Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика» Кафедра вычислительной математики и программирования

# Лабораторные работы

по курсу «Численные методы»

Вариант 10

Выполнил: Билецкий А.О.

Группа: М8О-402Б-20

Преподаватель: доц. Пивоваров Д. Е.

Дата:__________
Оценка:__________

:

Москва, 2023

**Лабораторная работа №5**

**Задание**

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка-Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0, \; b > 0, \; c < 0.$$

$$u_x(0,t) + u(0,t) = \exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -\exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x,0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp((c-a)t)\sin(x+bt)$.

**Теоретическая часть**

Данное уравнение представляет собой уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода.

Ямная разностная схема для третьей начально-краевой

задачи имеет вид:

$$\alpha\frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}),$$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$\gamma\frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}).$$

В результате алгоритм перехода на новый временной слой $t^{k+1}$ с использованием явной схемы можно представить в следующем виде:

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1-2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \ \ \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha / h}{\beta - \alpha / h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha / h},$$

$$u_N^{k+1} = \frac{\gamma / h}{\delta + \gamma / h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma / h}.$$

При использовании неявной конечно-разностной схемы получаем следующий разностный аналог дифференциальной задачи:

$$b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} = d_0,$$

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \qquad j = \overline{1, N-1},$$

$$a_N u_{N-1}^{k+1} + b_N u_N^{k+1} = d_N,$$

где $b_0 = \beta - \alpha / h$, $c_0 = \alpha / h$, $d_0 = \dfrac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha / h}$,

$$a_N = -\gamma / h, \ b_N = \delta + \gamma / h, \ d_N = \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma / h},$$

$$a_j = \sigma, \quad b_j = -(1+2\sigma), \quad c_j = \sigma, \quad d_j = -u_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}.$$

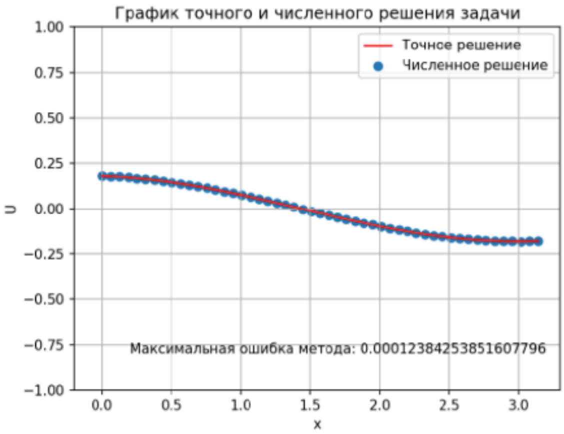
схема Кранка-Николсона:

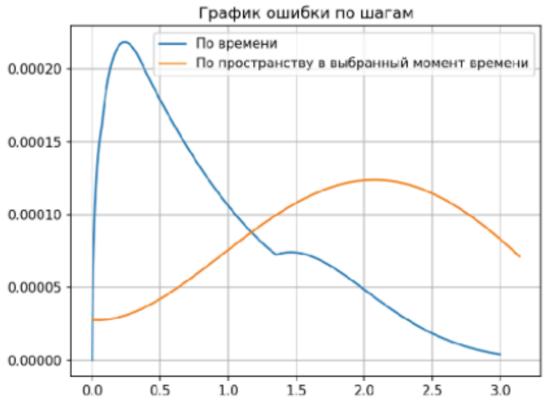
$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1-\theta)a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

где $\theta$ – вес явной части конечно-разностной схемы. Для нахождения неявной части конечно-разностной схемы применялся метод прогонки трехдиагональной матрицы.

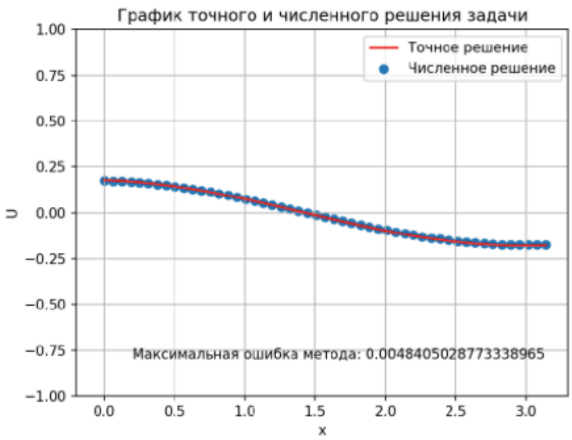
1) **Явный метод:**

Двухточечная аппроксимация с первым порядком:



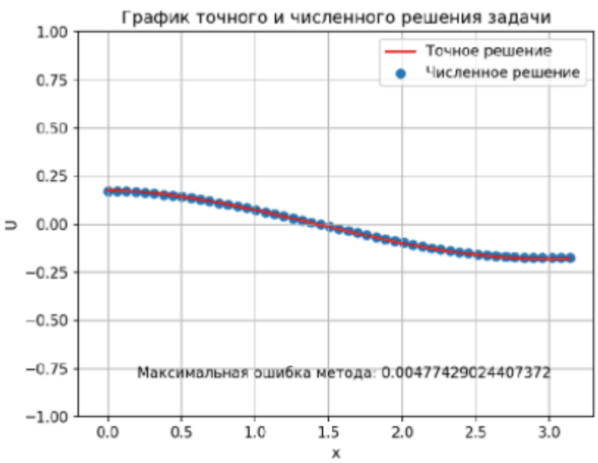




Трехточечная аппроксимация со вторым порядком:



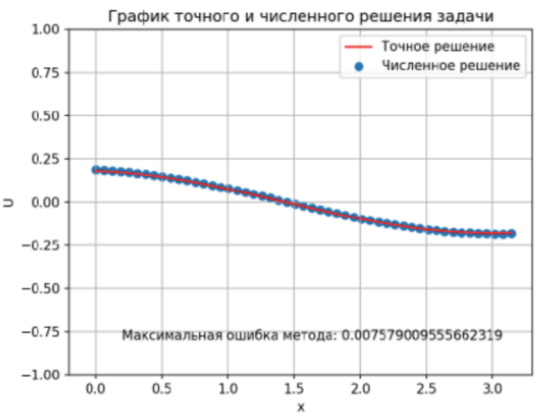


Двухточечная аппроксимация со вторым порядком:



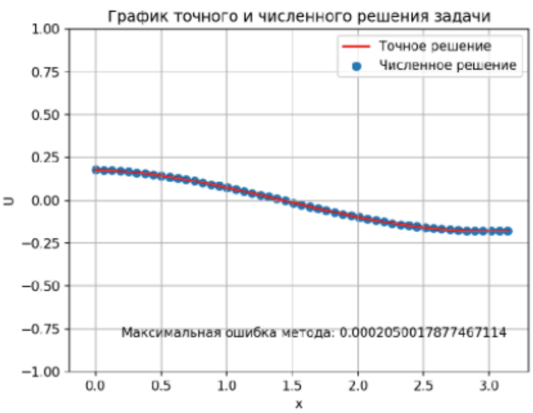

2) **Неявный метод:**

Двухточечная аппроксимация с первым порядком:



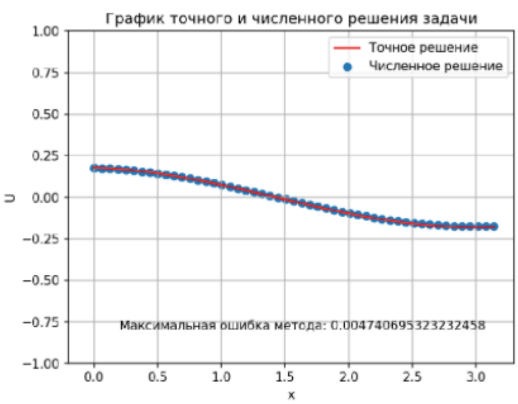


Трехточечная аппроксимация со вторым порядком:



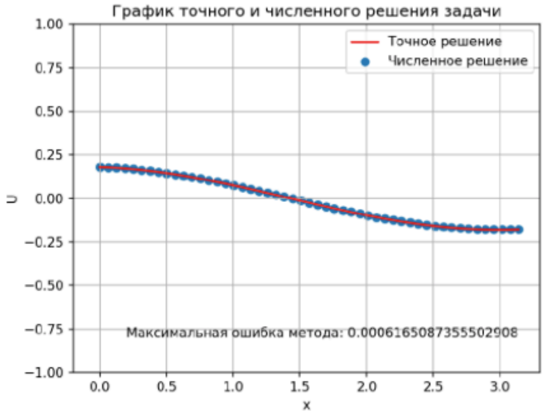


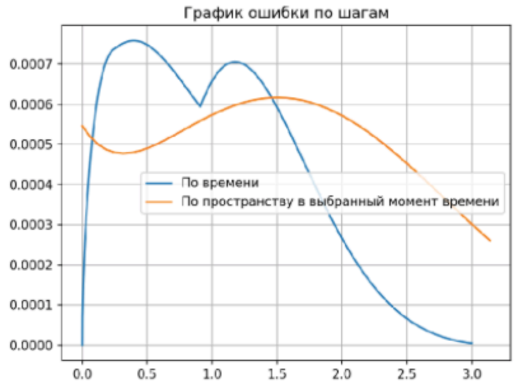
Двухточечная аппроксимация со вторым порядком:



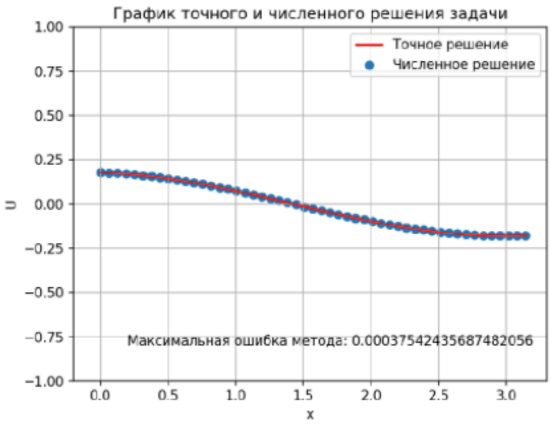

3) **Метод Кранка-Никольсона:**

Двухточечная аппроксимация с первым порядком:




Трехточечная аппроксимация со вторым порядком:





**Вывод**

Благодаря данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений параболического типа: были исследованы различные методы решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа, включая схему Кранка-Николсона, неявную и явную конечно-разностные методы, а также использование аналитического решения. Эксперименты позволили оценить точность и эффективность каждого метода.

**Лабораторная №2**

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров .

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u - \cos x \exp(-t),$$

$u_x(0,t) = \exp(-t),$

$u_x(\pi,t) = -\exp(-t),$

$u(x,0) = \sin x\,,$

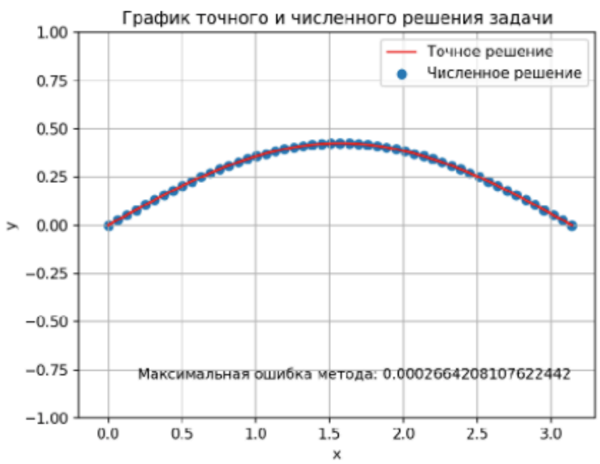
$u_t(x,0) = -\sin x\,.$

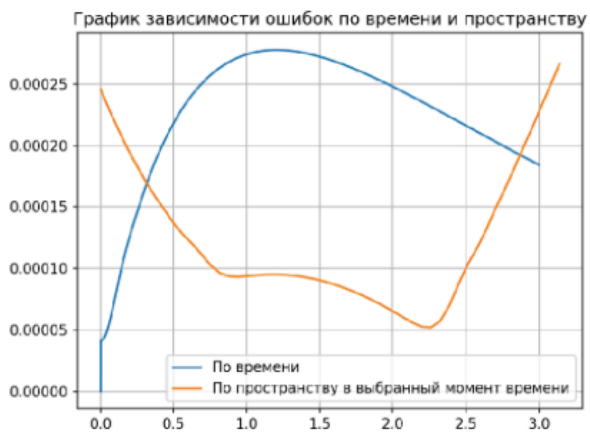
Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t)\sin x$ .

## 1. Явный метод

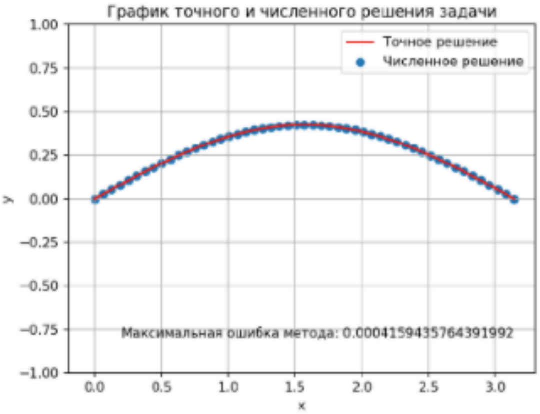
1) Двухточечная аппроксимация с первым порядком

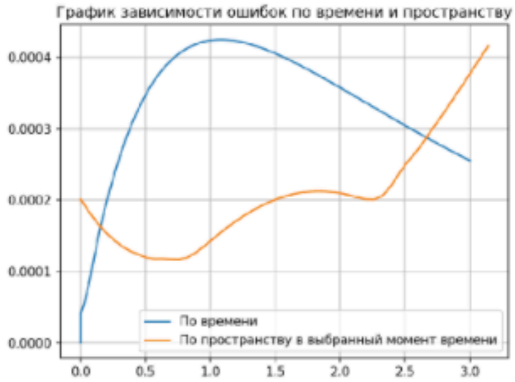
1.1) Аппроксимация начальных условия первого порядка



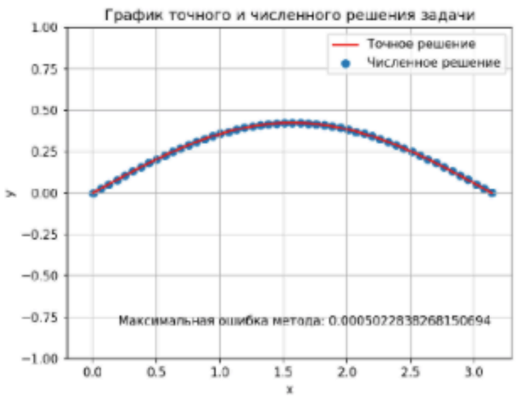
1.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком

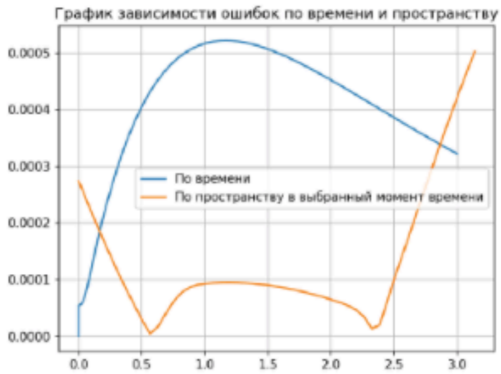


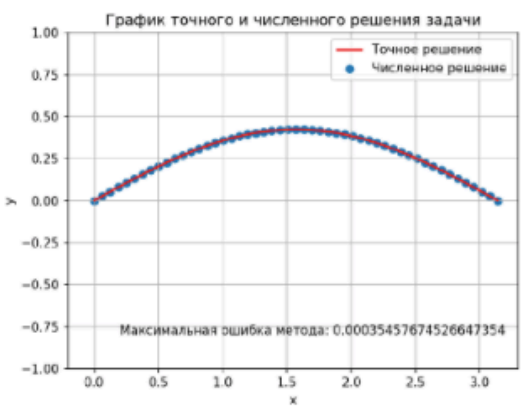

2) Трехточечная аппроксимация с первым порядком

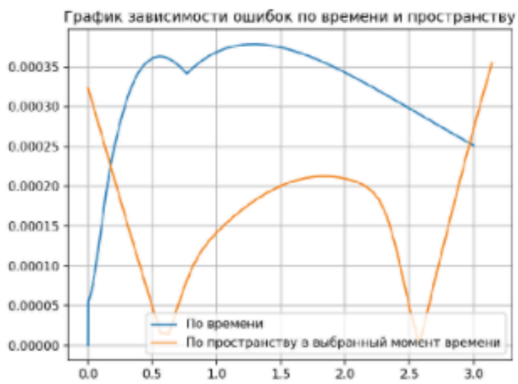
2.1) Аппроксимация начальных условия первого порядка



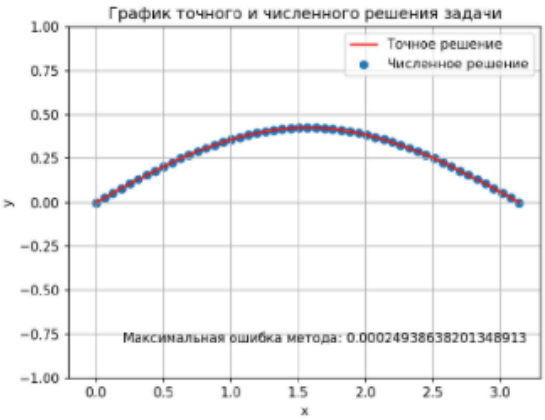

2.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком

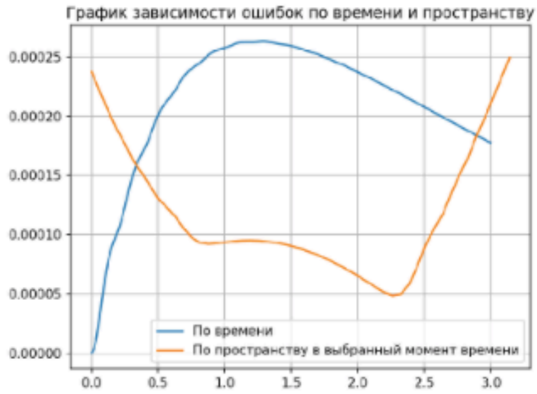


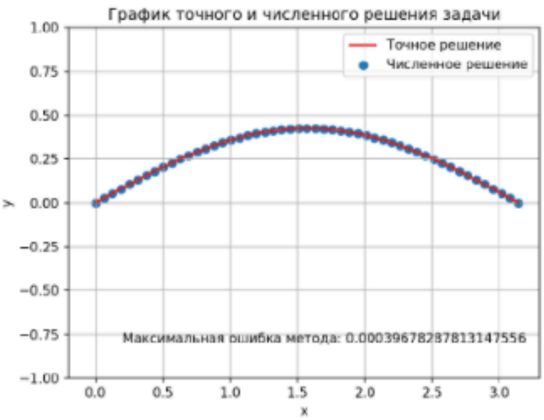
3) Двухточечная аппроксимация со вторым порядком

3.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком




3.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком

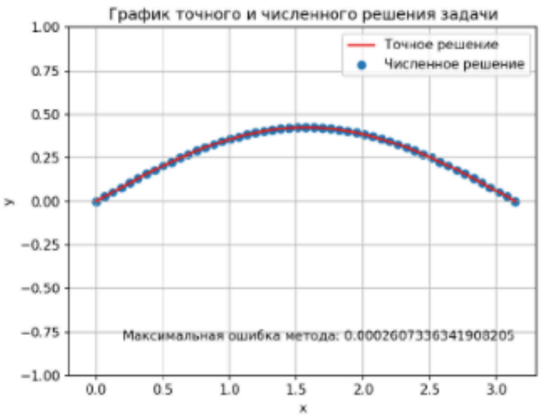


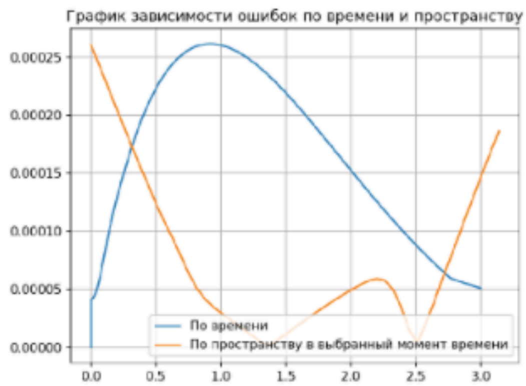


## 2. Неявный метод

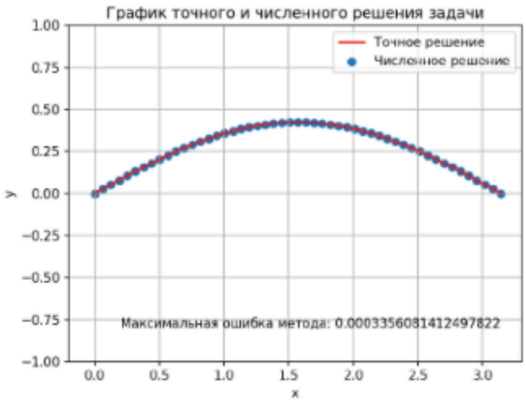
1) Двухточечная аппроксимация с первым порядком

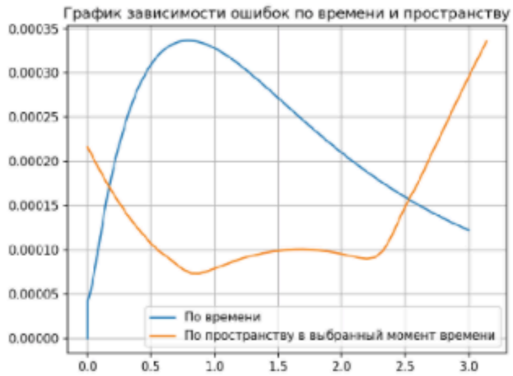
1.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком



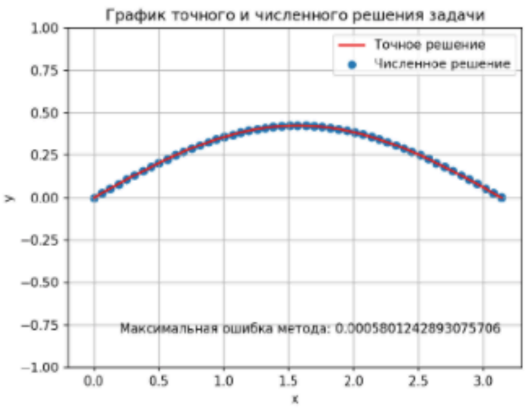
1.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком



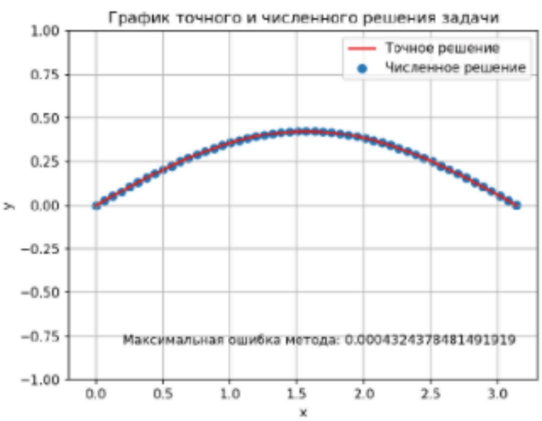

2) Трехточечная аппроксимация с первым порядком

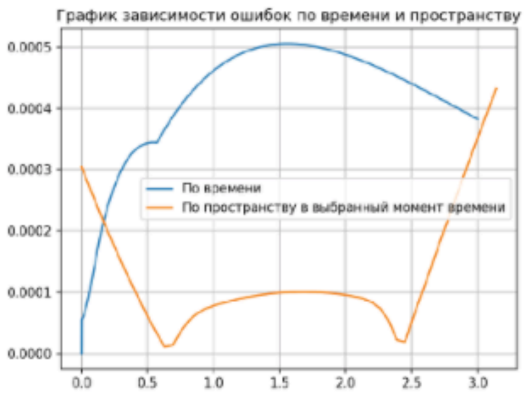
2.1) Аппроксимация начальных условия первого порядка





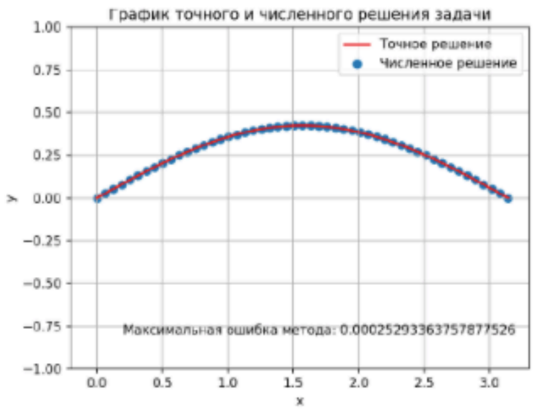
2.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком



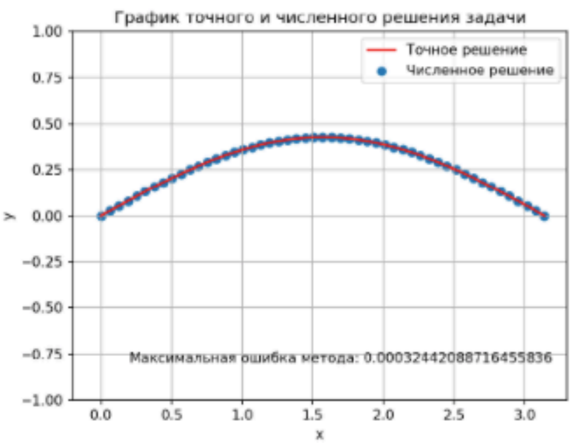
3) Двухточечная аппроксимация со вторым порядком

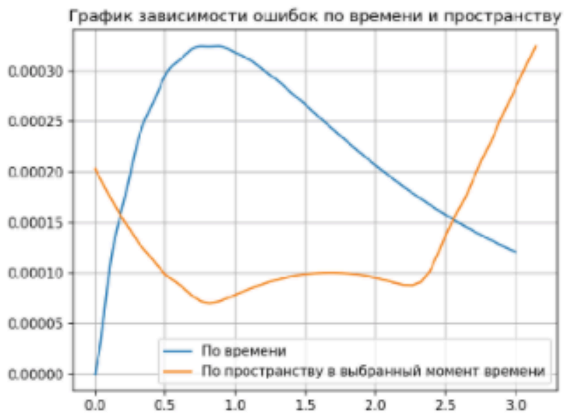
3.1) Аппроксимация начальных условий с первым порядком





3.2) Аппроксимация начальных условий со вторым порядком




**Вывод**

В ходе данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений гиперболического типа: были исследованы различные методы решения начально- краевой задачи, а также была оценена точность и эффективность каждого метода, построен график ошибки от времени и график U(x)

# Лабораторная №3

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров .

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} - 4u,$$

$u(0, y) = \exp(-y)\cos y,$

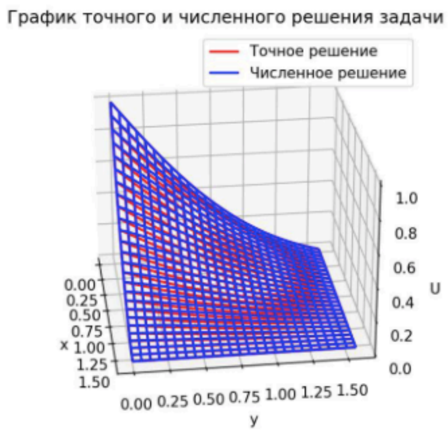
$u(\frac{\pi}{2}, y) = 0,$

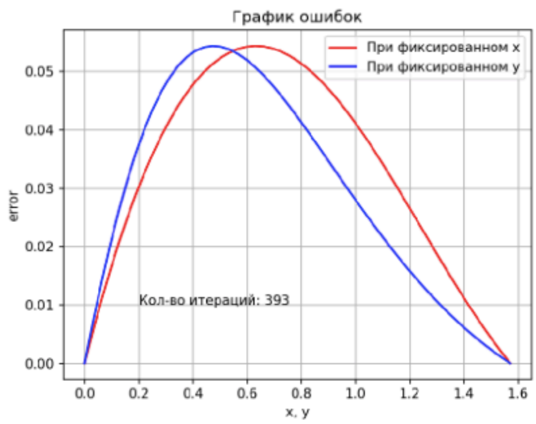
$u(x,0) = \exp(-x)\cos x,$

$u(x, \frac{\pi}{2}) = 0.$

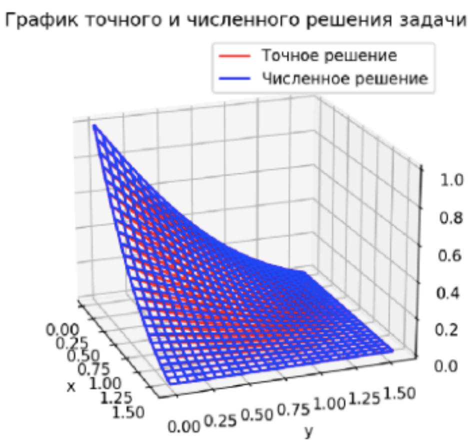
Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(-x-y)\cos x \cos y$.

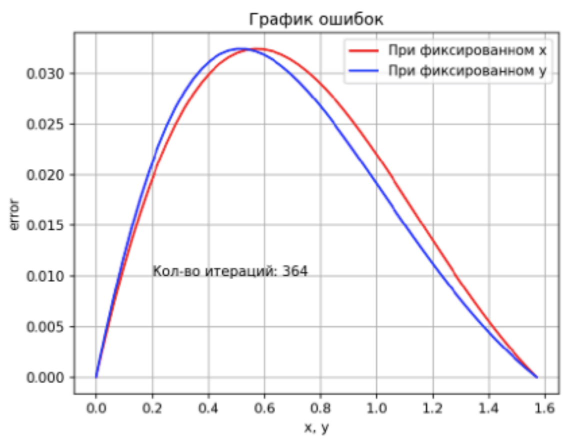
## 1. Метод Либмана



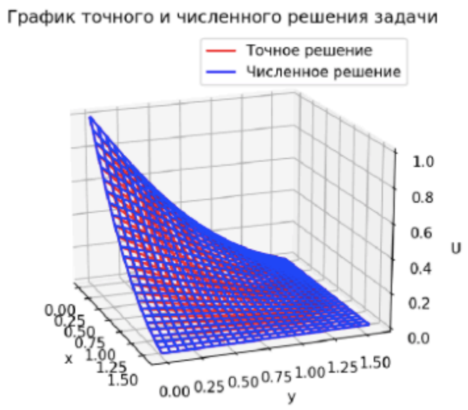



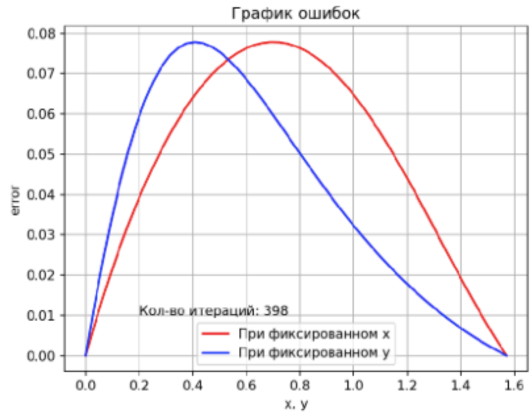

## 2. Метод Зейделя



# 3. Метод простых итераций с верхней релаксацией




**Вывод**

В ходе данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений гиперболического типа: были исследованы различные методы решения начально- краевой задачи, а также была оценена точность и эффективность каждого метода, построен график ошибки от времени и график U(x)

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y(\mu\cos\mu t + (a+b)\sin\mu t),$$

$u(0, y, t) = 0,$

$u_x(\pi, y, t) = -\sin y \sin(\mu t),$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$

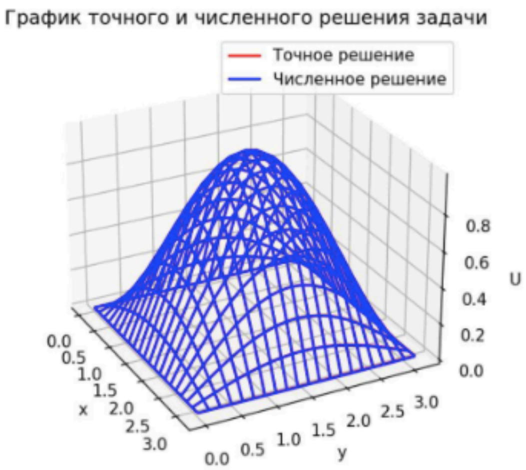
$u(x, y, 0) = 0.$

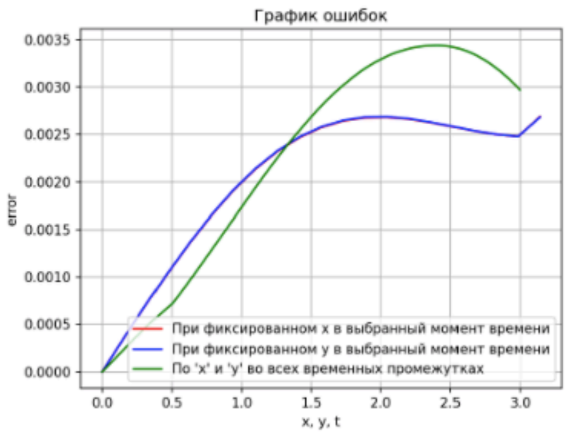
Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.
2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.
3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.
4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.

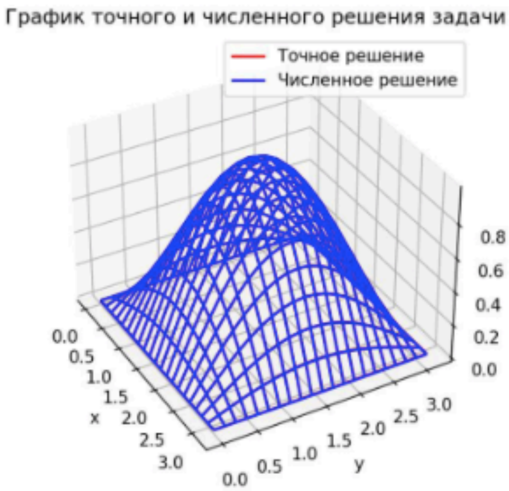
# Лабораторная №4
# 1. Метод переменных направлений

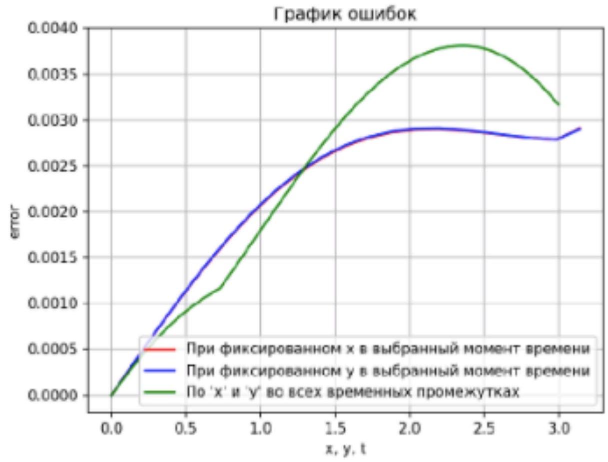
1) $a = 1, b = 1, \mu = 1$



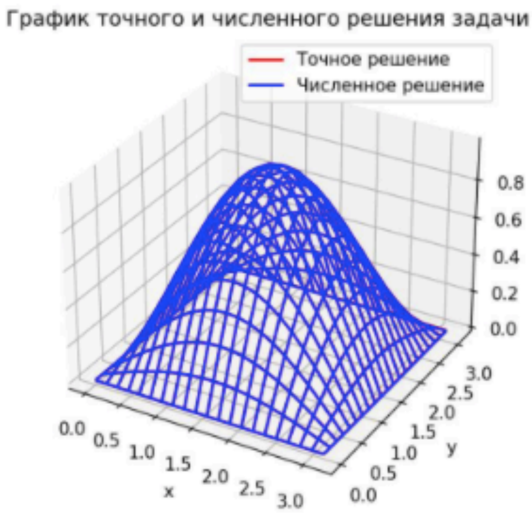



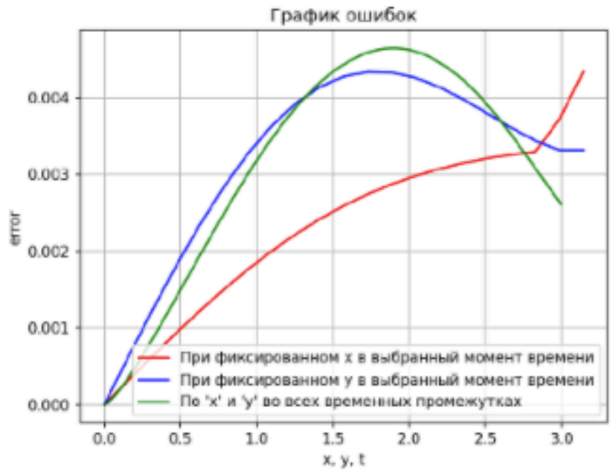
2) $a = 2, b = 1, \mu = 1$



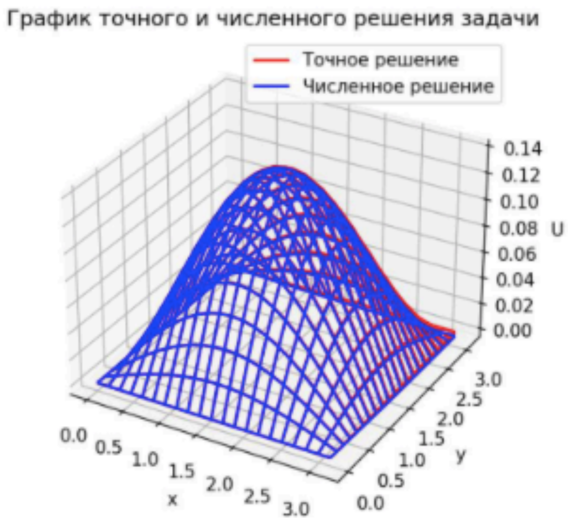



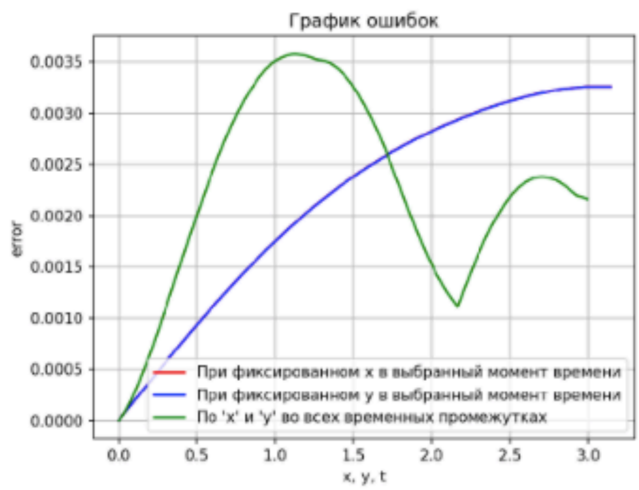

3) $a = 1, b = 2, \mu = 1$



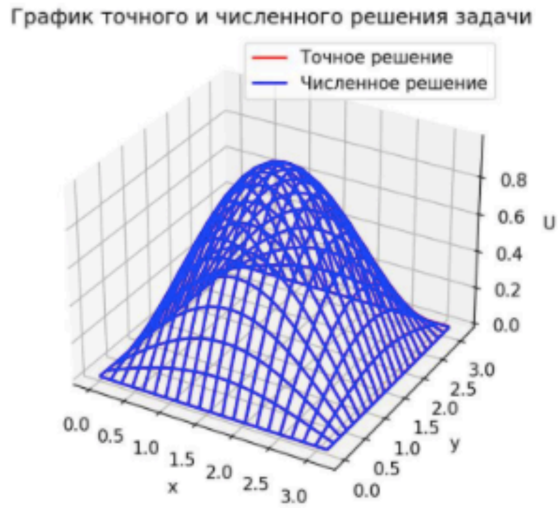

4) $a = 1, b = 1, \mu = 2$

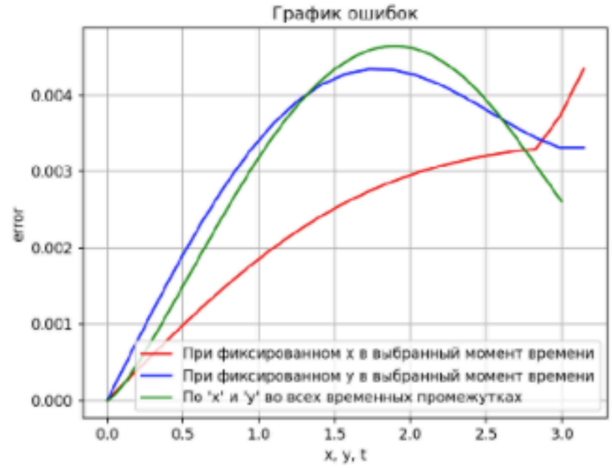


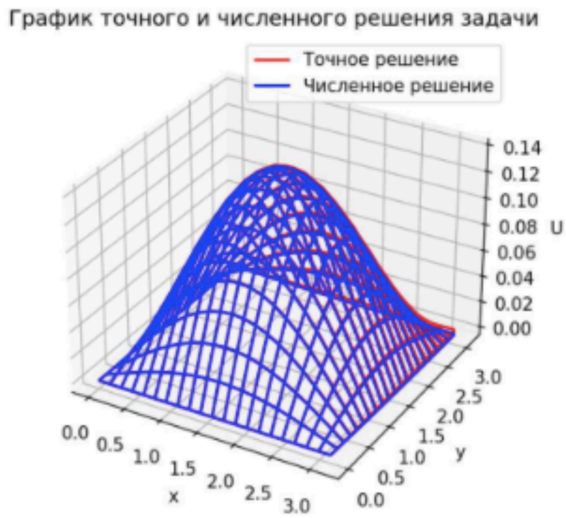
## 2. Метод дробных шагов

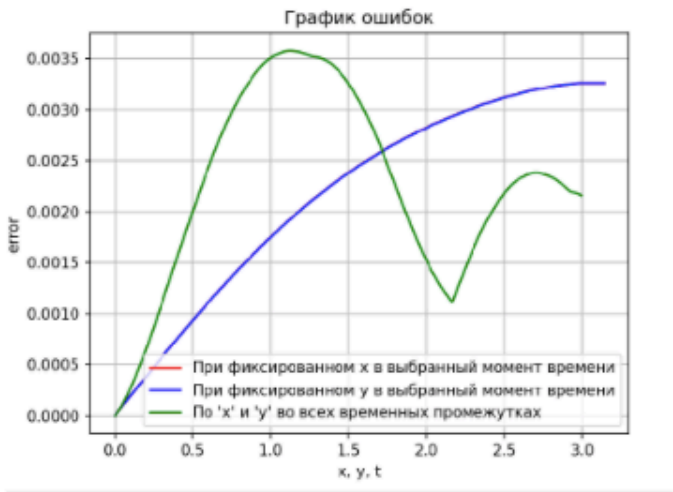
3) $a = 1, b = 2, \mu = 1$




4) $a = 1, b = 1, \mu = 2$




**Вывод**

В ходе данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений гиперболического типа: были исследованы различные методы решения начально- краевой задачи, а также была оценена точность и эффективность каждого метода, построен график ошибки от времени и график U(x)