2

Ejemplo 01

En esta sesión veremos una consecuencia importante del Teorema de Green: si F es un campo de clase C^1, el rotacional $\operatorname{Rot}(F(\overline{x}))$ de F en un punto $\overline{x}$ se puede calcular como un límite sobre regiones muy generales. Antes de ello, es conveniente recordar que si $A \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, entonces

$$\operatorname{diám}(A) = \sup\left\{ \|\overline{x} - \overline{y}\| \mid \overline{x},\ \overline{y} \in A \right\}.$$

Proposition 2.1. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ una región, $F = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U, $\overline{x} \in U$ y $\{\Omega_\epsilon\}_{0<\epsilon<c}$ una familia de subconjuntos de U que son Jordan–medibles, cerrados y acotados tales que $\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon = \operatorname{Fr}(\Omega_\epsilon)$ es una curva cerrada simple, $\overline{x} \in \operatorname{int}(\Omega_\epsilon)$ para toda $0 < \epsilon < c$ y $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \operatorname{diám}(\Omega_\epsilon) = 0$. Entonces

$$\operatorname{Rot}(F(\overline{x})) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\operatorname{área}(\Omega_\epsilon)}$$

donde γ_ϵ es una parametrización de Γ_ϵ que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Demostración. Notamos que para cada $0 < \epsilon < c$ se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, por lo cual

$$\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Luego, para cada ϵ, por el Teorema del Valor Promedio para integrales sobre conjuntos Jordan–medibles (¿recuerda dicho resultado?), existe $\overline{\xi}_\epsilon \in \Omega_\epsilon$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right) \right) \cdot m(\Omega_\epsilon) \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right) \right) \cdot \operatorname{área}(\Omega_\epsilon).
\end{aligned}$$

Ya que $\overline{x} \in \operatorname{int}(\Omega_\epsilon)$, entonces $\operatorname{int}(\Omega_\epsilon) \neq \emptyset$, lo cual implica que $\operatorname{área}(\Omega_\epsilon) \neq 0$, de donde, al combinar las dos igualdades anteriores, para toda ϵ se cumple que

$$\frac{\displaystyle\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\operatorname{área}(\Omega_\epsilon)} = \frac{\partial Q}{\partial x}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right).$$

Para concluir, notamos que las funciones $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son continuas porque F es de clase C^1, además,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{\xi}_\epsilon = \overline{x}$$

porque $\overline{x} \in \operatorname{int}(\Omega_\epsilon)$ para toda $0 < \epsilon < c$ y $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \operatorname{di\acute{a}m}(\Omega_\epsilon) = 0$, entonces por un teorema de cambio de variable en límites (¿conoce algún teorema así?) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\displaystyle\int\limits_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)} &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\overline{\xi}_\epsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\overline{\xi}_\epsilon) \right) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x}(\overline{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\overline{x}) \\
&= \operatorname{Rot}(F(\overline{x})).
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba.

$\square$

Aunque no lo parezca, la Proposición 2.1 se puede interpretar como la **rotación promedio** generada por el campo F en el punto $\overline{x}$.

Para concluir esta sesión presentamos una aplicación directa del Teorema de Green: el cálculo de una integral.

Exercise 2.1. Calcule la integral $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} F \cdot d\gamma$, donde $F(x,y) = (3x^3 - y^3, x^3 + 2y^3)$ y Γ es el círculo unitario con centro en el origen y recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Demostración. Tenemos que F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y si $\Omega = B_1(0,0)$, entonces Ω es un conjunto Jordan–medible y $\operatorname{Fr}(\Omega) = \partial\Omega = \Gamma$. Como $\mathbb{R}^2$ es una región, claramente se tiene que $\Omega \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, así que

$$\int\limits_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = \int\limits_{\Omega} \operatorname{Rot}(F),$$

donde γ es la parametrización usual de Γ que la recorre una vez en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Notamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3x^2$$

y también

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -3y^2,$$

por lo cual

$$\operatorname{Rot}(F)(x,y) = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2).$$

En virtud de lo anterior, tenemos que

$$\int\limits_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = 3 \int\limits_{B_1(0,0)} f$$

donde $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Notamos que al aplicar el cambio de variable a coordenadas polares obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_1(0,0)} f &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 r^3 dr \right) d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = \frac{3\pi}{2}.$$

$\square$

¿Obtiene el mismo resultado si hace los cálculos directamente?