

ASG

---

# Cálculo

Al futuro,  
cuando al fin usaremos esto con fluidez.

---

# *Índice general*

---

Índice de cuadros	V
Índice de figuras	VII
Prefacio	IX
Quién escribe?	XI
1. Introducción	1
2. Ejemplo 01	3
Apéndice	7



---

## *Índice de cuadros*



---

## *Índice de figuras*





---

## ***Prefacio***

---

Algo.

---

## **Agradecimientos**

A las personas que hicieron sencillo el publicar libros.

ASG



# 0

---

## Quién escribe?

Por ahora, solo ASG. Más tarde espero que más personas.



# 1

---

## *Introducción*

---

Si esto funciona, el sitio se actualizará automáticamente. Y la escritura se simplificará. Además, cada capítulo tendrá el enlace a su propio video sin problemas.



## 2

### Ejemplo 01

En esta sesión veremos una consecuencia importante del Teorema de Green: si  $F$  es un campo de clase  $C^1$ , el rotacional  $\text{Rot}(F(\bar{x}))$  de  $F$  en un punto  $\bar{x}$  se puede calcular como un límite sobre regiones muy generales. Antes de ello, es conveniente recordar que si  $A \subset \mathbb{R}^2$  es acotado, entonces

$$\text{dám}(A) = \sup \{ \|\bar{x} - \bar{y}\| \mid \bar{x}, \bar{y} \in A \}.$$

**Proposition 2.1.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  una región,  $F = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en  $U$ ,  $\bar{x} \in U$  y  $\{\Omega_\epsilon\}_{0 < \epsilon < c}$  una familia de subconjuntos de  $U$  que son Jordan-medibles, cerrados y acotados tales que  $\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon = \text{Fr}(\Omega_\epsilon)$  es una curva cerrada simple,  $\bar{x} \in \text{int}(\Omega_\epsilon)$  para toda  $0 < \epsilon < c$  y  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{dám}(\Omega_\epsilon) = 0$ . Entonces

$$\text{Rot}(F(\bar{x})) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)}$$

donde  $\gamma_\epsilon$  es una parametrización de  $\Gamma_\epsilon$  que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

*Demostración.* Notamos que para cada  $0 < \epsilon < c$  se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, por lo cual

$$\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Luego, para cada  $\epsilon$ , por el Teorema del Valor Promedio para integrales sobre conjuntos Jordan-medibles ([¿recuerda dicho resultado?](#)), existe  $\bar{\xi}_\epsilon \in \Omega_\epsilon$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon) \right) \cdot m(\Omega_\epsilon) \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon) \right) \cdot \text{área}(\Omega_\epsilon). \end{aligned}$$

Ya que  $\bar{x} \in \text{int}(\Omega_\epsilon)$ , entonces  $\text{int}(\Omega_\epsilon) \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $\text{área}(\Omega_\epsilon) \neq 0$ , de donde, al combinar las dos igualdades anteriores, para toda  $\epsilon$  se cumple que

$$\frac{\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)} = \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon).$$

Para concluir, notamos que las funciones  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}$  son continuas porque  $F$  es de clase  $C^1$ , además,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{\xi}_\epsilon = \bar{x}$$

porque  $\bar{x} \in \text{int}(\Omega_\epsilon)$  para toda  $0 < \epsilon < c$  y  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{diam}(\Omega_\epsilon) = 0$ , entonces por un teorema de cambio de variable en límites ([¿conoce algún teorema así?](#)) obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon) \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{x}) \\ &= \text{Rot}(F(\bar{x})). \end{aligned}$$

Esto termina la prueba. □

Aunque no lo parezca, la Proposición 2.1 se puede interpretar como la **rotación promedio** generada por el campo  $F$  en el punto  $\bar{x}$ .

Para concluir esta sesión presentamos una aplicación directa del Teorema de Green: el cálculo de una integral.

**Exercise 2.1.** Calcule la integral  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ , donde  $F(x, y) = (3x^3 - y^3, x^3 + 2y^3)$  y  $\Gamma$  es el círculo unitario con centro en el origen y recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

*Demostración.* Tenemos que  $F$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  y si  $\Omega = B_1(0, 0)$ , entonces  $\Omega$  es un conjunto Jordan-medible y  $\text{Fr}(\Omega) = \partial\Omega = \Gamma$ . Como  $\mathbb{R}^2$  es una región, claramente se tiene que  $\Omega \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ . Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, así que

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = \int_{\Omega} \text{Rot}(F),$$

donde  $\gamma$  es la parametrización usual de  $\Gamma$  que la recorre una vez en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Notamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3x^2$$

y también

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -3y^2,$$

por lo cual

$$\text{Rot}(F)(x, y) = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2).$$

En virtud de lo anterior, tenemos que

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = 3 \int_{B_1(0,0)} f$$

donde  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Notamos que al aplicar el cambio de variable a coordenadas polares obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0,0)} f &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r^3 dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta \end{aligned}$$



$$= \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = \frac{3\pi}{2}.$$

□

¿Obtiene el mismo resultado si hace los cálculos directamente?



**A**

*Por aprender*

Este sería el final. Ver la Proposición 2.1.

