Temes 1 i 2. Les lleis de Kepler. Camp gravitatori

1. **Les lleis de Kepler.**

   (a) Els planetes es mouen en òrbites el·líptiques al voltant del Sol amb aquest situat en un dels focus de l'el·lipse.

   (b) Les òrbites dels planetes són planes i la corda que uneix la posició d'un planeta i el Sol escombra àrees iguals en temps iguals.

   (c) La relació entre el periode de translació dels planetes al voltant del Sol i el seu radi mitjà és

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{Sol}} r^3$$

on $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ és l'anomenada constant universal de gravitació.

   - **Conseqüència important** de la segona és que la velocitat dels planetes és més gran al *periheli* (punt de l'òrbita més proper al Sol) que l'*afeli* (punt més llunyà).
   - La tercera llei es pot aplicar a qualsevol parell d'objects estel·lars sotmesos a la força gravitatòria, només cal posar a l'expressió la massa del que es considera el centre de forces. La quantitat r es considera típicament la distància entre centres.

2. **Gravitació.**

   (a) Quin significat té la coneguda expressió $g = 9,81\, m/s^2$? Si considerem un objecte de massa m sobre la superfície terrestre, aquest es veu atret amb una força

$$F = \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

   a aquesta força amb que la Terra atreu l'objecte se l'anomena pes de l'objecte, de forma que comparant l'expressió anterior amb la que relaciona pes i massa, $P = mg$, veiem que és

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,81\, m/s^2$$

aquest valor de l'acceleració de la gravetat l'escriurem en realitat com g_0 ja que el camp gravitatori depèn de la distància al centre de la Terra en la forma

$$g(h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

En particular, tenim una relació útil entre les constants que apareixen

$$GM_T = g_0 R_T^2$$

(b) **Órbites circulars estables.** Les órbites circulars estables d'un objecte de massa m al voltant d'un planeta de massa M i radi R, a una alçada h sobre la superfície del sosdit planeta es poden trobar per aplicació de la *segona llei de Newton*

$$F = ma_c$$

$$\frac{GMm}{R+h} = m\frac{v^2}{(R+h)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

on notem que aquesta velocitat de depèn de la massa de l'objecte en órbita, i que aquesta velocitat disminueix amb la distància al centre de forces.

L'energia mecànica d'un objecte en òrbita es troba com

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+h}$$

on el terme d'energia potencial gravitatòria s'ha escrit demanant que valgui zero a l'infinit. Si substituïm l'expressió de la velocitat orbital trobada abans tenim

$$E_M = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R+h} - \frac{GMm}{R+h} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R+h}$$

com es veu, l'energia mecànica (i la potencial) sempre és negativa, detall que caracteritza els sistemes lligats gravitatòriament.

3. **Órbites geoestacionàries.** En moltes aplicacions civils i militars convé situar un satèl·lit en òrbita de forma que sempre es trobi sobre el mateix punt de la superfície de la Terra. Per calcular l'alçada d'aquestes òrbites n'hi ha prou d'aplicar la tercera llei de Kepler demanant que el període sigui de 24 hores. Es deixa com a exercici calcular aquest alçada.

4. **Canvis d'òrbita.** Suposem que tenim un satèl·lit en òrbita a una alçada h_1 sobre la superfície terrestre i el volem posar en una òrbita més llunyana d'alçada h_2. El treball que hem de fer és equivalent a la variació d'energia mecànica, de forma que tenim

$$W_{h_1 \to h_2} = \Delta E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T + h_2} + \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T + h_1}$$

   és fàcil comprovar que aquest treball és, efectivament, sempre positiu si $h_2 > h_1$.

5. **Posada en òrbita.** Si el que volem és calcular el treball que cal fer per posar un satèl·lit en òrbita a una alçada h llançant-lo desde la superfície terrestre, ho farem de forma semblant

$$W_{R_T \to h} = \Delta E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T + h} + \frac{GM_T m}{R_T}$$

   on ara hem suposat que l'energia mecànica sobre la superfície terrestre només té la contribució de l'energia potencial.

6. **Velocitat d'escapament.** Si volem llançar amb una trajetòria *radial* un objecte desde la superfície terrestre amb prou velocitat per que no torni mai més, quant ha de valdre aquesta velocitat? El que farem és demanar que l'energia mecànica valgui zero, el valor més petit perqu deixi d'estar lligat gravitatòriament a la Terra. Llavors

$$0 = E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R + h}$$

   d'on obtenim

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R + h}}$$

   Quan la velocitat d'escapament d'un objecte estelar és $v_e = 3{\cdot}10^8\ m/s = c$ llavors ni tan sols la llum pot marxar de la seva superfície i podem pensar que és un forat negre. El Radi d'Schwarzschild, R_S d'un objecte estelar s'obté calculant quin hauria de ser el seu radi per tal que la seva velocitat d'escapament sigui la de la llum, suposant que la seva massa no varia. Es deixa com a exercici calcular R_S per la Terra.