

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»  
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

# **Лабораторная работа №5**

по курсу «Численные методы»

Студент: Гильманова Д.Р.

Группа: М8О-409Б-20

Преподаватель: Пивоваров Д.Е.

Дата:

Оценка:

Москва, 2023

## Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением  $U(x, t)$ . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров  $\tau, h$ .

## Вариант 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x + \sin(\pi x).$$

Аналитическое решение:  $U(x, t) = x + \exp(-\pi^2 at) \sin(\pi x)$

## Теория

Возьмем  $a = 1$ , тогда:

Явная конечно-разностная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2}$$

Неявная конечно-разностная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2}$$

Схема Кранка-Никольсона (гибридная конечно-разностная схема,  $\theta = 1/2$ )

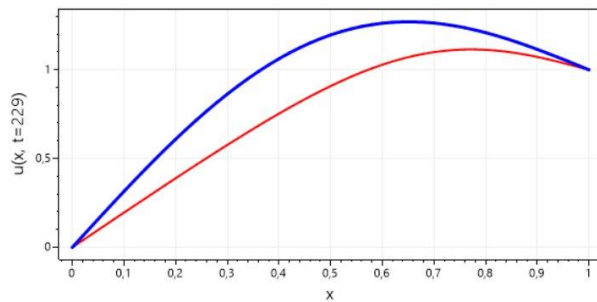
$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = (\theta) \left( \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} \right) + (1 - \theta) \left( \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2} \right)$$

Так как в моем варианте граничное условие не содержит производных, реализация аппроксимации не требуется. Погрешность численного решения вычисляется путем сравнения результатов с аналитическим решением  $U(x, t)$ .

## Окно вывода программы реализации:

### Явная конечно-разностная схема:

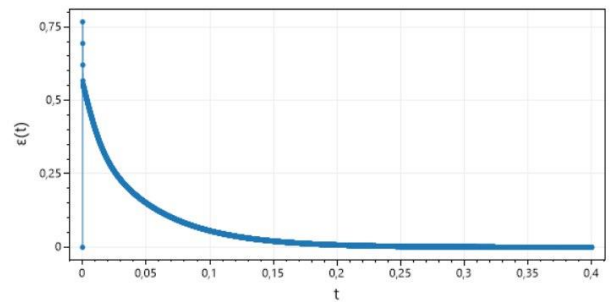
Функция в определенной точке



Время (t):



Функция ошибки

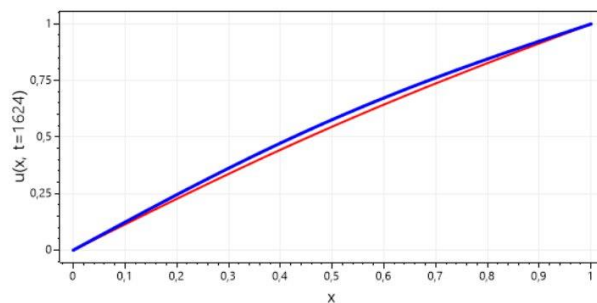


Метод решения:

Явный конечно-разностный метод

### Неявная конечно-разностная схема:

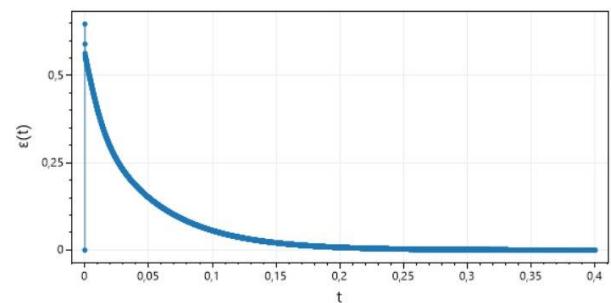
Функция в определенной точке



Время (t):



Функция ошибки

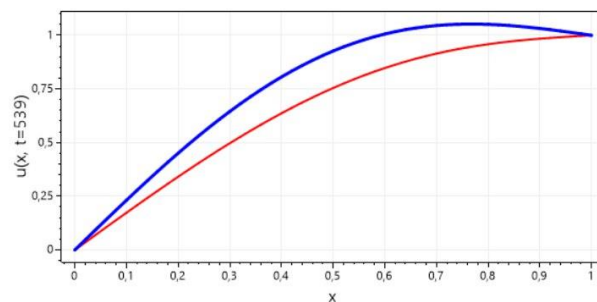


Метод решения:

Неявный конечно-разностный метод

### Схема Кранка-Никольсона (гибридная конечно-разностная схема)

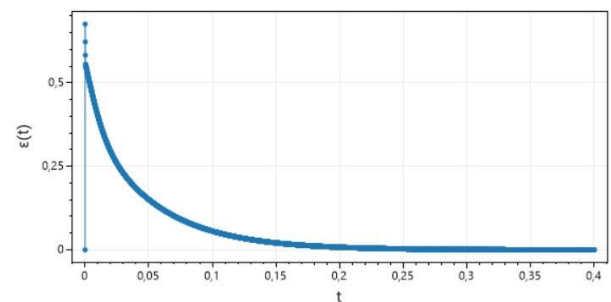
Функция в определенной точке



Время (t):



Функция ошибки



Метод решения:

Метод Кранка-Никольсона

**Вывод:**

В ходе данной лабораторной работы были реализованы три конечно-разностные схемы (явная, неявная, Кранка-Никольсона) для решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа. Программа выводит график функции в зависимости от времени  $t$ , а также график функции ошибки. Как видно из графиков, при увеличении значения  $t$  погрешность уменьшается, следовательно, график, построенный с использованием конечно-разностных схем, приближается к графику, построенному по аналитическому решению из условия задания.