Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Информационные технологии и прикладная математика»

Курсовая работа по дисциплине «Численные методы»

По теме
«Вычисление несобственных интегралов численными методами»

Студент: Бухарин А.И.

Группа: М80-402Б-20

Преподаватель: Пивоваров Д.Е.

Оценка:

Дата:

Москва, 2024

1 Теоретические сведения

Определение несобственного интеграла включает в себя выполнение хотя бы одного из следующих условий:

1. Область интегрирования бесконечна, что соответствует интегралу первого рода.

2. Подынтегральная функция становится неограниченной в некоторых точках области интегрирования, что определяет интеграл второго рода.

В некоторых случаях интеграл второго рода можно свести к интегралу первого рода с помощью замены переменной. Поэтому в этом контексте мы будем рассматривать несобственные интегралы первого рода.

Сведение к определенному интегралу

Рассмотрим преобразование из математического анализа, выполненное с помощью замены переменной:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \text{ при } ab > 0$$

Можем разложить несобственный интеграл на сумму интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{B} f(x)\,dx + \int_{B}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ при } -A < 0 \text{ и } B > 0$$

Первый и последний интегралы можем преобразовать с помощью формулы выше. Так мы можем посчитать каждый из этих трех интегралов (например, методом прямоугольников) и сложить получившиеся результаты.

Предельный переход

Запишем предельный переход для несобственного интеграла 1 рода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Будем вычислять правый интеграл (например, методом прямоугольников) до тех пор, пока следующее слагаемое не станет меньше заданного эпсилон.

2 Листинг кода

```
INF = 1e9
def f(x):
    """
    Подинтегральная функция
    """
    return 1 / (1 + x**2)
def integrate_rectangle_method(f, l, r, h):
    """
    Расчет интеграла f(x)dx на интервале [l; r] используя метод прямоугольников с шагом h
    """
    result = 0
    cur_x = l
    while cur_x < r:
        result += h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
        cur_x += h
    return result
def integrate_with_definite_integral(f, l, r, h=0.01, eps=1e-6):
    """
    Расчет несобственного интеграла первого типа методом перехода к определенному интегралу
    """
    def f_new(t):
        return (1. / t ** 2) * f(1. / t)
    result = 0
    if r == INF:
        new_r = max(eps, l)
        result += integrate_rectangle_method(f_new, eps, 1. / new_r - eps, h)
    else:
        new_r = r
    if l == -INF:
        new_l = min(-eps, r)
        result += integrate_rectangle_method(f_new, 1. / new_l + eps, -eps, h)
    else:
        new_l = l
    if new_l < new_r:
        result += integrate_rectangle_method(f, new_l, new_r, h)
    return result
def integrate_lim(f, l, r, h=0.1, eps=1e-6):
    """
    Расчет несобственного интеграла первого типа методом перехода к пределу
```

```
    """
    result = 0
    iters = 0
    if r == INF:
        finish = False
        cur_x = max(l, 0)
        while not finish:
            iters += 1
            new_result = result + h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
            cur_x += h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
            result = new_result
    else:
        result += integrate_rectangle_method(f, 0, r, h)
    if l == -INF:
        finish = False
        cur_x = min(0, r)
        while not finish:
            iters += 1
            new_result = result + h * f((cur_x - h + cur_x) * 0.5)
            cur_x -= h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
            result = new_result
    else:
        result += integrate_rectangle_method(f, l, 0, h)
    return result, iters
if __name__ == '__main__':
    a = 3
    b = INF
    h = 0.1
    eps = 1e-9
    print('Переход к определенному интегралу')
    res_definite = integrate_with_definite_integral(f, a, b, h, eps)
    print('Интеграл =', res_definite)
    print()

    print('Предельный метод')
    res_limit, iters_limit = integrate_lim(f, a, b, h, eps)
    print('Интеграл =', res_limit)
```

```
print('Итерации:', iters_limit)

print()
```

3 Результат работы программы

Для примера будем вычислять следующий интеграл:

$$\int_{l}^{r} \frac{1}{1+x^2}$$

l	r	Результат
3	∞	Переход к определенному интегралу Интеграл = 0.3807546410523707 Предельный метод Интеграл = 0.32162556239337153 Итерации: 99971
$-\infty$	-9	Переход к определенному интеграл Интеграл = 0.19947692653043747 Предельный метод Интеграл = 0.11055610681316809 Итерации: 99911
$-\infty$	-0.1	Переход к определенному интегралу Интеграл = 1.4711284921802803 Предельный метод Интеграл = 1.4709457043538126 Итерации: 100000

4 Выводы

Выполнив данную работу, я изучил численные методы для решения несобственных интегралов. В частности, я ознакомился с двумя методами:

1. Приведение к сумме определенных интегралов.
2. Использование предельного перехода.

Я реализовал оба этих метода и проверил их работоспособность на различных функциях с различными пределами интегрирования. Полученные численные значения были в значительной мере согласованы с аналитическими результатами.