

# 轮式机器人建模与控制

---

## 1 机器人的建模与描述

---

### 1.1 自由度

在机械中：自由度是根据机械原理，机构具有确定运动时所必须给定的独立运动参数的数目

在物理中：自由度是指物理学当中描述一个物理状态，独立对物理状态结果产生影响的变量的数量

例1：确定一条直轨道上的火车位置（图一）

例2：五连杆机构的位置与速度（图二）

总而言之，自由度是在空间中确定一点所需的变量个数

通常我们所指的自由度是位形空间的自由度

### 1.2 约束

约束是相对于空间的概念，约束可以限制空间。

一个空间中的刚体有6个自由度，一个空间中的质点有3个自由度

一个平面上的刚体有3个自由度，一个平面上的质点有2个自由度

平面  $Ax + By + Cz = D$  就是一种约束，通过增加一个约束方程，减少了质点所在位形空间的一个维度，也减少了质点的一个自由度。在平面上任取直角坐标系，此时可用  $(x', y')$  描述质点位置。

空间不只可以是位形空间，也可以是速度空间等。

- 约束的分类

一些约束可被表示为  $\mathcal{F}(q, t) = 0$  的形式，其中， $q = (\phi, x, y)$  为位形变量。该类约束称为**完整约束**，不能表示为  $\mathcal{F}(q, t) = 0$  形式的约束称为**非完整约束**

- 非完整约束通常涉及不等式与速度变量，直观上而言，非完整约束并不实际减少空间的维度。

## 2 轮式机器人的类型

---

轮式机器人依据底盘速度  $\dot{q} = (\dot{\phi}, \dot{x}, \dot{y})$  是否存在等式约束可分为两大类：**全向移动机器人**和**非完整移动机器人**

- 其速度约束  $A(q)\dot{q} = 0$  被称为Pfaffian速度约束
- 对于类汽车的机器人，这样的约束会防止产生直接的侧向移动
- 轮式机器人到底属于全向还是非完整类型，很大程度上取决于所采用的轮子类型

### 2.1 轮子的类型

- 非完整类型的移动机器人采用传统车轮
  - 传统车轮允许前后滚动，或绕车轮中心进行旋转，但不允许侧滑，从而形成速度约束。
- 全向类型的轮式移动机器人通常采用**全向轮**或**麦克纳姆轮**

- 全向轮与麦克纳姆轮是通过在典型车轮的外圆周上增加一组滚轮而构成的一种轮子，这些滚轮解除了普通车轮在侧向的约束。

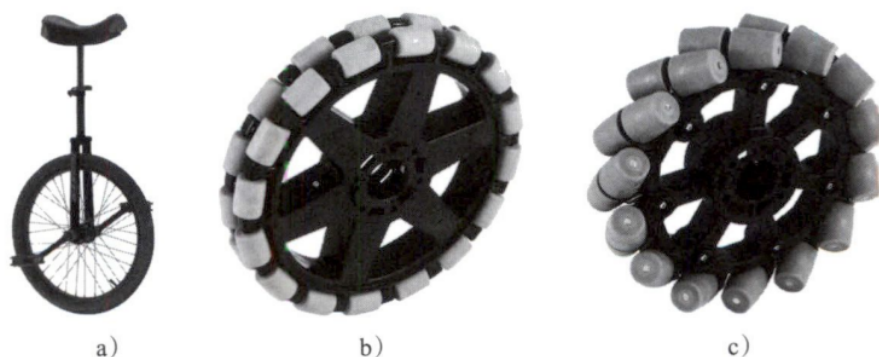


图 13.1 a) 一个典型的无侧滑的车轮——这里给出的例子是独轮车车轮；b) 全向轮；c) 麦克纳姆轮。全向轮和麦克纳姆轮的图像来自于 VEX Robotics, Inc；经许可使用

## 3 轮式移动机器人建模

### 3.1 全向移动机器人建模

由于全向移动机器人需要生成任意的三维底盘速度  $\dot{q} = (\dot{\phi}, \dot{x}, \dot{y})$ ，全向移动机器人至少需要三个轮子，每一个轮子只有一个电机驱动。

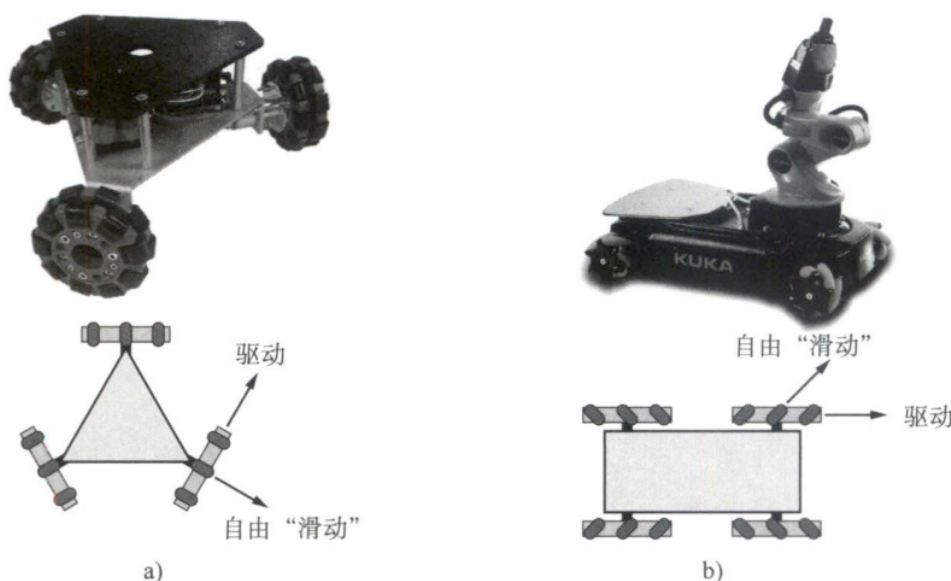


图 13.2 a) 带有 3 个全向轮的移动机器人。图中还给出了单个全向轮上由其圆周滚子而引起的自由滑动方向，以及由车轮电机驱动而引起的轮子做无滑滚动时的方向（上图来自 [www.superdroidrobots.com](http://www.superdroidrobots.com)，经许可使用）；b) KUKA 的 youBot 移动机械操作臂系统，其移动底座上安装有 4 个麦克纳姆轮（上图来自 KUKA Roboter GmbH，经许可使用）

#### • 车轮运动

设车轮中心处坐标系  $\hat{x}_w - \hat{y}_w$ ，该坐标系下车轮中心线速度  $v = (v_x, v_y)$ ，则有

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_{drive} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_{slide} \begin{bmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

推导如下

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sin\gamma \\ 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{drive} \\ v_{slide} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sin\gamma \\ 0 & \cos\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{drive} \\ v_{slide} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{drive} \\ v_{slide} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\gamma \\ 0 & \frac{1}{\cos\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

其中 $v_{drive}$ 为电机驱动速度， $v_{slide}$ 为被动轮子滑行速度， $\gamma$ 为被动轮子滑动角度。

进一步设 $u$ 为轮子驱动角速度，轮子半径为 $r$ ，则有

$$u = \frac{v_{drive}}{r} = \frac{1}{r}(v_x + v_y \tan\gamma)$$

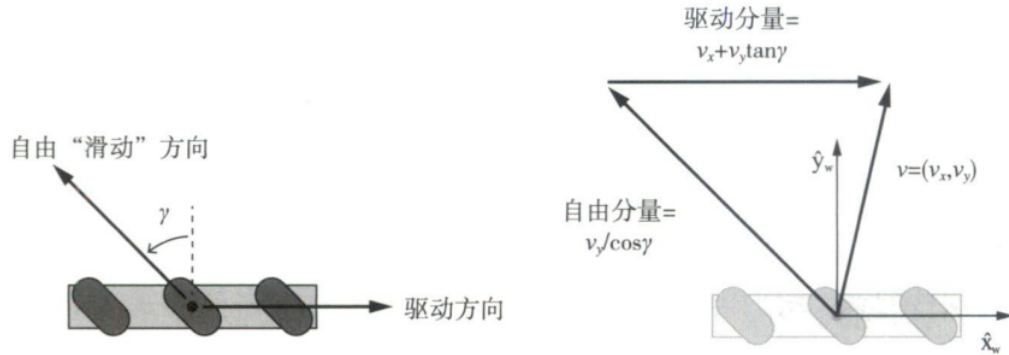


图 13.3 a) 驱动方向和滚子允许车轮自由滑动的方向。对于全向轮， $\gamma=0$ ；对于麦克纳姆轮，通常有  $\gamma=\pm 45^\circ$ ；b) 车轮的驱动速度和自由滑动速度，车轮速度在车轮坐标系  $\hat{x}_w-\hat{y}_w$  中的表示为  $v=(v_x, v_y)$ ，其中  $\hat{x}_w$  轴与前进驱动方向平齐

#### • 底盘运动

首先讨论单个车轮 $u_i$ 的作用效果

为了推导从底盘速度 $\dot{q} = (\dot{\phi}, \dot{x}, \dot{y})$ 到车轮 $u_i$ 的驱动角速度'的完整变换，建立世界坐标系 $\{s\}$ ，即 $\hat{x} - \hat{y}$ 系；底盘坐标系 $\{b\}$ ，即 $\hat{x}_b - \hat{y}_b$ 系。车轮中心及其驱动方向由在 $\{b\}$ 系中表示的 $(\beta_i, x_i, y_i)$ 给出，车轮半径为 $r_i$ 车轮的滑动方向由 $\gamma_i$ 给出，则

$$u_i = h_i(\phi)\dot{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_i} & \frac{\tan\gamma_i}{r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta_i & \sin\beta_i \\ -\sin\beta_i & \cos\beta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_i & 1 & 0 \\ x_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

从右到左，第一个变换将 $\dot{q}$ 表示为底盘坐标系 $\{b\}$ 内"速度" $\mathcal{V}_b$ ；第二个变换生成车轮在 $\{b\}$ 内的线速度；第三个变换将该线速度表示在车轮坐标系中形成 $v_i$ ；最后的变换计算驱动角速度 $u_i$

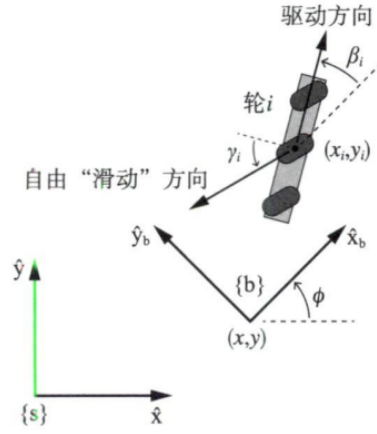


图 13.4 固定的空间坐标系  $\{s\}$ ，底盘坐标系  $\{b\}$  位于  $\{s\}$  系中的  $(\phi, x, y)$  处；而车轮  $i$  位于  $(x_i, y_i)$ ，其驱动方向为  $\beta_i$ ，两者均在  $\{b\}$  系表示。车轮  $i$  的滑动方向由  $\gamma_i$  定义

对于上面的式子，计算得

$$h_i(\phi) = \frac{1}{r_i \cos \gamma_i} \begin{bmatrix} x_i \sin(\beta_i + \gamma_i) - y_i \cos(\beta_i + \gamma_i) \\ \cos(\beta_i + \gamma_i + \phi) \\ \sin(\beta_i + \gamma_i + \phi) \end{bmatrix}^T$$

对于所有的  $m$  个轮子，将  $h_i(\phi)$  叠加，有

$$u = H(\phi) \dot{q} = \begin{bmatrix} h_1(\phi) \\ h_2(\phi) \\ \vdots \\ h_m(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

我们也可以表述  $u$  和体运动旋量  $\mathcal{V}_b$  间的关系；该映射并不依赖于底盘的方向  $\phi$ ，故可表示为

$$u = H(0) \dot{q} = \begin{bmatrix} h_1(0) \\ h_2(0) \\ \vdots \\ h_m(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{bz} \\ v_{bx} \\ v_{by} \end{bmatrix}$$

为使  $\mathcal{V}_b$  与  $u$  建立完全的控制关系，须恰当选择车轮在  $\{b\}$  系中位置与朝向  $(\beta_i, x_i, y_i)$ ，以及轮子的自由滑动方向  $\gamma_i$ ，使得  $H(0)$  秩为 3。

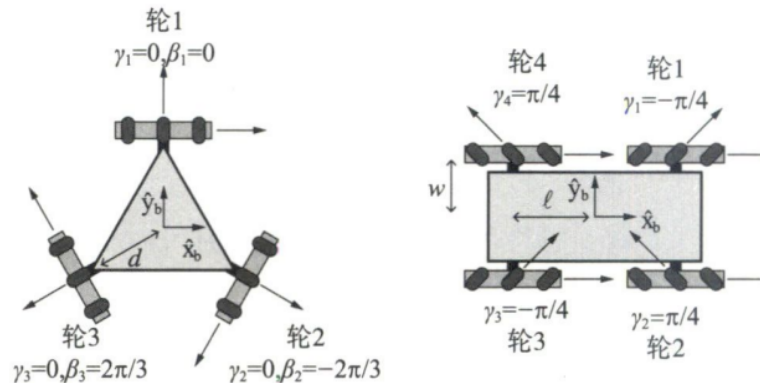


图 13.5 带有 3 个全向轮和 4 个麦克纳姆轮的移动机器人的运动模型。所有车轮的半径为  $r$ ，每个麦克纳姆轮的驱动方向为  $\beta_i=0$

- 若 $H(0)$ 秩大于3, 意味着 $u$ 对于任何 $\mathcal{V}_b$ 都无法满足上式, 意味着车轮必须在驱动方向上打滑
- 若 $H(0)$ 秩小于3, 意味着 $\mathcal{V}_b$ 维数降低, 也就是小车自由度会减少。
- 两种全向移动机器人运动模型

对于上图两个机器人, 有两个运动学模型, 分别如下

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = H(0)\mathcal{V}_b = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -d & 1 & 0 \\ -d & -1/2 & -\sin(\pi/3) \\ -d & -1/2 & \sin(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{bz} \\ v_{bx} \\ v_{by} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = H(0)\mathcal{V}_b = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -l-w & 1 & -1 \\ l+w & 1 & 1 \\ l+w & 1 & -1 \\ -l-w & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{bz} \\ v_{bx} \\ v_{by} \end{bmatrix}$$

对于麦轮机器人, 为使 $H(0)$ 秩为3, 要往 $+\hat{x}_b$ 方向移动, 所有车轮要以相同的速度向前行驶; 为了往 $+\hat{y}_b$ 方向移动, 轮1和轮3向后驱动, 轮2和轮4以相同的速度向前驱动.....

- 若车轮 $i$ 受到约束 $|u_i| \leq u_{i,max}$ , 即 $-u_{i,max} \leq u_i = h_i(0)\mathcal{V}_b \leq u_{i,max}$

此时在 $\mathcal{V}_b$ 三维空间中由定义的两个平行约束平面, 画出所有 $m$ 个轮子的最大速度约束, 可得凸多面体为 $\mathcal{V}_b$ 的可行空间

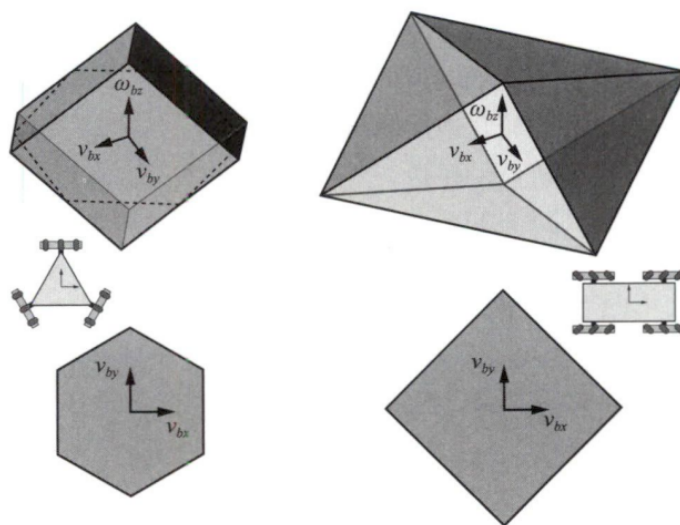


图 13.6 (上行) 图 13.5 中三轮 (左) 和四轮 (右) 机器人的可行体运动旋量  $\mathcal{V}$  的区域。对于三轮机器人也给出了与平面  $\omega_{bz}=0$  的交点。(下行)  $\omega_{bz}=0$  平面中的边界 (仅限平移运动)

- 全向移动机器人的反馈控制