

Cálculo diferencial e integral IV

Tarea 01

Observación: Recuerde que agregaremos ejercicios a esta tarea conforme avancemos en los temas y estará completa hasta que demos una fecha de entrega. Además, cuando esté completa, podrá elegir los ejercicios que entregará.

1. Demuestre, usando los axiomas de campo de \mathbb{R} o las propiedades de campo vistas en clase, que:

a) Si $ax = a$ con $a \neq 0$, entonces $x = 1$.

b) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

c) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

2. El símbolo $\frac{a}{b}$ significa $a \cdot b^{-1}$. Demuestra que:

a) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$.

b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$.

c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$.

d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$.

3. Demuestre, usando los axiomas de orden de \mathbb{R} o las propiedades de orden vistas en clase, que:

a) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

b) Si $a < b$, entonces $-a > -b$.

c) Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

d) Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.

4. Halle todos los números x que satisfacen:

a) $10 - x > 2 - 3x$

b) $(x - 4)(x + 2) \leq 0$

c) $7x^2 - x \geq 2x + 2 - 7x^2$

d) $1 < \frac{1}{x(x-1)}$

Argumente sus respuestas.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

a) $\sqrt{a^2} = |a|$

b) $|ab| = |a||b|$

c) Si $b \neq 0$, $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{|b|}$

d) Si $b \neq 0$, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

e) $|a| - |b| \leq |a - b|$ y de aquí concluya que $||a| - |b|| \leq |a - b|$

6. Halle todos los números x que satisfacen:

a) $|x - 9| > 7$

b) $1 \leq |x - 2| < 7$

c) $1 < \frac{1}{|x-2|} \leq 4$