

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №8

по курсу «Численные методы»

Студент: Гильманова Д.Р.

Группа: М8О-409Б-20

Преподаватель: Пивоваров Д.Е.

Дата:

Оценка:

Москва, 2023

Задание

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y .

Вариант 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(\frac{\pi}{2} \mu_1, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, \frac{\pi}{2} \mu_2, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$

$$1) \mu_1 = 1, \mu_2 = 1$$

Теория

Схема переменных направлений:

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k) + f_{ij}^{k+1/2}$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}) + f_{ij}^{k+1/2}$$

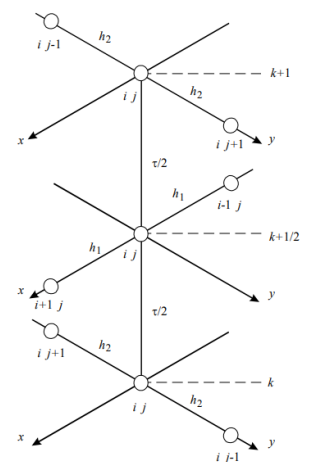


Рис. 5.7 Шаблон схемы метода переменных направлений

Схема дробных шагов:

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{f_{ij}^k}{2}$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} = \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}) + \frac{f_{ij}^{k+1}}{2}$$

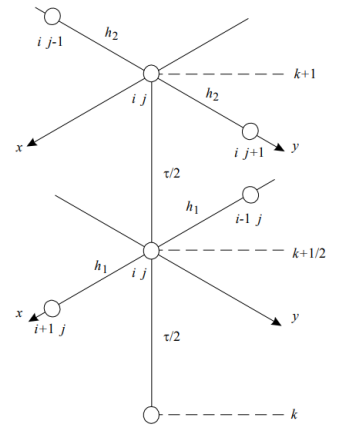
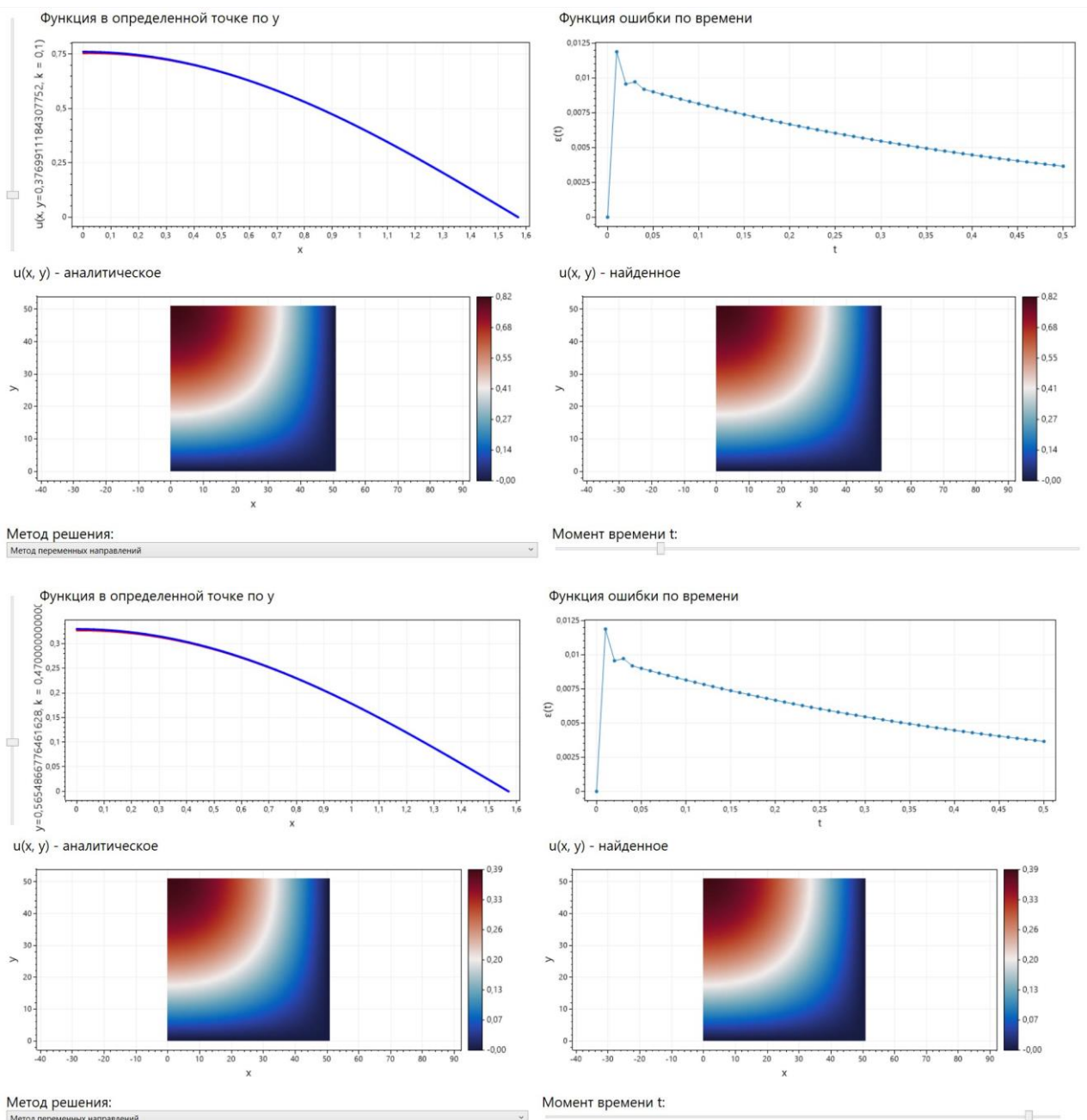


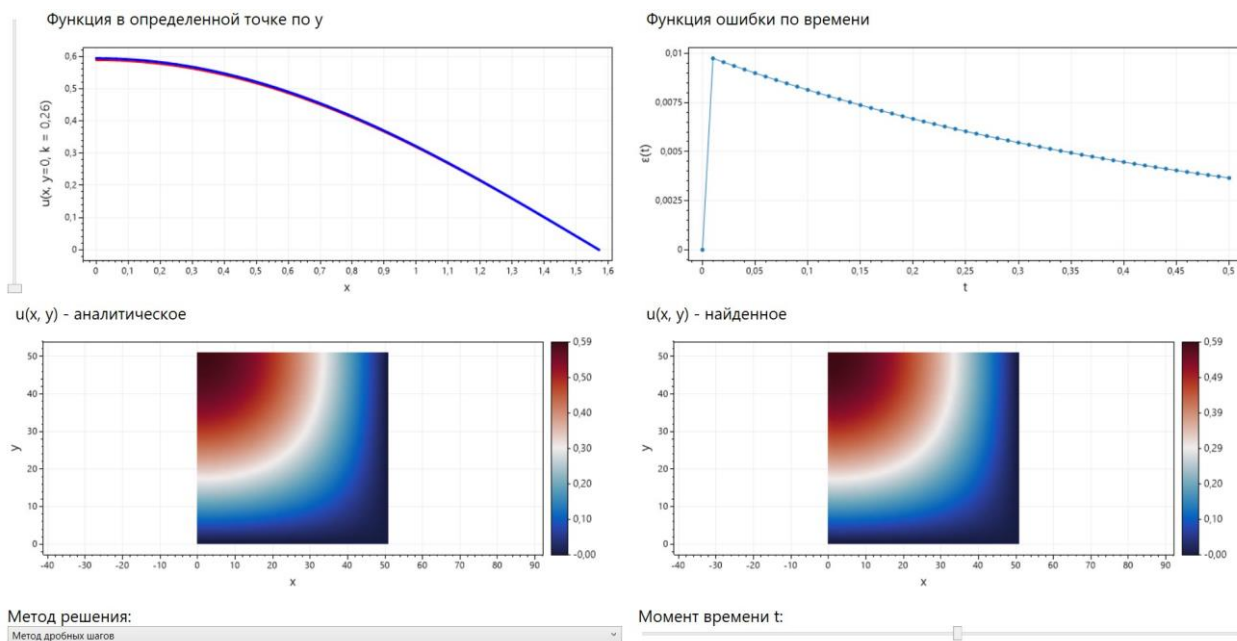
Рис.5.8. Шаблон схемы метода дробных шагов

Окно вывода программы реализации:

Метод переменных направлений:



Метод дробных шагов:



Вывод:

В ходе данной лабораторной работы были реализованы схемы переменных направлений и дробных шагов для решения двумерной начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа. Была вычислена погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$.