МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа

по курсу «Численные методы»

Тема: «Аппроксимация функции методом Вейвлет-анализа»

Студент: Гильманова Д.Р.

Группа: М8О-409Б-20

Преподаватель: Пивоваров Д.Е.

Дата:

Оценка:

Москва, 2023

Цель работы

Изучить методы анализа для разложения функции по базисам вейвлета и показать преимущества Вейвлет-преобразований над другими известными, как, например, Быстрое Преобразование Фурье.

Шаги работы

0. Изучить материалы по поставленной области.
1. Проанализировать преимущества Вейвлет-анализа над преобразованиями Фурье.
2. Реализовать разложение по базисным векторам по Вейвлету Хаара.
3. Изучить и реализовать разложение по другим известным Вейвлетам.
4. Графически отобразить результаты преобразования на скейлограмму.
5. Подвести итоги работы.

Теория

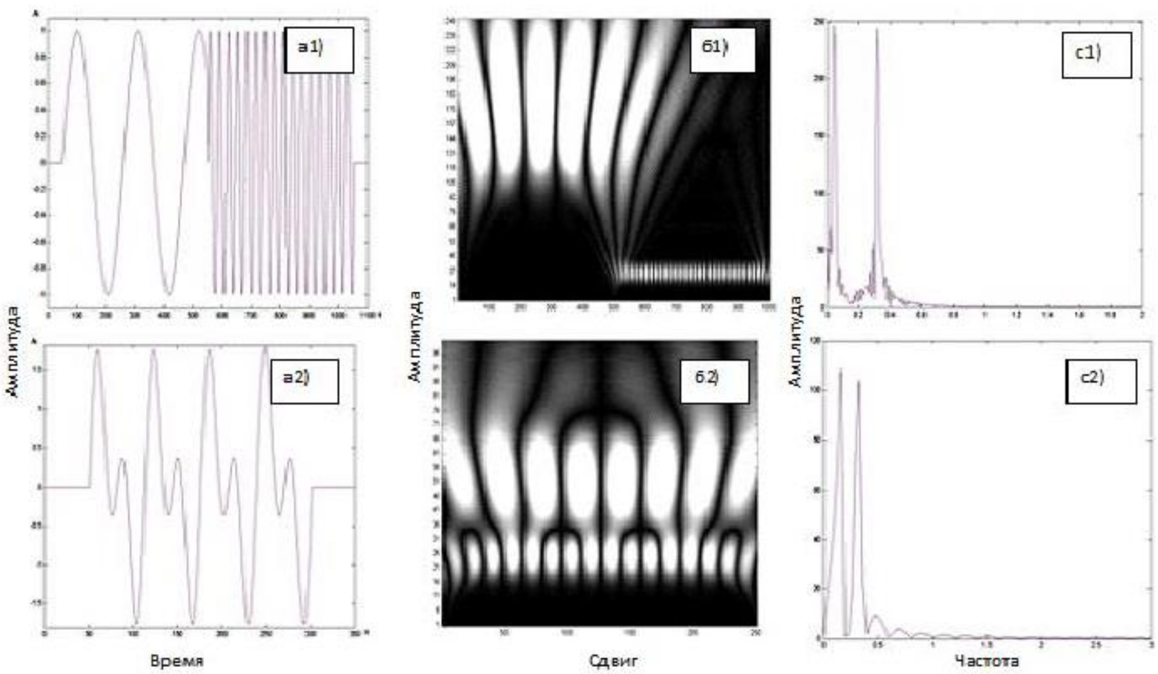
Вейвлет-преобразование (ВП) широко используется для анализа сигналов. Помимо этого, оно находит большое применение в области сжатия данных. ВП одномерного сигнала – это его представление в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье по системе базисных функций.

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

сконструированных из материнского (исходного) вейвлета $\Psi(t)$, обладающего определенными свойствами за счет операций сдвига во времени (b) и изменения временного масштаба (a).

Если говорить о преимуществах Вейвлет-преобразования над преобразованием Фурье, то можно отметить следующее. Преобразования Фурье будут работать очень хорошо, когда частотный спектр стационарный. При этом частоты, присутствующие в сигнале, не зависят от времени, и сигнал содержит частоты xHz, которые присутствует в любом месте сигнала. Чем нестационарнее сигнал, тем хуже будут результаты. Это проблема, так как большинство сигналов, которые мы видим в реальной жизни, нестационарны по своей природе.

Так, например, если посмотрим на графики и скейлограмму вейвлет-анализа двух функций ниже, можно увидеть большую разницу, которая была бы минимальна при использовании обычного преобразования Фурье:



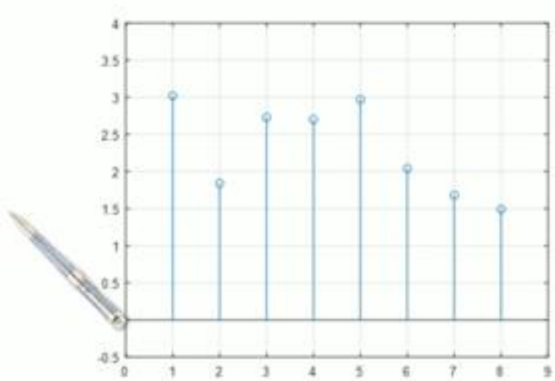
Разберемся, как получаются простейшие вейвлеты Хаара

Вейвлет Хаара

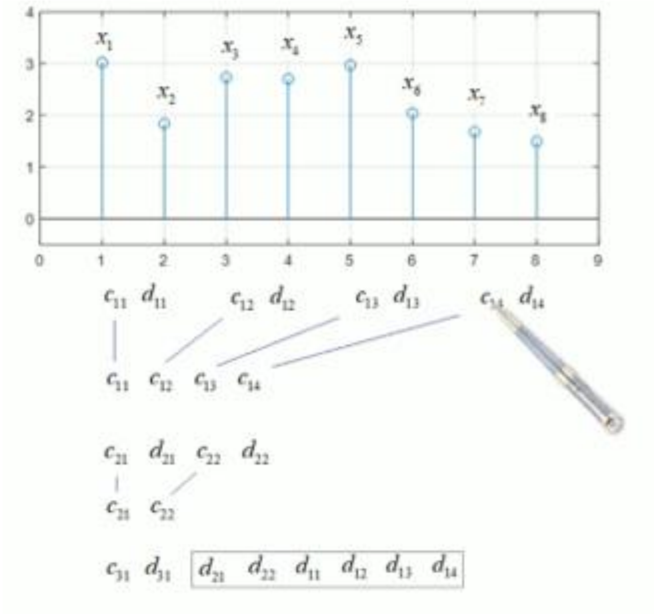
$N = 2^n$ $\qquad X = [x_1, x_2, \dots, x_8]^T$

$$\underbrace{(x_1, x_2)}_{S_1};\ \underbrace{(x_3, x_4)}_{S_2};\ \underbrace{(x_5, x_6)}_{S_3};\ \underbrace{(x_7, x_8)}_{S_4}$$

$$\varphi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ \psi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ A = \begin{vmatrix}\varphi \\ \psi\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix}$$



$$c_{11} = (\varphi, S_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$$
$$d_{11} = (\psi, S_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$



$c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4$

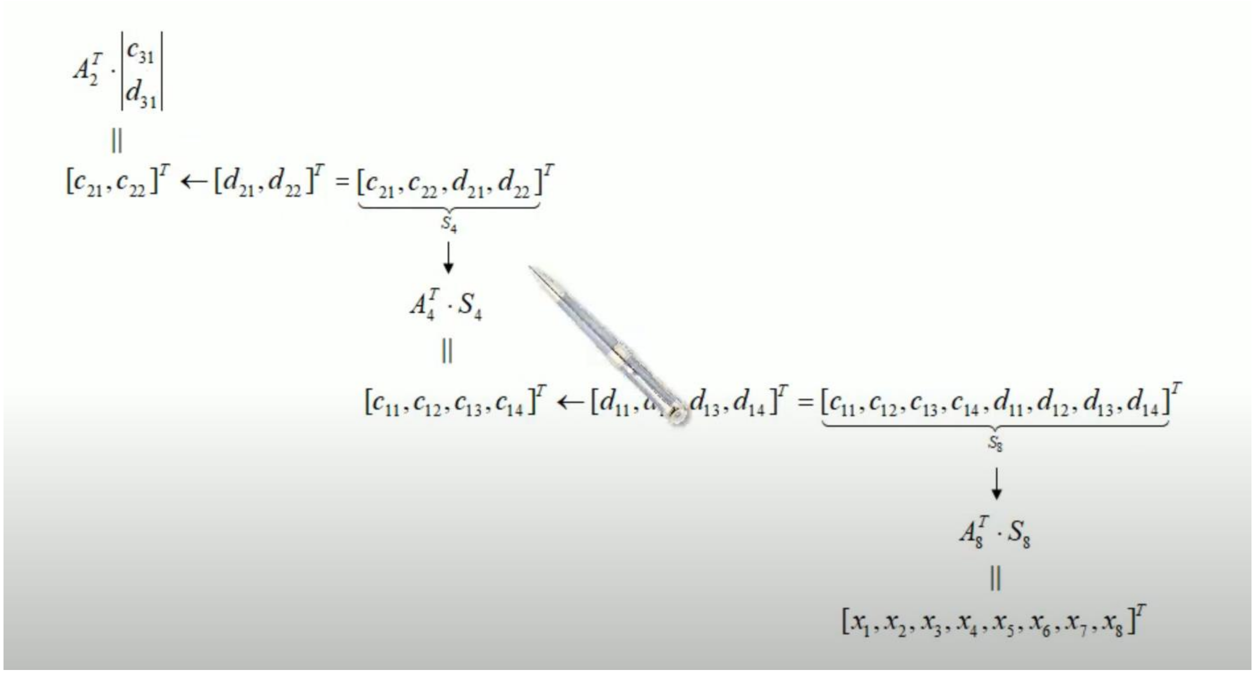
$$A_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_8 \cdot X$$

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ и } A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_8 \cdot X$$
$$\|$$
$$[\underbrace{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}}_{C_1}, \underbrace{d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}}]^T$$
$$\downarrow$$
$$A_4 \cdot C_1$$
$$\|$$
$$[\underbrace{c_{21}, c_{22}}_{C_2}, \underbrace{d_{21}, d_{22}}]^T$$
$$\downarrow$$
$$A_2 \cdot C_2$$
$$\|$$
$$[c_{31}, d_{31}]^T \; d_{21}, d_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}$$

Получение значений по базису с помощью обратной матрицы



Реализация

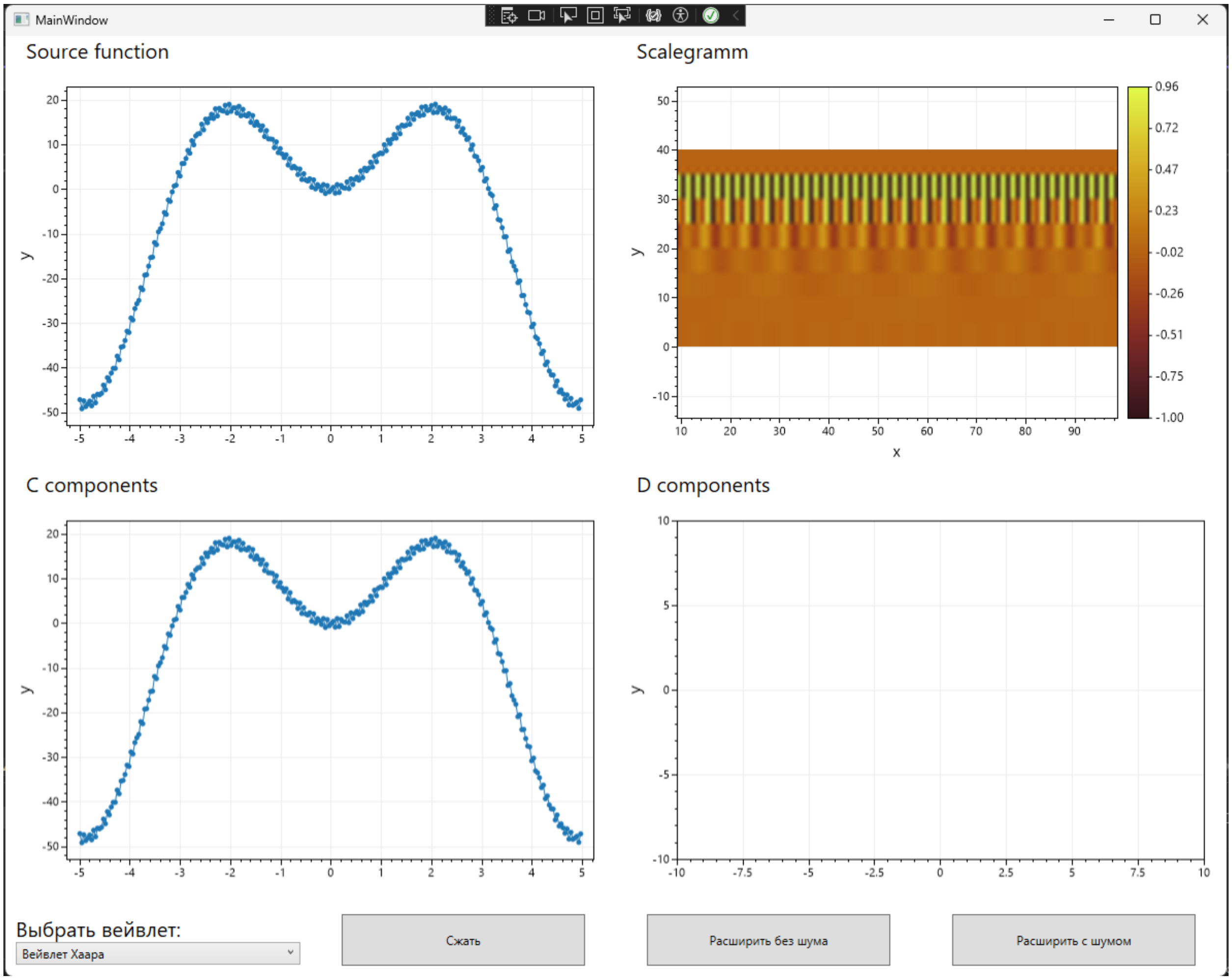
Программная реализация представлена четырьмя графиками:

- График исходной функции «Source function»;

- График скейлограммы исходной функции, разложенной по вейвлетному базису.

- График разложения функции по компонентам C «C components»;

- График разложения функции по компонентам D «D components»;



Кнопка «Сжать» позволяет совершить разложение по базисным векторам в аппроксимированную функцию «C» и компоненты D.

Кнопка «Расширить без шума» позволяет добавить точек к аппроксимированной функции «C». Иначе говоря, производит обратное вейвлет-преобразования по значениям «C» и по нулевым значениям «D».

Кнопка «Расширить с шумом» позволяет восстановить исходную функцию путем обратного вейвлет-преобразования по значениям «C» и «D».

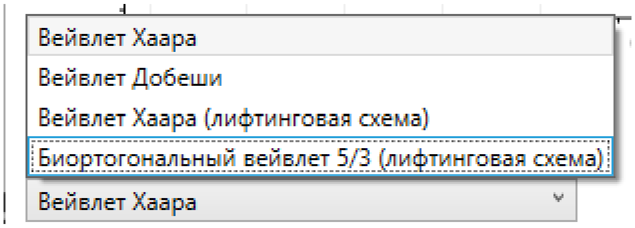
В выпадающем списке «Выбрать вейвлет» можно выбрать функцию вейвлета, по которой будет осуществляться разложение. На данный момент реализовано 4 различных вейвлет-преобразования:

- Вейвлет Хаара - по свойствам ортогональных матриц;

- Вейвлет Добеши - по свойствам ортогональных матриц;

- Вейвлет Хаара – по лифтинговой схеме;

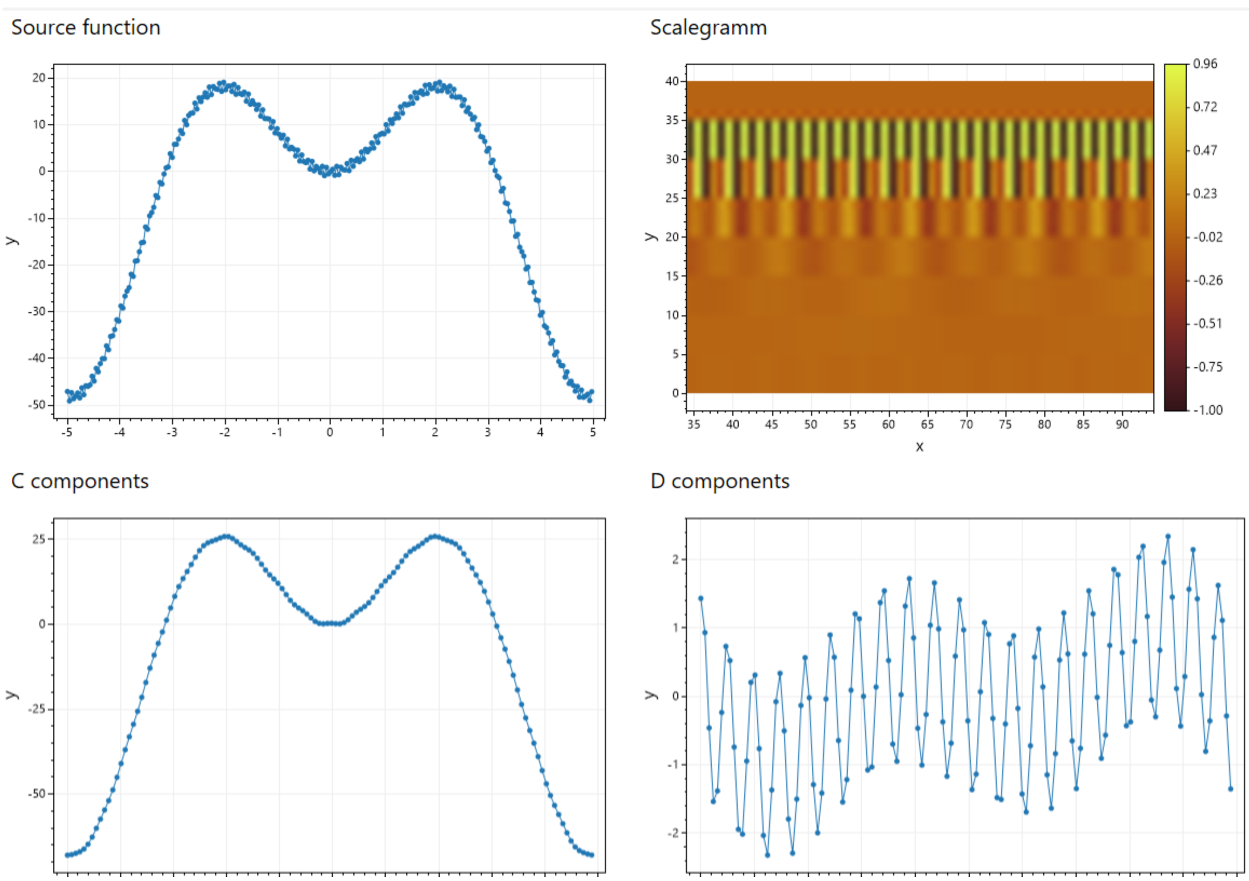
- Биорторгональный вейвлет 5/3 – по лифтинговой схеме



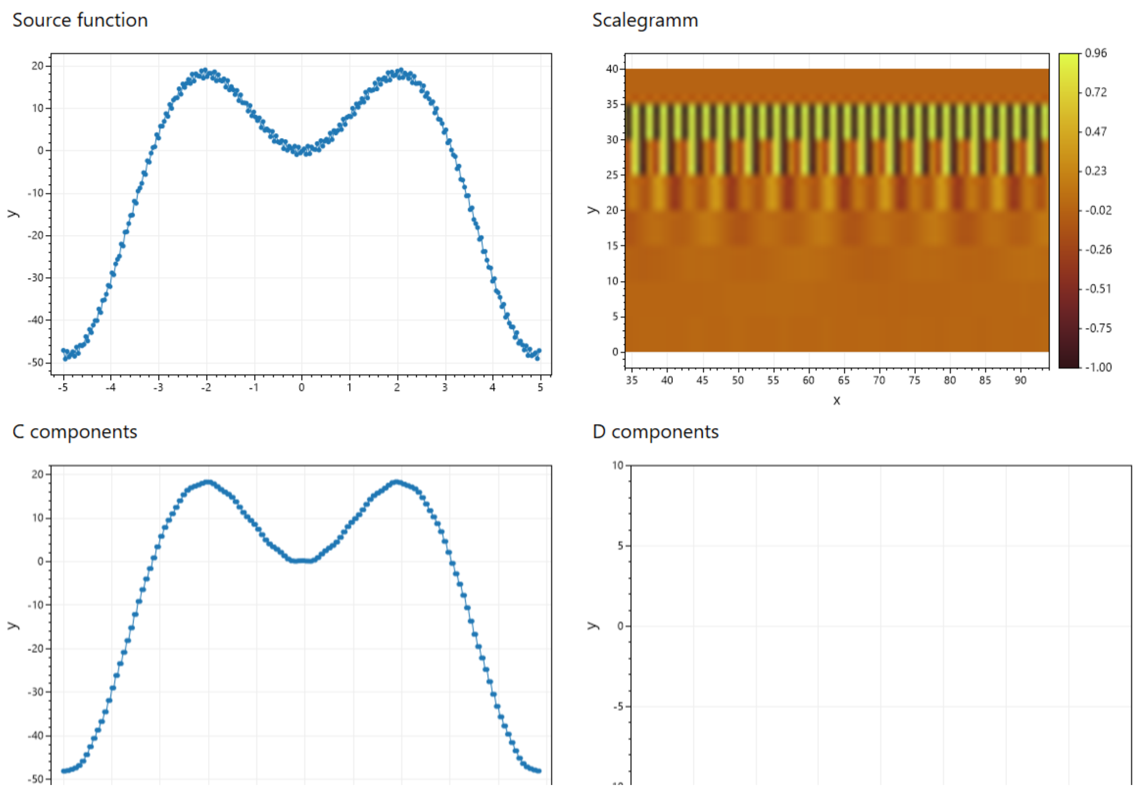
Результаты работы программы

Вейвлет Хаара (по свойствам ортогональности).

Так выглядит одноуровневое разложение исходной функции по вейвлету Хаара.

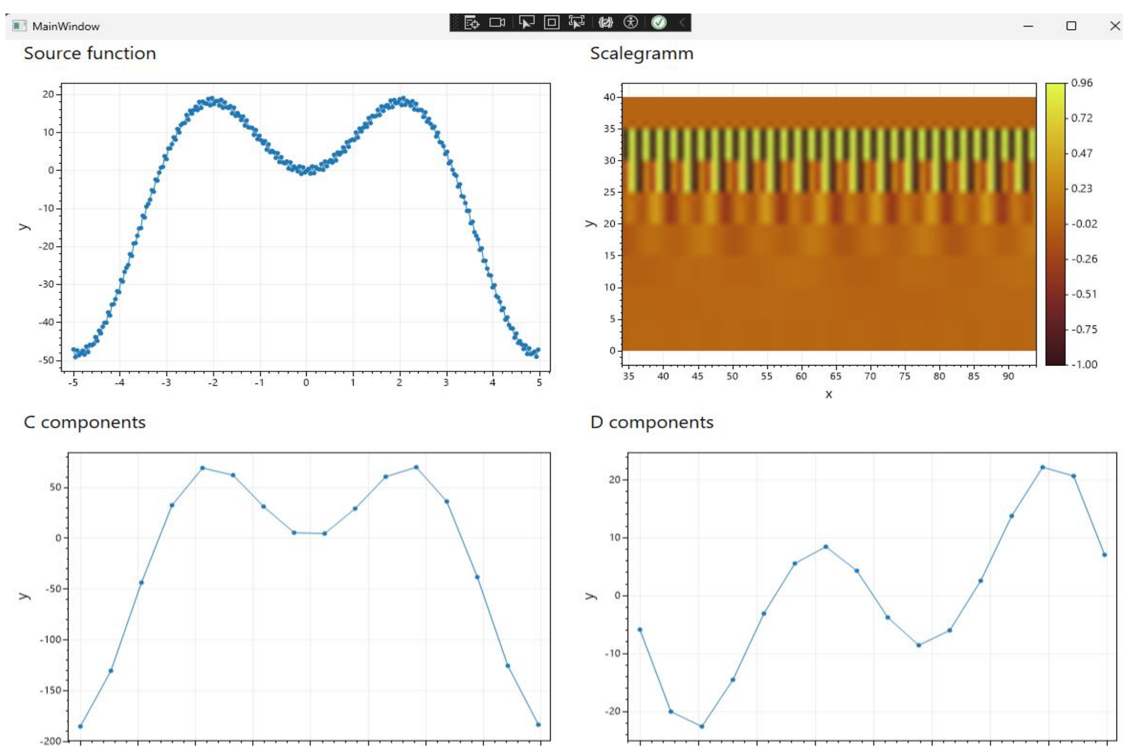


Как мы можем увидеть, нам удалось извлечь высокочастотные сигналы из нашей функции. Попробуем теперь вернуть исходную функцию, не восстанавливая высокие частоты (совершить «Расширение без шума».

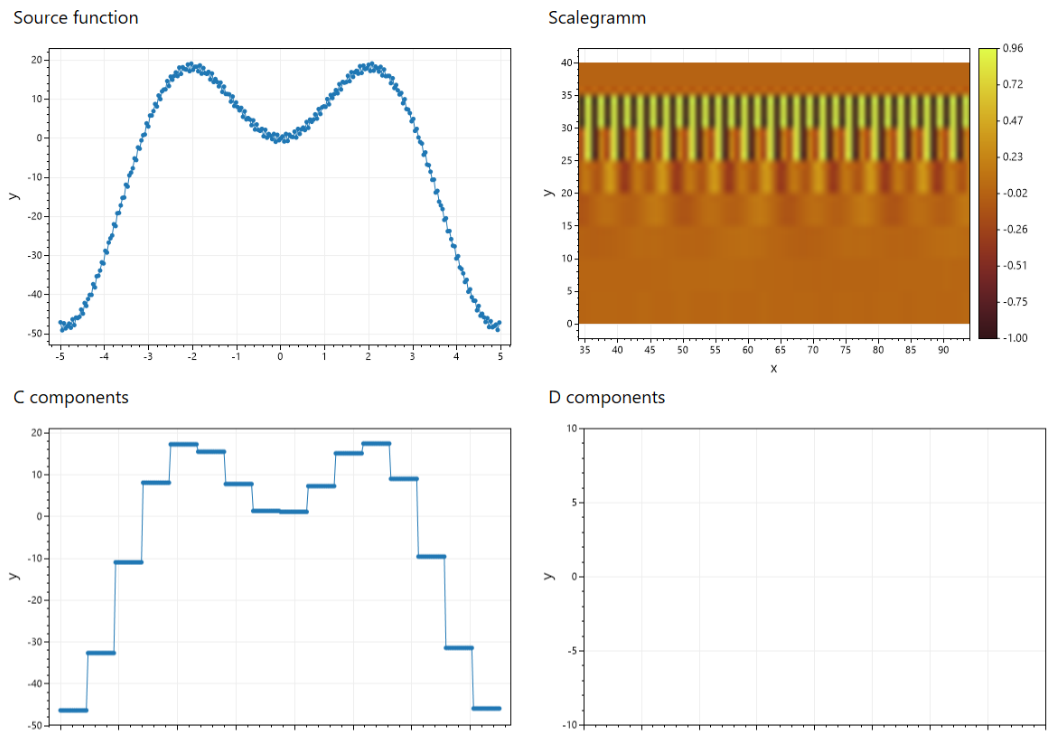


Как видно, функция стала более сглаженной.

Попробуем сильно сжать нашу функцию, чтобы получить более грубую аппроксимацию.

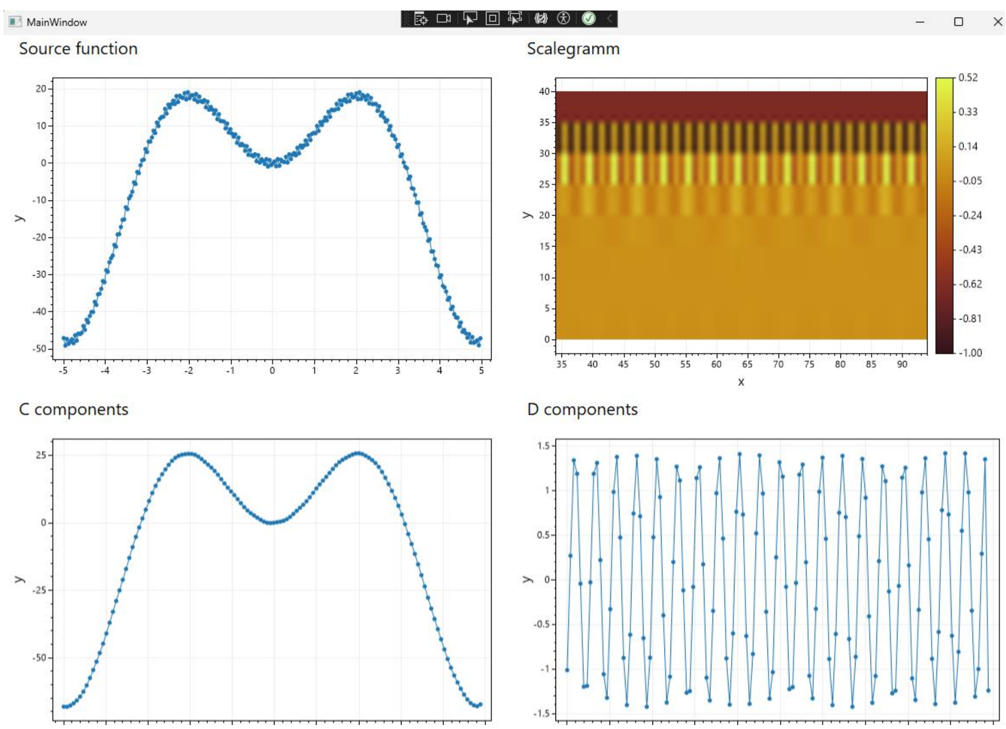


Попробуем теперь совершить расширение без шума до исходного количества точек.

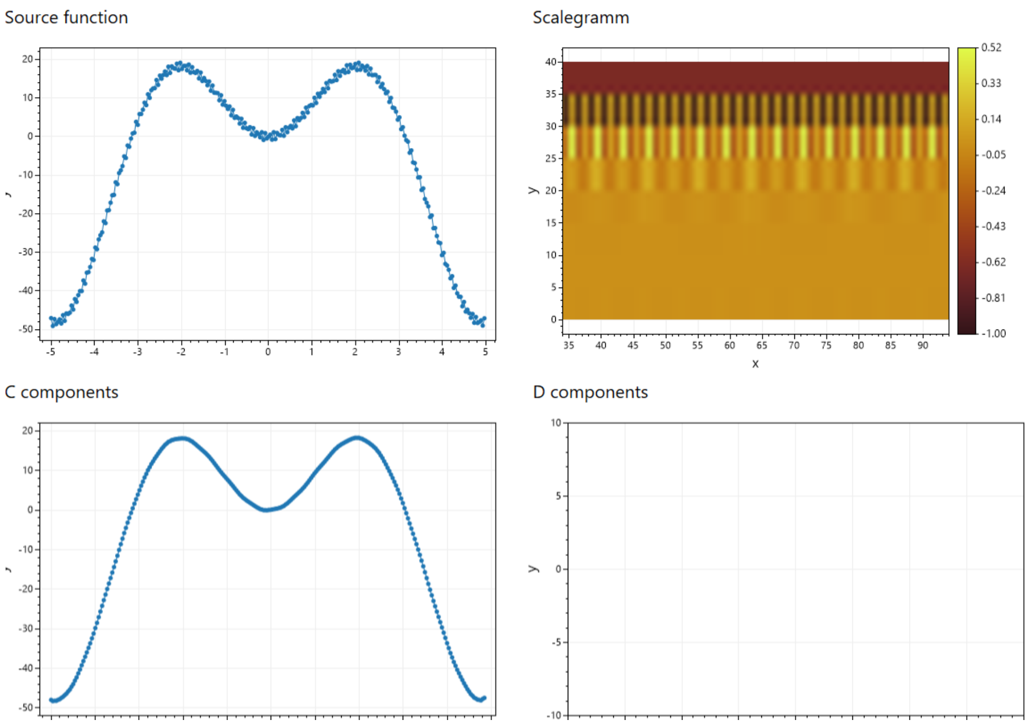


Рассмотрим теперь как ведет себя функция, сжатая по другим вейвлетам.

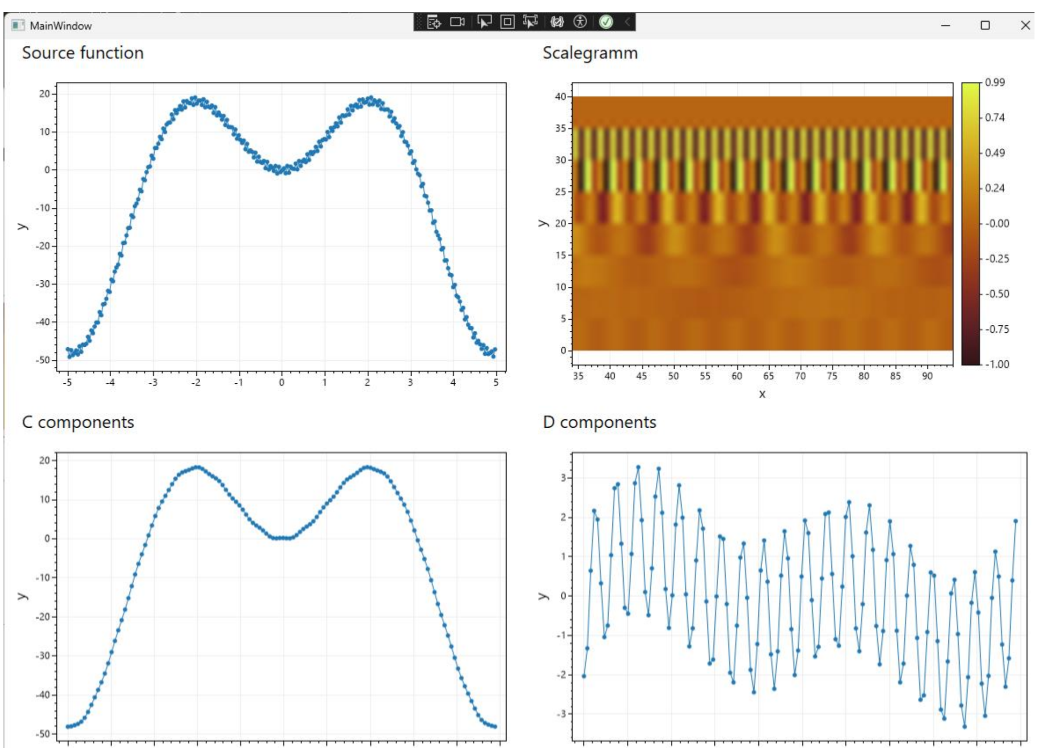
Вейвлет Добеши



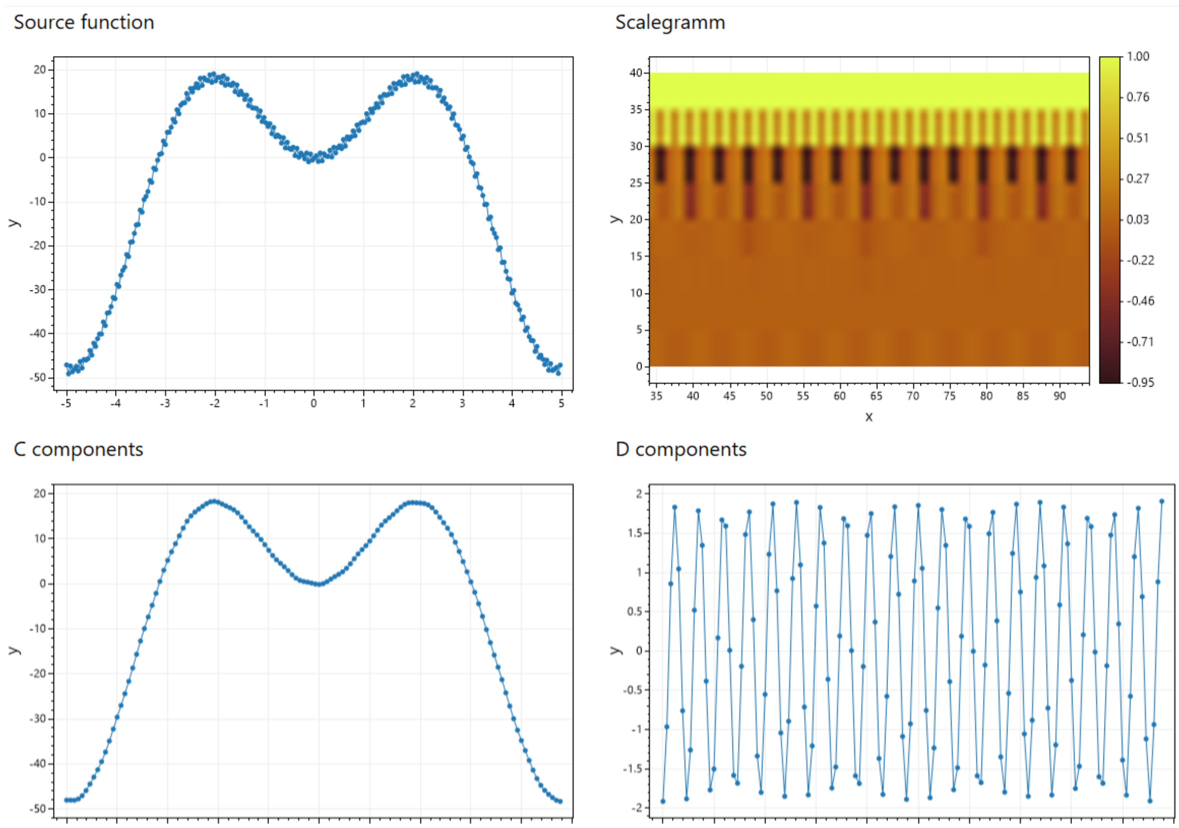
Восстановление более гладкое:



Вейвлет Хаара (по лифтинговой схеме)



Биортогональный вейвлет 5/3



Вывод:

В заключение, вейвлет-преобразования представляют собой мощный инструмент анализа сигналов и изображений, обладающий рядом преимуществ по сравнению с традиционными преобразованиями, такими как преобразование Фурье. Основное преимущество вейвлет-преобразований заключается в их способности адаптироваться к различным масштабам и локальным особенностям в сигнале. Это делает их более эффективными при анализе сигналов с переменной частотой и нерегулярными структурами.

Одним из ключевых инструментов вейвлет-анализа является скейлограмма, которая предоставляет информацию о частотных характеристиках сигнала в зависимости от времени и масштаба. Это позволяет лучше понимать структуру сигнала и выявлять его ключевые особенности. Сравнение с графиками частотных характеристик вейвлетов и основных функций также помогает в выборе наилучшего вейвлета для конкретного типа сигнала.

Вейвлеты Хаара, Добеши и биортогональный вейвлет 5/3 представляют собой примеры широко используемых вейвлет-функций. Вейвлеты Хаара обладают простой структурой и хорошо выявляют резкие изменения в сигнале. Вейвлеты Добеши обеспечивают хорошую локализацию во времени и частоте, что делает их эффективными для анализа сигналов с различными структурами. Биортогональный вейвлет 5/3 часто используется в компрессии изображений и видео, благодаря своим хорошо сбалансированным свойствам.

Таким образом, вейвлет-преобразования представляют собой важный инструмент для анализа сигналов и изображений, и их применение широко распространено в различных областях, включая обработку сигналов, компрессию данных и распознавание образов. Их способность к адаптации к различным особенностям сигнала делает их незаменимыми при работе с реальными данными, предоставляя уникальные преимущества в сравнении с традиционными методами анализа.