En l'exercici següent es demana explícitament deduir l'expressió de la tercera llei de Kepler. És fonamental comprendre i aprendre el raonament que es fa servir, ja que en la majoria de les correccions publicades es valora detallar aquest procés abans de fer servir l'expressió coneguda $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$. Pot ser una mica feixuc haver de fer pràcticament cada vegada que es resol un exercici de gravitació aquesta deducció. En qualsevol cas, s'ha de tenir en compte el que s'ha dit abans i per si de cas, als exàmens fer-la.

Exercici 31

Fem les identificacions

$$M_{A0620-00} \equiv M$$

$$m_{estrella} \equiv m$$

a) De la segona llei de Newton tenim

$$F = ma_c \rightarrow \frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

l'estrella descriu una circumferència de longitud $2\pi r$ en un temps T, movent-se a velocitat v, llavors

$$2\pi r = vT$$

i podem escriure

$$\frac{GM}{r^2} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{1}{r}$$

d'on

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

que resulta ser la tercera llei de Kepler, que ell va deduir experimentalment.

Llavors

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{31} \cdot (0,33 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 3,11 \cdot 10^9 \, m$$

Si volem ser totalment estrictes amb les xifres significatives, hauríem de donar com a resultat $3,1 \cdot 10^9\, m$

b) En quant a la velocitat lineal

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 3,11 \cdot 10^9}{0,33 \cdot 24 \cdot 3600} = 6,86 \cdot 10^5\, m/s$$

igual que abans, el resultat podria ser $v = 6,9 \cdot 10^5\, m/s$.

Per l'acceleració centrípeta tenim

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(6,86 \cdot 10^5)^2}{3,11 \cdot 10^9} = 151,3\, m/s^2$$

El vector velocitat $\vec{v}$ és tangent a la trajectòria de l'estrella i el vector acceleració centrípeta $\vec{a}_c$ és perpendicular a $\vec{v}$ i dirigit cap el centre.

Exercici 32

Per simplicitat en la resolució fem servir el símbol ♂, corresponent al planeta Mart

a) De la definició de camp gravitatori

$$g_{♂} = \frac{GM_{♂}}{R_{♂}^2} \rightarrow M_{♂} = \frac{g_{♂} R_{♂}^2}{G} = \frac{3,71\, (3,39 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,39 \cdot 10^{23}\, kg$$

b) En quant al radi de l'òrbita, aplicant la tercera llei de Kepler

$$T_{Deimos}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{♂}} r_{Deimos}^3$$

d'on podem obtenir

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_{♂} T_{Deimos}^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,39 \cdot 10^{23} \cdot (30,35 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}}$$

$$= 2,34 \cdot 10^7\, m$$

La velocitat d'escapament s'obté per aplicació directa del resultat que vam veure a teoria

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{♂}}{R_{♂}}} = 5,01 \cdot 10^3 \, m/s$$

Exercici 33

L'energia mecànica que té el satèl·lit (de massa m) quan es llença des de la superfície de la Terra, val

$$E_M^{sup} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}$$

on v és la velocitat amb que s'ha de llançar, ignorant (com és habitual si no es diu el contrari) l'energia cinètica que pugui tenir el satèl·lit a causa de la rotació o translació terrestres.

L'energia mecànica que tindrà quan es trobi a l'altura demanada serà

$$E_M^{alt} = -\frac{1}{2}\frac{GM_{\oplus}m}{(R_{\oplus} + R_{\oplus})} = -\frac{1}{4}\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}$$

llavors, escrivint el balanç d'energia $E_M^{sup} = E_M^{alt}$

$$-\frac{1}{4}\frac{GM_{\oplus}\cancel{m}}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{GM_{\oplus}\cancel{m}}{R_{\oplus}}$$

d'on obtenim

$$v = \sqrt{2\left(\frac{GM_\oplus}{R} - \frac{1}{4}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{3}{4}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^{6}}} = 9,69 \cdot 10^{3}\, m/s$$

Exercici 34

Resolt a l'exemple 15 (pàg. 38), dels apunts de teoria.

Exercici 35

a) El període el podem calcular a partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} r^3$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\oplus + h)^3}{GM_\oplus}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 9,96 \cdot 10^3\, s$$

En quant a la velocitat, recordant que és una òrbita circular

$$2\pi(R_\oplus + h) = vT \to v = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6)}{9,96 \cdot 10^3} = 6,31 \cdot 10^3\, m/s$$

Alternativament, fent servir l'expressió per la velocitat de les òrbites circulars estables

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6}} = 6,31 \cdot 10^3\, m/s$$

b) En el punt P, després del canvi en la velocitat tenim,

$$E_c = \frac{1}{2} m v_P'^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot (7 \cdot 10^3)^2 = 4,9 \cdot 10^{10}\, J$$

$$E_{pg} = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus + h_P} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^3}{6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6} = -7,96 \cdot 10^{10}\, J$$

$$E_M = E_c + E_{pg} = 4,9 \cdot 10^{10} - 7,96 \cdot 10^{10} = -3,06 \cdot 10^{10}\, J$$

En quant al punt A, recalculem l'energia potencial gravitatòria i fem servir que l'energia mecànica es conserva,

$$E_{pg} = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus + h_A} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^3}{6,37 \cdot 10^6 + 9,53 \cdot 10^6} = -5,01 \cdot 10^{10}\, J$$

$$E_M = E_c + E_{pg} = -3,06 \cdot 10^{10}\, J$$

Ara podem calcular l'energia cinètica en A

$$E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 = E_M - E_{pg} = -3,06 \cdot 10^{10} - (-5,01 \cdot 10^{10}) = 1,95 \cdot 10^{10}\, J$$

Exercici 36

Les òrbites circulars estables d'un objecte de massa m al voltant d'un cos celeste de massa M i radi R, a una alçada h sobre la superfície d'aquest es poden trobar per aplicació de la *segona llei de Newton*

$$F = m a_c$$

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

a) Llavors, amb les dades de l'exercici

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 3,85 \cdot 10^5}} = 7,68 \cdot 10^3 \, m/s$$

Calculem el període, que serà el temps que ha de passar entre dues visualitzacions consecutives

$$2\pi r = vT \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 3,85 \cdot 10^5)}{7,68 \cdot 10^3} = 5,52 \cdot 10^3 \, s \approx 92 \, min$$

Com el resultat és prou més petit que el període de rotació terrestre, ignorem el fet que la Terra gira.

b) Per trobar la velocitat d'escapament demanem que l'energia mecànica sigui zero

$$0 = E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}$$

Llavors

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 3,85 \cdot 10^5}} = 1,09 \cdot 10^4 \, m/s$$

Per tant, la velocitat addicional que cal donar serà

$$v_{add} = 1,09 \cdot 10^4 - 7,68 \cdot 10^3 = 3,2 \cdot 10^3 \, m/s$$

Exercici 37

a) Fem servir les dades que es proporcionen a l'exercici. En quant a la velocitat,

$$2\pi \cdot R_{Galatea} = vT \rightarrow v = \frac{2\pi R_{Galatea}}{T_{Galatea}} = \frac{2\pi \cdot 6,20 \cdot 10^{7}}{0,428 \cdot 24 \cdot 3600} = 1,05 \cdot 10^{4}\, m/s$$

Recordant l'expressió que relaciona la velocitat de les òrbites circulars estables amb la seva distància al centre de forces

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{♆}}}{r}}$$

tenim

$$M_{\text{♆}} = \frac{v^{2}r}{G} = \frac{(1,05 \cdot 10^{4})^{2} \cdot 6,20 \cdot 10^{7}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,02 \cdot 10^{26}\, kg$$

b) El camp gravitatori a Neptú val,

$$g_{\text{♆}} = \frac{GM_{\text{♆}}}{R_{\text{♆}}^{2}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,02 \cdot 10^{26}}{2,46 \cdot 10^{7}} = 11,24\, m/s^{2}$$

Exercici 38

L'expressió de l'energia mecànica d'un objecte que orbita al voltant d'un altre està deduïda a la teoria. Llavors, l'energia mecànica de la Lluna es pot calcular com

$$E_{M☾} = -\frac{1}{2}\frac{GM_{\oplus}M_{☾}}{r_{\oplus - ☾}} = -3,82 \cdot 10^{28}\, J$$

Exercici 39

a) Els satèl·lits geoestacionaris tenen com a període $T = 24\, h$, ens diuen que l'Sputnik 1 té un període de $96,2$ minuts, per tant, no es troba en una òrbita geoestacionària, de fet, passaria sobre el mateix punt de la Terra unes

$$\frac{24 \cdot 60}{96,2} \approx 15$$

vegades per dia.

Per trobar el radi de l'òrbita que correspon a aquest valor del període (96,2 minuts), fem servir la tercera llei de Kepler.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_\oplus}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(96,2\cdot 60)^2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}}{4\pi^2}} =$$

$$= 6,95\cdot 10^6\, m$$

per tant, respecte la superfície de la Terra

$$h = r - R_\oplus = 6,95\cdot 10^6 - 6,37\cdot 10^6 = 5,82\cdot 10^5\, m$$

b) Per trobar el treball demanat ho farem restant l'energia mecànica de la destinació (l'òrbita) i l'energia mecànica inicial. En aquest exercici es proposa que l'objecte a posar en òrbita té energia cinètica quan es troba sobre la superfície de la Terra. Recordem que aquesta situació és excepcional, ja que habitualment considerem només el terme d'energia potencial gravitatòria.

$$W = -\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus + h} - \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}\right) = GM_\oplus m\left[\frac{-1}{2(R_\oplus + h)} + \frac{1}{R_\oplus}\right] - \frac{1}{2}mv^2 =$$

$$= GM_\oplus m\frac{R_\oplus + 2h}{2R_\oplus(R_\oplus + h)} - \frac{1}{2}mv^2 =$$

$$= 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\cdot 83,6\frac{6,37\cdot 10^6 + 2\cdot 5,82\cdot 10^5}{2\cdot 6,37\cdot 10^6(6,37\cdot 10^6 + 5,82\cdot 10^5)} - \frac{1}{2}\cdot 83,6\cdot 325^2 =$$

$$= 2,83\cdot 10^9\, J$$

Exercici 40

a) Fet als apunts de teoria.

b) Igualem l'energia mecànica que té el cos a la superfície de la Lluna amb la que tindrà un cop hagi assolit l'altura màxima, h

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM_☾}{R_☾}}\right)^2 - \frac{GM_☾\, m}{R_☾} = -\frac{GM_☾\, m}{R_☾ + h}$$

fent càlculs i simplificant termes

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\frac{1}{4}\frac{\cancel{2}GM_{☾}}{R_{☾}} - \frac{\cancel{GM_{☾}m}}{R_{☾}} = -\frac{\cancel{GM_{☾}m}}{R_{☾}+h}$$

d'on queda

$$\frac{1}{R_{☾}+h} = \frac{1}{R_{☾}} - \frac{1}{4R_{☾}} = \frac{3}{4R_{☾}}$$

i finalment

$$R_{☾}+h = \frac{4R_{☾}}{3} \rightarrow h = \frac{1}{3}R_{☾} = \frac{1}{3}1,737\cdot 10^{6} = 5,79\cdot 10^{5}\,m$$

Exercici 41

a) De l'enunciat tenim

$$R_{♃-\odot} = 5,203R_{\oplus-\odot} \qquad M_{♃} = 317,8M_{\oplus} \qquad R_{♃} = 10,52R_{\oplus}$$

Llavors, aplicant la tercera llei de Kepler a les parelles, Sol-Júpiter i Sol-Terra

$$T_{♃}^{2} = \frac{4\pi^{2}}{GM_{\odot}}R_{♃-\odot}^{3}$$

$$T_{\oplus}^{2} = \frac{4\pi^{2}}{GM_{\odot}}R_{\oplus-\odot}^{3}$$

ara, dividint les equacions

$$\frac{T_{♃}^{2}}{T_{\oplus}^{2}} = \frac{R_{♃-\odot}^{3}}{R_{\oplus-\odot}^{3}}$$

i finalment

$$T_{♃} = T_{\oplus}\sqrt{\left(\frac{R_{♃-\odot}}{R_{\oplus-\odot}}\right)^{3}} = 1\cdot\sqrt{(5,203)^{3}} = 11,87\,anys$$

b) Ara, podem escriure

$$v_{e}^{♃} = \sqrt{\frac{2GM_{♃}}{R_{♃}}} = \sqrt{\frac{2G\cdot 317,8\cdot M_{\oplus}}{10,52\cdot R_{\oplus}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{635,6 \cdot g_{0\oplus} R_{\oplus}^{\cancel{2}}}{10,52 \cdot \cancel{R_{\oplus}}}} = \sqrt{\frac{635,6 \cdot 9,8 \cdot 6,367 \cdot 10^6}{10,52}} = 6,14 \cdot 10^3 \, m/s$$

Exercici 42

a) A partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}(R_{\oplus} + h)^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_{\odot}}{4\pi^2}} - R_{\oplus} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600)^2 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6,37 \cdot 10^6 = 3,59 \cdot 10^7 \, m$$

b) Tenint en compte que

$$v = \frac{2\pi(R_{\oplus} + h)}{T} = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 3,59 \cdot 10^7)}{24 \cdot 3600} = 3,07 \cdot 10^3$$

podem calcular l'energia cinètica com

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} 2,00 \cdot 10^3 (3,07 \cdot 10^3)^2 = 9,45 \cdot 10^9 \, J$$

L'energia que se li ha de proporcionar per tal que deixi d'estar lligat gravitatòriament a la Terra és justament l'energia mecànica que té en aquest òrbita, que val

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h} = -\frac{1}{2}\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 2,00 \cdot 10^3}{6,37 \cdot 10^6 + 3,59 \cdot 10^7} = 9,42 \cdot 10^9 \, J$$

Es comprova (llevat errors d'aproximació) la relació coneguda de teoria $E_M = -E_c$.

Exercici 43

a) Fem un balanç d'energia entre les dues posicions del meteorit, quan es troba a $10^7\,m$ d'altura i quan arriba a la superfície de la Lluna

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{GM_☾\cancel{m}}{R_☾+h} = \frac{1}{2}\cancel{m}v'^2 - \frac{GM_☾\cancel{m}}{R_☾}$$

d'on

$$\frac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_☾}{R_☾+h} + \frac{GM_☾}{R_☾}$$

$$\frac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{2}v^2 + GM_☾\left(\frac{1}{R_☾} - \frac{1}{R_☾+h}\right)$$

$$\frac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{2}v^2 + GM_☾\frac{h}{R_☾(R_☾+h)}$$

i finalment

$$v' = \sqrt{v^2 + 2GM_☾\frac{h}{R_☾(R_☾+h)}} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1,5\cdot 10^4}{3,6}\right)^2 + 2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,35\cdot 10^{22}\frac{10^7}{1,74\cdot 10^6(1,74\cdot 10^6+10^7)}} =$$

$$= 4,71\cdot 10^3\,m/s$$

b) L'energia mecànica que té a $10000\,km$ en les condicions del problema (caient a $v = 15000\,km/h$) de la Lluna val

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_☾ m}{R_☾+h} = \frac{1}{2}400\left(\frac{1,5\cdot 10^4}{3,6}\right)^2 - \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,35\cdot 10^{22}\cdot 400}{1,74\cdot 10^6+10^7} =$$

$$= 3,30\cdot 10^9\,J$$

Notem que l'energia mecànica és > 0, és a dir que si la trajectòria del satèl·lit no fos de col·lisió, passaria de llarg i no tornaria a la lluna, ja que no està lligat gravitatòriament.

Per una altra banda, l'energia mecànica d'un cos de la mateixa massa que el meteorit que estigui en una òrbita circular estable al voltant de la lluna a l'altura $h = 1\cdot 10^7$ val

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_{☾}\,m}{R_{☾}+h} = -\frac{1}{2}\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,35\cdot 10^{22}\cdot 400}{1,74\cdot 10^{6}+1\cdot 10^{7}} = -8,35\cdot 10^{7}\,J$$

És evident que $3,30\cdot 10^{9}\,J > -8,35\cdot 10^{7}\,J$