

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №5

по курсу «Численные методы»

Студент: Лябина М.А.
Группа: М8О-409Б-20
Преподаватель: Пивоваров Д.Е.
Дата:
Оценка:
Подпись

Москва, 2023

Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

Вариант 8.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \quad a > 0, \quad c < 0.$$

$$u_x(0, t) = \exp((c - a)t),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \exp((c - a)t),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

$$\text{Аналитическое решение: } U(x, t) = \exp((c - a)t) \sin x.$$

Теория

Возьмем $a = 1$, тогда:

Явная конечно-разностная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2}$$

Неявная конечно-разностная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2}$$

Схема Кранка-Николсона (гибридная конечно-разностная схема, $\theta = 1/2$)

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = (\theta) \left(\frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2} \right)$$

Погрешность численного решения вычисляется путем сравнения результатов с аналитическим решением $U(x, t)$.

Вывод программы:

Интерфейс:

Лабораторная работа №2

Выберите параметры задачи:
 $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

a = 1

b = 1

c = -3

d = 2

Выберите параметры сетки

N = 10

sigma = 0.35

Выберите сечение по времени

10

Выберите метод: Явный

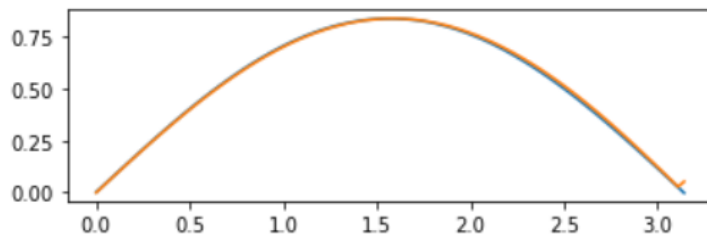
Выберите порядок (по пространству): Первый

Выберите порядок (по времени): Первый

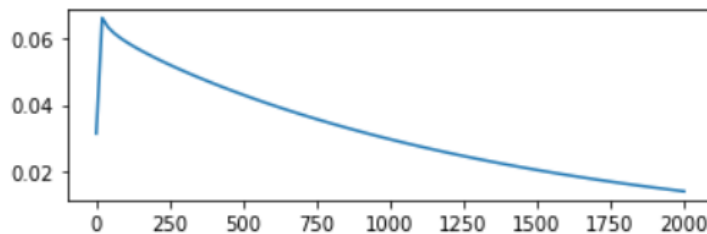
Решить

Явная конечно-разностная схема:

Функция в точке:

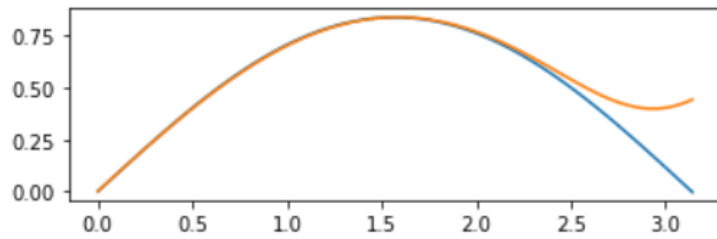


Функция ошибки:



Неявная конечно-разностная схема:

Функция в точке:



Функция ошибки:

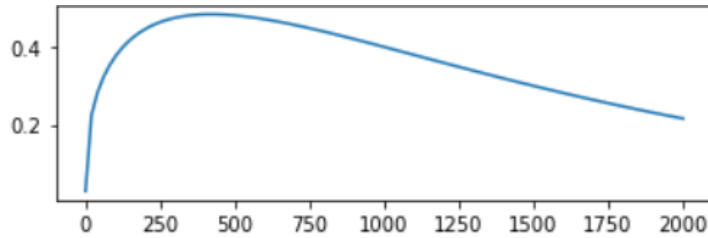
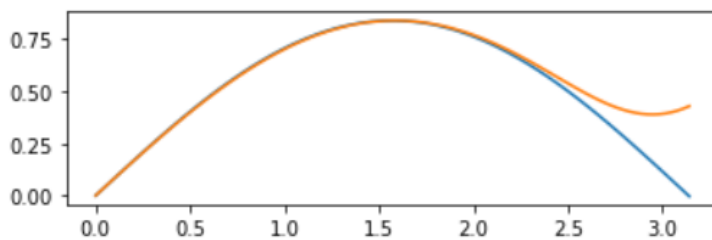
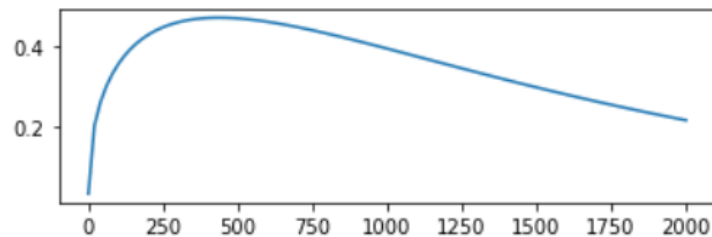


Схема Кранка-Никольсона (гибридная конечно-разностная схема)

Функция в точке:



Функция ошибки:



Вывод:

В ходе данной лабораторной работы была решена начально-краевая задача для дифференциального уравнения параболического типа, с использованием явной и неявной конечно-разностной схемы, а также схемы Кранка - Николсона. Программа имеет интерфейс, а также выводит графики функции в зависимости от времени t и график функции ошибки. При увеличении значения t погрешность уменьшается.