

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт №8 "Информационные технологии и прикладная математика"
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №5 по
дисциплине:

Численные методы
Вариант №7

Выполнил: студент группы М8О-409Б-20

Легостаев Г.О.

Принял: Пивоваров Е.Д.

Оценка: _____

Москва, 2023 г.

1. Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

Уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,5 \exp(-0,5t) \cos x, \\ u_x(0, t) &= \exp(-0,5t), \\ u_x(\pi, t) &= -\exp(-0,5t), \\ u(x, 0) &= \sin x,\end{aligned}$$

Аналитическое решение:

$$U(x, t) = \exp(-0,5t) \sin x.$$

2. Решение

- Явная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2} + f(x_j, t^k)$$

- Неявная схема:

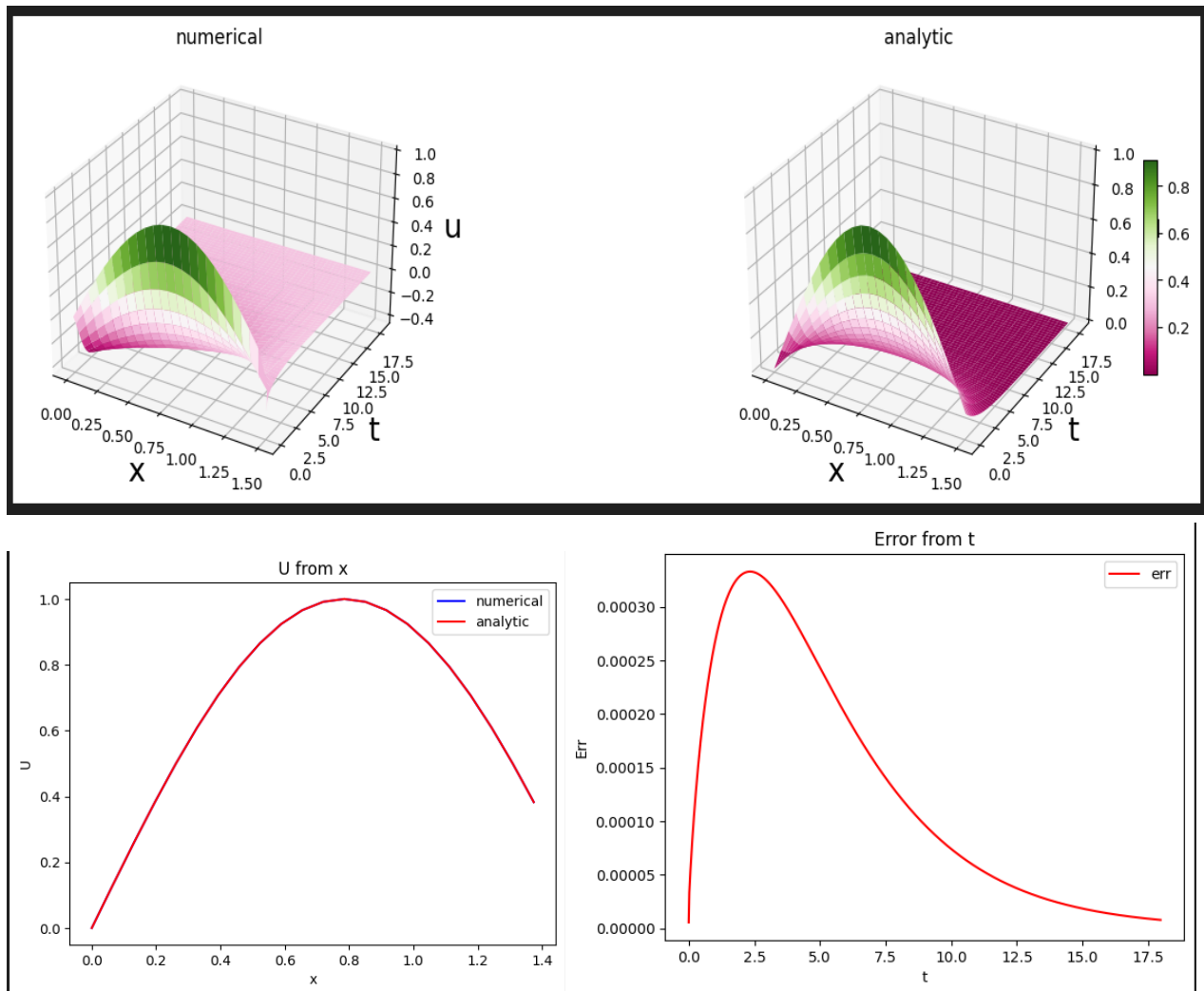
$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} + f(x_j, t^{k+1})$$

- Гибридная схема (при $\theta = 0.5$, схема Кранка-Николсона)

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} &= (\theta) \left(\frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} + f(x_j, t^k) \right) \\ &+ (1 - \theta) \left(\frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2} + f(x_j, t^k) \right)\end{aligned}$$

Погрешность между численным и аналитическим решением рассчитывается как модуль разности.

3. Вывод программы



Листинг программы представлен в файле lab5.ipynb

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены явная, неявная и гибридная схемы решений начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа. Также были изучены три варианта аппроксимации граничных условий. Были получены результаты в графическом представлении и подсчитаны погрешности для каждого варианта решения.