

ASG

Cálculo

Al futuro,
cuando al fin usaremos esto con fluidez.

Índice general

Índice de cuadros	V
Índice de figuras	VII
Prefacio	IX
Quién escribe?	XI
1. Introducción	1
2. Ejemplo 01	3
Apéndice	7

Índice de cuadros

Índice de figuras

Prefacio

Algo.

Agradecimientos

A las personas que hicieron sencillo el publicar libros.

ASG

0

Quién escribe?

Por ahora, solo ASG. Más tarde espero que más personas.

1

Introducción

Si esto funciona, el sitio se actualizará automáticamente. Y la escritura se simplificará. Además, cada capítulo tendrá el enlace a su propio video sin problemas.

2

Ejemplo 01

En esta sesión veremos una consecuencia importante del Teorema de Green: si F es un campo de clase C^1 , el rotacional $\text{Rot}(F(\bar{x}))$ de F en un punto \bar{x} se puede calcular como un límite sobre regiones muy generales. Antes de ello, es conveniente recordar que si $A \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, entonces

$$\text{dám}(A) = \sup \{ \|\bar{x} - \bar{y}\| \mid \bar{x}, \bar{y} \in A \}.$$

Proposition 2.1. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ una región, $F = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U , $\bar{x} \in U$ y $\{\Omega_\epsilon\}_{0 < \epsilon < c}$ una familia de subconjuntos de U que son Jordan-medibles, cerrados y acotados tales que $\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon = \text{Fr}(\Omega_\epsilon)$ es una curva cerrada simple, $\bar{x} \in \text{int}(\Omega_\epsilon)$ para toda $0 < \epsilon < c$ y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{dám}(\Omega_\epsilon) = 0$. Entonces

$$\text{Rot}(F(\bar{x})) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)}$$

donde γ_ϵ es una parametrización de Γ_ϵ que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Demostración. Notamos que para cada $0 < \epsilon < c$ se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, por lo cual

$$\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Luego, para cada ϵ , por el Teorema del Valor Promedio para integrales sobre conjuntos Jordan-medibles ([¿recuerda dicho resultado?](#)), existe $\bar{\xi}_\epsilon \in \Omega_\epsilon$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon) \right) \cdot m(\Omega_\epsilon) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon) \right) \cdot \text{área}(\Omega_\epsilon). \end{aligned}$$

Ya que $\bar{x} \in \text{int}(\Omega_\epsilon)$, entonces $\text{int}(\Omega_\epsilon) \neq \emptyset$, lo cual implica que $\text{área}(\Omega_\epsilon) \neq 0$, de donde, al combinar las dos igualdades anteriores, para toda ϵ se cumple que

$$\frac{\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)} = \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon).$$

Para concluir, notamos que las funciones $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son continuas porque F es de clase C^1 , además,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{\xi}_\epsilon = \bar{x}$$

porque $\bar{x} \in \text{int}(\Omega_\epsilon)$ para toda $0 < \epsilon < c$ y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{diam}(\Omega_\epsilon) = 0$, entonces por un teorema de cambio de variable en límites ([¿conoce algún teorema así?](#)) obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{\xi}_\epsilon) \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{x}) \\ &= \text{Rot}(F(\bar{x})). \end{aligned}$$

Esto termina la prueba. \square

Aunque no lo parezca, la Proposición 2.1 se puede interpretar como la **rotación promedio** generada por el campo F en el punto \bar{x} .

Para concluir esta sesión presentamos una aplicación directa del Teorema de Green: el cálculo de una integral.

Exercise 2.1. Calcule la integral $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$, donde $F(x, y) = (3x^3 - y^3, x^3 + 2y^3)$ y Γ es el círculo unitario con centro en el origen y recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Demostración. Tenemos que F es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 y si $\Omega = B_1(0, 0)$, entonces Ω es un conjunto Jordan-medible y $\text{Fr}(\Omega) = \partial\Omega = \Gamma$. Como \mathbb{R}^2 es una región, claramente se tiene que $\Omega \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, así que

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = \int_{\Omega} \text{Rot}(F),$$

donde γ es la parametrización usual de Γ que la recorre una vez en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Notamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3x^2$$

y también

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -3y^2,$$

por lo cual

$$\text{Rot}(F)(x, y) = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2).$$

En virtud de lo anterior, tenemos que

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = 3 \int_{B_1(0,0)} f$$

donde $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Notamos que al aplicar el cambio de variable a coordenadas polares obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0,0)} f &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = \frac{3\pi}{2}.$$

□

¿Obtiene el mismo resultado si hace los cálculos directamente?

A

Por aprender

Este sería el final. Ver la Proposición 2.1.

