

1) Les equacions que s'obtenen són

$$\begin{cases} 4 = 5(I_1 - I_2) + 8I_1 \\ 12 - 4 = 3I_2 + 5(I_2 - I_1) \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} 4 = 13I_1 - 5I_2 \\ 8 = -5I_1 + 8I_2 \end{cases}$$

(la de baix la marquem perquè la farem servir al final). Multiplicant la de dalt per 8 i la de baix per 5

$$\begin{cases} 32 = 104I_1 - 40I_2 \\ 40 = -25I_1 + 40I_2 \end{cases}$$

sumant-les

$$72 = 79I_1 \rightarrow I_1 = \frac{72}{79} A$$

i fent servir aquest resultat en

$$8 = -5I_1 + 8I_2$$

obtenim

$$I_2 = \frac{8 + 5I_1}{8} = \frac{8 + 5 \cdot \frac{72}{79}}{8} = \frac{\frac{8 \cdot 79 + 5 \cdot 72}{79}}{8} = \frac{8 \cdot 79 + 5 \cdot 72}{8 \cdot 79} = \frac{79 + 5 \cdot 9}{79} = \frac{124}{79} A$$

2) Les equacions que s'obtenen són

$$\begin{cases} -40 = 200I_1 + 78(I_1 - I_2) \\ 40 - 360 = 19(I_2 - I_3) + 78(I_2 - I_1) \\ 360 - 80 = 68I_3 + 19(I_3 - I_2) \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} -40 = 278I_1 - 78I_2 \\ -320 = -78I_1 + 97I_2 - 19I_3 \\ 280 = -19I_2 + 87I_3 \end{cases}$$

En el cas de sistemes de més de dues equacions és més entenedor fer servir el mètode de Gauss. La matriu associada al sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 278 & -78 & 0 & -40 \\ -78 & 97 & -19 & -320 \\ 0 & -19 & 87 & 280 \end{array} \right)$$

Comencem fent un zero al lloc on és el **-78**. Per aconseguir-ho substituïm la segona fila per una combinació lineal de la primera i la segona. La primera la multipliquem per 78, la segona per 278 i sumem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 278 & -78 & 0 & -40 \\ -78 & 97 & -19 & -320 \\ 0 & -19 & 87 & 280 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 278 & -78 & 0 & -40 \\ 0 & 20882 & -5282 & -92080 \\ 0 & -19 & 87 & 280 \end{array} \right)$$

així cada element de la segona fila ha quedat substituït per el valor que resulta de fer la *mateixa* combinació lineal als elements de les dues primeres files

$$\begin{aligned} 0 &= 78 \cdot 278 + 278 \cdot (-78) \\ 20882 &= 78 \cdot (-78) + 278 \cdot 97 \\ -5282 &= 78 \cdot 0 + 278 \cdot (-19) \\ -92080 &= 78 \cdot (-40) + 278 \cdot (-320) \end{aligned}$$

Ara farem una operació semblant a la matriu que ens ha quedat. Volem fer un zero al lloc on és el nombre **-19**, per aconseguir això substituïm la tercera fila per una combinació lineal de la segona i la tercera. Multiplicarem la segona per 19, la tercera per 20882 i sumem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 278 & -78 & 0 & -40 \\ 0 & 20882 & -5282 & -92080 \\ 0 & -19 & 87 & 280 \end{array} \right)$$

Noteu que **no** funcionarà fer una combinació lineal de la primera i la tercera per eliminar el **-19** perquè llavors el **0** se'ns desfaria al barrejar-se

amb el 278 de la primera fila. L'ordre sempre és el mateix, primer, fer un zero en aquest element *, després en aquest * i en darrer lloc en aquest *.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ \textcolor{blue}{*} & * & * & * \\ \textcolor{green}{*} & \textcolor{red}{*} & * & * \end{array} \right)$$

Fixeu-vos que en el nostre cas el zero que tocava fer a la posició * ja el teníem d'entrada. No sempre passarà això. Tornant a la matriu,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 278 & -78 & 0 & -40 \\ 0 & \textcolor{brown}{20882} & -5282 & \textcolor{green}{-92080} \\ 0 & \textcolor{brown}{-19} & 87 & \textcolor{green}{280} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 278 & -78 & 0 & -40 \\ 0 & 20882 & -5282 & -92080 \\ 0 & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{lightblue}{1716376} & \textcolor{darkred}{4097440} \end{array} \right)$$

$$\textcolor{blue}{0} = 19 \cdot \textcolor{brown}{20882} + 20882 \cdot \textcolor{brown}{(-19)}$$

$$\textcolor{lightblue}{1716376} = 19 \cdot \textcolor{brown}{(-5282)} + 20882 \cdot 87$$

$$\textcolor{darkred}{4097440} = 19 \cdot \textcolor{green}{(-92080)} + 20882 \cdot \textcolor{green}{280}$$

La matriu resultant és equivalent al sistema

$$\begin{cases} 278I_1 - 78I_2 = -40 \\ 20882I_2 - 5282I_3 = -92080 \\ 1716376I_3 = 4097440 \end{cases}$$

D'on, llegint la tercera equació

$$1716376I_3 = 4097440 \rightarrow I_3 = \frac{4097440}{1716376} = 2,3873 \text{ A}$$

llegint la segona

$$20882I_2 - 5282I_3 = -92080 \rightarrow I_2 = \frac{5282I_3 - 92080}{20882}$$

i fent servir el valor trobat per I_3

$$I_2 = \frac{5282 \cdot 2,3873 - 92080}{20882} = -3,8057 \text{ A}$$



finalment, llegint la primera

$$278I_1 - 78I_2 = -40 \rightarrow I_1 = \frac{-40 + 78I_2}{278}$$

i fent servir el valor trobat per I_2

$$I_1 = \frac{-40 + 78 \cdot (-3,8057)}{278} = -1,2117 A$$

3) Les equacions que s'obtenen són

$$\begin{cases} 0 = 3I_1 + 5(I_1 - I_2) + 3(I_1 - I_3) \\ 12 - 4 = 1I_2 + 5(I_2 - I_1) + 1(I_2 - I_3) + 3I_2 \\ 4 = -3I_1 - I_2 + 12I_3 \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} 0 = 11I_1 - 5I_2 - 3I_3 \\ 8 = -5I_1 + 10I_2 - I_3 \\ 4 = -3I_1 - I_2 + 12I_3 \end{cases}$$

La matriu associada al sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ -5 & 10 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array} \right)$$

Comencem fent un zero al lloc on és el **-5**. Per aconseguir-ho substituïm la segona fila per una combinació lineal de la primera i la segona. La primera la multipliquem per 5, la segona per 11 i sumem,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ -5 & 10 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array} \right)$$

així cada element de la segona fila ha quedat substituït per el valor que resulta de fer la *mateixa* combinació lineal als elements de les dues primeres files

$$0 = 5 \cdot 11 + 11 \cdot (-5)$$

$$85 = 5 \cdot (-5) + 11 \cdot 10$$

$$-26 = 5 \cdot (-3) + 11 \cdot (-1)$$

$$88 = 5 \cdot 0 + 11 \cdot 8$$

Ens queda la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array} \right)$$

Repetim el procés per fer un zero ara a la posició on és el -3 . Substituïm la tercera fila per una combinació lineal de la primera multiplicada per 3, i la tercera per 11 i sumant,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ 0 & -26 & 123 & 44 \end{array} \right)$$

$$0 = 3 \cdot 11 + 11 \cdot (-3)$$

$$-26 = 3 \cdot (-5) + 11 \cdot (-1)$$

$$123 = 3 \cdot (-3) + 11 \cdot 12$$

$$44 = 3 \cdot 0 + 11 \cdot 4$$

Ens ha quedat la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ 0 & -26 & 123 & 44 \end{array} \right)$$

Ara volem fer el darrer zero al lloc on és el nombre **-26**, per aconseguir això substituïm la tercera fila per una combinació lineal de la segona i la tercera. Multiplicarem la segona per 26, la tercera per 85 i sumem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ 0 & -26 & 123 & 44 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ 0 & 0 & 9779 & 6028 \end{array} \right)$$

$$0 = 26 \cdot 85 + 85 \cdot (-26)$$

$$9779 = 26 \cdot (-26) + 85 \cdot 123$$

$$6028 = 26 \cdot 88 + 85 \cdot 44$$

La matriu que queda és equivalent al sistema

$$\begin{cases} 11I_1 - 5I_2 - 3I_3 = 0 \\ 85I_2 - 26I_3 = 88 \\ 9779I_3 = 6028 \end{cases}$$

d'on

$$9779I_3 = 6028 \rightarrow I_3 = \frac{6028}{9779} = 0,6164 \text{ A}$$

llegint la segona

$$85I_2 - 26I_3 = 88 \rightarrow I_2 = \frac{26I_3 + 88}{85}$$

i fent servir el valor trobat per I_3

$$I_2 = \frac{26 \cdot 0,6164 + 88}{85} = 1,2238 \text{ A}$$



finalment, llegint la primera

$$11I_1 - 5I_2 - 3I_3 = 0 \rightarrow I_1 = \frac{5I_2 + 3I_3}{11}$$

i fent servir el valor trobat per I_2 , I_1

$$I_1 = \frac{5 \cdot 1,2238 + 3 \cdot 0,6164}{11} = 0,7244 \text{ A}$$