

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт №8 "Информационные технологии и прикладная математика"
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №8

по дисциплине:

Численные методы

Вариант №7

Выполнил: студент группы М8О-409Б-20

Легостаев Г.О.

Принял: Пивоваров Е.Д.

Оценка: _____

Москва, 2023 г.

1. Задание

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начальнокраевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y .

Уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy \sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) = y \cos t,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) = x \cos t,$$

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y, t) = xy \cos t.$$

2. Решение

- Метод переменных направлений:

- 1 этап:

$$\frac{u_{i,j}^{k+0.5} - u_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} = a \frac{u_{i+1,j}^{k+0.5} - 2u_{i,j}^{k+0.5} + u_{i-1,j}^{k+0.5}}{h_x^2} + a \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_y^2}$$

- 2 этап:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+0.5}}{\frac{\tau}{2}} = a \frac{u_{i+1,j}^{k+0.5} - 2u_{i,j}^{k+0.5} + u_{i-1,j}^{k+0.5}}{h_x^2} + a \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h_y^2}$$

- Метод дробных шагов:

- 1 дробный шаг:

$$\frac{u_{i,j}^{k+0.5} - u_{i,j}^k}{\tau} = a \frac{u_{i+1,j}^{k+0.5} - 2u_{i,j}^{k+0.5} + u_{i-1,j}^{k+0.5}}{h_x^2}$$

- 2 дробный шаг:

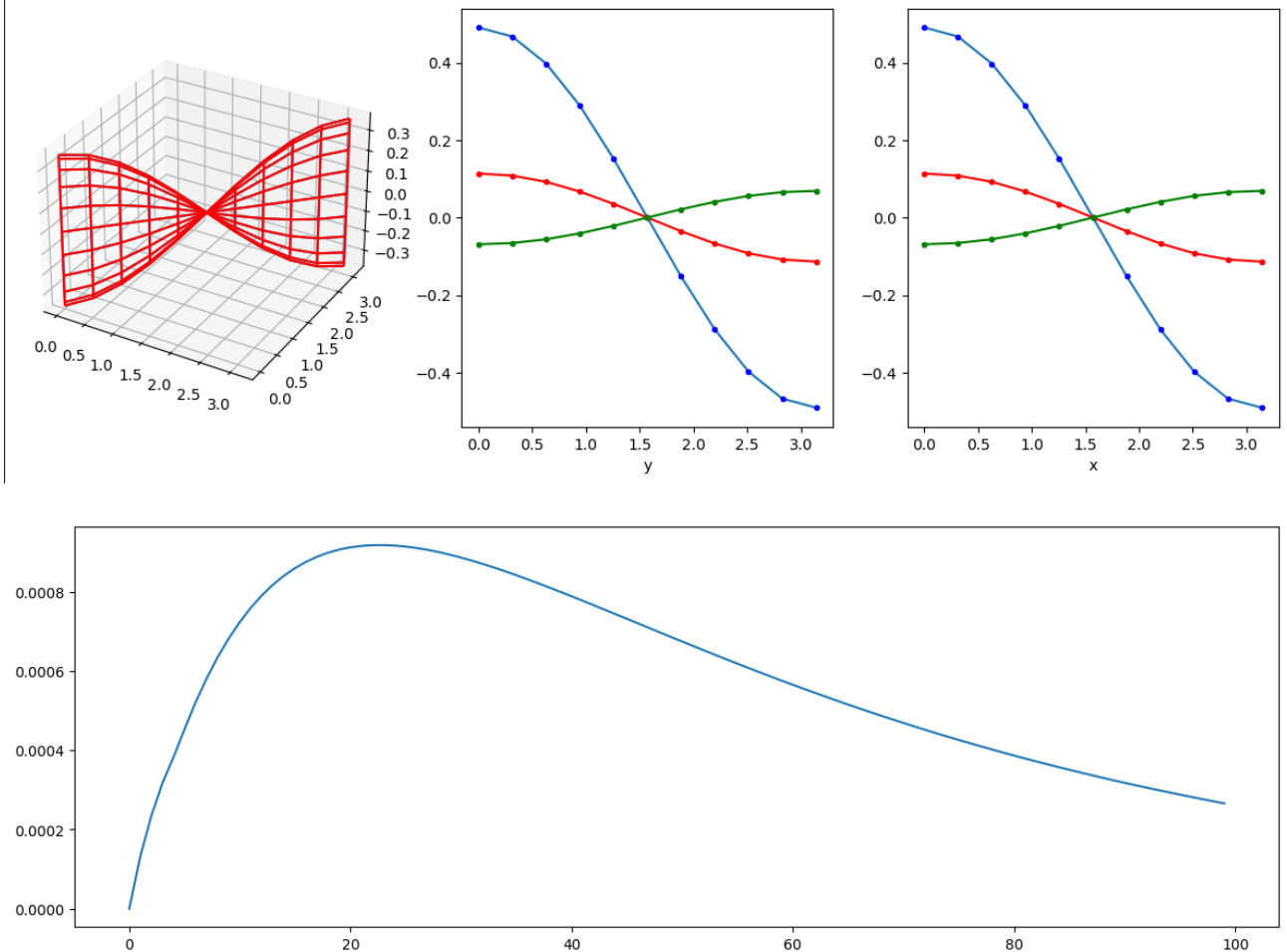
$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+0.5}}{\tau} = a \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h_y^2}$$

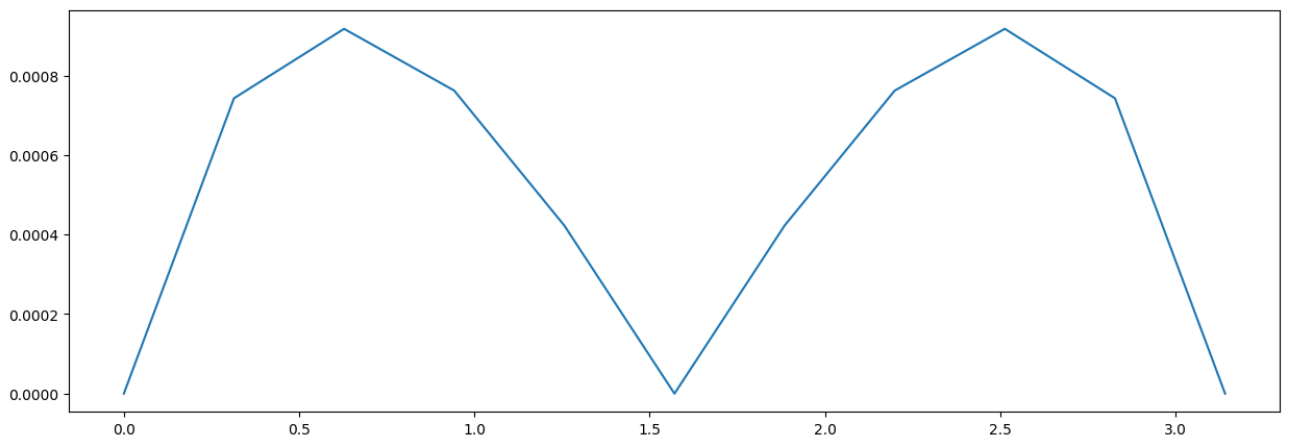
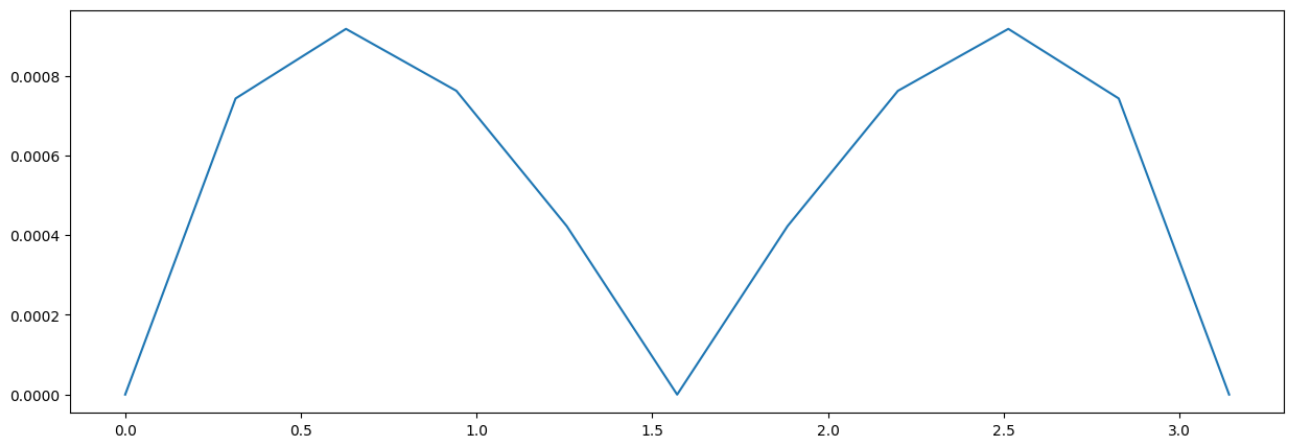
Погрешность между численным и аналитическим решением рассчитывается как абсолютная.

Параметр задачи: $a = 5$

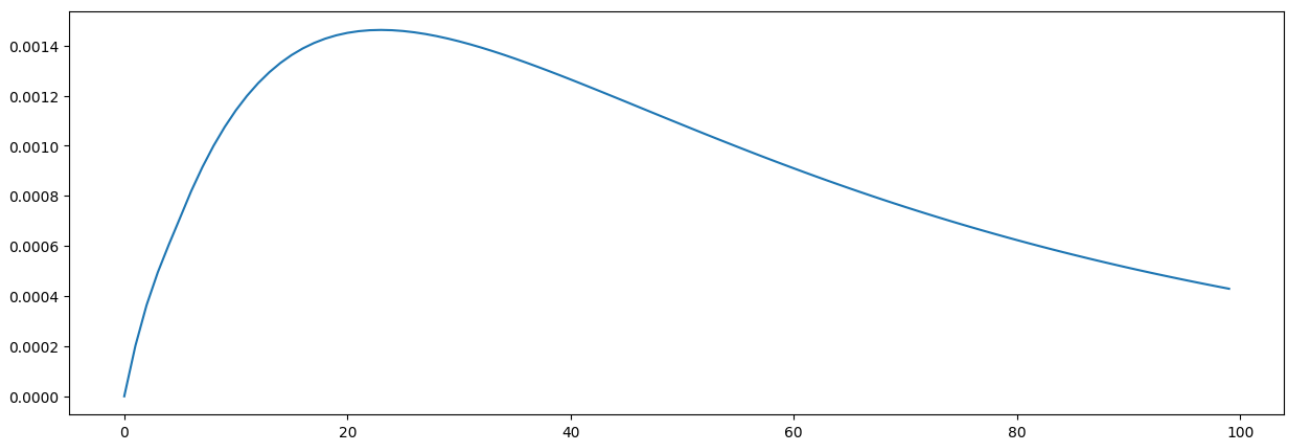
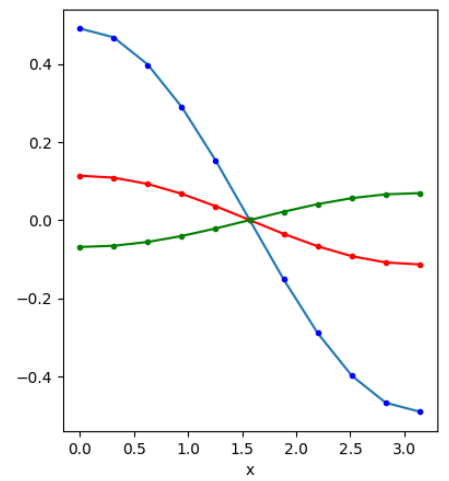
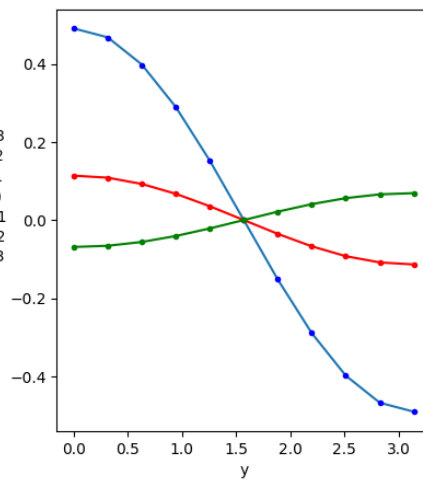
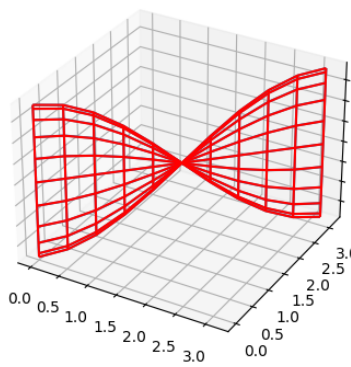
3. Вывод программы

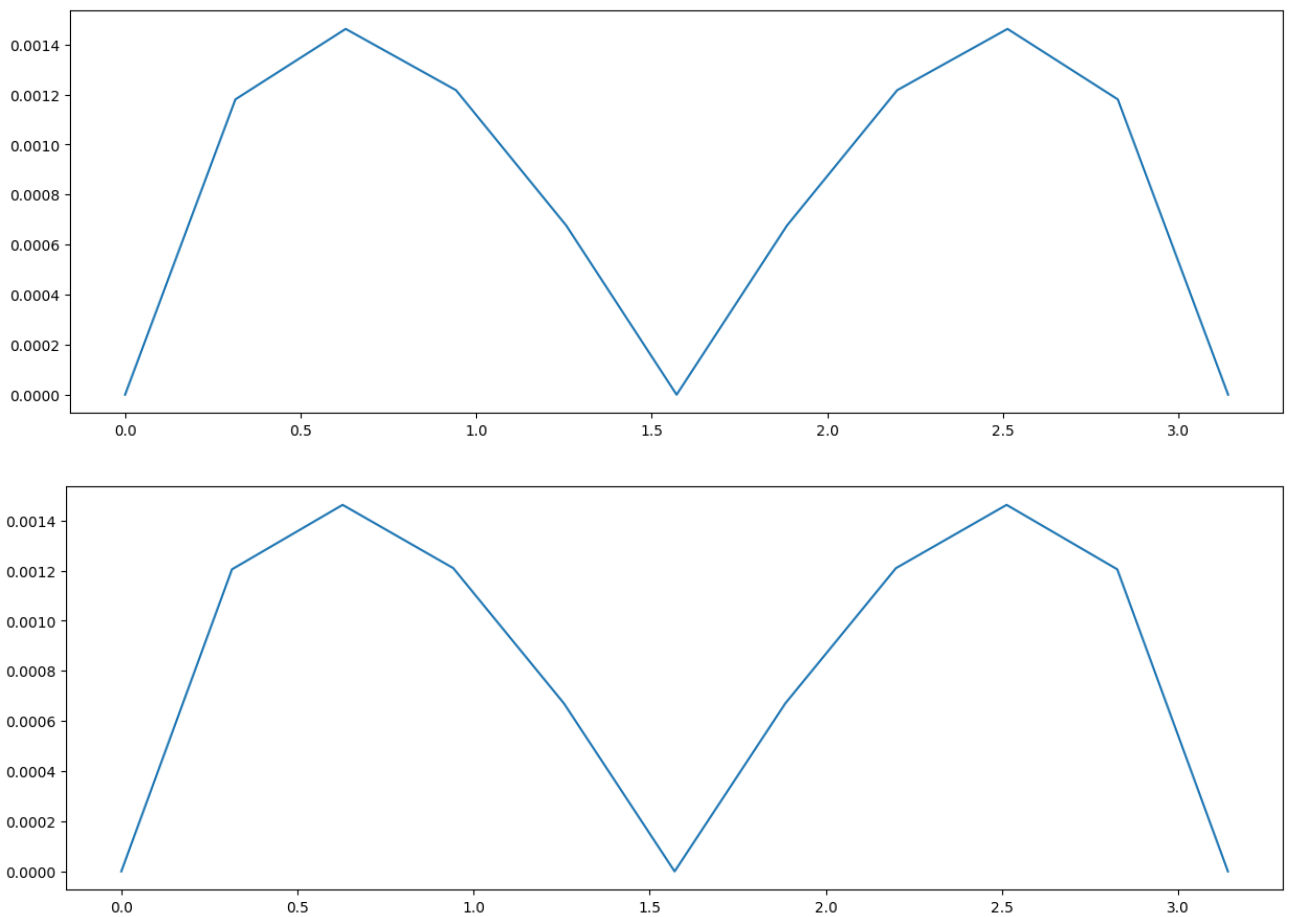
Метод переменных направлений





Метод дробных шагов





Листинг программы представлен в файле lab8.ipynb

4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы переменных направлений и дробных шагов решений двумерной начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа. Была применена двухточечная аппроксимация краевого условия первого порядка. Были получены результаты в графическом представлении и подсчитаны погрешности для каждого варианта решения.