

CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT

MATEMÀTIQUES 2N BATXILLERAT

Carles Alcaide

Curs 2022-2023

ÍNDEX

1	Topologia de la recta real	2
1.1	Intervals en la recta real	3
2	Continuïtat d'una funció	4
3	Derivabilitat	6
3.1	Derivades successives	9
3.2	Propietats de la derivada	10
3.3	Derivades laterals	13
3.4	Interpretació geomètrica de la derivada	16
3.5	Equació de la recta tangent	18
3.6	Taules de derivades	19
4	Propietats de les funcions derivables	22

ORDRE EN \mathbb{R}

Definició

Un conjunt A es diu ordenat quan s'ha definit en ell una relació, \mathcal{R} , d'ordre.

Aquesta relació es diu que és d'ordre total si per qualsevol parell d'elements de A es verifica $a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$.

En el conjunt \mathbb{R} dels nombres reals es defineix la relació binària

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup 0 \quad \text{tal que} \quad a + x = b$$

que la designem pel símbol \leq i es llegeix “menor o igual que”.

INTERVALS EN LA RECTA REAL

Definició

- ▶ Anomenem **interval obert** d'extrems a i b i ho designem per (a, b) al conjunt dels nombres reals més grans que a i més petits que b ,
 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$.
- ▶ Anomenem **interval tancat** d'extrems a i b i ho designem per $[a, b]$ al conjunt dels nombres reals més grans o iguals que a i més petits o iguals que b ,
 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$.
- ▶ Anomenem **interval semiobert** d'extrems a i b i es designa per $(a, b]$ o $[a, b)$ al conjunt dels nombres reals compresos entre els dos extrems i que conté només a un d'ells,
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

CONTINUÏTAT D'UNA FUNCIO EN UN PUNT

Definició

Es diu que una funció $f(x)$ és continua en un punt x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

quan els dos membres de la igualtat existeixin.

Per a que existeixi el membre de l'esquerra de l'equació, han d'existir els límits laterals

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

i, a més, *han de ser iguals*. Per a que existeixi el membre de la dreta de l'equació, $f(x)$ ha d'estar definida en x_0 (dins del domini).

CONTINUÏTAT D'UNA FUNCIO EN UN PUNT

Exemple

La funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

no és continua en $x = 3$. Els límits laterals en $x = 3$ existeixen i són iguals (valen 9), però no coincideixen amb la imatge de la funció ja que $f(3) = 5$.

Exemple

La funció

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

no és continua en $x = 0$. Els límits laterals en $x = 0$ existeixen però no valen el mateix.

LA DERIVADA

Definició

Sigui $f(x)$ una funció real definida en un subconjunt D de \mathbb{R} . Es diu que la funció $f(x)$ és derivable en un punt x_0 interior a D si existeix el límit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

el qual es representa per $f'(x)$ i rep el nom de derivada de $f(x)$ en el punt x_0 . Si $f(x)$ és una funció real definida en un subconjunt D de \mathbb{R} ; direm que $f(x)$ és *derivable en D* si ho és en cada un dels seus punts.

LA DERIVADA

Sovint és més convenient calcular el límit quan la variable tendeix cap a zero. Una forma d'aconseguir això és fer una translació al llarg de l'eix de les x . De fet, si fem $h = x - x_0$, obtenim

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemple

Sigui $f(x) = x^2$, la derivada d'aquesta funció en $x = 1$ és:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

LA DERIVADA

Exemple

Sigui $f(x) = \frac{1}{x}$, la derivada d'aquesta funció en $x = x_0$ és

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x - x_0)}{xx_0(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

D'aquesta manera tenim una expressió per calcular la derivada en qualsevol punt. Sovint és convenient interpretar $f'(x_0)$ com una nova funció i és per això que, si $f(x) = \frac{1}{x}$, aleshores podem escriure $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

DERIVADES SUCCESSIVES

En general, si la funció $f'(x)$ és derivable, a la funció derivada de $f'(x)$ se l'anomena derivada segona i es representa per $f''(x)$. Procedint de forma anàloga, es defineix la derivada n -èssima com la funció derivada, si existeix, de la funció $f^{n-1}(x)$ i es representa per $f^n(x)$.

Exemple

Donada $f(x) = \frac{1}{x}$, tenim que:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{1}{x^3} \quad f'''(x) = \frac{-1}{x^4} \quad f^{(4)}(x) = \frac{1}{x^5}$$

de forma que, finalment,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$$

PROPIETATS DE LA DERIVADA

Definició (Linealitat)

La derivada és un objecte lineal. Aquest és un resultat fonamental que es fa servir molt sovint i que s'expressa com

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x) \quad (1)$$

$$\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x), \quad k \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Definició (Funcions compostes)

Regla de la cadena per funcions compostes.

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (3)$$

PROPIETATS DE LA DERIVADA

Per tal de motivar el sentit de la regla de la cadena, considereu la funció

$$f(x) = (1 + x^2)^{10}$$

Una possibilitat per calcular la derivada de $f(x)$ seria desenvolupar $(1 + x^2)^{10}$, i després fer la derivada de cada terme. Potser serà llarg, però es podria fer així. La qüestió és què faríem si haguéssim de derivar $(1 + x^2)^{100}$. Ara és evident que necessitem un altre mètode. La solució és la regla de la cadena. Tenim que $f(x)$ es pot interpretar com $f(x) = h(g(x))$, amb $h(x) = x^{10}$ i $g(x) = (1 + x^2)$. Diem que $f(x)$ és la composició de les funcions $g(x)$ i $h(x)$, i simbòlicament podem escriure

$$f = h \circ g$$

PROPIETATS DE LA DERIVADA

Exemple

Calculem la derivada de

$$f(x) = (1 + x^2)^{100}$$

Tenim que $f(x) = h(g(x))$, on $g(x) = 1 + x^2$ i $h(x) = x^{100}$.

Aleshores la *regla de la cadena* implica que

$$f'(x) = 100(1 + x^2)^{99} \cdot 2x$$

DERIVADES LATERALS

Definició

Sigui $f(x)$ una funció real definida en un subconjunt D de \mathbb{R} i sigui x_0 un punt interior a D .

Si existeix el límit a la dreta

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

es diu que la funció $f(x)$ té derivada a la dreta del punt x_0 i es representa per $f'(x_0^+)$.

Si existeix el límit

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

es diu que la funció $f(x)$ té derivada a l'esquerra del punt x_0 i es representa per $f'(x_0^-)$.

DERIVADES LATERALS

Es clar, per la definició de derivada, que si una funció admet derivada en un punt les derivades laterals també existeixen i són iguals. No succeeix el mateix si només existeixen les derivades laterals, ja que la funció pot no ser derivable tal i com passa per exemple amb la funció $f(x) = |x|$ a l'origen.

Exemple

Sigui $f(x) = |x|$, aleshores $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ i tenim

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

I d'aquesta forma veiem que la funció no és derivable a l'origen per no ser iguals les derivades laterals en aquest punt. Malgrat això, és fàcil comprovar que la funció *sí* és continua a l'origen.

DERIVADES LATERALS

Com a conclusió de les consideracions anteriors tenim la següent

Definició (Proposició)

Si una funció és derivable en un punt x_o , aleshores la funció és contínua en aquest punt.

Exemple

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_o} (f(x) - f(x_o)) &= \lim_{x \rightarrow x_o} (f(x) - f(x_o)) \frac{x - x_o}{x - x_o} = \\ \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} (x - x_o) &= \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot \lim_{x \rightarrow x_o} (x - x_o) = \\ &f'(x_o) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

la proposició queda provada.

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DE LA DERIVADA

Considereu una funció $y = f(x)$ i la seva gràfica. La gràfica d'una funció és el conjunt de punts (això és $(x, f(x))$) per les x 's pertanyents al domini de la funció f .

Fixem un punt de la gràfica, per exemple, $(x_0, f(x_0))$. Si la gràfica en aquest punt és prou suau, és natural preguntar-se si podem trobar l'equació de la recta que toca la gràfica en aquest punt. Tal recta s'anomena recta tangent a la gràfica en el punt en qüestió. Una forma de trobar la recta tangent és considerar un punt de la gràfica, $(x, f(x))$ amb x proper a x_0 , i aleshores dibuixar la recta que uneix els dos punts. Quan anem triant valors de x més i més propers a x_0 , les rectes s'acosten més i més a la recta tangent.

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DE LA DERIVADA

Donat que totes aquestes rectes passen pel punt $(x_0, f(x_0))$, les seves equacions es poden determinar trobant el seu pendent. El pendent de la recta que passa pels punts $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$, (amb $x \neq x_0$) ve donat per

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La tangent mateixa tindrà pendent m , el qual és molt proper a $m(x)$ quan x mateix s'acosta molt a x_0 . Aquest és el concepte de límit de nou. En altres paraules, tenim

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} m(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

EQUACIÓ DE LA RECTA TANGENT

De forma que l'equació de la recta tangent és

$$y - f(x_o) = m(x - x_o)$$

o, molt millor, ja que la m no conté prou informació

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

TAULES DE DERIVADES

És evident que cada vegada que haguem de calcular la derivada d'una funció pot ser molt farragós fer servir la definició de derivada.

Per això, és més convenient aprendre unes quantes expressions que trobarem sovint.

Escriurem aquí les que resulten més útils.

$$y = k \quad y' = 0 \quad (4)$$

$$y = f(x)^n \quad y' = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x); \quad n \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$y = a^{f(x)} \quad y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \log_a e; \quad a > 0 \quad (6)$$

$$y = \sin(f(x)) \quad y' = f'(x) \cdot \cos(f(x)) \quad (7)$$

TAULES DE DERIVADES

$$y = \cos(f(x)) \quad y' = -f'(x) \cdot \sin(f(x)) \quad (8)$$

$$y = \log_a f(x) \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e \quad (9)$$

$$y = \arcsin(f(x)) \quad y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} \quad (10)$$

$$y = \arccos(f(x)) \quad y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} \quad (11)$$

$$y = \arctan(f(x)) \quad y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} \quad (12)$$

TAULES DE DERIVADES

Un resultat molt important i que es fa servir sovint és la *fórmula de Leibniz*

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)} \quad (13)$$

un cas particular de l'anterior, però que sovint s'escriu expressament és

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}} \quad (14)$$

PROPIETATS DE LES FUNCIONS DERIVABLES

Els resultats següents tenen gran importància.

Teorema : Teorema del valor mig o Cauchy

Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions contínues en l'interval tancat $[a, b]$ i derivables en l'interval obert (a, b) , aleshores existeix almenys un punt $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(\alpha) = [g(b) - g(a)]f'(\alpha)$$

Teorema : Teorema dels increments finits o de Lagrange

Si $f(x)$ és una funció contínua en l'interval tancat $[a, b]$ i derivable en l'interval obert (a, b) , aleshores existeix almenys un punt $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

PROPIETATS DE LES FUNCIONS DERIVABLES

Teorema : Teorema de Rolle

Si una funció és contínua a l'interval tancat $[a, b]$ i derivable a l'interval obert (a, b) i a més $f(a) = f(b)$ aleshores existeix al menys, un punt $\alpha \in (a, b)$ on la derivada de la funció s'anula, és a dir $f'(\alpha) = 0$.

Teorema : Teorema de L'Hôpital

Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions derivables en un cert entorn del punt x_0 on $g'(x) \neq 0$ amb $f(x_0) = g(x_0) = 0$, aleshores si existeix

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{es verifica} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

PROPIETATS DE LES FUNCIONS DERIVABLES

Aquest teorema permet calcular límits indeterminats d'una manera molt eficaç:

Exemple

Calcular el límit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2}$$

apliquem L'Hôpital dues vegades seguides per obtenir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2} = 0$$

PROPIETATS DE LES FUNCIONS DERIVABLES

La regla de L'Hôpital també es pot aplicar en el cas que sigui $x_0 \rightarrow \infty$.

Exemple

Calcular el límit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$$

aplicant reiteradament L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$