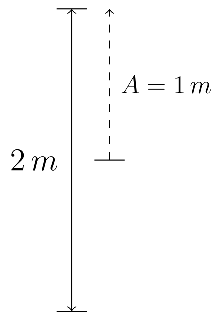
Exercici 1

a) Com ens diuen que del punt més alt al punt més baix hi ha $2\,m$ deduïm que $A = 1\,m$



si triga $t = 6,28 \approx 2\pi$ segons a anar de dalt a baix, el període ha de ser el doble, $T = 4\pi\,s$.

L'equació del moviment es pot escriure

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

on hem fet servir y perquè l'oscil·lació es dona en l'eix vertical, llavors

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\,rad/s$$

i podem trobar φ_0 gràcies a les condicions inicials que proporciona l'enunciat $y(0) = A$

$$A = y(0) = A\cos(0 + \varphi_0) \rightarrow \cancel{A} = \cancel{A}\cos\varphi_0 \rightarrow 1 = \cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0\,rad$$

de forma que l'equació queda

$$y(t) = 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot t\right)$$

b) Per trobar la velocitat a l'instant inicial fem

$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

i és

$$v(0) = -A\omega\sin\varphi_0 = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 0 = 0\,m/s$$

De forma semblant, l'acceleració inicial es pot calcular a partir de

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

llavors

$$a(0) = -A\omega^2 \cos(\varphi_0) = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cos 0 = -\frac{1}{4}\, m/s^2$$

Exercici 2

a) La llei de Hooke es pot expressar de dues formes. Quan parlem de la relació entre la força que fem (nosaltres) sobre, per exemple una molla, i la distància que es comprimeix, escrivim

$$F = k \cdot x$$

si parlem de la força que fa la molla, oposant-se a l'externa, i la distància que es comprimeix, llavors escrivim

$$F = -k \cdot x$$

Al aplicar la força de $8\,N$ sobre la vareta, si suposem que aquesta obeeix la llei de Hooke, podem escriure

$$F = k \cdot x \rightarrow 8,00 = k \cdot 0,04 \rightarrow k = \frac{8,00}{0,04} = 200\, N/m$$

Ara, aplicant la segona llei de Newton a la força recuperadora de la vareta i sabent que l'acceleració es pot escriure com

$$a = -\omega^2 x$$

(resultat que es dedueix al segon apartat d'aquest mateix exercici), podem escriure

$$F = ma \rightarrow -kx = m(-\omega^2 x)$$

d'on, suposant que $x \neq 0$, obtenim la freqüència angular o pulsació

$$k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en quant a la freqüència,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

i finalment el període

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Fent servir les dades que coneixem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0,300}{200}} = 0,243$$

b) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

Finalment, en el cas que ens ocupa

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = A \cdot \frac{k}{m} = 0,040 \cdot \frac{200}{0,300} = 26,7\,m/s^2$$

En realitat hauríem d'arrodonir a dues xifres significatives, ja que la dada de l'amplitud, que en té només dues, *domina* sobre les altres que en tenen més.

Exercici 3

a) L'equació del moviment es pot escriure

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

trobem les constants que ens calen:

L'amplitud

$$A = \frac{15}{2}\,mm = 7,5\,mm = 7,5 \cdot 10^{-3}\,m$$

la freqüència angular o pulsació

$$1200 \cdot \frac{puntades}{\cancel{minut}} \cdot \frac{1\,\cancel{minut}}{60\,s} = 20\,Hz$$

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 20 = 40\,\pi\, rad/s$$

per trobar l'angle de fase imposem les condicions inicials que l'enunciat proposa

$$y(0) = A$$

per tant l'equació de l'oscil·lador quedarà

$$A = y(0) = A\cos\varphi_0$$

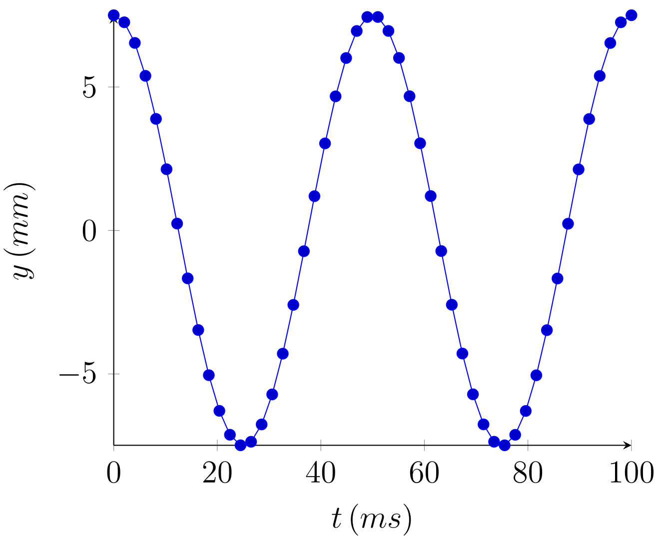
d'on

$$A\cos\varphi_0 = A \to \cos\varphi_0 = 1 \to \varphi_0 = 0$$

llavors

$$y(t) = 7,5 \cdot 10^{-3}\cos(40\pi\, t)$$

i la gràfica



b) La velocitat màxima es pot trobar a partir de

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 40\pi \sin(40\pi\, t)$$

i com el sinus és una funció acotada

$$v_{max} = \pm 7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 40\pi = \pm 0,94\, m/s$$

En quant a l'acceleració màxima

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -7,5 \cdot 10^{-3} (40\pi)^2 \cos(40\pi t)$$

de manera que tenim

$$a_{max} = \pm 7,5 \cdot 10^{-3} (40\pi)^2 = 118,4\, m/s^2$$

hauríem de prendre dues xifres significatives.

Exercici 4

a) A la gràfica es veu que l'amplitud és $A = 0,02\, m$ i hi ha cinc períodes en $0,04\, s$, llavors

$$5\, T = 0,04 \to T = \frac{0,04}{5} = 8 \cdot 10^{-3}\, s$$

l'equació del moviment és de la forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

i per $t = 0$ $x = A$ de forma que

$$A = x(0) = A \cos(\varphi_0) \to \varphi_0 = 0\, rad$$

per una altra banda, la freqüència angular val

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 10^{-3}} = 250\pi\, rad/s$$

podem escriure doncs

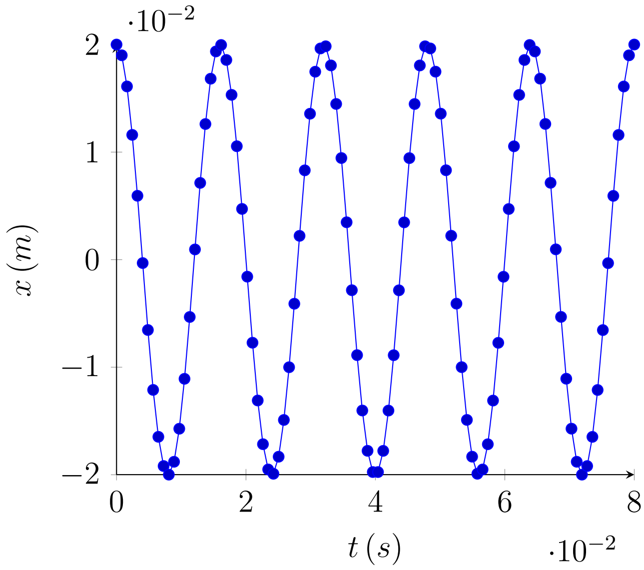
$$x(t) = 0,02\, m \cos\left(250\pi\, \frac{rad}{s} t\right)$$

noteu que incorporar les unitats a l'equació és farragós i artificial (amb l'afegit que en aquest cas hi apareixen radians, que al ser adimensionals es poden escriure o no a voluntat), però l'enunciat ho demana fer.

L'equació quan la freqüència és la meitat és

$$x(t) = 0,02\,m\cos\left(125\pi\,\frac{rad}{s}t\right)$$

i la gràfica



Exercici 5

a) La relació entre la freqüència, la constant elàstica d'una molla i el valor de la massa d'un objecte unit a la molla és

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Per l'objecte A

$$f_A = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_A}}$$

i per un altre objecte, diguem B, que ha d'oscil·lar amb el doble de freqüència

$$2f_A = f_B = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_B}}$$

elevant al quadrat

$$4f_A^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{k}{m_B}$$

$$f_A^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{k}{m_A}$$

dividint les equacions

$$\frac{4\cancel{f_A^2}}{\cancel{f_A^2}} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} \frac{k}{m_B}}{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} \frac{k}{m_A}}$$

d'on

$$4 = \frac{\frac{k}{m_B}}{\frac{k}{m_A}} = \frac{\cancel{k} m_A}{\cancel{k} m_B} \rightarrow m_B = \frac{m_A}{4} = \frac{100\,g}{4} = 25\,g = 0,025\,kg$$

a) L'equació del moviment de la massa A és

$$y(t) = A\cos(\omega_A t + \varphi_0)$$

les condicions inicials imposen

$$-A = y(0) = A\cos(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = \pi\,rad$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega_A \sin(\omega_A t + \varphi_0)$$

tenint en compte que

$$\omega_A = 2\pi f_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad$$

l'equació de la velocitat queda, finalment

$$v(t) = -0,05 \cdot 2\pi \sin(2\pi t + \pi) = -0,1\pi \sin(2\pi t + \pi)$$

L'equació del moviment de la massa B és

$$y(t) = A\cos(\omega_B t + \varphi_0)$$

les condicions inicials imposen

$$-A = y(0) = A\cos(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = \pi\,rad$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega_B \sin(\omega_B t + \varphi_0)$$

tenint en compte que

$$\omega_B = 2\omega_A = 2 \cdot (2\pi f_A) = \frac{4\pi}{T_A} = \frac{4\pi}{1} = 4\pi\, rad$$

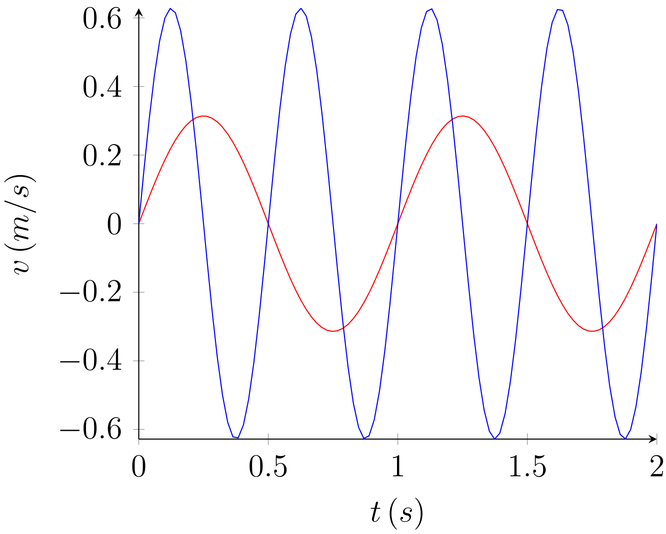
l'equació de la velocitat queda, finalment

$$v(t) = -0,05 \cdot 4\pi \sin(4\pi t + \pi) = -0,2\pi \sin(4\pi t + \pi)$$

Representem les gràfiques d'ambdues equacions com

$$v_A(t) = -0,05 \cdot 2\pi \sin(2\pi t + \pi) = -0,1\pi \sin(2\pi t + \pi)$$

$$v_B(t) = -0,05 \cdot 4\pi \sin(4\pi t + \pi) = -0,2\pi \sin(4\pi t + \pi)$$



Quan la diferència de fase és π es diu que es troben en oposició de fase. Aquesta situació es dona quan les masses estan en extrems oposats, on tindran velocitat nul·la instantàniament i de signes diferents un instant després (si les masses es troben al mateix extrem, el signe de la velocitat poc després serà el mateix). Amb aquestes consideracions, els punts demanats corresponen als instants de temps $0,5\,s$ i $1,5\,s$.

Exercici 6

a) L'equació del moviment es pot escriure

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

trobem les constants que ens calen:

L'amplitud

$$A = \frac{20}{2}\,cm = 10\,cm = 0,1\,m$$

La freqüència angular o pulsació

$$\omega \to 1,91\cdot 10^3\,\frac{rev}{minut}\cdot\frac{2\pi\,rad}{1\,rev}\cdot\frac{1\,minut}{60\,s} = 200\,\frac{rad}{s}$$

L'angle de fase (l'enunciat no especifica si es troba a dalt o baix per $t = 0$, prenem a dalt)

$$\begin{cases} y(0) = A \\ y(0) = A\cos\varphi_0 \end{cases} \to A\cos\varphi_0 = A \to \cos\varphi_0 = 1 \to \varphi_0 = 0$$

llavors

$$y(t) = 0,1\cos(200t)$$

La velocitat màxima es pot trobar a partir de

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -0,1\cdot 200\sin(200t)$$

i com el sinus és una funció acotada

$$v_{max} = \pm 0,1\cdot 200 = \pm 20\,m/s$$

b) Per trobar la força màxima necessitem l'acceleració màxima

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -0,1(200)^2\cos(200t)$$

de manera que tenim

$$a_{max} = \pm 0,1(200)^2 = \pm 4000\,m/s^2$$

i llavors

$$|F_{max}| = m \cdot |a_{max}| = 0,200 \cdot 4000 = 800\,N$$

Exercici 7

a) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

Ara, aplicant la segona llei de Newton a la força recuperadora

$$F = ma \rightarrow -kx = m(-\omega^2 x)$$

d'on, suposant que $x \neq 0$, podem obtenir la freqüència angular o pulsació

$$k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en quant a la freqüència,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

i finalment el període

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Fent servir les dades de l'exercici

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2 = m(2\pi f)^2 = 1,58 \cdot 10^{-3} \cdot (2\pi \cdot 12)^2 = 8,98\,N/m$$

b) La freqüència associada a un període $T = 0,12\,s$ és

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,12} = 8,33\,Hz$$

llavors, la massa

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2} = \frac{8,9}{(2\pi \cdot 8,33)^2} = 3,25 \cdot 10^{-3}\,kg$$

Com hem vist abans, l'acceleració màxima val

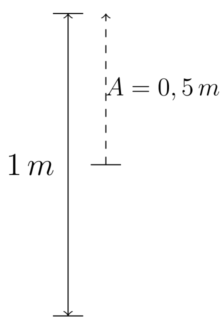
$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm A(2\pi f)^2$$

llavors, el valor absolut

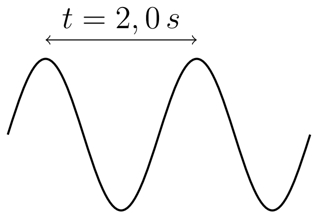
$$|a_{max}| = 2,00 \cdot 10^{-3} \cdot (2\pi \cdot 8,33)^2 = 5,44\,m/s^2$$

Exercici 8

a) Com ens diuen que del punt més alt al punt més baix hi ha $1\,m$ deduïm que $A = 0,5\,m$



també sabem que arriba una onada cada $2,00$ segons



deduïm que el període val $T = 2,00\,s$, la freqüència $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5\,s$ i la freqüència angular pulsació $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,5 = \pi\,rad/s$.

L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

com que la boia sura i es diu que per $t = 0\,s$ "l'onatge que hi ha fa que el punt més alt..., més baix" podem suposar que $y(0) = A$.

$$A = y(0) = A\cos(0 + \varphi_0) \rightarrow \cancel{A} = \cancel{A}\cos\varphi_0 \rightarrow 1 = \cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0\,rad$$

llavors podem escriure

$$y(t) = 0,5\cos(\pi t)$$

b) Per calcular l'energia cinètica màxima podem fer-ho a partir de la velocitat màxima. La velocitat és

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -0,5\pi\sin(\pi t)$$

i com el sinus és una funció acotada la velocitat màxima és

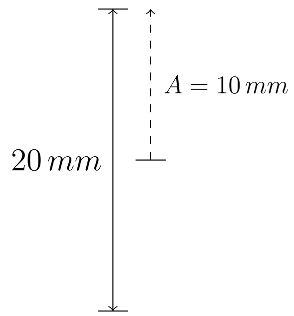
$$v_{max} = \pm 0,5\pi = 1,57\,m/s$$

i l'energia cinètica màxima

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}\cdot 1,5 \cdot 1,57^2 = 1,85\,J$$

Exercici 9

a) Com ens diuen que del punt més alt al punt més baix hi ha $20\,mm$ deduïm que $A = 10\,mm$



Podem trobar la freqüència fent el factor de conversió

$$1800 \cdot \frac{puntades}{\cancel{minut}} \cdot \frac{1\,\cancel{minut}}{60\,s} = 30\,Hz$$

i la frqüència angular (que necessitarem en breu)

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 30 = 60\,\pi\,rad/s$$

L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

les condicions inicials diuen que $y(0) = A$

$$A = y(0) = A\cos(0 + \varphi_0) \rightarrow \cancel{A} = \cancel{A}\cos\varphi_0 \rightarrow 1 = \cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0\,rad$$

llavors

$$y(t) = 10 \cdot 10^{-3}\cos(60\pi t)$$

b) La velocitat màxima es pot trobar a partir de

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -10 \cdot 10^{-3} \cdot 60\pi\sin(60\pi\, t)$$

i com el sinus és una funció acotada

$$v_{max} = \pm 10 \cdot 10^{-3} \cdot 60\pi = 1,885\,m/s = 1,9\,m/s$$

En quant a l'acceleració màxima

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -10 \cdot 10^{-3}(60\pi)^2 \cos(60\pi t)$$

de manera que tenim

$$a_{max} = \pm 10 \cdot 10^{-3}(60\pi)^2 = 355,3\, m/s^2 = 3,6 \cdot 10^2\, m/s^2$$

Exercici 10

a) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

A una freqüència $f = 6,0\, Hz$ li correspon una freqüència angular o pulsació

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 6,0 = 12\pi\, rad/s$$

llavors, de l'expressió de l'acceleració màxima obtinguda

$$|a_{max}| = A\omega^2 \rightarrow A = \frac{|a_{max}|}{\omega^2} = \frac{6,0}{(12\pi)^2} = 4,2 \cdot 10^{-3}\, m$$

b) De la llei de Hooke $F = -k \cdot x$, l'acceleració de l'oscil·lador i la segona llei de Newton tenim

$$F = ma \rightarrow -kx = m(-\omega^2 x)$$

i si $x \neq 0$ es pot escriure com

$$k = m\omega^2$$

llavors

$$k = m\omega^2 = 85 \cdot (2\pi \cdot 6,0)^2 = 1,2 \cdot 10^5\ N/m$$

Exercici 11

a) A partir de la relació

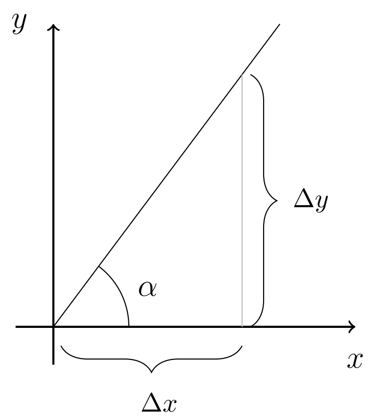
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

podem obtenir

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T^2 = 4\pi\frac{m}{k} \rightarrow m = \frac{k}{4\pi^2}T^2$$

de forma que si podem calcular el pendent de la gràfica $m = m(T^2)$ podem conèixer el terme $k/4\pi^2$ i d'aquí la constant elàstica de la molla.

Recordem com podíem obtenir gràficament el pendent d'una recta $y = mx$



quan relacionem un increment de x amb el corresponent increment de y podem definir el pendent m, de la recta com

$$m \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

Llavors, a la gràfica podem considerar el quocient d'increments (és difícil triar amb precisió)

$$\frac{1,5-0}{0,4-0} = 3,75 = k/4\pi^2$$

per obtenir

$$k = 3,75 \cdot 4\pi^2 = 148,04\,N/m$$

Tal com vam veure a les classes de teoria l'energia màxima d'un oscil·lador es pot calcular de dues formes: una, quan passa pel punt d'equilibri ja que en aquest moment la velocitat és màxima (i per tant l'energia cinètica) i l'energia potencial elàstica mínima, i l'altra quan es troba en un extrem, ja que en aquest moment la velocitat és zero i l'energia potencial elàstica màxima. Per tant, en el cas que ens ocupa per calcular l'energia cinètica màxima serà equivalent a calcular

$$\frac{1}{2}kA^2$$

que és més senzill amb les dades que tenim. Llavors

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}148,04 \cdot 0,10^2 = 0,74\,J$$

b) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

Fem servir les dades de l'apartat per calcular ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150}{1,5}} = 10\,rad/s$$

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm 0,2 \cdot (10)^2 = \pm 20\,m/s^2$$

El fregament s'haurà endut tota l'energia de l'oscil·lador que ara és

$$E_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 0,2^2 = 3\,J$$

Exercici 12

a) En aquest exercici, a l'enunciat es fa servir el subíndex k per referir-se a l'energia cinètica (E_k). Això pot induir a confusió, ja que en aquest context el símbol k típicament es fa servir per representat la constant elàstica d'un oscil·lador. Aquest ús de la k com a subíndex de l'energia cinètica té el seu origen en la influència anglosaxona (*kinetic energy*).

A partir de les dades es pot calcular directament el valor de k i m,

$$4,00 = E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k \cdot 1,00^2 \rightarrow k = \frac{4,00 \cdot 2}{1,00} = 8,00\,N/m$$

$$12,00 = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot (-5,44)^2 \rightarrow m = \frac{12,00 \cdot 2}{(-5,44)^2} = 0,81\,kg$$

L'energia mecànica total del sistema és la suma de la cinètica i la potencial, per tant

$$E_M = 12,00 + 4,00 = 16,00\,J$$

b)

L'energia total es pot escriure com la potencial màxima o com la cinètica màxima, llavors

$$16,00 = E_M = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{16,00 \cdot 2}{k}} = \sqrt{\frac{16,00 \cdot 2}{8,00}} = 2,00\,m$$

$$16,00 = E_M = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \rightarrow A\omega = \sqrt{\frac{16,00 \cdot 2}{m}} = \sqrt{\frac{16,00 \cdot 2}{0,81}} = 6,29 \approx 2\pi$$

llavors

$$\omega = \frac{2\pi}{A} = \frac{2\pi}{2,00} = \pi \, rad/s$$

Ara, de l'equació de l'oscil·lador i les condicions inicials

$$x(t) = A\cos(\omega + \varphi_0)$$

$$1,00 = x(0) = A\cos\varphi_0 = 2,00\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\, rad$$

Finalment, l'equació del moviment es pot escriure com

$$x(t) = 2,00\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Exercici 13

a) De la gràfica es veu que l'amplitud val $A = 12\,cm = 0,12\,m$ i el període $T = 6\,s$ (perquè tarda $3\,s$ a fer mig cicle), llavors

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\, rad/s$$

també es veu que $x(0) = 0$ i com l'equació de l'oscil·lador s'escriu

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

llavors

$$0 = x(0) = A\cos\varphi_0 \rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

b)L'equació del moviment quedarà finalment

$$x(t) = 0,12\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

i l'energia mecànica total del sistema es pot calcular com

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2$$

i fent ús de

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2$$

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}0,250 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 (0,12)^2 = 1,97 \cdot 10^{-3}\, J$$

Exercici 14

a) A partir de la relació

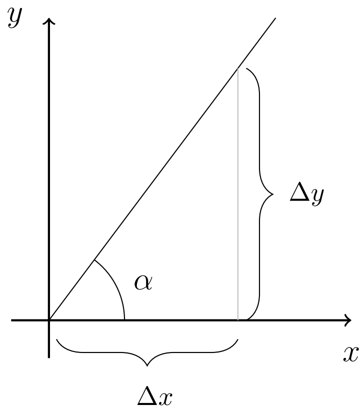
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

podem obtenir

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m$$

de forma que si podem calcular el pendent de la gràfica $T^2 = T^2(m)$ podem conèixer el terme $4\pi^2/k$ i d'aquí la constant elàstica de la molla.

Recordem com podíem obtenir gràficament el pendent d'una recta $y = mx$



quan relacionem un increment de x amb el corresponent increment de y podem definir el pendent m, de la recta com

$$m \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

Llavors, a la gràfica podem considerar el quocient d'increments (és difícil triar amb precisió)

$$\frac{0,62-0,4}{0,14-0,092}=4,583=4\pi^2/k$$

per obtenir

$$k=\frac{4\pi^2}{4,583}=8,61,N/m$$

la constant d'una molla no depèn de la massa que sosté, si no del material del que està feta. Una altra cosa és que hi hagi una relació entre la pulsació o freqüència angular d'un oscil·lador, la massa i la constant recuperadora.

Si fem oscil·lar la massa de $32\,g$ el període serà

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{k}m}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{8,61}\cdot 0,032}=0,38$$

b) El valor del període que correspon a una massa $m=100\,g$ és

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{k}m}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{8,61}\cdot 0,100}=0,68\,s$$

L'equació de l'oscil·lador és

$$y(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

fent servir les condicions inicials

$$-A=y(0)=A\cos\varphi_0\rightarrow\cos\varphi_0=-1\rightarrow\varphi_0=\pi$$

i amb la relació

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0,68}=9,28\,rad/s$$

llavors podem escriure

$$y(t)=0,1\cos(9,28t+\pi)$$

i per $t=3\,s$

$$y(3)=0,1\cos(9,28\cdot 3+\pi)=0,086\,m$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t)$$

per tant

$$a(3) = -(9,28)^2 y(3) = -(9,28)^2 \cdot 0,086 = -7,38\, m/s^2$$

Les dades de la gràfica són difícils de selecionar amb precisió i els càlculs progressius que es van fent fan que aquesta imprecisió es vagi amplificant. És perfectament possible que cadascun dels alumnes que afronti l'exercici obtingui resultats diferents, tot i que haurien de ser del mateix ordre de magnitud.

Exercici 15

a) Després de penjar la plataforma, el pes d'aquesta s'equilibra amb la força que li fa la molla

$$mg = ky \to y = \frac{mg}{k} = \frac{0,020 \cdot 9,8}{4,00} = 0,049\, m$$

La lectura, si prenem l'origen al punt superior serà

$$l = l_0 + y = 0,20 + 0,049 = 0,249\, m$$

b) La freqüència angular que tindrà l'oscil·lador amb la massa M afegida serà

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{4,00}{0,02+0,3}} = 3,535\, rad/s$$

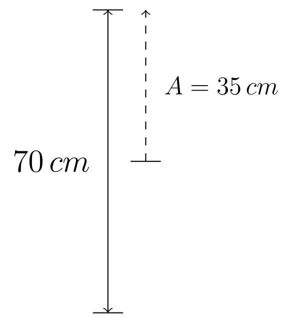
i la velocitat quan passa per la posició d'equilibri és la màxima que com hem vist al llarg d'aquest document és

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 0,1 \cdot 3,535 = \pm 0,354\, m/s$$

noteu que l'amplitud ens la donen com a dada i **no** correspon al valor y obtingut al primer apartat, si no al que ens proporciona l'enunciat directament que val, $0,10\, m$

Exercici 16

Com ens diuen que del punt més alt al punt més baix hi ha $70\,cm$ deduïm que $A = 35\,cm = 0,35\,m$



com el període val $T = 5\,s$, la freqüència angular és

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}\,rad/s$$

de forma que l'equació del moviment es pot escriure com

$$y(t) = 0,35\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

on hem suposat per simplicitat que $\varphi_0 = 0$

Exercici 17

Com el recorregut total és de $D = 100\,cm$ l'amplitud val $A = 50\,com = 0,5\,m$. Per una altra banda, una velocitat de rotació de l'eix de $60\,rpm$ equival a una freqüència angular de

$$60\,rpm = \cancel{60}\,\frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \times \frac{2\pi\,rad}{1\,\cancel{rev}} \times \frac{1\,\cancel{min}}{\cancel{60}\,s} = 2\pi\,rad/s$$

Als apunts de teoria es va deduir la relació entre elongació i velocitat per l'oscil·lador harmònic

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

quan l'émbol es troba a $20\,cm$ d'un dels extrems podem dir que està a $30\,cm$ del punt d'equilibri, és a dir $x = 0,3\,m$, llavors

$$v = \pm A\omega\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} = \pm 0,5\cdot 2\pi\sqrt{1 - \frac{0,3^2}{0,5^2}} = \pm 2,51\,m/s$$

Exercici 18

a) L'energia mecànica de l'oscil·lador es pot escriure en funció de l'energia potencial elàstica màxima com

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2$$

com a la gràfica tenim representada l'energia mecànica E_M en funció del quadrat de l'amplitud A^2, l'equació que s'obté és una recta de pendent $\frac{1}{2}k$. De la gràfica es pot calcular directament el pendent de la recta amb qualsevol parell de punts, per exemple

$$\frac{1}{2}k = \frac{8-2}{0,04-0,01} = 200\,N/m$$

d'on

$$k = 400\,N/m$$

Ara, a partir de la relació

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{0,5}} = 20\sqrt{2}\,rad/s$$

de forma que la freqüència de l'oscil·lació és

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\sqrt{2}}{2\pi} = 4,5\,Hz$$

b) De la teoria sabem (no ho tornarem a deduir aquí) que la velocitat màxima de l'oscil·lador val $v_{max} = \pm A\omega$ llavors,

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 0,1414 \cdot 20\sqrt{2} = \pm 3,99\,m/s \approx 4\,m/s$$

Exercici 19

L'amplitud del moviment val $A = 25\,cm = 0,25\,m$ ja que és la distància que s'aparta de la posició d'equilibri. A partir del valor de la massa i del període calculem la constant elàstica de la molla, que necessitarem més endavant

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{2\pi}{0,75}\right)^2 = 140,4\,N/m$$

a) Quan $x = +0,10\,m$ l'energia cinètica de la partícula es pot calcular a partir de la relació entre la velocitat i l'elongació, relació que es va deduir a la teoria quan parlàvem de l'espai de fases de l'oscil·lador harmònic simple.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

$$\begin{aligned} E_c(x = 0,10) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(A\omega)^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}2 \cdot \left(0,25 \cdot \frac{2\pi}{0,75}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{0,10^2}{0,25^2}\right) \\ &= 3,68\,J \end{aligned}$$

b) L'energia mecànica de l'oscil·lador no depèn d'on es troba, però la podem calcular quan $x = 0,10\,m$ aprofitant el càlcul anterior

$$E_M = E_c + E_{pel} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 3,68 + \frac{1}{2} \cdot 140,4 \cdot 0,10^2 = 4,39\,J$$

c) El mòdul de la força es pot calcular com

$$F = k \cdot x = 140,4 \cdot 0,10 = 14,04\,N$$

la direcció és la del moviment horitzontal de la massa al oscil·lar i el sentit és cap a l'esquerra, ja que a l'enunciat ens havien dit que s'estava movent cap a la dreta.

Exercici 20

a) A partir de l'expressió

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15}{0,380}} = 6,2828\,rad/s \approx 2\pi\,rad/s$$

el període val

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,s$$

b) L'equació de moviment és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

amb la condició inicial $x(0) = A$ resulta

$$A = x(0) = A\cos\varphi_0$$

d'on $\varphi_0 = 0$, llavors

$$x(t) = 0,10\cos(2\pi t)$$

c) Trobem l'energia total de l'oscil·lador, per exemple a partir de la potencial elàstica màxima

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 0,10^2 = 0,075\,J$$

Ara, podem trobar l'energia cinètica com

$$E_c = E_M - E_{pel} = E_M - \frac{1}{2}kx^2$$

llavors, quan l'elongació val $x = 2\,cm = 0,02\,m$

$$E_c(x = 0,02) = E_M - E_{pel}(x = 0,02) = 0,075 - \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 0,02^2 = 0,072\,J$$

Exercici 21

a) A partir de les dades de l'enunciat calculem la pulsació

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{125}{0,200}} = 25\,rad/s$$

La velocitat màxima es calcula com

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 0,12\cdot 25 = \pm 3,0\,m/s$$

de forma que l'energia cinètica màxima val

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,200\cdot 3^2 = 0,90\,J$$

i la potencial elàstical màxima

$$E_{pel_{max}} = \frac{1}{2}kx^2_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 0,12^2 = 0,90\,J$$

b) En quant al període

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{25} = 0,25\,s$$

i la freqüència

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,25} = 4,0\,Hz$$

Segons les condicions inicials és $x(0) = A$ d'on resulta

$$A = x(0) = A\cos\varphi_0$$

i per tant $\varphi_0 = 0$, llavors

$$x(t) = 0,12\cos(25t)$$

Exercici 22

a) Calculem la velocitat màxima a partir de

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm A(2\pi f) = \pm 0,2 \cdot (2\pi \cdot 0,678) = \pm 0,85\,m/s$$

b) Amb les dades de l'enunciat

$$k = m\omega^2 = 60 \cdot (2\pi \cdot 0,678)^2 = 1088,86 = 1,09 \cdot 10^2\,N/m$$

llavors, quan hi posem la massa de l'astronauta i oscil·la amb freqüència $f' = 0,606\,Hz$ tenim

$$m' = \frac{k}{\omega'^2} = \frac{1088,86}{(2\pi \cdot 0,606)^2} = 75\,kg$$

Exercici 23

a) Els punts amb velocitat nul·la són els extrems. Si la separació entre ells és de $50\,cm$ llavors l'amplitud del moviment és $A = 25\,cm = 0,25\,m$. Per una altra banda l'energia cinètica màxima es podia calcular com

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$$

d'on

$$\omega = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2E_{c_{max}}}{m}} = \frac{1}{0,25}\sqrt{\frac{2\cdot 15}{0,3}} = 40\,rad/s$$

La freqüència val

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} = 6,37\,Hz$$

el període

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6,37} = 0,16\,s$$

i la constant elàstica de la molla

$$k = m\omega^2 = 0,3\cdot 40^2 = 480\,N/m$$

b) El punt que correspon a la velocitat màxima és el d'equilibri, per tant les condicions inicials ens diuen que $x(0) = 0$. L'equació de l'oscil·lador és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

llavors

$$0 = x(0) = A\cos\varphi_0 \rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = \pi/2$$

Amb la informació del primer apartat podem escriure l'equació del moviment

$$x(t) = 0,25\cos\left(40t + \frac{\pi}{2}\right)$$

de forma que és

$$x(3) = 0,25\cos\left(40\cdot 3 + \frac{\pi}{2}\right) = -0,145\,m$$

L'equació de la velocitat és

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

que amb les dades de l'exercici queda

$$v(t) = \dot{x}(t) = -0,25 \cdot 40 \sin\left(40t + \frac{\pi}{2}\right)$$

de forma que per $t = 3\,s$

$$v(3) = -0,25 \cdot 40 \sin\left(40 \cdot 3 + \frac{\pi}{2}\right) = -8,142\,m/s$$

L'equació de l'acceleració és

$$a(t) = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

que es podia escriure com

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

de forma que per $t = 3\,s$ tenim

$$a(3) = -\omega^2 x(3) = -40^2 \cdot (-0,145) = 232\,m/s^2$$

Exercici 24

a) De la gràfica es veu que per a la posició d'equilibri $x = 0\,m$ tenim

$$E_c = 10\,J \quad E_{pel} = 0$$

ja que sabem que en aquest punt l'energia cinètica és màxima i la potencial elàstica val zero ($E_{pel} = \frac{1}{2}kx^2$).

Per una altra banda, $x = 0,20\,m$ correspon a l'amplitud, ja que es veu que aquest punt es troba a l'extrem. Llavors

$$E_c = 0\,J \quad E_{pel} = 10\,J$$

ja que l'energia total es conserva. A partir de $E_{pel} = \frac{1}{2}kx^2$ podem escriure

$$E_{pel_{max}} = \frac{1}{2}kA^2 \to k = \frac{2E_{pel_{max}}}{A^2} = \frac{2 \cdot 10}{0,20^2} = 500\,N/m$$

b) Tenint en compte la relació

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

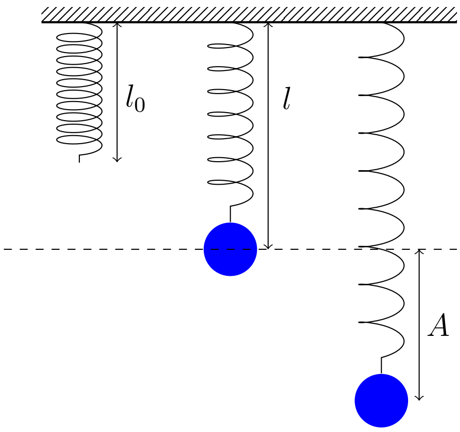
tenim

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2} = \frac{500}{(2\pi \cdot \frac{100}{2\pi})^2} = 0,050\,kg$$

Exercici 25

a) Suposem que originalment la molla tenia una longitud l_0. Quan es penja la massa m, la molla s'estira fins a una longitud l. Sabem que $l - l_0 = 2\,cm = 0,02\,m$. Quan la massa es troba en equilibri la força que li fa la molla és igual al pes del cos. Llavors, a partir de $l - l_0$ i aplicant la llei de Hooke podem calcular la constant elàstica de la molla segons

$$mg = k(l - l_0)$$



d'on

$$k = \frac{mg}{l - l_0} = \frac{10 \cdot 9,8}{0,02} = 4900\,N/m$$

No hem de confondre la longitud que s'estira la molla $l - l_0$, amb l'amplitud del moviment harmònic. Un cop la massa es troba en equilibri, *llavors* s'estira cap avall (també es podria haver desplaçat cap a dalt) una distància de $3\,cm$ que sí correspon a l'amplitud de l'oscil·lador. L'equació s'escriu

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Podem calcular la pulsació a partir de

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4900}{10}} = 22,14\,rad/s$$

i la fase inicial sabent que $y(0) = -A$

$$-A = y(0) = A\cos\varphi_0 \rightarrow \cos\varphi_0 = -1 \rightarrow \varphi_0 = \pi$$

amb tota aquesta informació l'equació del moviment queda

$$y(t) = 0,03\cos(22,14t + \pi)$$

b) La velocitat es calcula com

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

que en el nostre cas queda,

$$v(t) = \dot{y}(t) = -0,03 \cdot 22,14\sin(22,14t + \pi)$$

i per $t = 5\,s$

$$v(5) = -0,03 \cdot 22,14\sin(22,14 \cdot 5 + \pi) = -0,45\,m/s$$

c) La força recuperadora de la molla val

$$F = -kx \rightarrow F(t) = -kx(t) = -kA\cos(\omega t + \varphi_0)$$

amb les dades

$$F(t) = -4900 \cdot 0,03\cos(22,14t + \pi)$$

llavors, per $t = 6\,s$

$$F(6) = -4900 \cdot 0,03\cos(22,14 \cdot 6 + \pi) = 92,17\,N$$

Exercici 26

L'enunciat ens diu que $A = 50\,cm = 0,5\,m$ i de la gràfica es veu que $E_{pel_{max}} = 50\,J$ i per una altra banda

$$E_{pel_{max}} = \frac{1}{2}kA^2$$

d'on

$$k = \frac{2E_{pel_{max}}}{A^2} = \frac{2 \cdot 50}{0,5^2} = 400\,N/m$$

Trobem la pulsació a partir de la informació que tenim fins ara

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{0,5}} = 20\sqrt{2}\,rad/s$$

Ara, recordant la relació entre la velocitat i l'elongació

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

la velocitat val

$$v = \pm A\omega\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} = \pm 0,5 \cdot 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{0,20^2}{0,5^2}} = \pm 12,96\,m/s$$

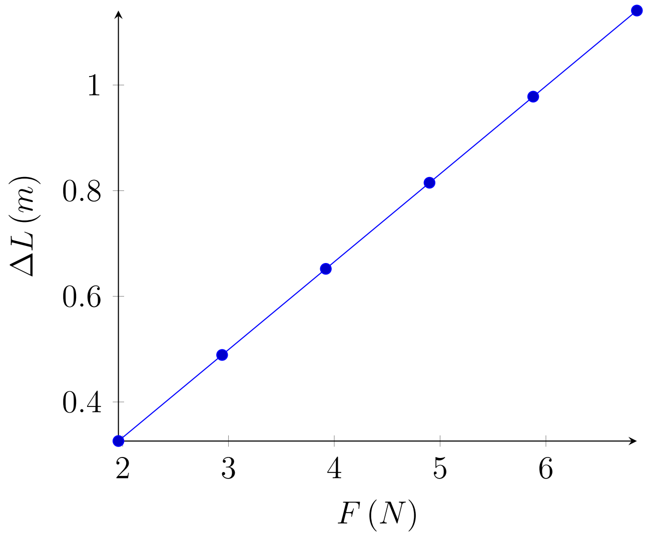
Exercici 27

a) La força que actua sobre la molla és el pes del cos, llavors, segons la llei de Hooke

$$mg = k\Delta L$$

La gràfica que hem de representar correspon a

$$\Delta L = \frac{1}{k}mg$$



b)

Podem trobar el pendent de la recta calculant el quocient dels increments entre dos parells de dades qualssevol, per exemple

$$\frac{1}{k} = \frac{81,7 \cdot 0,01 - 65,3 \cdot 0,01}{0,500 \cdot 9,8 - 0,400 \cdot 9,8} = 0,167347$$

d'on

$$k = 5,976\,N/m$$