

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики
Кафедра вычислительной математики и программирования

Отчет по лабораторной работе
№7 по курсу «Численные методы»

Дата: 25.11.2023

Задание: Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y .

Вариант:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u_x(0, y) = 0;$$

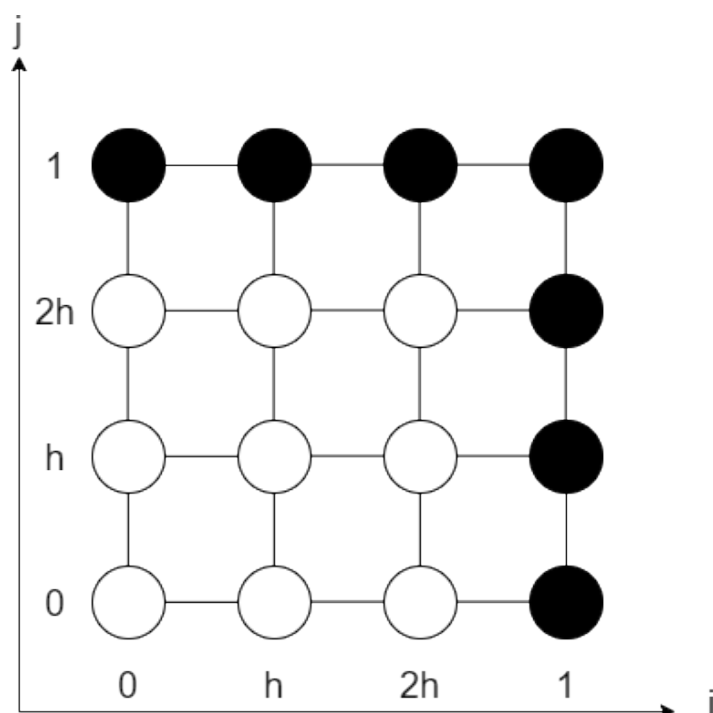
$$u(1, y) = 1 - y^2,$$

$$u_y(x, 0) = 0;$$

$$u(x, 1) = x^2 - 1$$

$$U = x^2 + y^2$$

Решение: Рассмотрим решение данной задачи на примере, для случая $N_x = N_y = 3$.



$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + O(h_x^2) + O(h_y^2) = 0. \quad (1)$$

СЛАУ, содержащая $(N_x + 1)(N_y + 1)$ уравнений относительно неизвестных

[illegible]

[illegible]

```
private void CRS()
{
    double h = 1 / N;
    double[, ] u = new double[K + 1, N + 1];
    double[, ] matr = new double[(N + 1) * (N + 1), (N + 1) * (N
+ 1)]; double[] d = new double[(N + 1) * (N + 1)];
    for (int j = 0; j <= N - 1; j++)
    {
        matr[j, j] = -1; matr[j, N + 1 + j] = 1;
    }
    matr[N, N] = 1; d[N] = - 1;
    matr[(N + 1) * (N + 1) - 1, (N + 1) * (N + 1) - 1] = 1; d[(N + 1) * (N + 1) - 1] =
0;
    for (int j = (N+1)*(N+1)-2; j > (N + 1) * (N + 1) - N - 2; j--)
    {
        matr[j, j] = 1;
        d[j] = 1 - Math.Pow(h * (j - (N + 1) * (N + 1) + N + 1), 2);
    }
    for (int i = 1; i <= N - 1; i++)
    {
```

```

    matr[(N + 1) * i, (N + 1) * i] = -1;
    matr[(N + 1) * i, (N + 1) * i + 1] = 1;
    matr[(N + 1) * i + N, (N + 1) * i + N] =
1;
    d[(N + 1) * i + N] = Math.Pow(h * i, 2)
- 1; for (int j = 1; j <= N - 1; j++)
    {
        matr[(N + 1) * i + j, (N + 1) * i - N - 1 + j] = 1;

        matr[(N + 1) * i + j, (N + 1) * i + N + 1 + j] =
1;

        matr[(N + 1) * i + j, (N + 1) * i + j] = -4;

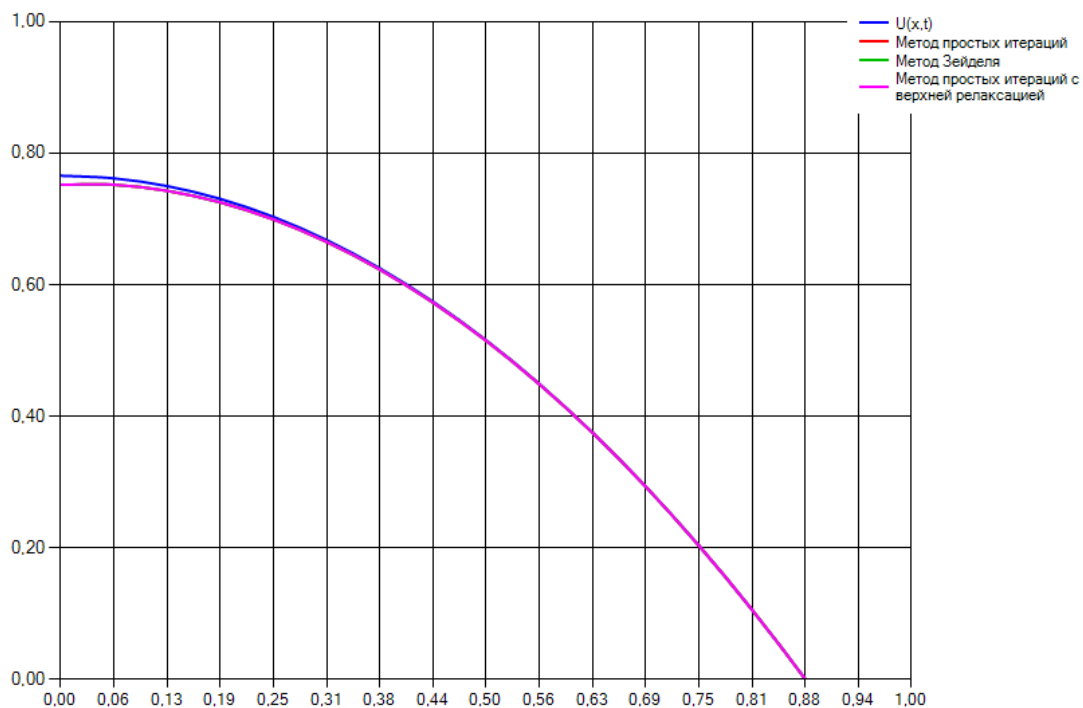
        matr[(N + 1) * i + j, (N + 1) * i - 1 + j] =
1;

        matr[(N + 1) * i + j, (N + 1) * i + 1 + j] =
1;

    }
}
double[] xP = Prost(matr, d);
double[] xZ = Zeydel(matr, d);
double[] xPU = ProstUpgrade(matr,
d); for (int i = 0; i < N + 1; i++)
{
    for (int j = 0; j < N + 1; j++)
    {
        U[i, j] = xP[(N + 1) * i + j];
        dt[i] += Math.Abs(U[i, j] - f(h * i, h *
j)); U2[i, j] = xZ[(N + 1) * i + j];
        dt2[i] += Math.Abs(U2[i, j] - f(h * i, h *
j)); U3[i, j] = xPU[(N + 1) * i + j];
        dt3[i] += Math.Abs(U3[i, j] - f(h * i, h * j));
    }
}
Console.Write(Pcount + "\t" + Zcount + "\t" +
PUcount); Console.WriteLine();
}

```

Результаты:



Значение X:

0,875

Погрешность:

☒ Срез по X ☐ Срез по Y ☐ Срез по U

Метод простых итераций:

0,002917042251129

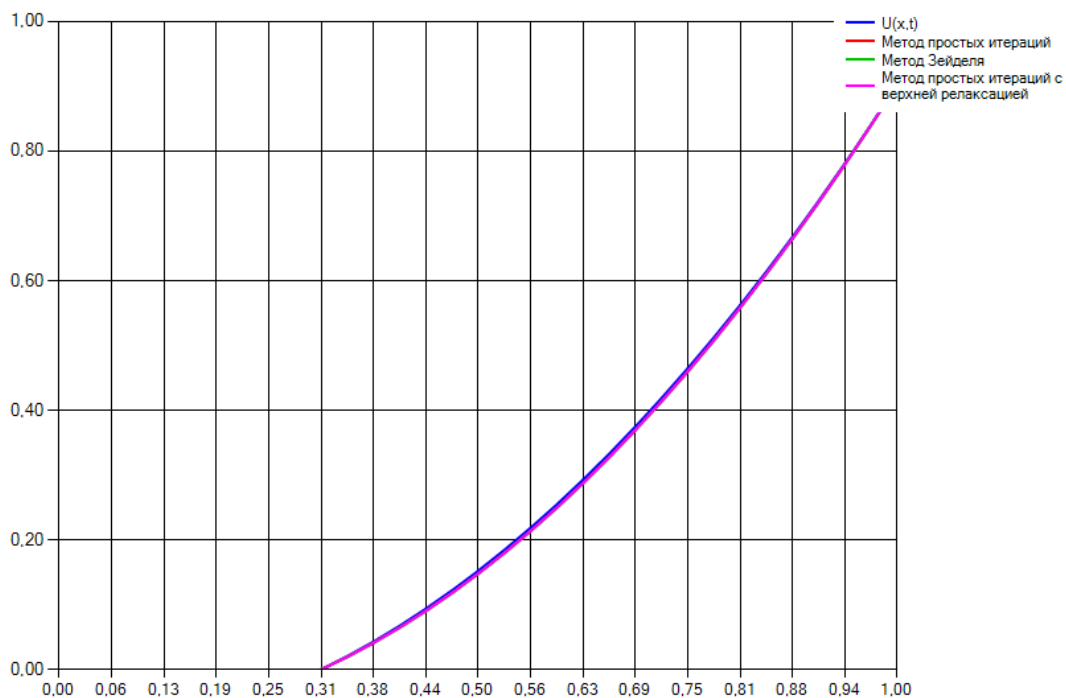
Метод Зейделя:

0,002874268161058

Метод простых итераций с верхней релаксацией:

0,0028393027898

Расчитать



Значение Y:

0,3125

Погрешность:

☐ Срез по X ☒ Срез по Y ☐ Срез по U

Метод простых итераций:

0,004802885665641

Метод Зейделя:

0,009477415464184

Метод простых итераций с верхней релаксацией:

0,009344959222104

Расчитать

Вывод: Мной было реализовано решение краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа, с использованием центрально-разностной схемы и применяя следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией, а также вычислена погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением.