Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»

Кафедра вычислительной математики и программирования

Лабораторная работа №8

по курсу «Численные методы»

Студент: Мариечев К.Д.

Группа: М8О-409Б-20

Проверил: Пивоваров Д.Е.

Дата:

Оценка:

Москва, 2023

Задание

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

Вариант 9:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y(\mu \cos \mu t + (a+b)\sin \mu t),$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(\frac{\pi}{2}, y, t) = \sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x,0,t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y,0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

Теория

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} f(x,y,t) \\ u(l_x, y, t) = \varphi_l(y,t) \\ u(r_x, y, t) = \varphi_r(y,t) \\ u(x, l_y, t) = \psi_l(x,t) \\ u_y(x, r_y, t) = \psi_r(x,t) \\ u(x, y, 0) = \zeta(x,y) \end{cases}$$

Пусть M разбиений по x, N разбиений по y, k разбиений по t. Тогда $h_x=l_x/M$ $h_y=l_y/N$, $\tau=T/k$, $x_i= l_x +i\ h_x$, $t_k=k\ \tau$.

Аппроксимируем:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = a\frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h_x^2} + b\frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij+1}^k}{h_x^2} + \cdots + f_{ij}^k$$

Метод переменных направлений

$$\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = a\frac{u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + b\frac{u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}}{h_x^2} + f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$$

Группируем члены при $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}}, u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}}$, составляем СЛАУ и решаем ее методом прогонки

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = a\frac{u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + b\frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h_x^2} + f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$$

Группируем члены при $u_{ij}^{k+1}, u_{ij+1}^{k+1}, u_{ij-1}^{k+1}$, составляем СЛАУ и решаем ее методом прогонки.

Для граничных условий используем двухточечную аппроксимацию с первым порядком точности.

Метод дробных шагов

$$\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{k}}{\tau} = a\frac{u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{f_{ij}^{k}}{2}$$

Группируем члены при $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}}, u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}}$, составляем СЛАУ и решаем ее методом прогонки

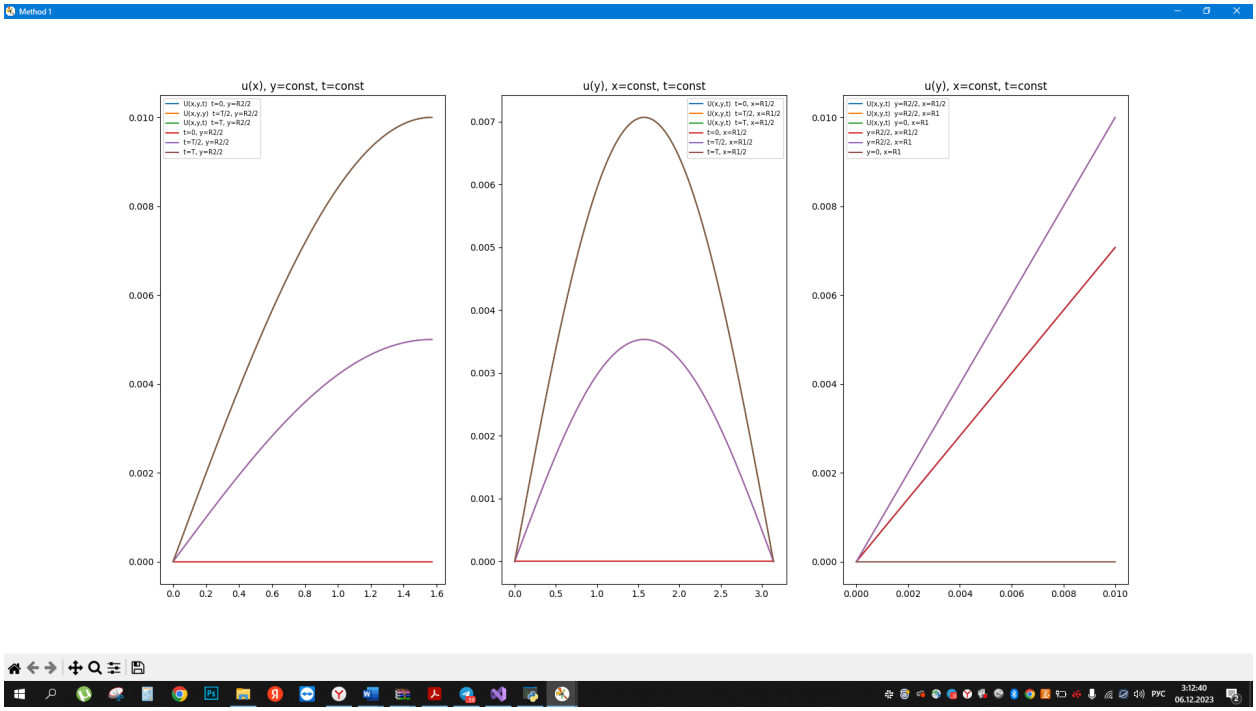
$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} = b\frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h_x^2} + \frac{f_{ij}^{k+1}}{2}$$

Группируем члены при $u_{ij}^{k+1}, u_{ij+1}^{k+1}, u_{ij-1}^{k+1}$, составляем СЛАУ и решаем ее методом прогонки.

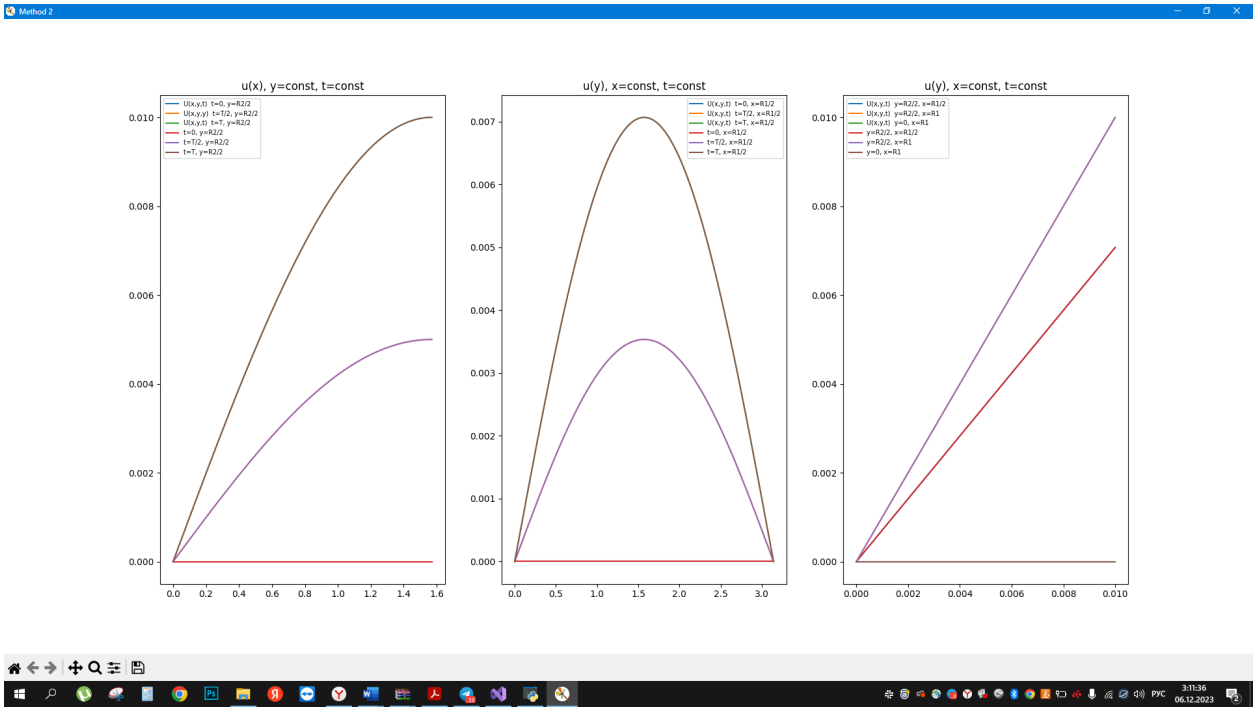
Для граничных условий используем двухточечную аппроксимацию с первым порядком точности.

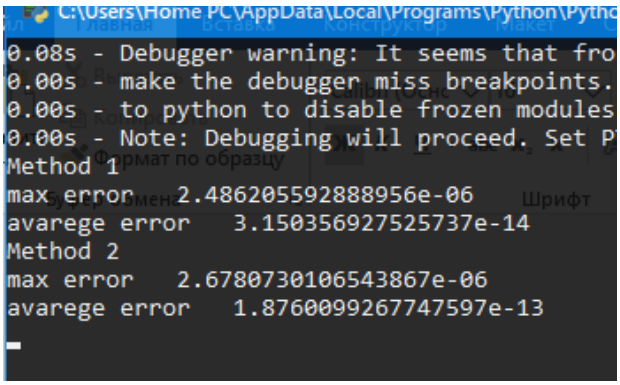
Решение

МПН



МДШ





Фрагмент кода

```
def solve(f1,name):
    u=np.zeros((N+1,M+1,K+1))

    for i in range(0,N+1):
        for j in range(0, M+1):
            x=i*hx
            y=j*hy
            u[i][j][0]=psi1(x,y)



    for k in range(0,K):
        u2=np.zeros((N+1,M+1))
        for j in range(1, M):

            y=j*hy
            t=(k+1/2)*tau
            A=np.zeros((N+1,N+1))
            B=np.zeros((N+1,1))
            A[0][0]=1
            A[0][1]=0
            B[0][0]=phi1(y,(k+1/2)*tau)

            A[N][N-1]=0
            A[N][N]=1
            B[N][0]=phi2(y,(k+1/2)*tau)
            if f1==1:
                for i in range(1,N):
                    x=i*hx
                    A[i][i-1]=-a/hx**2
                    A[i][i]=2/tau+2*a/hx**2
                    A[i][i+1]=-a/hx**2
                    B[i][0]=2*u[i][j][k]/tau+b*(u[i][j+1][k]-2*u[i][j][k]+u[i][j-
1][k])/hy**2+f(x,y,(k+1/2)*tau)
            elif f1==2:
                for i in range(1,N):
                    x=i*hx
                    A[i][i-1]=-a/hx**2
                    A[i][i]=1/tau+2*a/hx**2
                    A[i][i+1]=-a/hx**2
                    B[i][0]=u[i][j][k]/tau+f(x,y,k*tau)/2
            x=running_method(A,B,N+1)

            for i in range(0,N+1):
                u2[i][j]=x[i]

        for i in range(0,N+1):
            u2[i][0]=phi3(i*hx,(k+1/2)*tau)
```

```
            u2[i][M]=phi4(i*hx,(k+1/2)*tau)*hy+u2[i][N-1]


        for i in range(1, N):

            x=i*hx
            t=(k+1)*tau
            A=np.zeros((M+1,M+1))
            B=np.zeros((M+1,1))
            A[0][0]=1
            A[0][1]=0
            B[0][0]=phi3(x,t)

            A[M][M-1]=-1/hy
            A[M][M]=1/hy
            B[M][0]=phi4(i*hx,(k+1/2)*tau)*hy+u2[i][N-1]
            if f1==1:
                for j in range(1,M):
                    y=j*hy
                    A[j][j-1]=-b/hy**2
                    A[j][j]=2/tau+2*b/hy**2
                    A[j][j+1]=-b/hy**2
                    B[j][0]=2*u2[i][j]/tau+a*(u2[i+1][j]-2*u2[i][j]+u2[i-
1][j])/hx**2+f(x,y,(k+1/2)*tau)
            elif f1==2:
                for j in range(1,M):
                    y=j*hy
                    A[j][j-1]=-b/hy**2
                    A[j][j]=1/tau+2*b/hy**2
                    A[j][j+1]=-b/hy**2
                    B[j][0]=u2[i][j]/tau++f(x,y,(k+1)*tau)/2

            y=running_method(A,B,M+1)

            for j in range(0,M+1):
                u[i][j][k+1]=y[j]

        for j in range(0,M+1):
            u[0][j][k+1]=phi1(j*hy,t)
            u[N][j][k+1]=phi2(j*hy,t)



    print('max error  ',error1(u,U))
    print('avarege error  ', error2(u,U))
    draw(u,name)
```

Вывод

В данной лабораторной работе была решена двумерная начально-краевая задача параболического типа.

Для решения были использованы два метода:

- метод переменных направлений
- метод дробных шагов

С помощью каждого метода мне удалось получить результат с хорошей точностью.