

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт №8 "Информационные технологии и прикладная математика"
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №6

по дисциплине:

Численные методы

Вариант №7

Выполнил: студент группы М8О-409Б-20

Легостаев Г.О.

Принял: Пивоваров Е.Д.

Оценка: _____

Москва, 2023 г.

1. Задание

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

Уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u, \\ u(0, t) &= \exp(-t) \cos(2t), \\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) &= 0, \\ u(x, 0) &= \exp(-x) \cos x, \\ u_t(x, 0) &= -\exp(-x) \cos x.\end{aligned}$$

Аналитическое решение:

$$U(x, t) = \exp(-t - x) \cos x \cos(2t)$$

Решение

- Явная схема (крест):

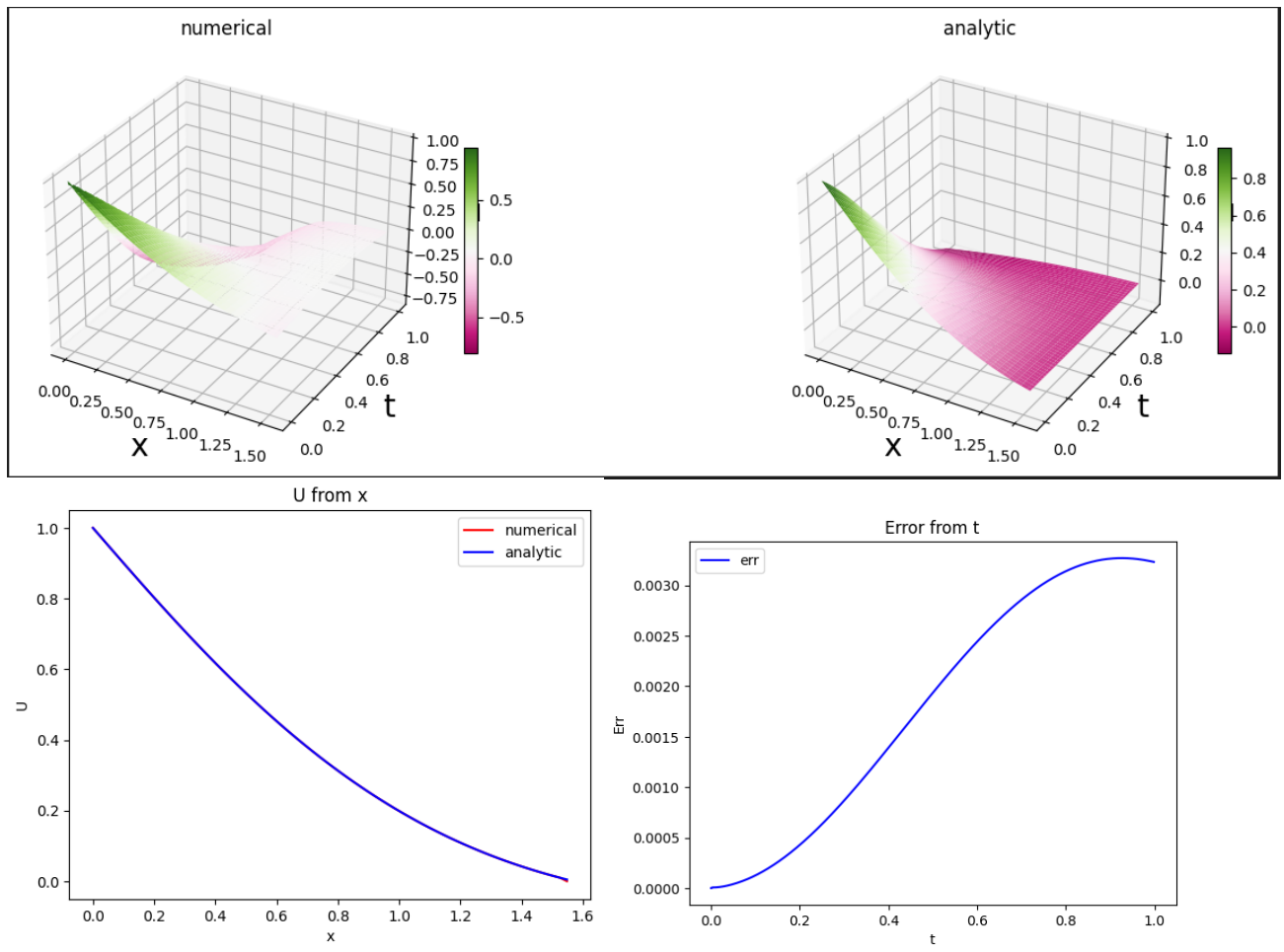
$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = 2 \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2} + 2 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h}$$

- Неявная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = 2 \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} + 2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{2h}$$

Погрешность между численным и аналитическим решением рассчитывается как модуль разности.

2. Вывод программы



Листинг программы представлен в файле lab6.ipynb

3. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены явная и неявная схемы решений начально-краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа. Также были изучены три варианта аппроксимации граничных условий и два варианта аппроксимации начальных условий. Были получены результаты в графическом представлении и подсчитаны погрешности для каждого варианта решения.