

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»  
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

# **Лабораторная работа №7**

по курсу «Численные методы»

Студент: Гильманова Д.Р.

Группа: М8О-409Б-20

Преподаватель: Пивоваров Д.Е.

Дата:

Оценка:

Москва, 2023

## Задание

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением  $U(x, y)$ . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров  $h_x, h_y$ .

## Вариант 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u_x(0, y) = 0,$$

$$u(1, y) = 1 - y^2,$$

$$u_y(x, 0) = 0,$$

$$u(x, 1) = x^2 - 1.$$

Аналитическое решение:  $U(x, y) = x^2 - y^2$ .

## Теория

Центрально-разностная схема:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{4}$$

Метод простых итераций (метод Либмана):

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k}{4}$$

Метод Зейделя:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k}{4}$$

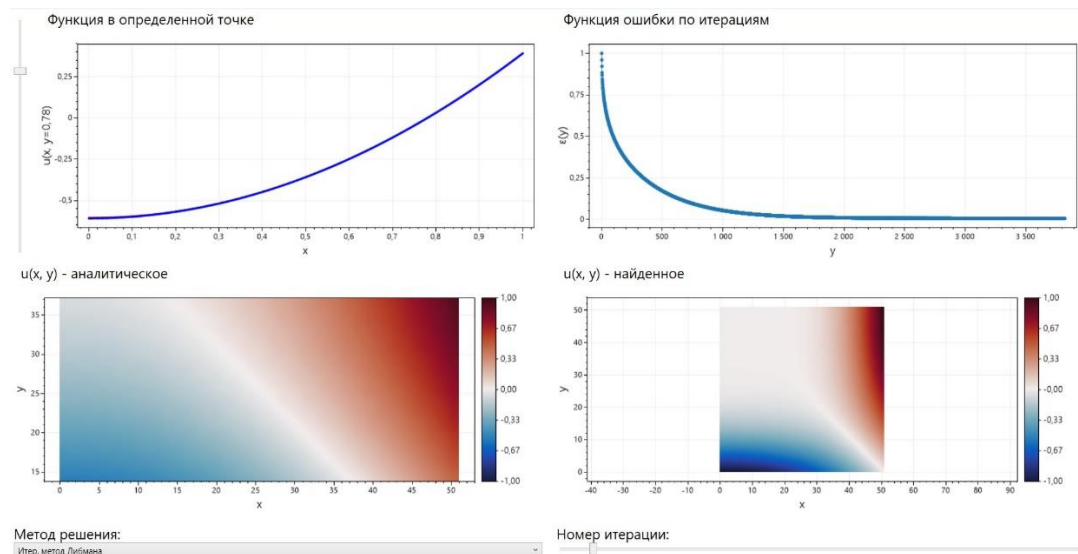
Метод простых итераций с верхней релаксацией:

$$u_{i,j}^{k+1} = \omega \cdot \frac{u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k}{4} + (1 - \omega) \cdot u_{i,j}^k$$

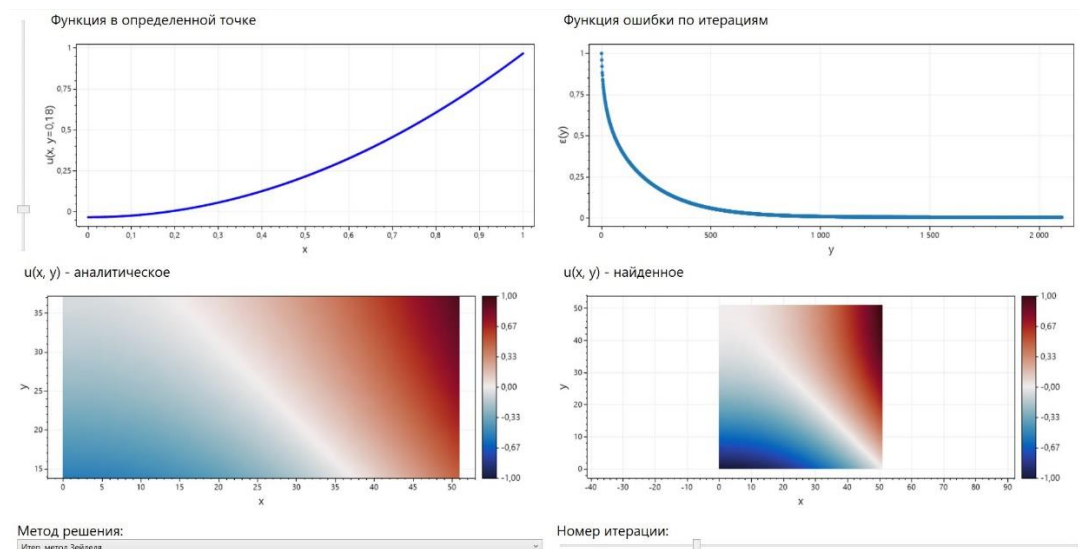
Был взят диапазон значений параметра  $\omega$  в пределах от 0 до 1, так как при больших значениях метод не сходится, и ошибка уходит в бесконечность. Поэтому было принято решение реализовать метод нижней релаксации, где при значении параметра  $\omega = 1$  получается метод Либмана.

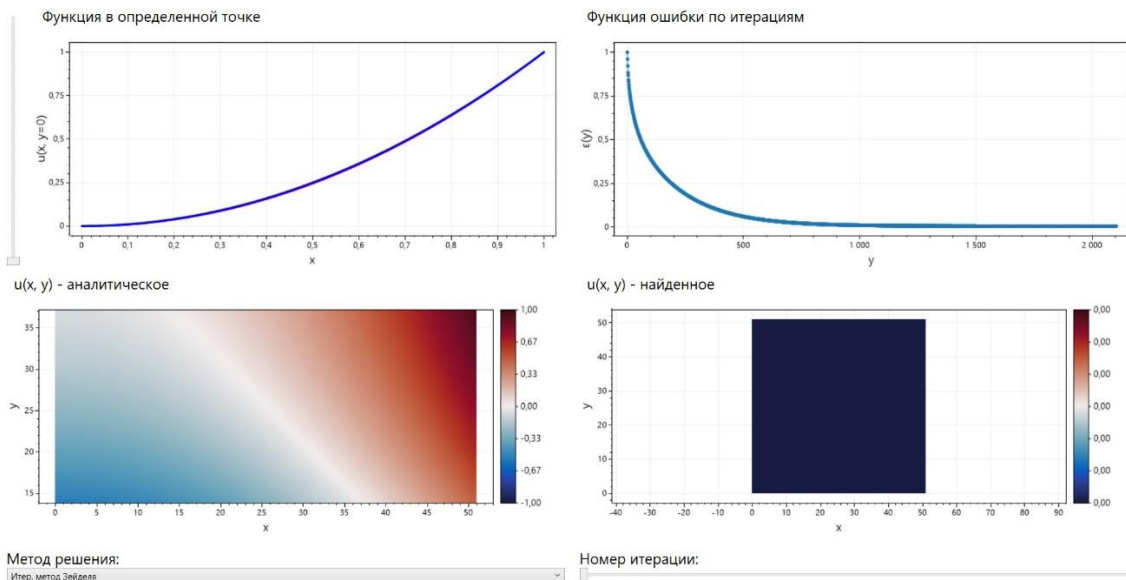
## Окно вывода программы реализации:

### Метод простых итераций (метод Либмана):

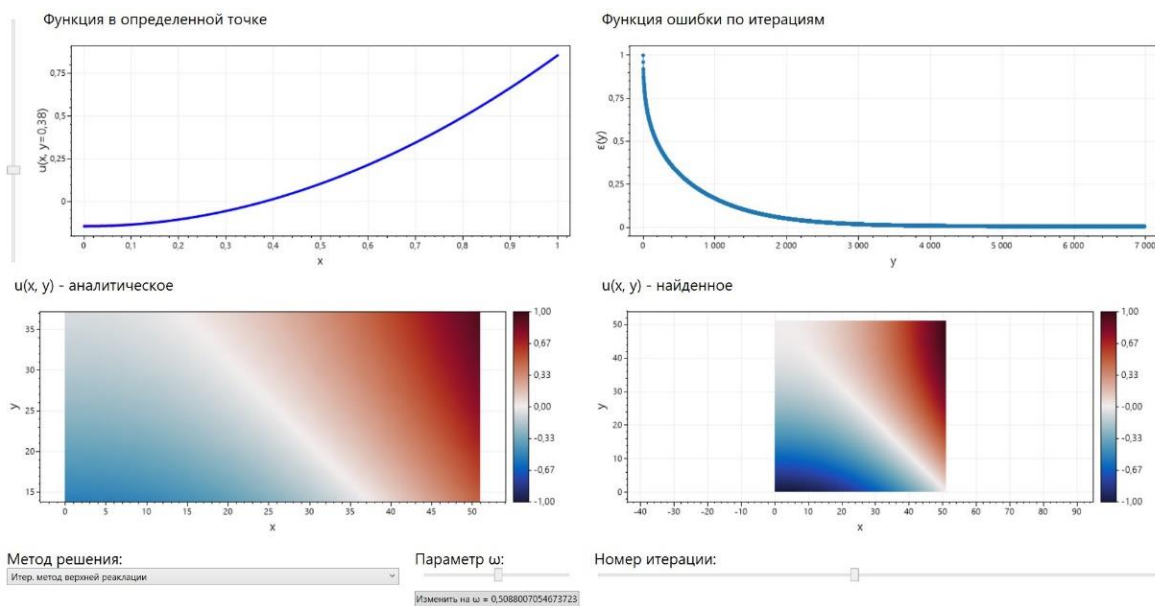
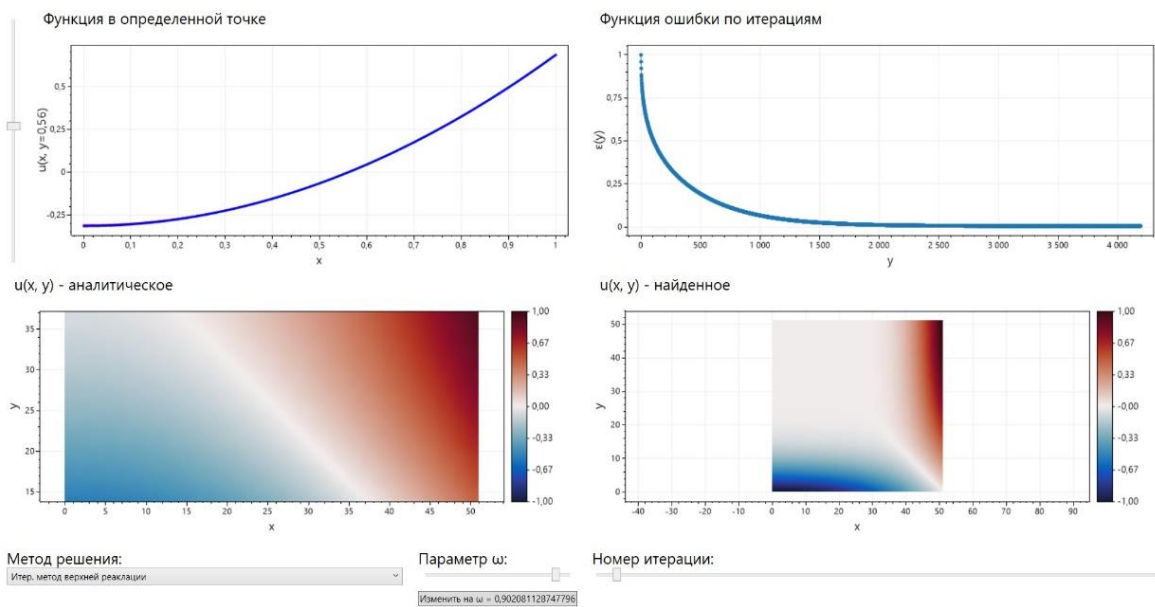


### Метод Зейделя:





## Метод простых итераций с верхней релаксацией:



**Вывод:**

В ходе данной лабораторной работы была решена краевая задача для дифференциального уравнения эллиптического типа. Была произведена аппроксимация уравнения с использованием центрально-разностной схемы.

Были применены и реализованы следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Была вычислена погрешность численного решения.

При более мелких разбиениях сеточных параметров  $h_x, h_y$  время выполнения программы возрастает значительно, ввиду квадратичной асимптотической сложности.