Tema 7 El moviment ondulatori. El so.

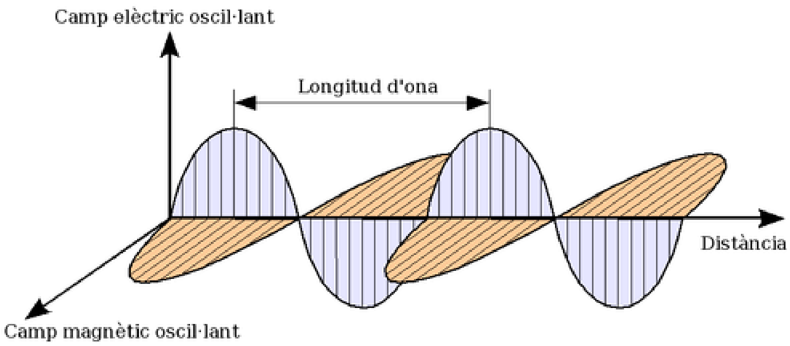
Les ones es poden pensar com a pertorbacions a través d'un medi o el buit amb transport d'energia i quantitat de moviment però no de materia.

1. **Tipus d'ones.**

   Segons la seva naturalesa les ones es poden classificar com

   - **Electromagnètiques**

     No necessiten cap medi material per a propagar-se. En el buit ho fan a la velocitat de la llum $c = 3 \cdot 10^8\, m/s$. La descripció clàssica considera aquestes ones formades per un camp elèctric i un camp magnètic que oscil·len perpendicularment. Només el camp elèctric condiciona les propietats òptiques en la interacció entre ones electromagnètiques i la matèria.

     Amb
     $$\frac{|\vec{E}_{max}|}{|\vec{B}_{max}|} = c$$
     Per una altra banda, la teoria quàntica (que més endevant tractarem breument) considera que les ones electromagnètiques, i en particular la llum, es troben "empaquetades"en partícules anomenades fotons amb energia $E = h \cdot \nu$ on $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ és la constant de Planck, i $\nu (= f)$, la freqüència. En tot aquest capítol tractarem les ones segons la teoria clàssica.

   - **Mecàniques**

     Necessiten un medi material per a propagar-se. La seva velocitat de propagació depén de les característiques físiques del medi, i en general, augmenta amb la densitat d'aquest. Un exemple d'ona mecànica és el so, que més endevant tractarem amb més detall.

Segons la seva forma de propagació les ones es poden classificar com

- **Transversals**
  La direcció de la vibració és perpendicular a la direcció de propagació. Per exemple, les ones electromagnètiques que hem vist abans, ones estacionàries en una corda de guitarra, etc.
- **Longitudinals**
  La direcció de vibració i la de propagació és la mateixa. Per exemple, el so.

2. **Magnituds que caracteritzen una ona. Equació d'una ona harmònica.** L'equació d'una ona harmònica transversal unidimensional que es desplaça cap a la dreta es pot escriure com

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

on A és l'amplitud de l'ona (en m), $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ és el nombre d'ona (en rad/m), ω la freqüència angular o pulsació (en rad/s), λ la longitud d'ona o *distància entre punts que estan en el mateix estat de vibració* (en m) i φ_0 la fase inicial (en rad) que es fixa amb les condicions inicials. És habitual considerar per simplicitat $\varphi_0 = 0$ i així ho farem sovint en aquests apunts. Noteu que, fent servir relacions conegudes podem escriure l'equació de l'ona de forma alternativa com

$$y(x,t) = \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

ja que $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Anomenarem *fase*, φ a l'expressió $kx - \omega t + \varphi_0$.

En general la *diferència de fase* $\Delta\varphi$ entre dos punts $x_1\, x_2$ i dos temps $t_1\, t_2$ es calcula com

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = kx_2 - \omega t_2 - (kx_1 - \omega t_1) = k(x_2 - x_1) - \omega(t_2 - t_1)$$

De manera que si volem calcular $\Delta\varphi$ entre dos punts en el mateix instant de temps tindrem

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1)$$

de forma que, en particular, si els punts estan separats un nombre (n) enter de longituds d'ona, llavors es troben en fase, ja que

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = k\cdot n\lambda = 2\pi n$$

i si ho estan un nombre semi senar de longituds d'ona ($\frac{2n+1}{2}$), llavors es troben en *oposició* de fase, ja que

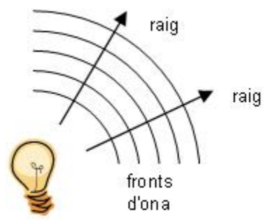
$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = k \cdot \frac{2n+1}{2}\lambda = (2n+1)\pi$$

Un raonament semblant permet discutir els casos en que volem calcular $\Delta\varphi$ per un punt determinat en dos instants de temps diferents quan aquests corresponen a múltiples enters o semi senars del període, T, de l'ona.

3. **Propagació de l'energia en el moviment ondulatori.**

   Anomenem **potència** d'una ona l'energia que transporta per unitat de temps. En el SI, la potència és mesura en watts (**W**). $1\,W = 1\,J/s$

   Anomenem **front d'una ona** el conjunt de tots els punts del medi que es troben en el mateix estat de vibració quan els arriba una pertorbació.



   Els raigs són línies vectorials perpendiculars als fronts d'ona, neixen en el focus i apunten en el sentit en què avança la pertorbació.

   En una ona unidimensional, el front d'ona és un punt, mentre que a l'ona bidimensional és una línia (possiblement corba), i en la tridimensional, una superfície.

   L'energia que s'ha originat en el focus de l'ona harmònica es reparteix entre tots els punts del medi que formen part del mateix front.

   Definim **intensitat d'una ona** (**I**) com la potència per unitat de la magnitud que defineix el front d'ona. Segons aquesta definició

   (a) En una ona ona unidimensional tenim

   $$I = P$$

   per dos punts 1 i 2 diferents del medi

   $$P_1 = P_2 \longrightarrow I_1 = I_2$$

(b) En una ona bidimensional tenim

$$I = \frac{P}{L} \longrightarrow P = I \cdot L = I \cdot 2\pi \cdot r$$

de manera que per dos punts 1 i 2 diferents del medi

$$P_1 = P_2 \longrightarrow I_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 = I_2 \cdot 2\pi \cdot r_2$$

d'on obtenim la relació

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

(c) En el cas d'una ona tridimensional

$$I = \frac{P}{S} \longrightarrow P = I \cdot S = I \cdot 4\pi \cdot r^2$$

per dos punts 1 i 2 diferents del medi

$$P_1 = P_2 \longrightarrow I_1 \cdot 4\pi \cdot r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi \cdot r_2^2$$

d'on

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Per una altra banda, es pot comprovar que per qualsevol dels tres tipus d'ona es compleix que la intensitat és proporcional al quadrat de l'amplitud

$$I \propto A^2$$

de forma que finalment tenim

Ones unidimensionals

$$I_1 = I_2 \longrightarrow A_1^2 = A_2^2 \longrightarrow A_1 = A_2$$

Ones bidimensionals

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2}{r_1} \longrightarrow \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2}{r_1} \longrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

Ones tridimensionals

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \longrightarrow \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \longrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Com a conclusió fonamental podem veure que a les ones bidimensionals i tridimensionals es produeix una disminució de l'amplitud de la pertorbació a mesura que el front d'ona s'allunya del focus. Aquest fenomen s'anomena **atenuació**.

Al marge del fenomen que acabem de veure, quan les ones travessen un medi es produeix una pèrdua d'energia que fa disminuïr més encara la seva intensitat, ho anomenem **absorció**. L'absorció depèn de les característiques del medi i de la freqüència de l'ona. Es pot demostrar la relació

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta x}$$

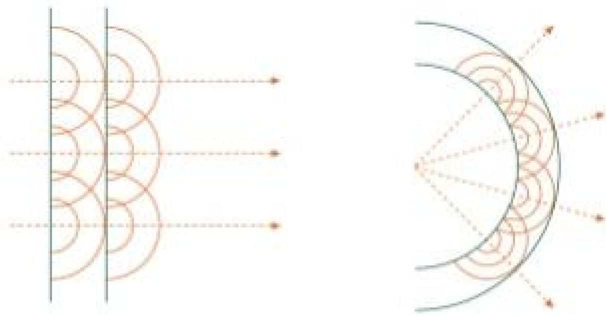
on I_0 és la intensitat que té l'ona abans d'entrar en el medi, β l'anomenat *coeficient d'absorció del medi*, i x la distància recorreguda dins el medi.

Anomenem **gruix de semiabsorció** a la distància que ha de recórrer l'ona per tal que la intensitat es redueixi a la meitat

$$D_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta}$$

4. **Propagació de les ones. Principi de Huygens.**

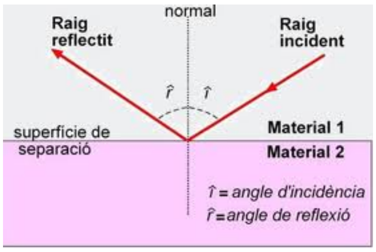
   Per tal d'explicar la propagació de les ones, Huygens va proposar un model segons el qual cada punt del front d'ona es comporta com un emissor puntual i l'envolupant geomètrica dels fronts generats constitueix el nou front d'ona.



5. **Propietats de les ones.**

(a) **Reflexió**

Diem que hi ha reflexió quan una ona xoca amb la superfície que separa dos medis diferents i retrocedeix avançant pel medi original.

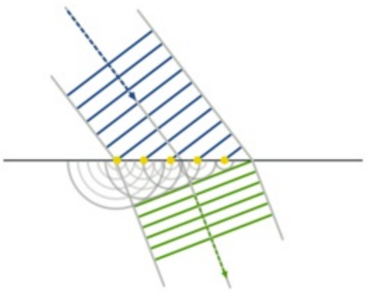


Les lleis de la reflexió són

- El raig incident, el reflectit i la normal estan continguts en el mateix pla.
- L'angle que forma el raig incident amb la normal és igual al que forma el raig reflectit amb la normal.

(b) **Refracció**

La refracció es produeix quen una ona arriba a la superfície que separa dos medis diferents i avánça pel segon medi. En cadascun els medis l'ona es mou amb velocitat diferent i canvia la direcció de propagació. És important constatar que la frèqüència de l'ona no varia



Les lleis de la refracció són

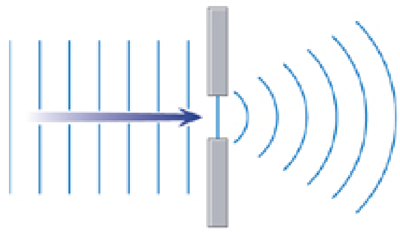
- El raig incident, el refractat i la normal estan continguts en el mateix pla.
- Quan el raig incident es propaga a més velocitat que el refractat, l'angle d'incidència $\hat{\imath}$ és més gran que l'angle de refracció $\hat{s}$.

Tenim que

$$\frac{\sin \hat{\imath}}{v_{incident}} = \frac{\sin \hat{s}}{v_{refractat}}$$

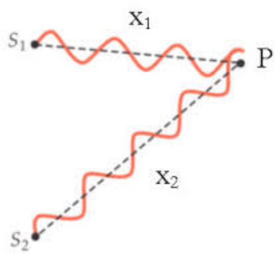
6. **Difracció**

   El fenòmen de la difracció es produeix quan una ona que es propaga en un medi es troba obertures o obstacles de mida comparable a la seva longitud d'ona.



7. **Interferències**

   Volem calcular l'equació del moviment d'un punt en un medi que repla interferència de dues ones. Suposarem que es tracta de dues ones harmòniques que tenen la mateixa amplitud i freqüència.



Considerem el punt P de la figura que rep la interferència de dues ones originades als punts S_1 i S_2, tots dos a una distància x_1 i x_2 de P, respectivament, llavors anomenant $x_2 - x_1$ la diferència de camí, trindrem interferència constructiva quan

$$x_2 - x_1 = n\lambda$$

i interferència destructiva quan

$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

8. **Ones estacionàries** Les ones estacionàries resulten de la superposició de dues ones idèntiques que es propaguen en el mateix medi en sentits oposats.

$$y = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$

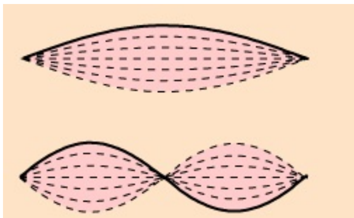
fent ús de la relació trigonomètrica

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

obtenim

$$y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

El terme $2A\sin(kx)$ s'anomena *amplitud efectiva*, ja que en les ones estaionàries l'amplitud depèn de la posició. Els punts en els que l'amplitud val zero per tot temps s'anomenen *nodes*. Els punts que assoleixen l'amplitud màxima de l'ona estacionària ($\pm 2A$) s'anomenen *ventres*.



Per localitzar els nodes hem de demanar

$$2A\sin(kx) = 0$$

d'on

$$kx = n\pi \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \longrightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$$

Per localitzar els ventres, ha de ser

$$\sin(kx) = \pm 1$$

d'on

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

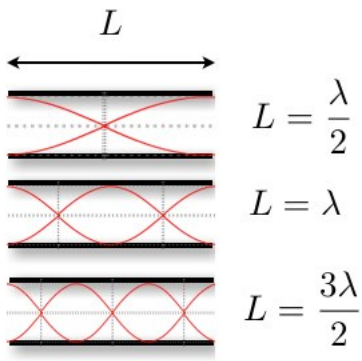
Exemples

En una corda fixada pels extrems o un tub obert la condició perquè es formi una ona estacionària es que en la longitud (de la corda o el tub) hi hagi un nombre semienter de longituds d'ona.

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

de forma que les diferents longituds d'ona que es poden donar són

$$\lambda = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$



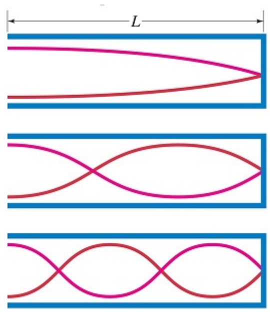
El que genera els diferents *harmònics*. Per $n = 1$, l'harmònic corresponent rep el nom de *fonamental*.

En un tub semiobert o una corda lligada per un extrem tindrem

$$L = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

d'on les longituds d'ona possibles són

$$\lambda = \frac{4L}{2n + 1} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$



9. **El so, un moviment ondulatori.**

*El **so** és una pertorbació que apareix quan es fan vibrar les partícules d'un medi elàstic de maner que s'hi produeixen variacions en la densitat o en la pressió i es propaga a través del medi en forma d'ones.* El so és una ona mecànica longitudinal de caràcter tridimensional.

L'efecte Doppler

Anomenem efecte Doppler, el canvi que s'esdevé en la freqüència i la longitud d'ona d'una ona com a conseqüència del moviment de l'emissor, del receptor o de tots dos.

Podem resumir la casuística de la següent manera (suposem que la velocitat de l'ona en el medi és v, f_E la freqüència de l'emissor i f_R la del receptor):

$$f_R = f_E \frac{v \pm v_R}{v \mp v_E}$$

Si el receptor s'acosta o allunya o l'emissor s'allunya o acosta amb velocitats v_R, v_E respectivament.

Qualitats del so

- *El **to** és la qualitat que permet distingir els sons aguts dels greus. Està relacionat amb la freqüència de l'ona sonora: els aguts corresponen a freqüències altes i els greus, a baixes.*
- *La **intensitat** és la qualitat del so que permet identificar-lo com fort o feble. Està relacionada mb l'amplitud de l'ona: els sons forts es corresponen amb amplituds altes i els febles, amb amplituds baixes.*

  La resposta de l'oïda humana a la intensitat sonora és logarítmica, és a dir, per percebre un so el doble de fort la seva intensitat s'ha de multiplicar per 10. Això serveix per definir una magnitud anomenada **nivell d'intensitat sonora** o **sonoritat** d'un so:

  $$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

  que es mesura en decibels (dB) i on $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$ és l'anomenada intensitat llindar.

  Exemple.

Suposant que una persona cridant pot arribar a produir una sonoritat de $70\,dB$, calcular la sonoritat d'un estadi de futbol amb 10^5 persones cridant.

Per una sola persona podem escriure

$$70 = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

anomenant la intensitat de tot l'estadi cridant I', on $I' = I \cdot 10^5$ tindrem

$$\beta' = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{I \cdot 10^5}{I_0} = 10 \log \frac{I}{I_0} + 10 \log 10^5 = 70 + 50 = 120\,dB$$

- *El **timbre** és la característica que permet distingir sons de la mateixa freqüènica i la mateixa amplitud produits per instruments diferents.*