Teoremes sobre funcions contínues i derivables

Matemàtiques 2n Batxillerat

Carles Alcaide

Curs 2022-2023

Índex

TEOREMA DEL VALOR MIG GENERALITZAT - CAUCHY

Definició

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ funcions contínues en un interval tancat $[a, b]$ i derivables en un obert (a, b), llavors existeix un valor $c \in (a, b)$ amb $g(a) \neq g(b)$ i $g'(c) \neq 0$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exemple

Veieu si es pot aplicar el teorema de Cauchy en l'interval $[1, 4]$ a les funcions

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

i

$$g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

Teorema del valor mig generalitzat - Cauchy

Solució:

Les funcions $f(x)$ i $g(x)$ són derivables i contínues a tot $\mathbb{R}$ per ser polinomis. A més es compleix que $g(1) \neq g(4)$ per tant es compleixen les condicions del teorema.

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}$$

$$c^2 - 6c + 8 = 0$$

d'on

$$c = 2 \in (1, 4) \qquad c = 4 \in (1, 4)$$

i finalment,

$$g'(2) \neq 0$$

Teorema del valor mig (TVM) - Lagrange

Definició

Sigui $f(x)$ contínua en un interval tancat $[a, b]$ i derivable en un obert (a, b), llavors existeix un $c \in (a, b)$ amb $a \neq b$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Exemple

Es pot aplicar el teorema de Lagrange a la funció $f(x) = x^3$ en l'interval $[-1, 2]$?

Teorema del valor mig (TVM) - Lagrange

Solució:

La funció $f(x)$ és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$ per ser un polinomi, llavors podem aplicar el teorema per obtenir

$$\frac{8-(-1)}{2-(-1)} = f'(c)$$

d'on

$$f'(c) = 3 \Longrightarrow 3c^2 = 3 \Longrightarrow c = \pm 1$$

el valor $c = 1$ és el predit pel teorema.

TEOREMA DE ROLLE

Definició

Sigui $f(x)$ contínua en un interval tancat $[a, b]$ i derivable en un obert (a, b) amb $f(a) = f(b)$ lavors existeix un $c \in (a, b)$ amb $a \neq b$ tal que

$$f'(c) = 0$$

Exemple

Es pot apliar el teorema de Rolle a la funció $f(x) = \ln(5 - x^2)$ en l'interval $[-2, 2]$?

Teorema de Rolle

Solució:

La funció $f(x)$ és contínua i derivable en l'interval considerat (cal comprovar-ho prèviament), i és $f(-2) = f(2)$, llavors podem aplicar el teorema per obtenir

$$\frac{-2c}{f - c^2} = 0$$

d'on

$$c = 0 \in (-2, 2)$$

Teorema de Bolzano

Definició

Sigui $f(x)$ contínua en un interval tancat $[a, b]$, llavors, si $f(a) \cdot f(b) < 0$ existeix un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Exemple

Demostreu que l'equació $\sin(x) + 2x = 1$ té almenys una solució real.

Teorema de Bolzano

Solució:

Definim la funció $F(x))\sin(x) + 2x - 1$, que és contínua, per ser suma de funcions contínues. Podem observar que $F(0) = -1 < 0$ i $F(\pi) = 2\pi - 1 > 0$ tal que existeix $F(c) = 0$, que és equivalent a dir que l'equació original té almenys una solució real.