 - experiment, 35
 - interferòmetre, 35
- Minkowski
 - espaitemps de, 93
 - força de, 131
 - mètrica de, 94, 95
 - producte de, 95
- mirall magnètic, 220
- MKS, sistema d'unitats, 205
- moment angular
 - intern, 135
 - conservació del, 173

- moment dipolar
 - elèctric, 245
 - magnètic, 226, 247
 - molecular, 309
- moment lineal
 - del camp electromagnètic, 201
 - lei de conservació del, 202
 - radiat, 258
- moment quadrupolar elèctric, 249
- moviment hiperbòlic, 112
- moviment uniformement accelerat, 111
- muó, 58, 59
- multipolar, aproximació, 244
- neutrino, 122
- Newton
 - mecànica de, 19, 20, 23, 42, 116
 - primera lei, 46
 - segona lei, 131
 - teoria corpuscular, 30
- newtonià, límit, 50
- no-interacció, teorema, 160
- observador, 19, 42, 43
- Olin et al., 79
- ona plana monocromàtica, 70, 280, 282
- ona
 - monocromàtica, 293
 - plana, 289
 - nombre d', 71
 - vector d', 71
- ortogonal, 17
 - matriu, 17
 - subgrup, 321
 - transformació, 22
 - vector, 22, 320
 - coordenades cartesianes, 321
- oscil·lador harmònic, 309
- paral·laxi, 33
- parametrització
 - afi, 142
 - de corbes, 101
 - de transformacions de Lorentz, 52, 62
- Parseval, identitat, 330
- partícula lliure, invariància Poincaré, 152
- passat absolut, 99
- Pauli, 122
- pèrdues radiatives, 259
- període, 71
- Pitàgores, 17
- Planck, 124
- Poincaré
 - funcions generatrius, 159
 - generadors infinitesimals, 155
 - grup de, 52, 152
 - principi de relativitat de, 41
 - sistemes predictius, 160
 - transformació de, 94
 - transformacions infinitesimals de, 151
- Poisson, parèntesis, 144
- polaritzabilitat, 308
- polarització, 227, 282, 289
 - vector de, 287
- pols, 178
- potència radiada per una càrrega, 257
- potencial
 - retardat, 239
 - de Liénard-Wiechert, 251, 253
 - electromagnètic, 197
- Pound i Rebka, 85
- Poynting
 - teorema de, 199
 - vector de, 201
- predictiu, marc, 147
- present, absolut, 99
- pressió, 179, 180
 - de radiació, 284
- producte mètric, 320
- producte escalar, 321
- propagació supralumínica, 297
- propagador
 - avançat, 239

- retardat, 239
- quadricorrent
 - de moment angular, 173
 - de moment angular orbital, 174
 - de spin, 174
 - elèctric, 188
 - electromagnètic, 167
- quadriment angular, 133
 - orbital, 140
 - total, 140
 - conservació del, 133, 166
- quadriment lineal, 118, 119
 - radiat, 259
 - conservació del, 166, 167
- quadripotencial electromagnètic, 197
- quadrivector
 - orientat cap al futur, 98, 101
 - tipus espai, 96
 - tipus llum, 96
 - tipus temps, 96
- quadrivelocitat, 109
- Röntgen i Eichenwald, 27
- Röntgen, 27
- rígid
 - moviment, 16
 - sòlid, 16
 - sistema, 16
- Rømer, velocitat de la llum, 28
- raó giromagnètica, 226
- radiació
 - dipolar elèctrica, 244
 - dipolar magnètica, 246
 - de sincrotró, 265
 - quadrupolar elèctrica, 248
 - sincrotró, anàlisi freqüencial, 267
 - d'una càrrega en moviment circular, 264
 - d'una càrrega en moviment rectilini, 262
 - distribució angular de la, 260
- raig, 69
- relativitat, principi de, 26, 41, 46, 115, 187
- rellotge, 18
 - patró, 18
 - accelerat, 104
 - atòmic, 107
 - marxa del, 19
- reparametrització, 102
 - invariància per, 141
- retard gravitatori, 108
- retrocés, 79, 80, 83, 126
- Riesz, teoria emissió de, 38
- Rohrlich, 271
- Rouché, teorema de, 305
- Rutherford, 270
- Sagnac, efecte, 34
- Schott, terme de, 272
- SI, sistema d'unitats, 204
- simultaneïtat, 18, 44, 50
- sincrociclotró, 218
- sincronització, 18
 - protocol de, 43, 108
- sistema de referència
 - comòbil, 103
 - inercial, 20, 23, 24, 35, 41, 42, 54
 - rígid, 16
- sistema dinàmic predictiu, 161
- solucions
 - autoaccelerades, 272
 - d'ona plana, 281
 - preaccelerades, 274
 - runaway*, 272, 274
- spin, 135
 - tensor de, 140
- SS 433, espectre, 87
- Stokes, arrossegament èter, 34
- Sudarshan, 156
- susceptibilitat, 306
 - component absortiu de la, 307
 - component dispersiu de la, 307
 - elèctrica, 288, 303
 - magnètica, 288
- Synge, J. L., 82

- temporal, ordenació, 18, 100
- temps
 - absolut, 42
 - atòmic internacional, 108
 - físic, 19
 - propi, 103, 109
 - relatiu, 42
 - retardat, 253
- tensor, 316
 - antisimètric, 328
 - contracció de, 319
 - d'energia-moment, 170
 - de Belinfante, 176
 - del camp electromagnètic, 199, 202
 - d'ona plana, 283
 - d'esforços, 178
 - de Faraday, 191
 - de Levi-Civita, 191
 - de tensions relativista, 179
 - producte de, 319
 - quadricorrent de moment angular, 176
 - simètric, 318
- tensorialitat, criteri de, 319
- teorema de convolució, 303, 330
- Thomas, precessió, 138, 139
- transformació
 - canònica, 148
 - infinitesimal, 149
 - de galga, 198, 223
 - de simetria, 149
 - lineal especial, 313
- transicions atòmiques, 125
- Trouton i Noble, 27
- tub d'univers, 101

- uem, sistema d'unitats, 205
- ues, sistema d'unitats, 204
- unitats electromagnètiques, 25
- unitats, Heaviside-Lorentz, 205

- Van Allen, cinturó de, 221
- vector , 313
 - d'ona, 280
- velocitat
 - crítica, 25, 279
 - de fase, 71, 281, 290, 293
 - de grup, 293, 295
 - negativa, 295
 - supralumínica, 295
 - de propagació, 70
 - del front, 295, 297
 - del paquet d'ones, 293
 - límit, 50, 119
 - llum, 25, 28, 35, 297
 - en un medi en moviment, 33
 - pròpia, 109
 - sublumínica, 295
 - supralumínica, 51, 301
- velocitats
 - d'una ona, 292
 - composició relativista de, 61
- vida mitjana, 80
- viscositat, 179
- Voigt, 46
- Von Laue, 41

- Wang et al., 299
- Weber i Kolrausch, 25
- Wilson, 26

- xocs, 116