МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №6

по курсу «Численные методы»

Студент: Гильманова Д.Р.
Группа: М8О-409Б-20
Преподаватель: Пивоваров Д.Е.
Дата:
Оценка:

Москва, 2023

Задание

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

Вариант 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a^2 > 0,$$

$$u_x(0,t) - u(0,t) = 0,$$
$$u_x(\pi,t) - u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \sin x + \cos x,$$

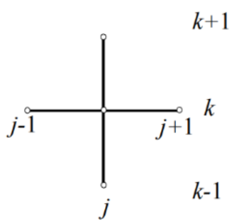
$$u_t(x,0) = -a(\sin x + \cos x).$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \sin(x - at) + \cos(x + at)$

Теория

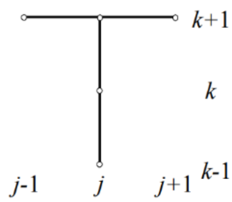
Явная конечно-разностная схема - крест:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \qquad j = \overline{1, N-1};\quad k = 1,2,\ldots$$



Неявная конечно-разностная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} \qquad j = \overline{1, N-1};\quad k = 1,2,\ldots$$



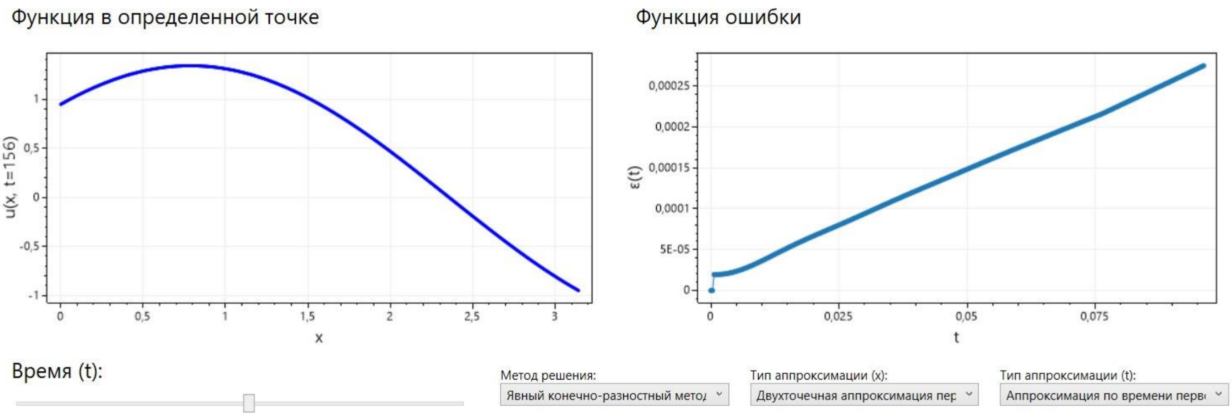
Вывод программы реализации:

- **Явная схема**

Явная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация с первым порядком +

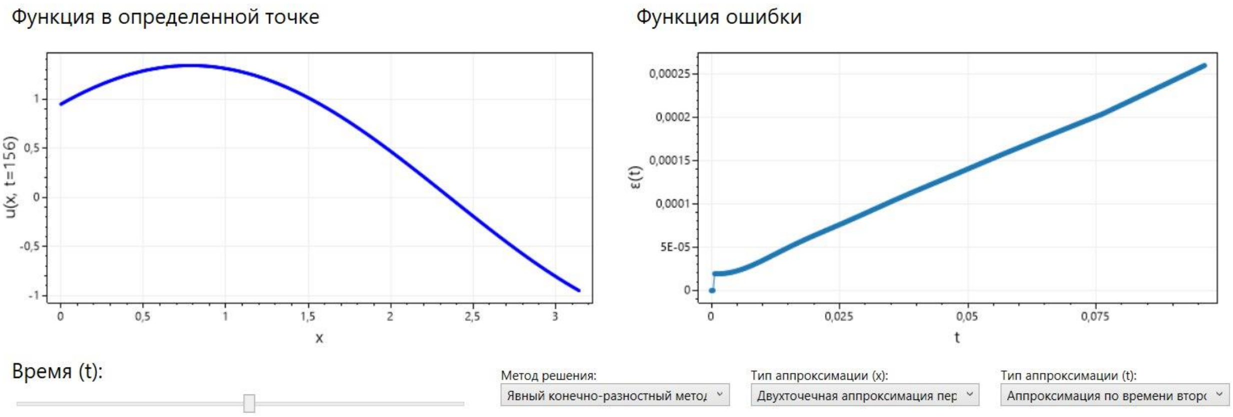
Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



Явная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация с первым порядком +

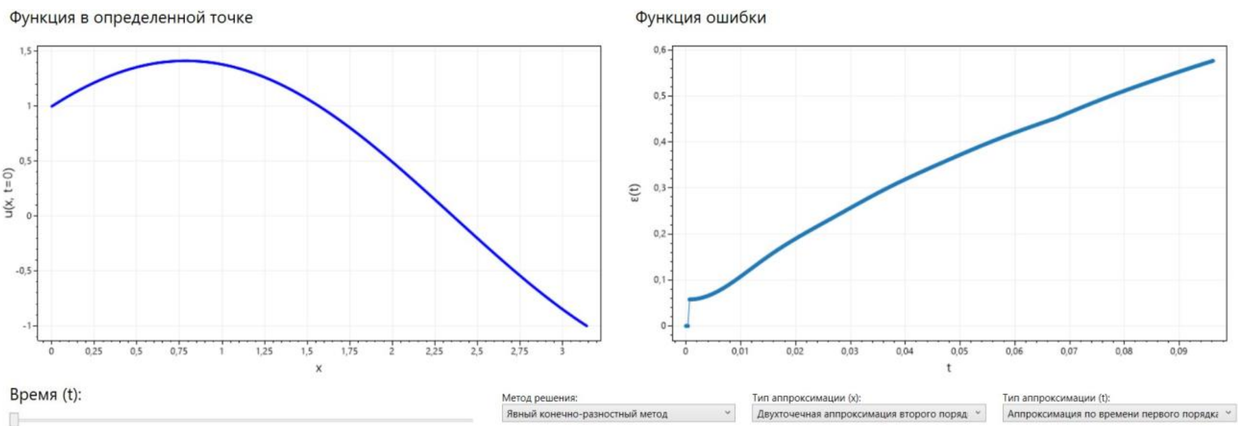
Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:



Явная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация со вторым порядком +

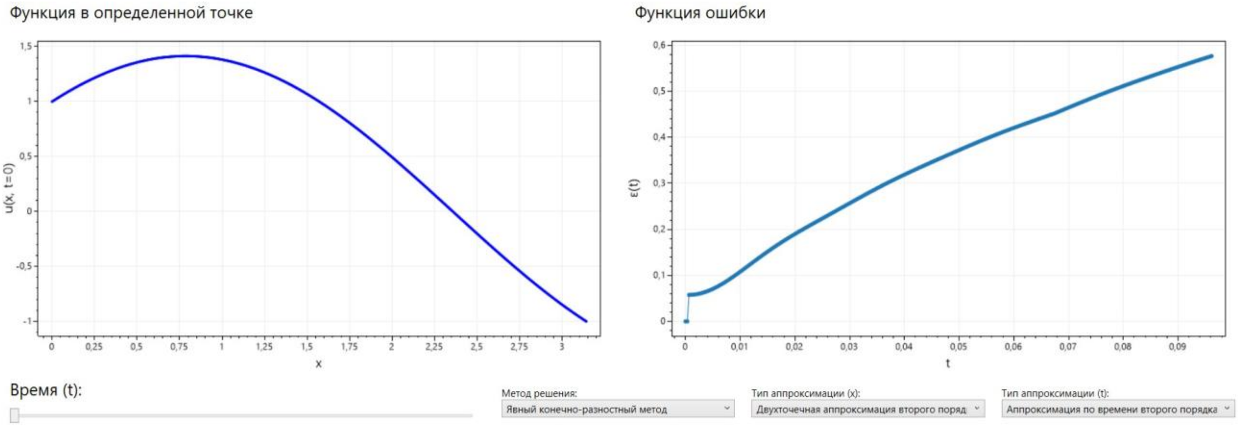
Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



Явная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация со вторым порядком +

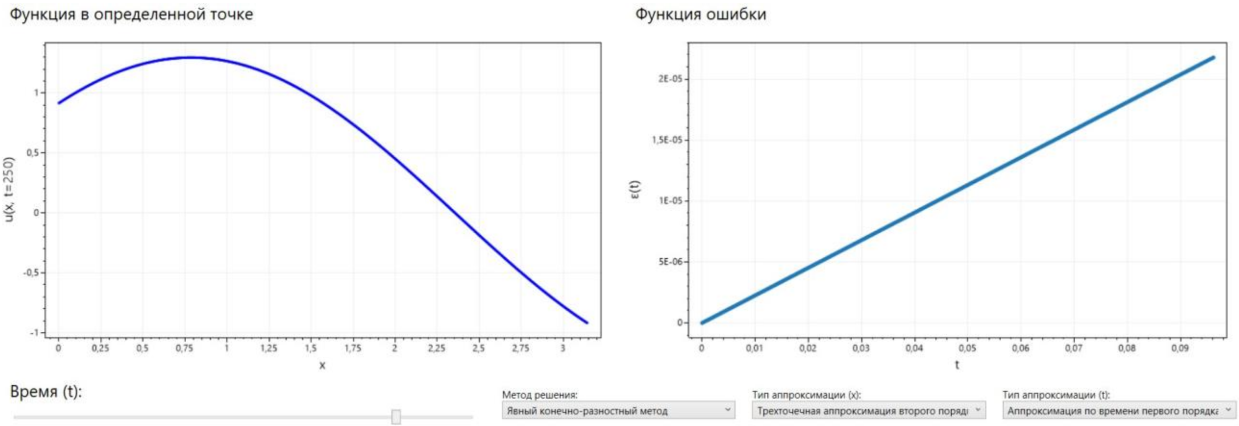
Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:



Явная конечно-разностная схема +

Трехточечная аппроксимация со вторым порядком +

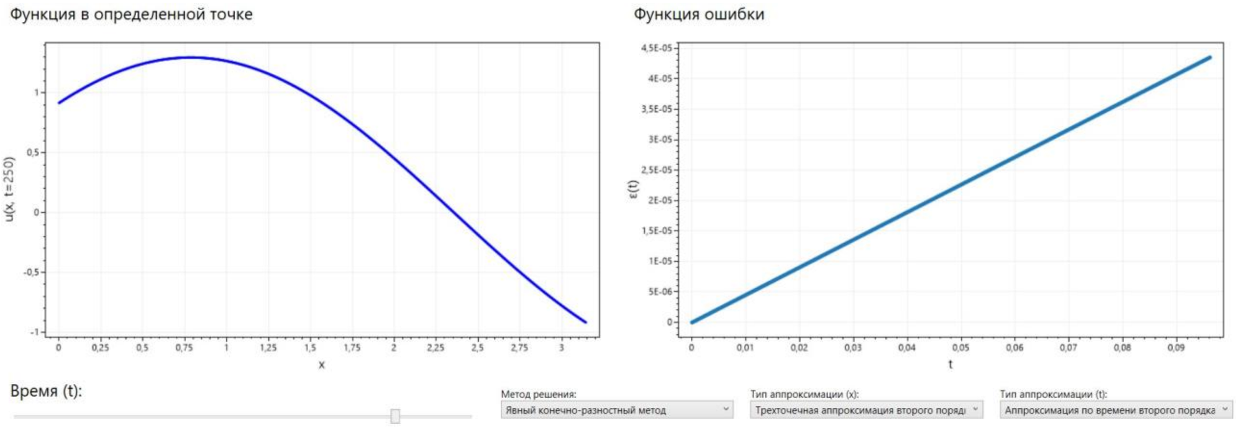
Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



Явная конечно-разностная схема +

Трехточечная аппроксимация со вторым порядком +

Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:

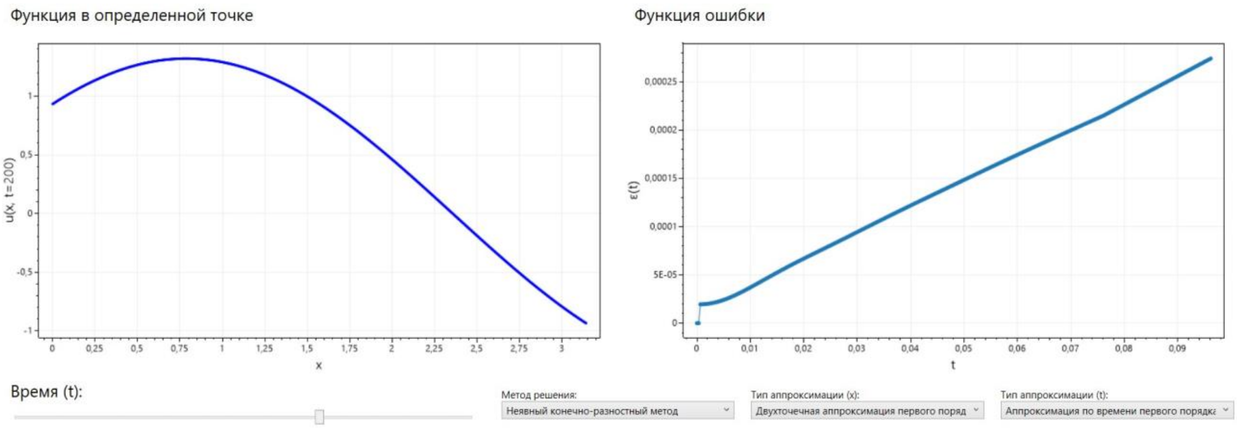


- **Неявная схема**

Неявная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация с первым порядком +

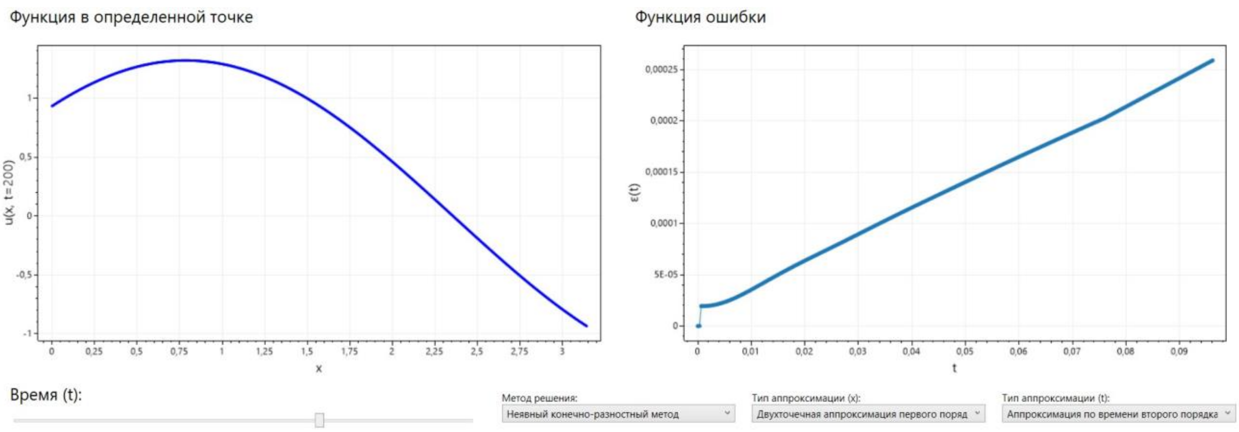
Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



Неявная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация с первым порядком +

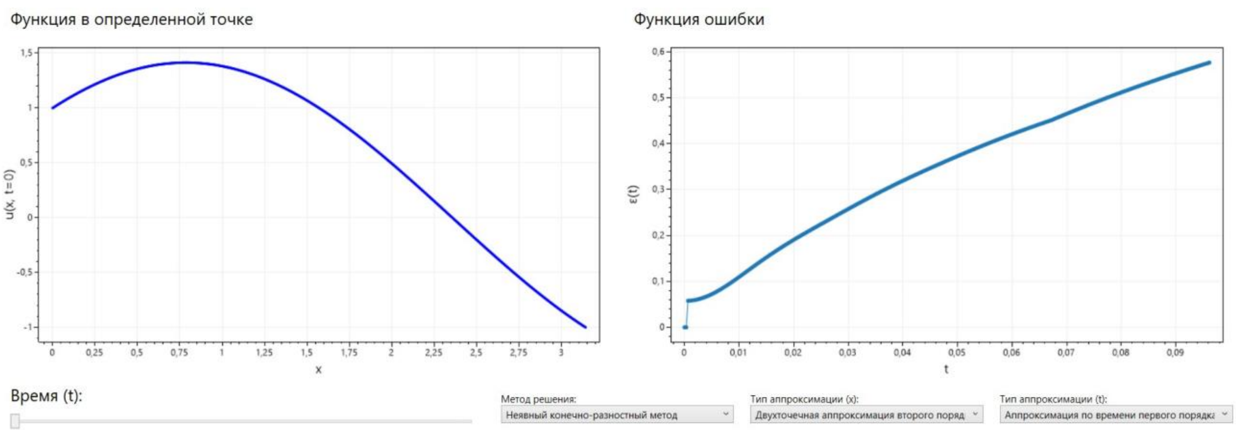
Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:



Неявная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация со вторым порядком +

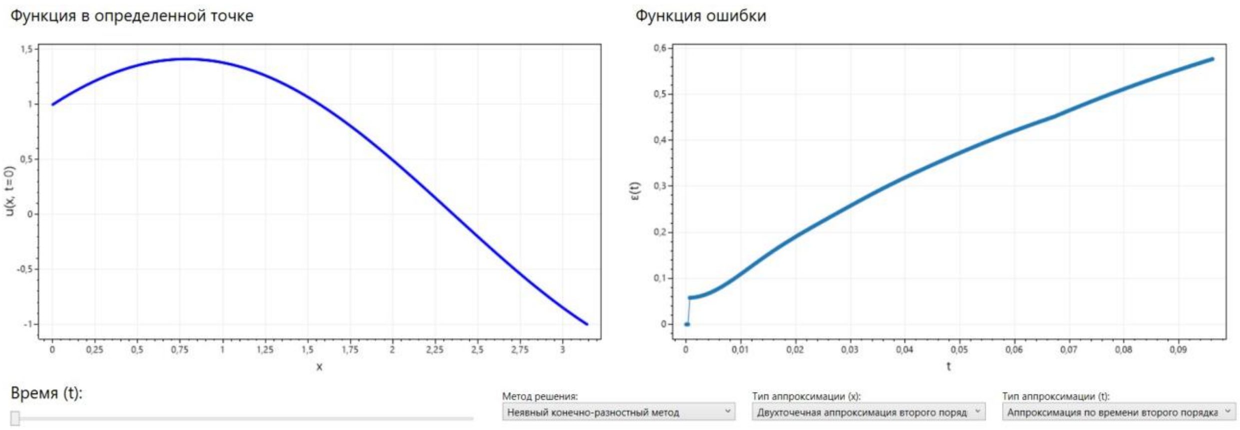
Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



Неявная конечно-разностная схема +

Двухточечная аппроксимация со вторым порядком +

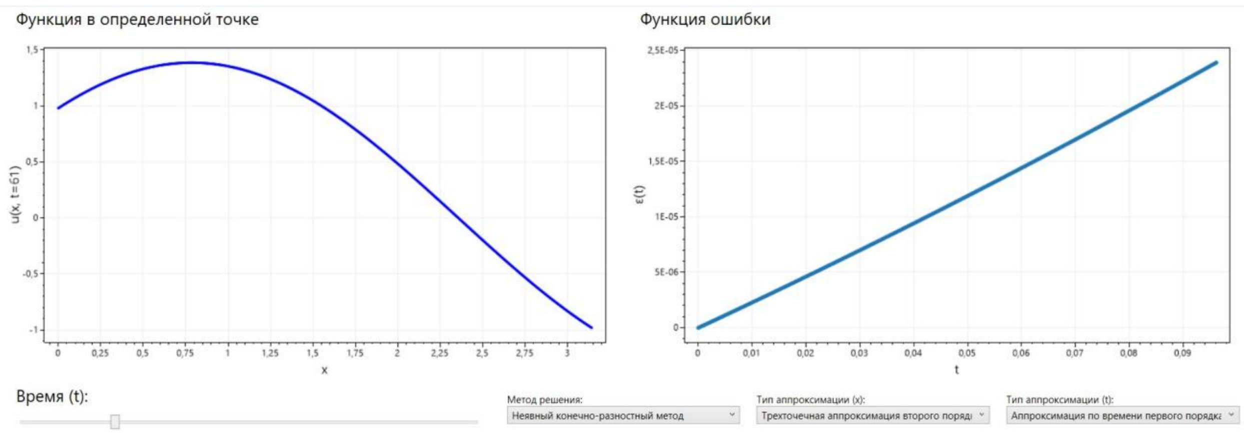
Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:



Неявная конечно-разностная схема +

Трехточечная аппроксимация со вторым порядком +

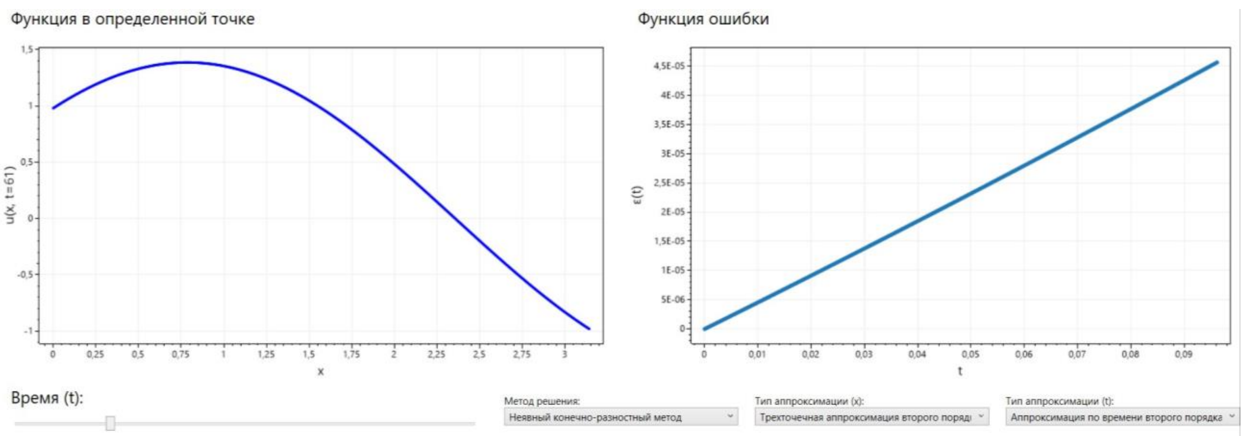
Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



Неявная конечно-разностная схема +

Трехточечная аппроксимация со вторым порядком +

Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:



Вывод:

В ходе данной лабораторной работы были реализованы 2 конечно-разностные схемы (явная схема крест и неявная схема) для решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа. Была произведена аппроксимация второго начального условия (времени) с первым и со вторым порядком. Для каждой конечно-разностной схемы была осуществлена реализация трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные (двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком). Была вычислена погрешность численного решения.