

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №6

по курсу «Численные методы»

Студент: Лябина М.А.
Группа: М8О-409Б-20
Преподаватель: Пивоваров Д.Е.
Дата:
Оценка:
Подпись

Москва, 2023

Задание

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

Вариант 8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = 2 \exp(-x) \sin x.$$

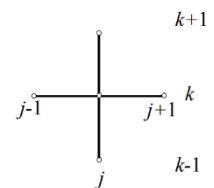
Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t - x) \sin x \sin(2t)$

Теория

Явная конечно-разностная схема - крест:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$$

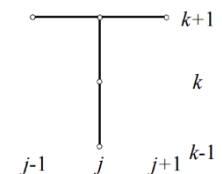
$$j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots$$



Неявная конечно-разностная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2}$$

$$j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

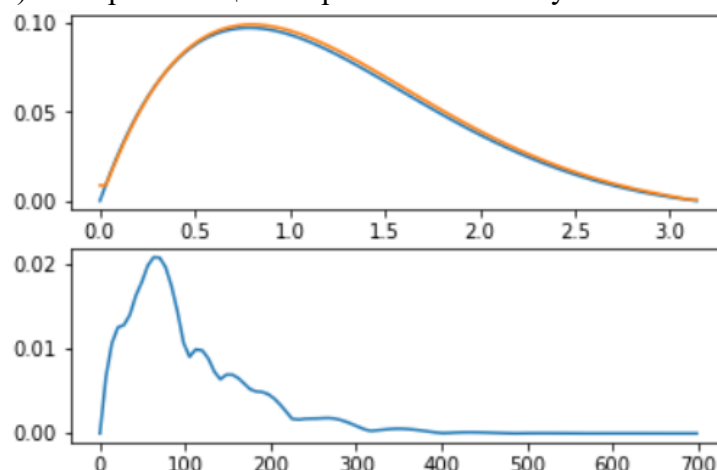


Вывод программы:

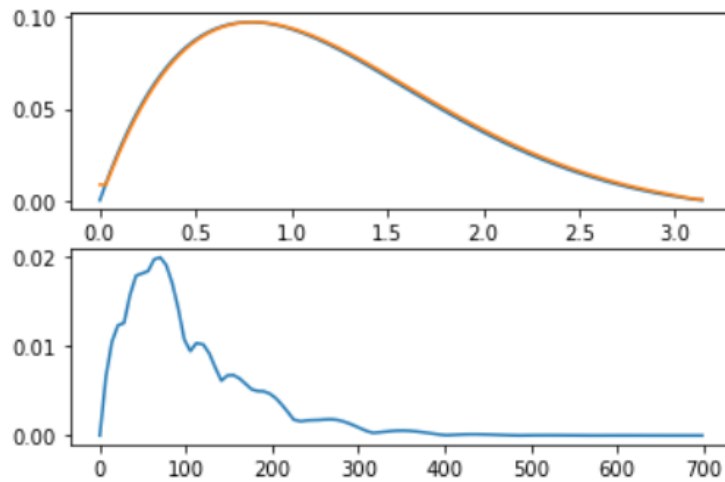
1. Явная конечно-разностная схема

1) Двухточечная аппроксимация с первым порядком

а) Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:

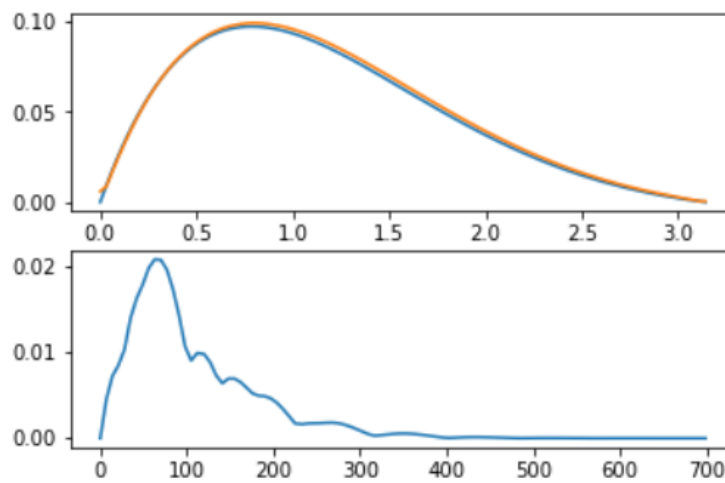


б) Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:

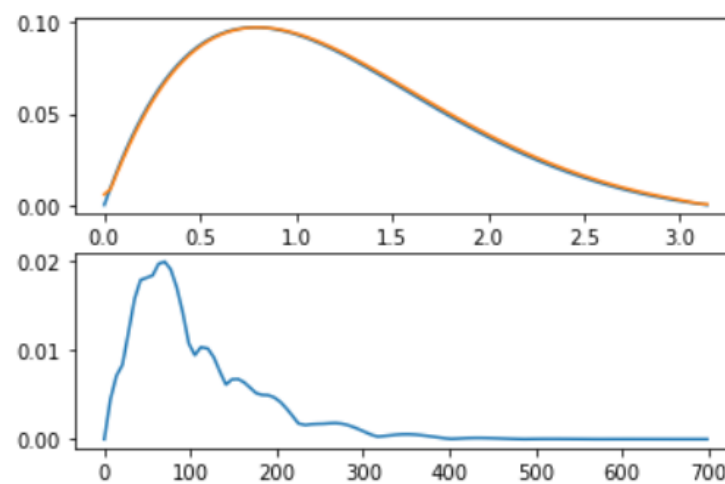


2) Двухточечная аппроксимация со вторым порядком

а) Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:

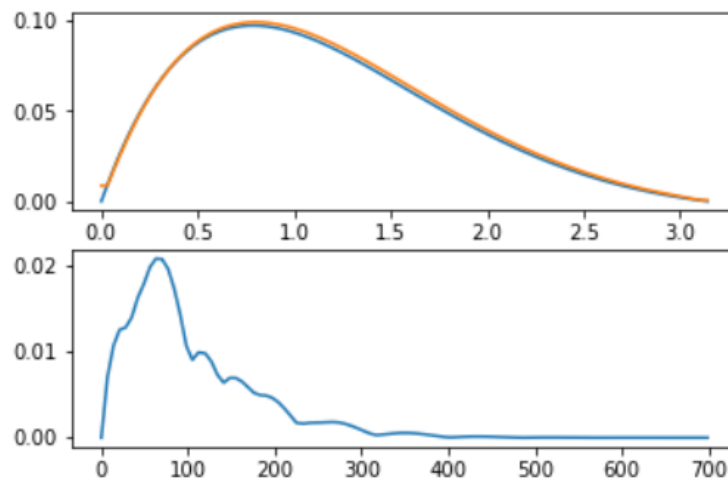


б) Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:

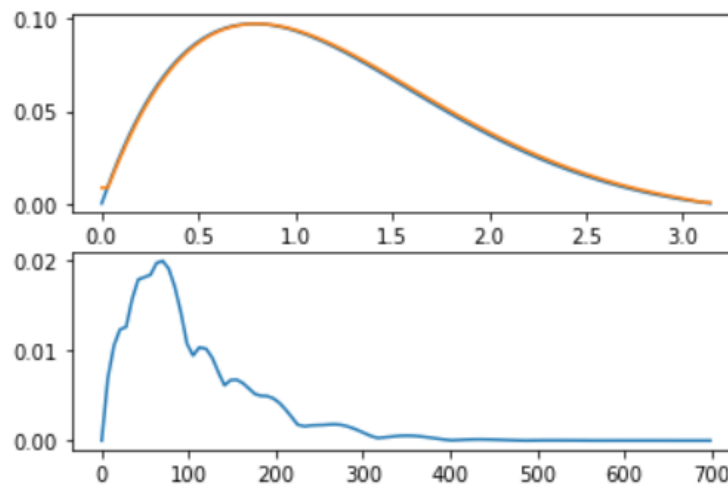


3) Трехточечная аппроксимация со вторым порядком

а) Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



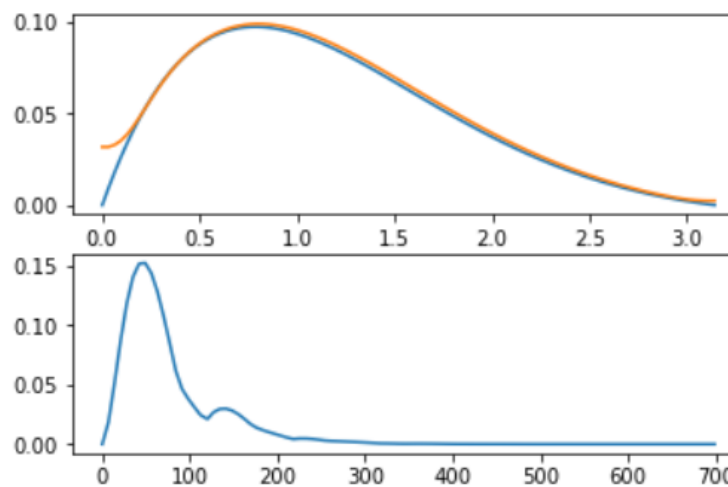
б) Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:



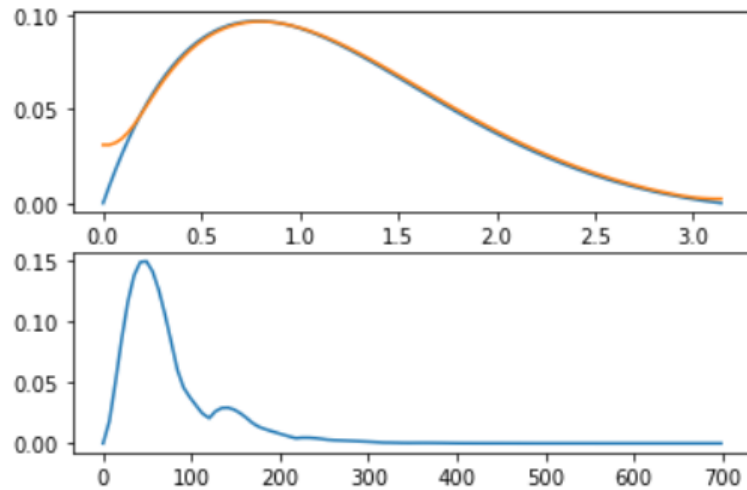
2. Неявная конечно-разностная схема

1) Двухточечная аппроксимация с первым порядком

а) Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:

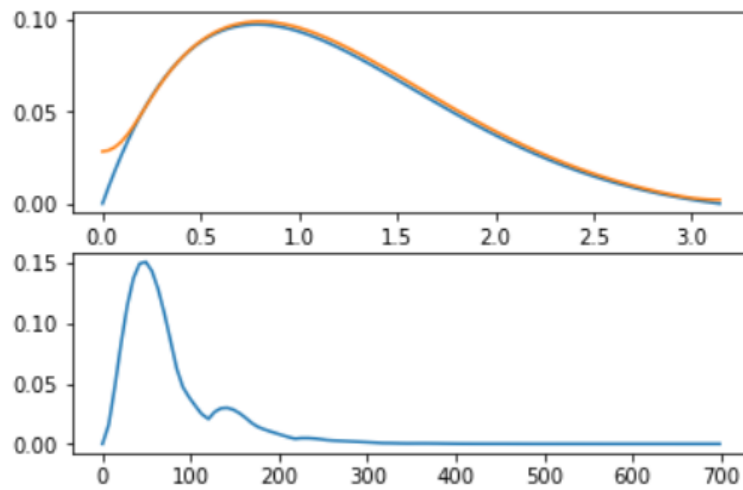


b) Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:

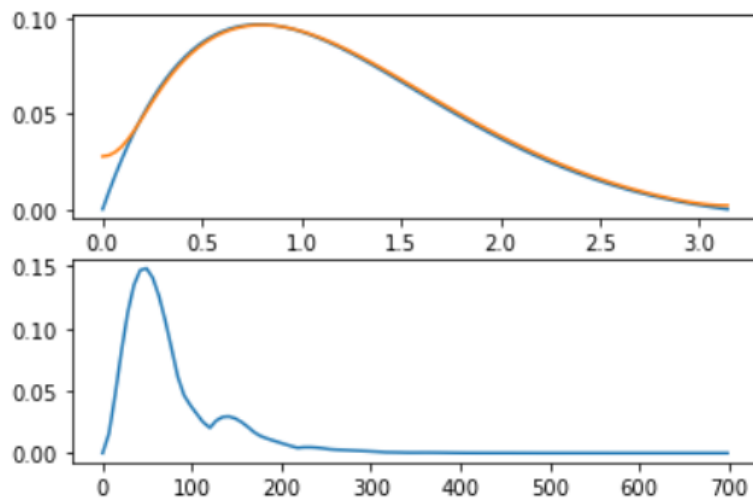


2) Двухточечная аппроксимация со вторым порядком

a) Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:

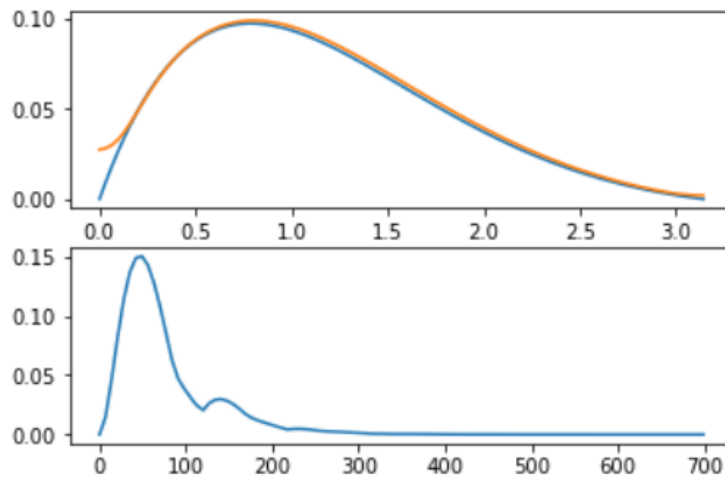


b) Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:

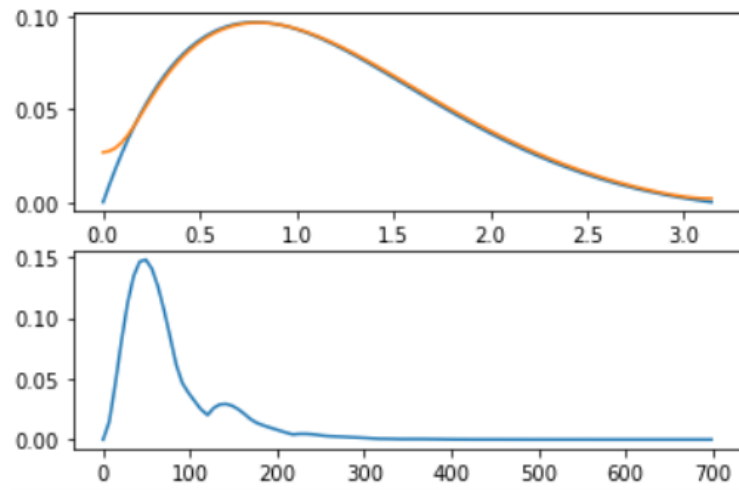


3) Трехточечная аппроксимация со вторым порядком

а) Аппроксимация второго начального условия с первым порядком:



б) Аппроксимация второго начального условия со вторым порядком:



Вывод:

В ходе данной лабораторной работы была решена начально-краевая задача для дифференциального уравнения гиперболического типа, с использованием явную схему крест и неявную схему. Аппроксимация второго начального условия произведена с первым и со вторым порядком. Была вычислена погрешность численного решения.