

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №7

по курсу «Численные методы»

Студент: Лябина М.А.
Группа: М8О-409Б-20
Преподаватель: Пивоваров Д.Е.
Дата:
Оценка:
Подпись

Москва, 2023

Задание

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y .

Вариант 8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$u(0, y) = \cos y,$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(-x) \cos x \cos y$.

Теория

Центрально-разностная схема:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{4}$$

Метод простых итераций (метод Либмана):

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k}{4}$$

Метод Зейделя:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k}{4}$$

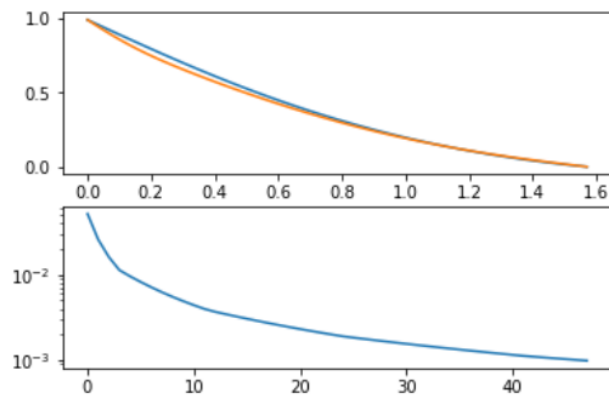
Метод простых итераций с верхней релаксацией:

$$u_{i,j}^{k+1} = \omega \cdot \frac{u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k}{4} + (1 - \omega) \cdot u_{i,j}^k$$

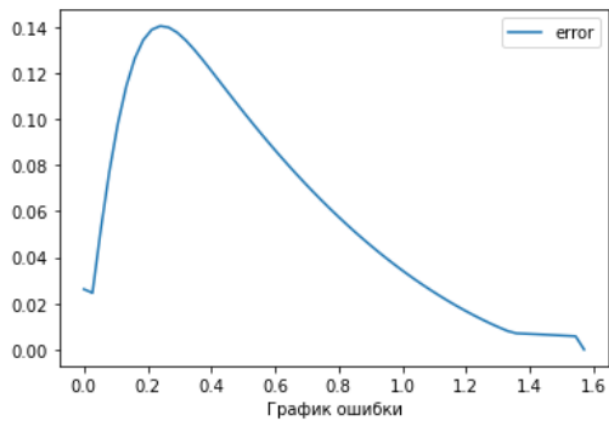
Был взят диапазон значений параметра ω в пределах от 0 до 1, так как при больших значениях метод не сходится, и ошибка уходит в бесконечность. Поэтому было принято решение реализовать метод нижней релаксации, где при значении параметра $\omega = 1$ получается метод Либмана.

Вывод программы:

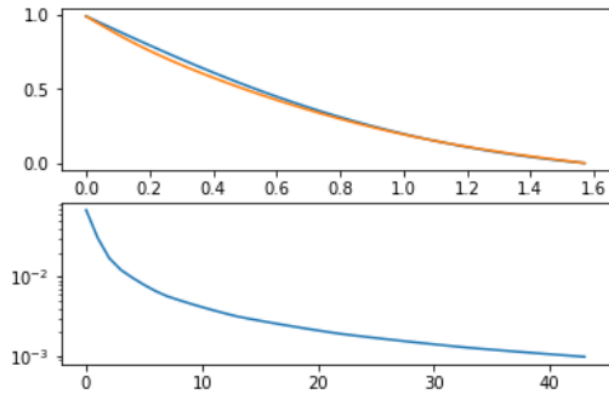
Метод простых итераций (метод Либмана):



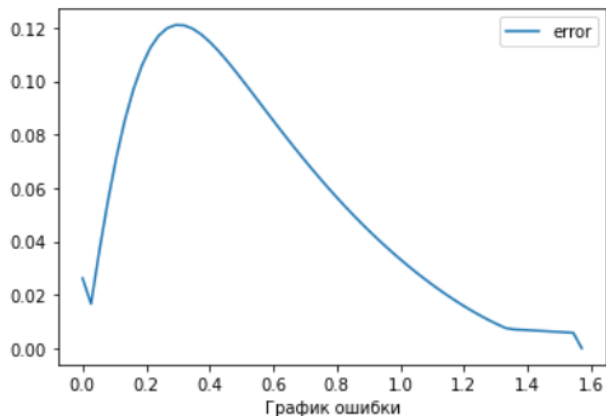
максимальная ошибка = 0.1403483774364367



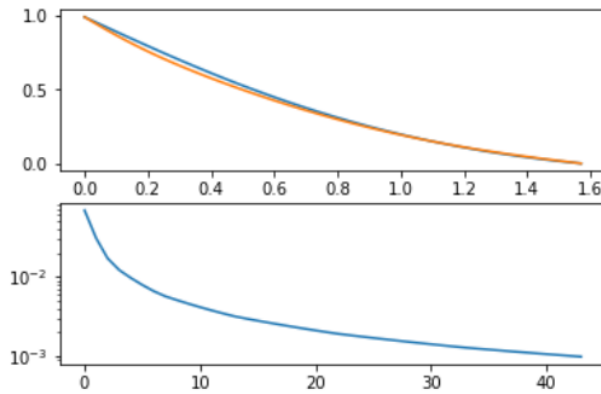
Метод Зейделя:



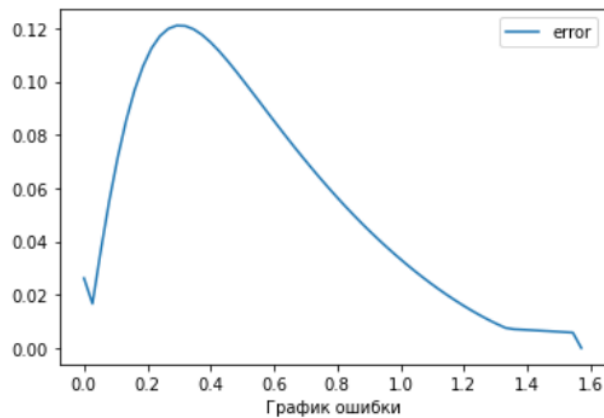
максимальная ошибка = 0.12104484264164794



Метод простых итераций с верхней релаксацией:



максимальная ошибка = 0.12104484264164794



Вывод:

В ходе данной лабораторной работы была решена краевая задача для дифференциального уравнения эллиптического типа. Была произведена аппроксимация уравнения с использованием центрально-разностной схемы. Были применены и реализованы следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. При более мелких разбиениях сеточных параметров h_x, h_y время выполнения программы возрастает значительно, ввиду квадратичной асимптотической сложности. Была вычислена погрешность численного решения.