Tema 6 El moviment harmònic simple

1. **Cinemàtica del MHS.**

   L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

   $$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

   on A és l'amplitud del moviment i es mesura en metres (m), ω la pulsació o freqüència angular, que es mesura en rad/s i φ_0 l'anomenada *fase* inicial, mesurada en rad. Recordem les relacions $\omega = 2\pi f$, $T = \frac{1}{f}$, on f (Hertz) és la freqüència i T (segons) el període del moviment. L'elongació màxima $x_{max} = \pm A$ es dóna als extrems del moviment. La mínima, $x_{min} = 0$ al punt d'equilibri.

   L'equació de la velocitat és

   $$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

   Ara tenim que la velocitat màxima $v_{max} = \pm A\omega$ és dóna al punt d'equilibri mentre que la mínima $v_{min} = 0$ es dóna als extrems del moviment.

   L'equació de l'aceleració és

   $$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

   de forma que l'acceleració màxima es dóna quan l'elongació és màxima $a_{max} = -A\omega^2$ i mínima al punt d'equilibri $a_{min} = 0$

   La relació entre l'elongació i la velocitat es pot trobar de la següent manera, partint de les equacions de l'elongació i la velocitat i ignorant les dependències temporals per no sobrecarregar la notació

   $$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

   $$\begin{cases} \frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{v}{-A\omega} = \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

   elevem al quadrat

   $$\begin{cases} \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \cos^2(\omega t + \varphi_0) \\ \left(\frac{v}{-A\omega}\right)^2 = \sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

d'on

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

que és l'equació d'una el·lipse de semieixos A i $A\omega$ a l'espai de fases. El fet que la trajectòria sigui tancada garanteix que l'energia es conserva en aquest sistema.

2. **Dinàmica del MHS.** Un exemple de MHS és el d'un objecte de massa m lligat a una molla de constant elàstica k. Recordem que la llei de Hooke relaciona la força que fa la molla amb l'elongació segons

$$F = -kx$$

aplicant la segona llei de Newton

$$F = ma \Rightarrow -kx = -m\omega^2 x$$

d'on es pot deduïr

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Amb un raonament semblant es pot provar que per un pèndol de longitud l en un lloc on la gravetat val g es té

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

3. **Energia en el MHS.** En el cas d'un objecte de massa m unit a una molla de constant elàstica k tenim per l'energia cinètica

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

i per l'energia potencial elàstica

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

L'energia total d'aquest sistema serà

$$E = E_c + E_p$$

el valor de l'energia total es pot deduïr fàcilment, ja que per exemple, al punt d'equilibri, l'energia potencial elàstica val zero, mentre que la cinètica és màxima i val

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$$

de forma que tenim

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$$

alternativament podem veure que als extrems la velocitat és zero i l'energia potencial elàstica és màxima, de forma que podem escriure

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$