

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт №8 "Информационные технологии и прикладная математика"
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №7 по
дисциплине:

Численные методы
Вариант №7

Выполнил: студент группы М8О-409Б-20

Легостаев Г.О.

Принял: Пивоваров Е.Д.

Оценка: _____

Москва, 2023 г.

1. Задание

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y .

Уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2u, \\ u(0, y) &= \cos y, \\ u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) &= 0, \\ u(x, 0) &= \cos x, \\ u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = \cos x \cos y.$$

2. Решение

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = -u_{i,j}$$

/Пусть $h_x = h_y$ /

- Метод простых итераций:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k}{4 - h^2}$$

- Метод Зейделя:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1}}{4 - h^2}$$

- Метод простых итераций с релаксацией:

$$u_{i,j}^{k+1} = \left(\frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k}{4 - h^2} \right) C + u_{i,j}^k (1 - C)$$

- Метод Зейделя с релаксацией:

$$u_{i,j}^{k+1} = \left(\frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1}}{4 - h^2} \right) C + u_{i,j}^k (1 - C)$$

Аппроксимация граничных условий:

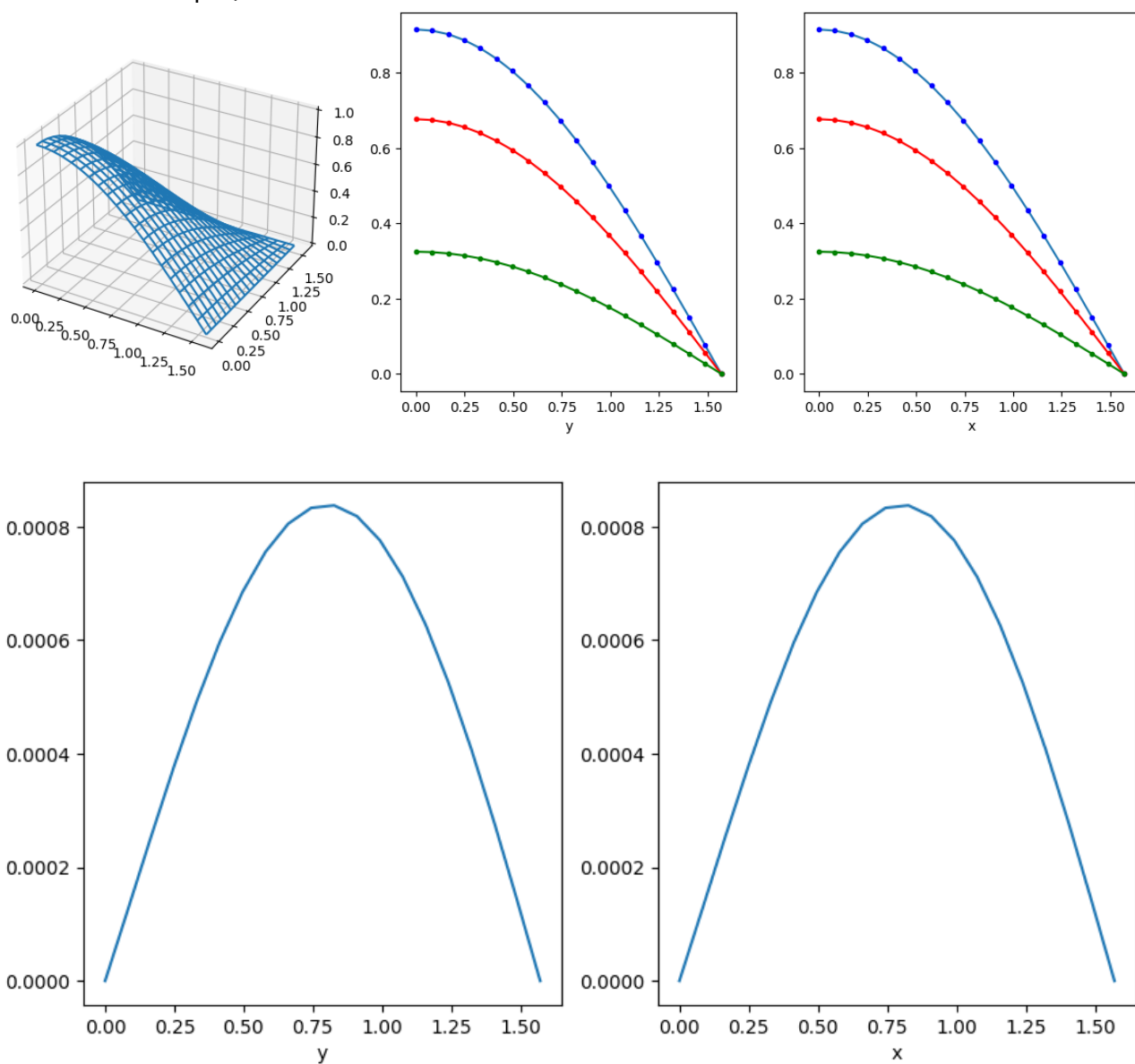
$$u_{0,j}^k = u_{1,j}^k - h_x \cos(y)$$

$$u_{N,j}^k = \frac{u_{N-1,j}^k}{(1 - h_x)}$$

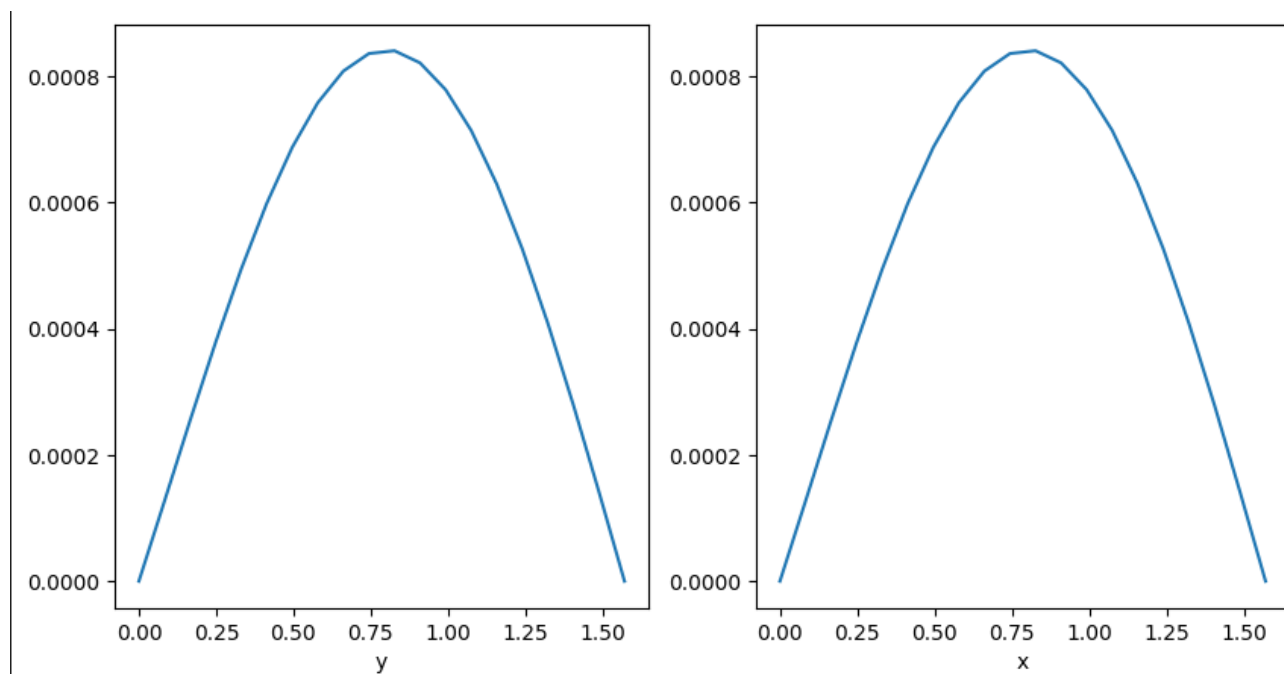
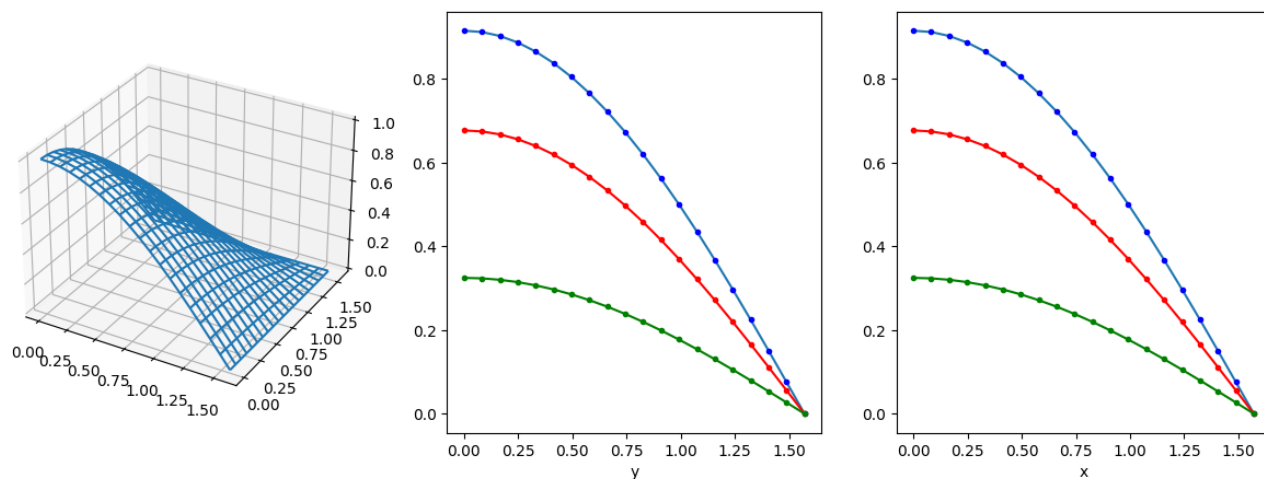
Погрешность между численным и аналитическим решением рассчитывается как абсолютная.

3. Вывод программы

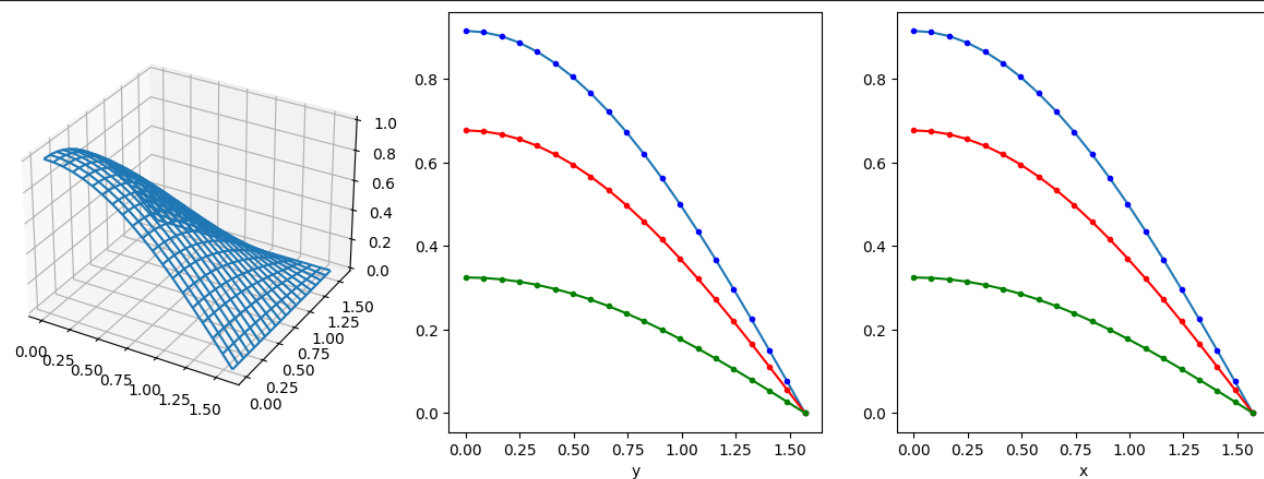
Количество итераций: 507

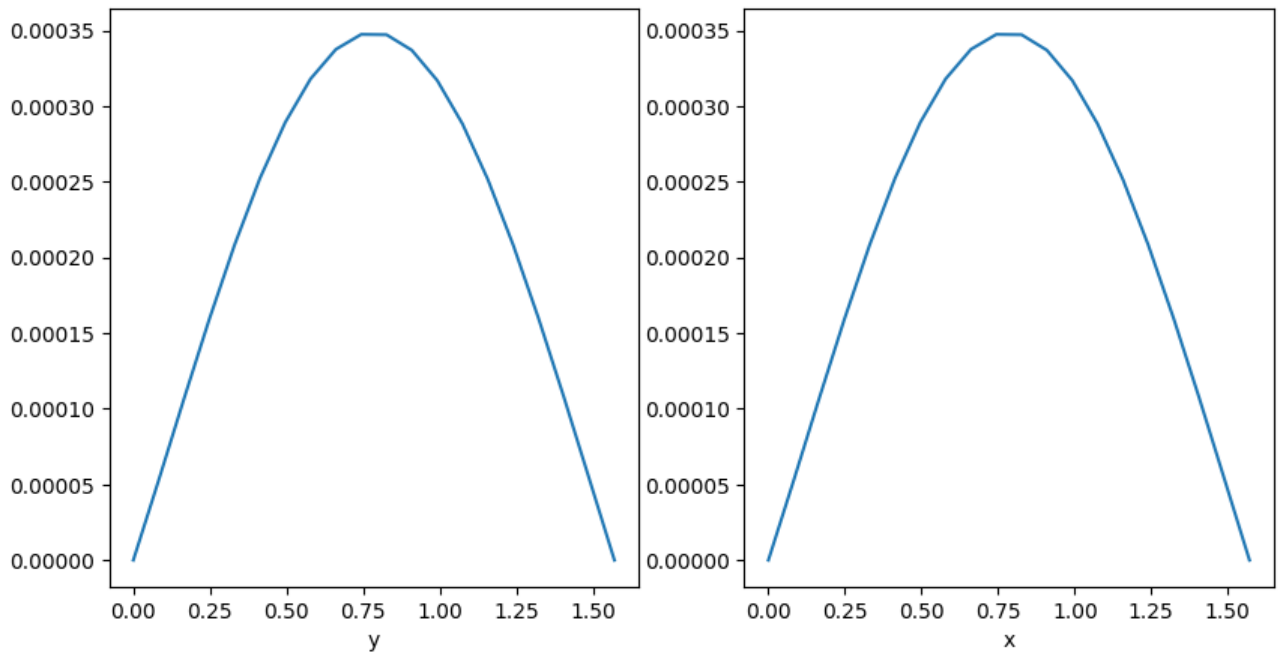


Количество итераций: 1015



Количество итераций: 285





Листинг программы представлен в файле lab7.ipnb

4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены метод простых итераций и метод Зейделя решений начально-краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа. Была применена двухточечная аппроксимация первого порядка граничных условий и линейная интерполяция для инициализации итерационных методов. Были получены результаты в графическом представлении и подсчитаны погрешности для каждого варианта решения.