1. (a) Calculem el vector posició en cada temps

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(1) = (1, 1)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(3) = (9, 27)$$

Ara és immediat trobar el vector desplaçament

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}(3) - \vec{r}(1) = (9, 27) - (1, 1) = (8, 26)$$

(b) Calculem directament

$$|\Delta\vec{r}| = |(8, 26)| = \sqrt{8^2 + 26^2} = \sqrt{740} = 27,20\,m$$

(c) Aplicant la definició de velocitat mitjana

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(8, 26)}{3 - 1} = \frac{(8, 26)}{2} = (4, 13)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{v}_m| = |(4, 13)| = \sqrt{4^2 + 13^2} = \sqrt{185} = 13,60\,m/s$$

(d) Derivant el vector posició respecte el temps

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (2t, 3t^2)$$

(e) Calculem la velocitat pels instants de temps considerats

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(1) = (2, 3)$$

$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(3) = (6, 27)$$

ara, aplicant la definició d'acceleració mitjana

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(6, 27) - (2, 3)}{3 - 1} = \frac{(4, 24)}{2} = (2, 12)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{a}_m| = |(2, 12)| = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{148} = 12,17\,m/s^2$$

(f) Derivant el vector velocitat respecte el temps

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (2, 6t)$$

2. L'objectiu de l'exercici és establir la igualtat

$$|\vec{a}(t)|^2 = |\vec{a}_t(t)|^2 + |\vec{a}_n(t)|^2$$

Comencem calculant el vector velocitat

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(2t, 3t^2\right)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^2}$$

Calculem ara el vector acceleració (total)

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (2, 6t)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{2^2 + (6t)^2} = \sqrt{4 + 36t^2}$$

Ara, el mòdul de l'acceleració centrípeta

$$|\vec{a}_n(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{4t^2 + 9t^2}\right)^2}{R} = \frac{4t^2 + 9t^2}{R}$$

Finalment el mòdul de l'acceleració tangencial

$$|\vec{a}_t(t)| = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{8t + 9t^2}{2\sqrt{4t^2 + 9t^2}}$$

De forma que la relació implícita demanada entre el radi de curvatura de la trajectòria i el temps serà

$$\left(\sqrt{4 + 36t^2}\right)^2 = \left(\frac{8t + 9t^2}{2\sqrt{4t^2 + 9t^2}}\right)^2 + \left(\frac{4t^2 + 9^2}{R}\right)^2$$

que podem deixar com

$$4 + 36t^2 = \frac{(8t + 9t^2)^2}{4(4t^2 + 9t^2)} + \left(\frac{4t^2 + 9^2}{R}\right)^2$$