Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт №8 «Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №5 по курсу «Численные методы»

Студент:	Молчанов Владислав
Группа:	М8О-408Б-20
Преподаватель:	Пивоваров Д.Е.

Москва, 2023

Задание: Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением u(x,t) . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ и h.

Вариант: 16

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cosx(cost + sint)$$

$$\begin{cases} u(0,\ t) = sint \\ u'_x(\pi/2,\ t) = -sint \\ u(x,\ 0) = 0 \end{cases}$$

Аналитическое решение:

$$u(x,t) = sint\cos x$$

Явная и неявная конечно-разностные схемы представляют собой системы уравнений, краевые решения которых заполняются из начальных данных, а значения в середине заполняются по средству вычисления уравнений с одной или несколькими неизвестными.

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2},\ \forall j \in \{1, \dots, N-1\}, \forall k \in \{0, \dots, K-1\}$$

Явная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2},\ \forall j \in \{1, \dots, N-1\}, \forall k \in \{0, \dots, K-1\}$$

Схема Кранка Николсона подразумевает объединение в себе двух предыдущих схем, в следствии чего при подборе необходимого коэффициента, достигается наименьшая погрешность.

Неявная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a\frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} + (1-\theta)a\frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2}$$

Апроксимация первого порядка

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tma(a, b, c, d):
    size = len(a)
    p, q = [], []
    p.append(-c[0] / b[0])
    q.append(d[0] / b[0])
    for i in range(1, size):
        p_tmp = -c[i] / (b[i] + a[i] * p[i - 1])
        q_tmp = (d[i] - a[i] * q[i - 1]) / (b[i] + a[i] * p[i - 1])
        p.append(p_tmp)
        q.append(q_tmp)
    x = [0 for _ in range(size)]
    x[size - 1] = q[size - 1]
    for i in range(size - 2, -1, -1):
        x[i] = p[i] * x[i + 1] + q[i]
```

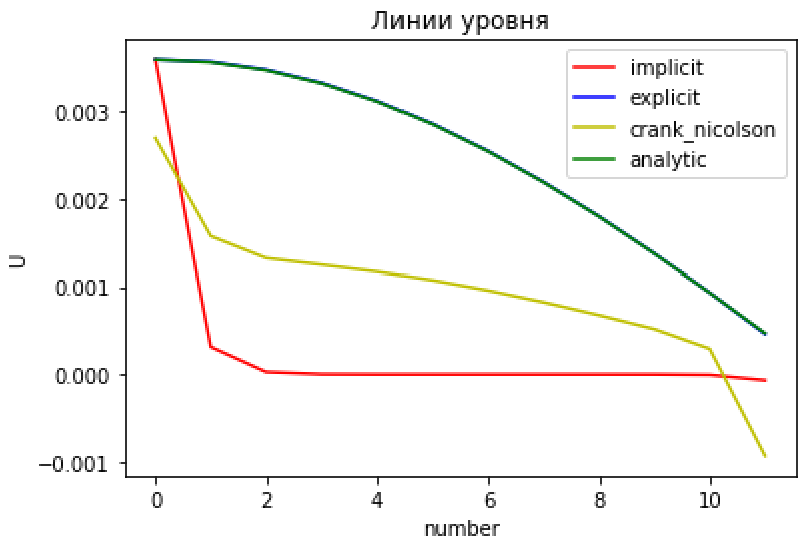
```
    return x


def get_zeros(N, K):
    lst = [np.zeros(N) for _ in range(0, 4)]
    lst.append(np.zeros((K, N)))
    return lst


class Data:
    def __init__(self, args):
        self.l = args['l']
        self.f = args['f']
        self.psi = args['psi']
        self.phi0 = args['phi0']
        self.phi1 = args['phi1']
        self.bound_type = args['bound_type']
        self.solve = args['solution']


class ParabolicSolver:
    def __init__(self, args, N, K, T):
        self.alpha = 0
        self.beta = 1
        self.gamma = 1
        self.delta = 0
        self.data = Data(args)
        self.a = 1
        self.b = 0
        self.c = 0
        self.h = self.data.l / N
        self.tau = T / K
        self.sigma = self.a ** 2 * self.tau / (self.h ** 2)

    def analyticSolve(self, N, K, T):
        self.h = self.data.l / N
        self.tau = T / K
        u = np.zeros((K, N))
        for i in range(K):
            for j in range(N):
                u[i][j] = self.data.solve(j * self.h, i * self.tau)
        return u

    def calculate(self, a, b, c, d, u, k, N, T, K):
        t = np.arange(0, T, T / K)
        for j in range(1, N):
            a[j] = self.sigma
            b[j] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[j] = self.sigma
            d[j] = -u[k][j]

        if self.data.bound_type == 'a1p1':
            a[0] = 0
            b[0] = self.beta - (self.alpha / self.h)
            c[0] = self.alpha / self.h
            d[0] = self.data.phi0(t[k]) / (self.beta - self.alpha / self.h)
            a[-1] = -self.gamma / self.h
            b[-1] = self.gamma / self.h + self.delta
            c[-1] = 0
            d[-1] = self.data.phi1(t[k]) / (self.gamma / self.h + self.delta
        elif self.data.bound_type == 'a1p2':
            a[0] = 0
            b[0] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[0] = self.sigma
```

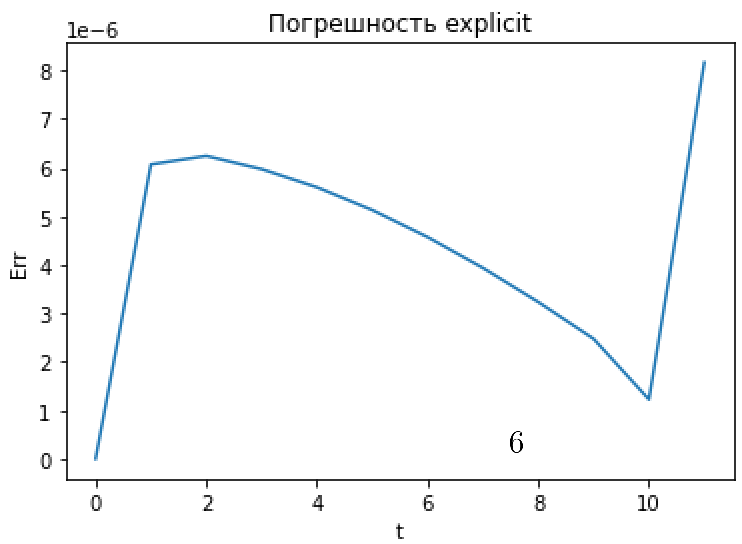
```
            d[0] = -(u[k - 1][0] + self.sigma * self.data.phi0(k * self.tau)
                   self.tau * self.data.f(0, k * self.tau)
            a[-1] = self.sigma
            b[-1] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[-1] = 0
            d[-1] = -(u[k - 1][-1] + self.sigma * self.data.phi1(k * self.ta
                    self.tau * self.data.f((N - 1) * self.h, k * self.tau)
        elif self.data.bound_type == 'a1p3':
            a[0] = 0
            b[0] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[0] = self.sigma
            d[0] = -((1 - self.sigma) * u[k - 1][1] + self.sigma / 2 * u[k -
                   * self.data.f(0, k * self.tau) - self.sigma * self.data.p
                k * self.tau)
            a[-1] = self.sigma
            b[-1] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[-1] = 0
            d[-1] = self.data.phi1(k * self.tau) + self.data.f((N - 1) * sel
                    * self.h / (2 * self.tau) * u[k - 1][-1]

    def implicit_solver(self, N, K, T):
        lst = get_zeros(N, K)
        a = lst[0]
        b = lst[1]
        c = lst[2]
        d = lst[3]
        u = lst[4]

        for i in range(1, N - 1):
            u[0][i] = self.data.psi(i * self.h)
        u[0][-1] = 0

        for k in range(1, K):
            self.calculate(a, b, c, d, u, k, N, T, K)
            u[k] = tma(a, b, c, d)

        return u

    def explicit_solver(self, N, K, T):
        u = np.zeros((K, N))
        t = np.arange(0, T, T / K)
        x = np.arange(0, np.pi / 2, np.pi / 2 / N)
        for j in range(1, N - 1):
            u[0][j] = self.data.psi(j * self.h)

        for k in range(1, K):
            for j in range(1, N - 1):
                  u[k][j] = (u[k - 1][j + 1] * (self.a ** 2.0 * self.tau / s
                           - 2 * u[k - 1][j] * (self.a ** 2.0 * self.tau / s
                           + u[k - 1][j - 1] * (self.a ** 2.0 * self.tau / s
                           + u[k - 1][j]
                           + self.tau * self.data.f(x[j], t[k]))

            if self.data.bound_type == 'a1p1':
                u[k][0] = self.data.phi0(t[k])
                u[k][-1] = (self.data.phi1(t[k]) + self.gamma / self.h * u[k
            elif self.data.bound_type == 'a1p2':
                u[k][0] = self.data.phi0(t[k])
                u[k][-1] = (((2.0 * self.gamma * self.a / self.h / (2.0 * se
                            (self.gamma * self.h / self.tau / (2.0 * self.a
                            (self.gamma * self.h * self.c / (2.0 * self.a +
                           self.data.l, t[k]) + self.data.phi1(t[k])) / (
                                   (2.0 * self.gamma * self.a / self.h / (2
                                  self.gamma * self.h / self.tau / (2.0 *
```

4

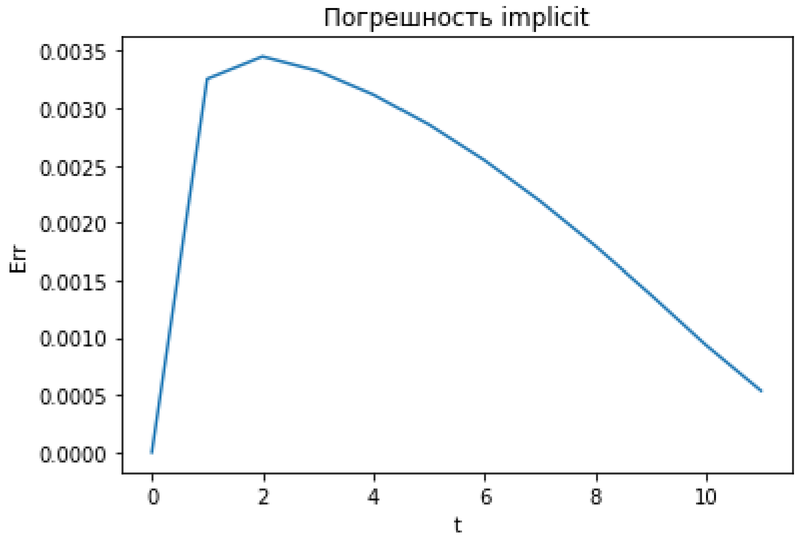
```
                                        self.gamma * self.h * self.c / (
                                        2.0 * self.a + self.h * self.b))
            elif self.data.bound_type == 'a1p3':
                u[k][0] = self.data.phi0(t[k])
                u[k][-1] = (self.data.phi1(k * self.tau) + u[k][-2] / self.h
                           (1 / self.h + 2 * self.tau / self.h)
        return u

    def crank_nicolson_solver(self, N, K, T):
        theta = 0.5
        lst = get_zeros(N, K)
        a = lst[0]
        b = lst[1]
        c = lst[2]
        d = lst[3]
        u = lst[4]
        for i in range(1, N - 1):
            u[0][i] = self.data.psi(i * self.h)

        for k in range(1, K):
            self.calculate(a, b, c, d, u, k, N, T, K)

            tmp_imp = tma(a, b, c, d)

            tmp_exp = np.zeros(N)
            tmp_exp[0] = self.data.phi0(self.tau)
            for j in range(1, N - 1):
                tmp_exp[j] = self.sigma * u[k - 1][j + 1] + (1 - 2 * self.si
                             self.sigma * u[k - 1][j - 1] + self.tau * self.
            tmp_exp[-1] = self.data.phi1(self.tau)

            for j in range(N):
                u[k][j] = theta * tmp_imp[j] + (1 - theta) * tmp_exp[j]

        return u


def compare_error(dict_):
    error = [[abs(i - j) for i, j in zip(x, y)] for x, y in zip(dict_['numer
    return error


def presontation(dict_, time=0):
    fig = plt.figure()
    plt.title('Линии уровня')
    plt.plot(dict_['implicit'][time], color='r', label='implicit')
    plt.plot(dict_['explicit'][time], color='b', label='explicit')
    plt.plot(dict_['crank_nicolson'][time], color='y', label='crank_nicolson
    plt.plot(dict_['analytic'][time], color='g', label='analytic')
    plt.legend(loc='best')
    plt.ylabel('U')
    plt.xlabel('number')
    plt.show()

    plt.title('Погрешность explicit')
    plt.plot(abs(dict_['explicit'][time] - dict_['analytic'][time]))
    plt.ylabel('Err')
    plt.xlabel('t')
    plt.show()

    plt.title('Погрешность implicit')
    plt.plot(abs(dict_['implicit'][time] - dict_['analytic'][time]))
    plt.ylabel('Err')
    plt.xlabel('t')
```

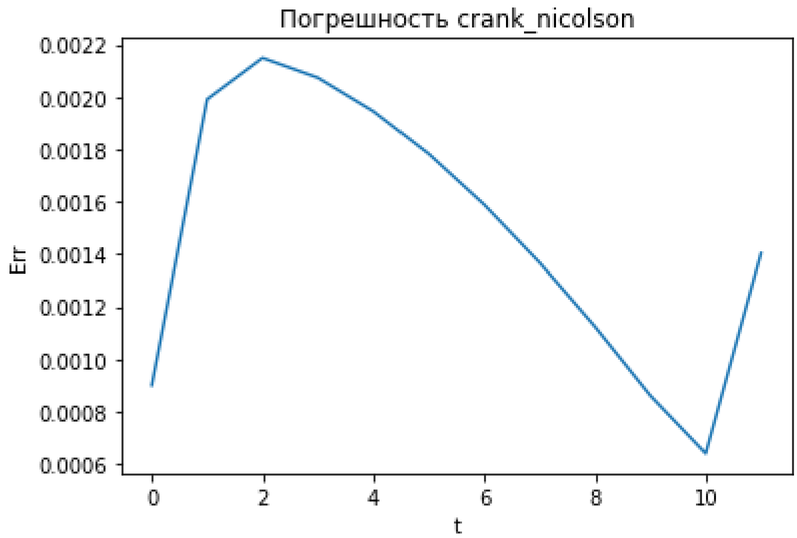
```
    plt.show()

    plt.title('Погрешность crank_nicolson')
    plt.plot(abs(dict_['crank_nicolson'][time] - dict_['analytic'][time]))
    plt.ylabel('Err')
    plt.xlabel('t')
    plt.show()


N, K, T = 12, 10000, 18
args = {
    'l': np.pi / 2,
    'psi': lambda x: 0,
    'f': lambda x, t: np.cos(x) * (np.cos(t) + np.sin(t)),
    'phi0': lambda t: np.sin(t),
    'phi1': lambda t: -np.sin(t),
    'solution': lambda x, t: np.sin(t) * np.cos(x),
    'bound_type': 'a1p1'
}
solver = ParabolicSolver(args, N, K, T)
dict_ans = {
    'implicit': solver.implicit_solver(N, K, T),
    'explicit': solver.explicit_solver(N, K, T),
    'crank_nicolson': solver.crank_nicolson_solver(N, K, T),
    'analytic': solver.analyticSolve(N, K, T)
}
presontation(dict_ans, 2)
```





6

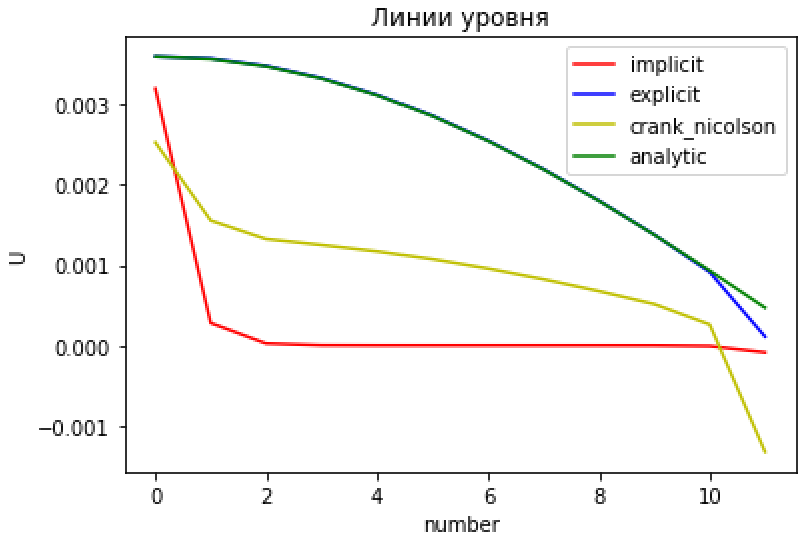


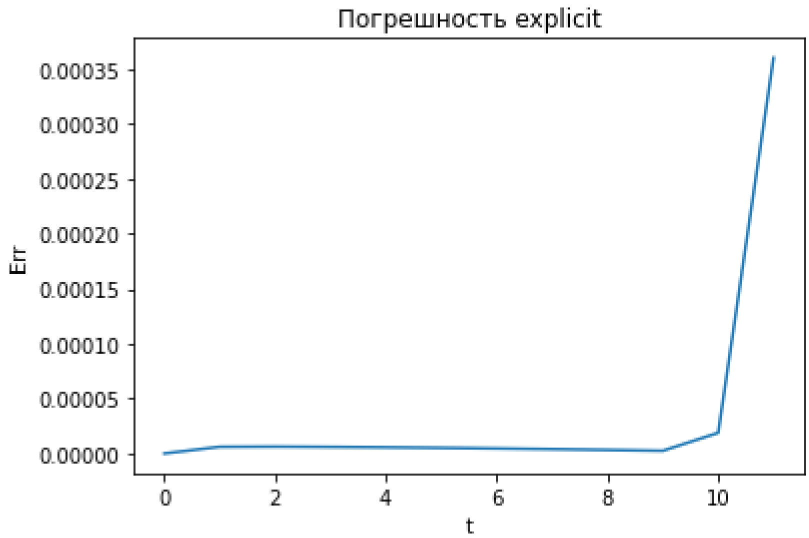


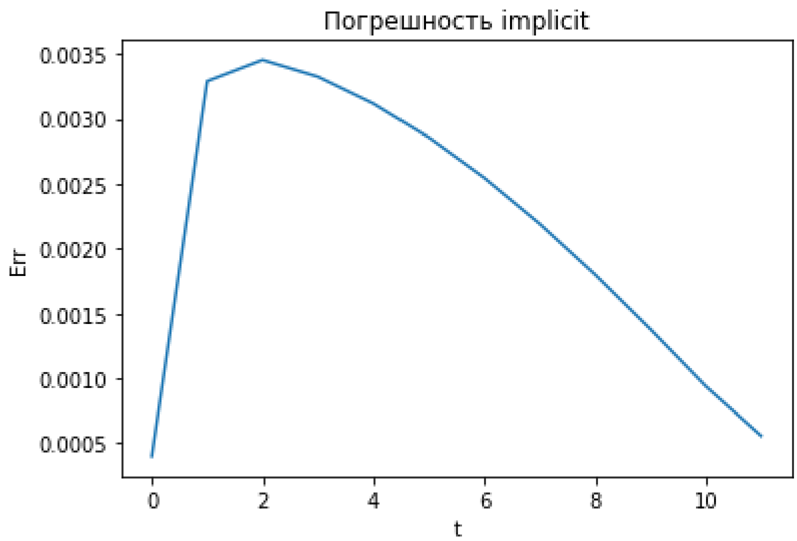
Апроксимация 3-х точечная второго порядка

In [ ]:

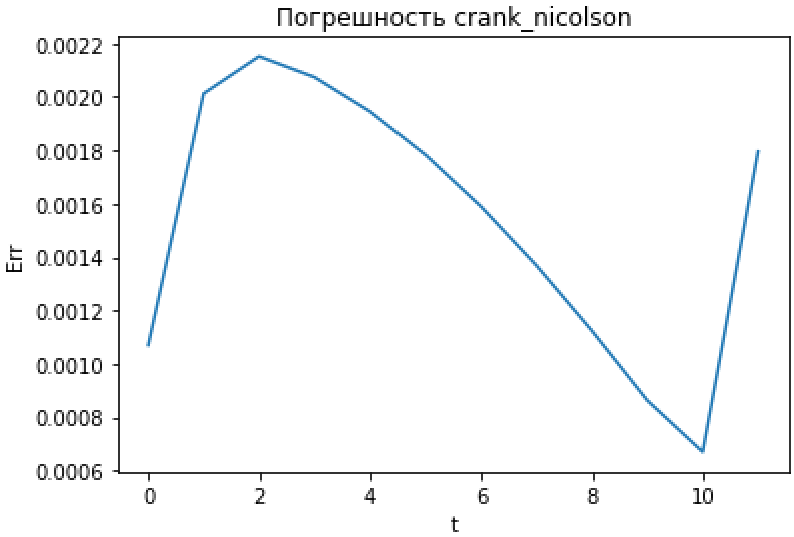
```
N, K, T = 12, 10000, 18
args = {
    'l': np.pi / 2,
    'psi': lambda x: 0,
    'f': lambda x, t: np.cos(x) * (np.cos(t) + np.sin(t)),
    'phi0': lambda t: np.sin(t),
    'phi1': lambda t: -np.sin(t),
    'solution': lambda x, t: np.sin(t) * np.cos(x),
    'bound_type': 'a1p2'
}
solver = ParabolicSolver(args, N, K, T)
dict_ans = {
    'implicit': solver.implicit_solver(N, K, T),
    'explicit': solver.explicit_solver(N, K, T),
    'crank_nicolson': solver.crank_nicolson_solver(N, K, T),
    'analytic': solver.analyticSolve(N, K, T)
}
presontation(dict_ans, 2)
```


Линии уровня
implicit
explicit
crank_nicolson
analytic
U
number
0.003
0.002
0.001
0.000
−0.001
0
2
4
6
8
10


Погрешность explicit
Err
t
0.00035
0.00030
0.00025
0.00020
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
0
2
4
6
8
10


Погрешность implicit
Err
t
0.0035
0.0030
0.0025
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0
2
4
6
8
10

8

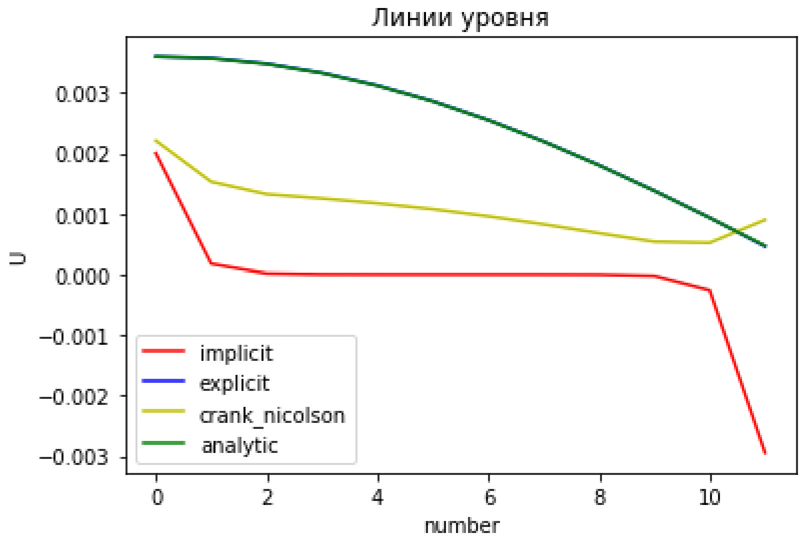


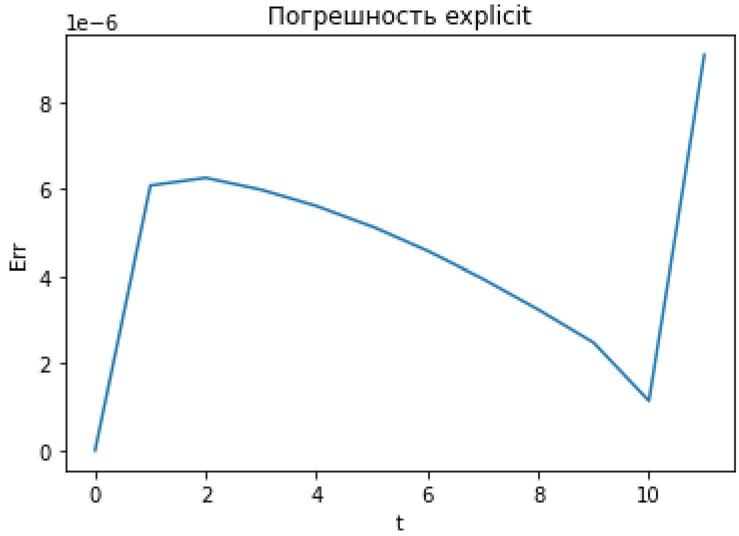
В качестве результата я получаю графики линий уровня U. Они наиболее наглядно показывают точность методов, и в каких промежутках какой метод будет эффективен, а какой нет. Также я вывожу графики модуля ошибки каждого метода. Исследование зависимости погрешности от параметров находится в одном файле с исходным кодом.

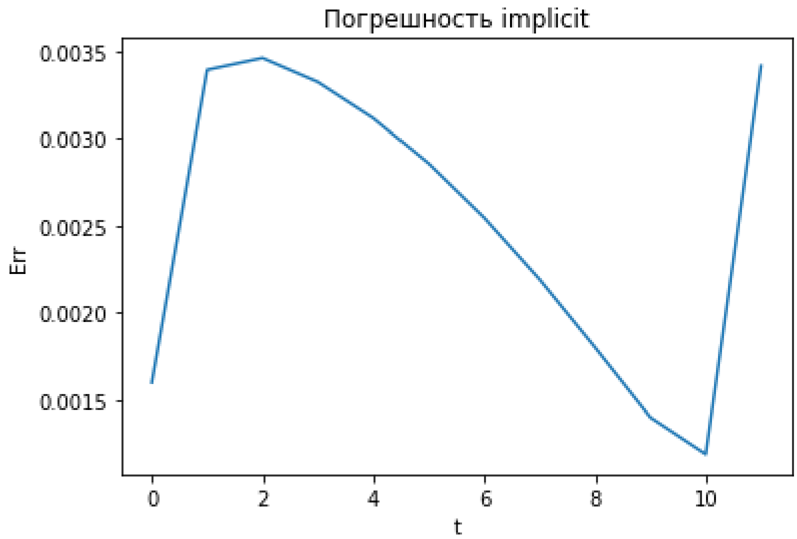
Апроксимация 2-х точечная 2 порядка

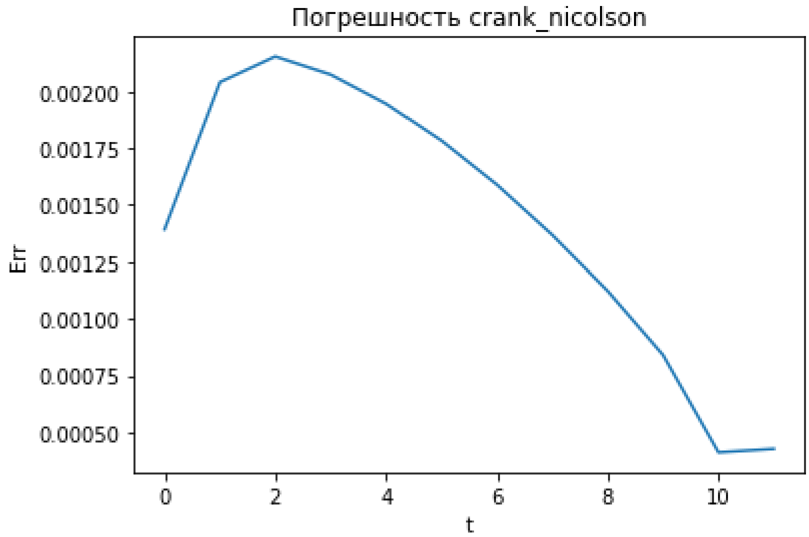
In [ ]:
```
N, K, T = 12, 10000, 18
args = {
    'l': np.pi / 2,
    'psi': lambda x: 0,
    'f': lambda x, t: np.cos(x) * (np.cos(t) + np.sin(t)),
    'phi0': lambda t: np.sin(t),
    'phi1': lambda t: -np.sin(t),
    'solution': lambda x, t: np.sin(t) * np.cos(x),
    'bound_type': 'a1p3'
}
solver = ParabolicSolver(args, N, K, T)
dict_ans = {
    'implicit': solver.implicit_solver(N, K, T),
    'explicit': solver.explicit_solver(N, K, T),
    'crank_nicolson': solver.crank_nicolson_solver(N, K, T),
    'analytic': solver.analyticSolve(N, K, T)
}
presontation(dict_ans, 2)
```

```
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:99: RuntimeWarning: overflow encountered in d
ouble_scalars
  d[-1] = self.data.phi1(k * self.tau) + self.data.f((N - 1) * self.h, k * s
elf.tau) \
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:11: RuntimeWarning: invalid value encountered
in double_scalars
  q_tmp = (d[i] - a[i] * q[i - 1]) / (b[i] + a[i] * p[i - 1])
```


Линии уровня
0.003
0.002
0.001
0.000
−0.001
−0.002
−0.003
U
implicit
explicit
crank_nicolson
analytic
0
2
4
6
8
10
number

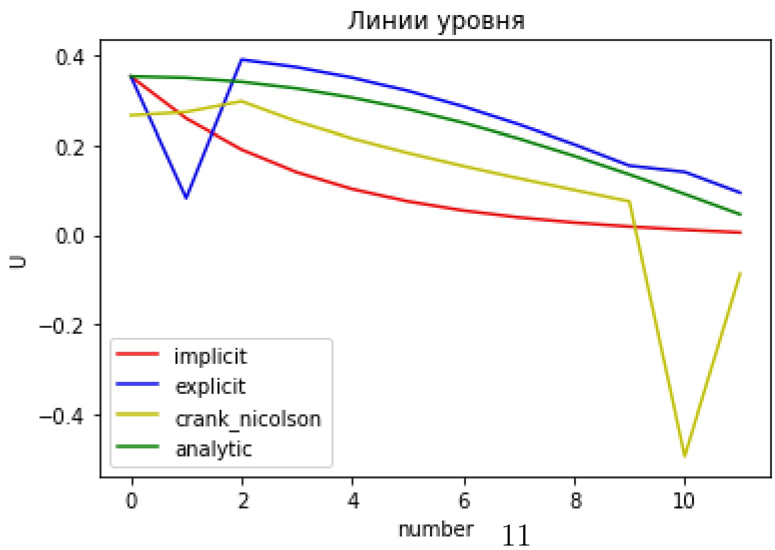

Погрешность explicit
1e−6
8
6
4
2
0
Err
0
2
4
6
8
10
t


Погрешность implicit
0.0035
0.0030
0.0025
0.0020
0.0015
Err
0
2
4
6
8
10
t

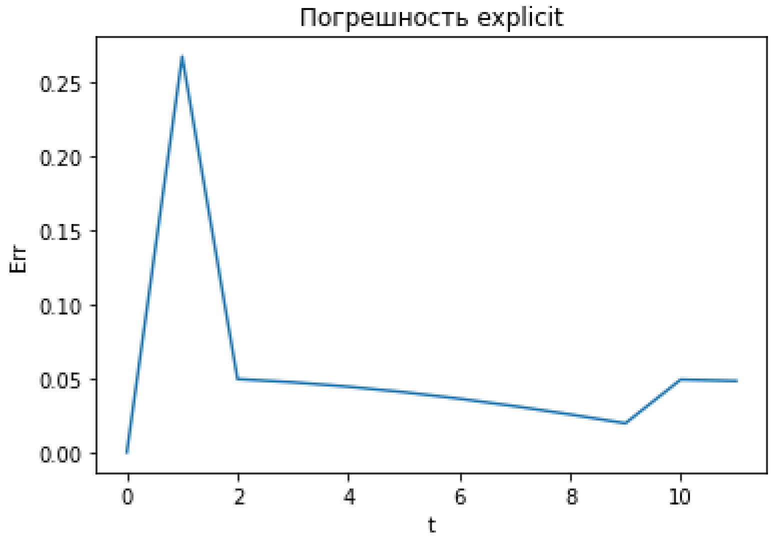


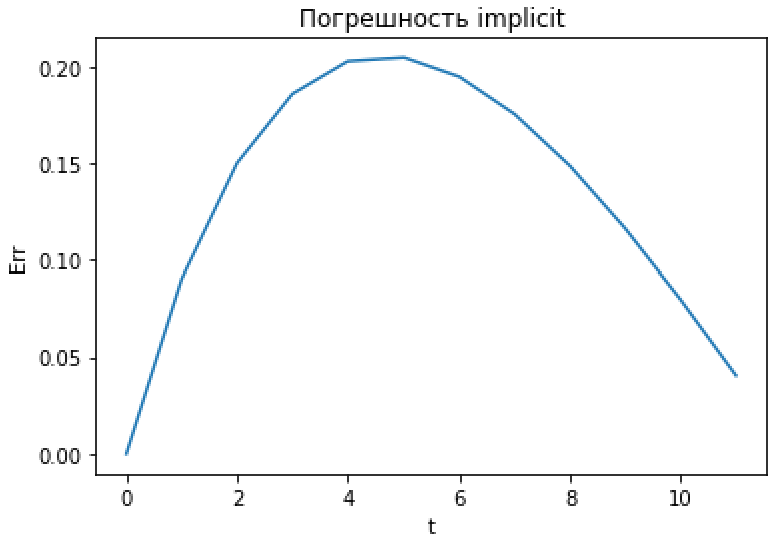
Исследование зависимости погрешности от величина tau и h

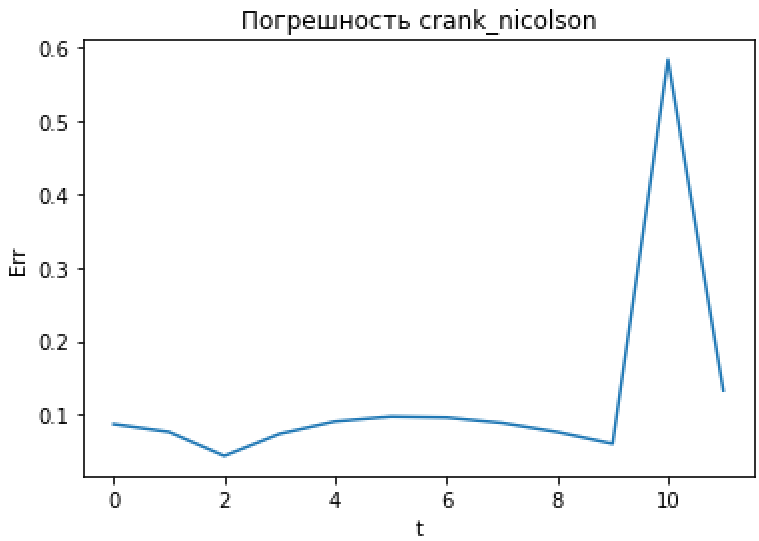
In [ ]:
```
N, K, T = 12, 100, 18
args = {
    'l': np.pi / 2,
    'psi': lambda x: 0,
    'f': lambda x, t: np.cos(x) * (np.cos(t) + np.sin(t)),
    'phi0': lambda t: np.sin(t),
    'phi1': lambda t: -np.sin(t),
    'solution': lambda x, t: np.sin(t) * np.cos(x),
    'bound_type': 'a1p1'
}
solver = ParabolicSolver(args, N, K, T)
dict_ans = {
    'implicit': solver.implicit_solver(N, K, T),
    'explicit': solver.explicit_solver(N, K, T),
    'crank_nicolson': solver.crank_nicolson_solver(N, K, T),
    'analytic': solver.analyticSolve(N, K, T)
}
presontation(dict_ans, 2)
```



11





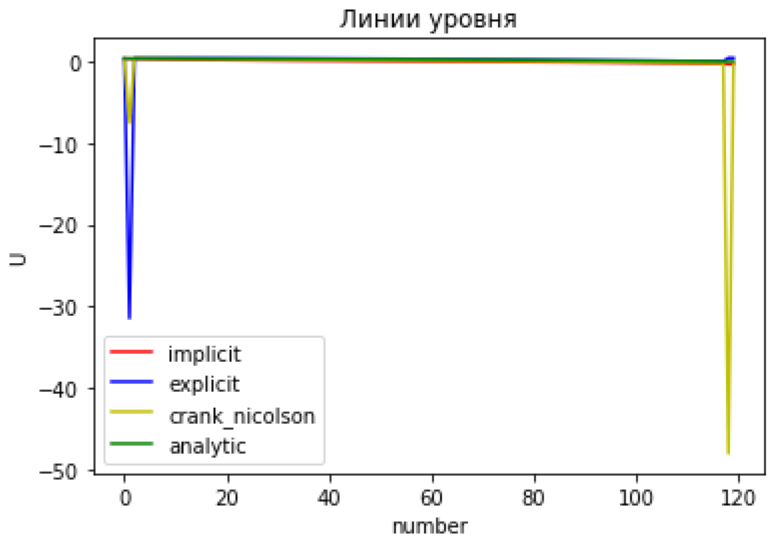


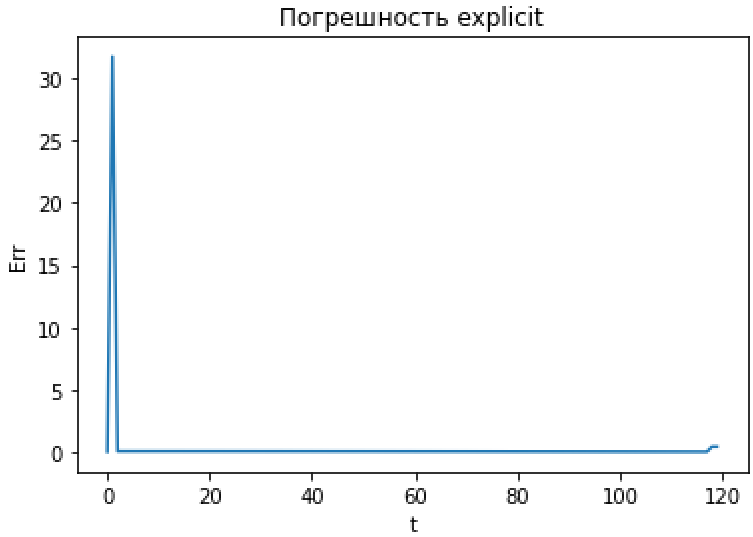
In [ ]:

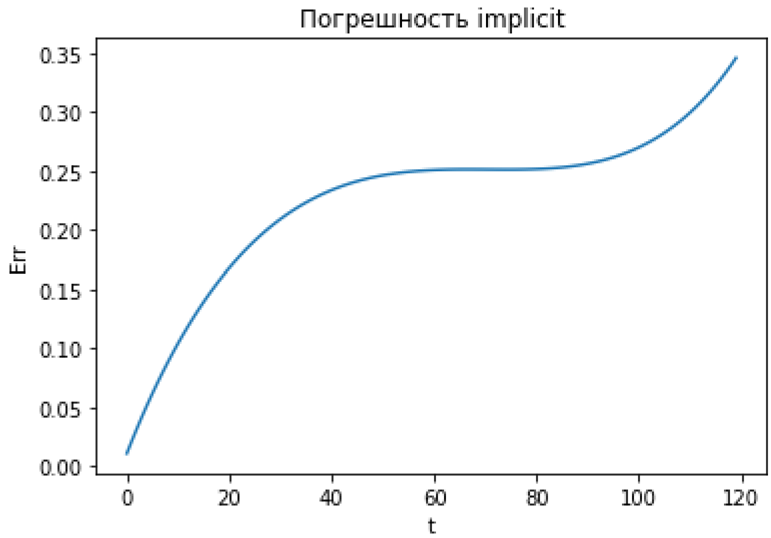
```
N, K, T = 120, 100, 18
args = {
    'l': np.pi / 2,
    'psi': lambda x: 0,
    'f': lambda x, t: np.cos(x) * (np.cos(t) + np.sin(t)),
    'phi0': lambda t: np.sin(t),
    'phi1': lambda t: -np.sin(t),
    'solution': lambda x, t: np.sin(t) * np.cos(x),
    'bound_type': 'a1p2'
}
solver = ParabolicSolver(args, N, K, T)
```

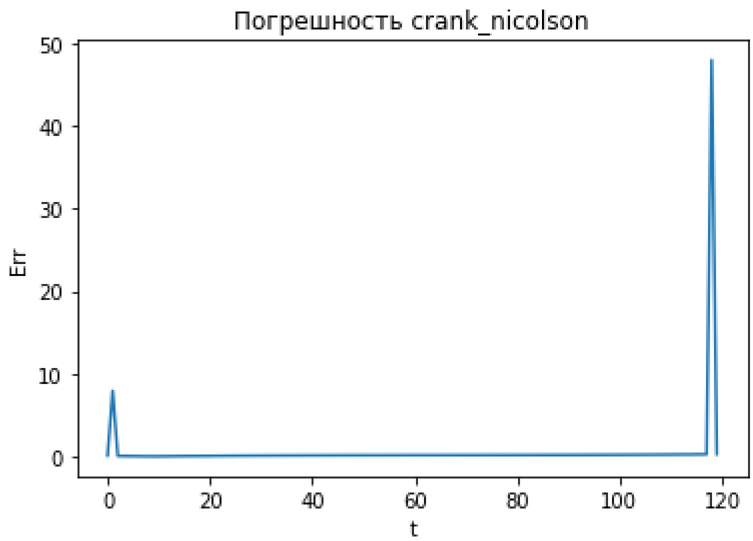
```
dict_ans = {
    'implicit': solver.implicit_solver(N, K, T),
    'explicit': solver.explicit_solver(N, K, T),
    'crank_nicolson': solver.crank_nicolson_solver(N, K, T),
    'analytic': solver.analyticSolve(N, K, T)
}
presontation(dict_ans, 2)
```

```
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:129: RuntimeWarning: overflow encountered in
double_scalars
  u[k][j] = (u[k - 1][j + 1] * (self.a ** 2.0 * self.tau / self.h ** 2.0)
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:130: RuntimeWarning: overflow encountered in
double_scalars
  - 2 * u[k - 1][j] * (self.a ** 2.0 * self.tau / self.h ** 2.0)
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:131: RuntimeWarning: overflow encountered in
double_scalars
  + u[k - 1][j - 1] * (self.a ** 2.0 * self.tau / self.h ** 2.0)
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:140: RuntimeWarning: overflow encountered in
double_scalars
  u[k][-1] = (((2.0 * self.gamma * self.a / self.h / (2.0 * self.a + self.h
* self.b)) * u[k][-2] +
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:129: RuntimeWarning: invalid value encountere
d in double_scalars
  u[k][j] = (u[k - 1][j + 1] * (self.a ** 2.0 * self.tau / self.h ** 2.0)
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:173: RuntimeWarning: overflow encountered in
double_scalars
  tmp_exp[j] = self.sigma * u[k - 1][j + 1] + (1 - 2 * self.sigma) * u[k -
1][j] + \
<ipython-input-5-d6f3e8f2fdcc>:174: RuntimeWarning: overflow encountered in
double_scalars
  self.sigma * u[k - 1][j - 1] + self.tau * self.data.f(j * self.h, k * sel
f.tau)
```




Погрешность explicit
Err
t
0
5
10
15
20
25
30
0
20
40
60
80
100
120


Погрешность implicit
Err
t
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0
20
40
60
80
100
120


Погрешность crank_nicolson
Err
t
0
10
20
30
40
50
0
20
40
60
80
100
120

Вывод

Как видно из графиков погрешности, в первую очередь на неё влияет веоичина параметра tau (чем она меньше, тем погрешность ниже), а вот количество шагов h у меня оказывает негативное влияние, увеличивая погрешность многократно

Отдельно стоит отметить, что конечно-разностные схемы для решения уравнений параболического типа имеют высокую точность и, при достаточной мелкости tau, способны достигать настолько маленькую погрешность, что ей можно будет пренебречь при решении реальных задач математической физики.