Cálculo

Al futuro,

cuando al fin usaremos esto con fluidez.

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Prefacio

Algo.

Agradecimientos

A las personas que hicieron sencillo el publicar libros.

ASG

0

Quién escribe?

Por ahora, solo ASG. Más tarde espero que más personas.

1

Introducción

Si esto funciona, el sitio se actualizará automáticamente. Y la escritura se simplificará. Además, cada capítulo tendrá el enlace a su propio video sin problemas.

2

Ejemplo 01

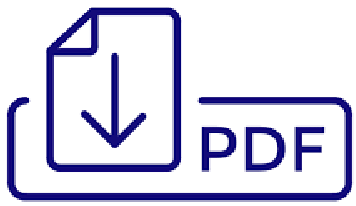

Figura 2.1: Imaagen de prueba

Vea la Figura 2.1.

En esta sesión veremos una consecuencia importante del Teorema de Green: si F es un campo de clase C^1, el rotacional $\operatorname{Rot}(F(\overline{x}))$ de F en un punto $\overline{x}$ se puede calcular como un límite sobre regiones muy generales. Antes de ello, es conveniente recordar que si $A \subsetneq \mathbb{R}^2$ es acotado, entonces
hola mundo

$$\operatorname{diám}(A) = \sup\left\{ \|\overline{x} - \overline{y}\| \mid \overline{x},\ \overline{y} \in A \ \right\}.$$

Proposition 2.1. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ una región, $F = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U, $\overline{x} \in U$ y $\{\Omega_\epsilon\}_{0<\epsilon<c}$ una familia de subconjuntos de U que son Jordan–medibles, cerrados y acotados tales que $\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon = \operatorname{Fr}(\Omega_\epsilon)$ es una curva cerrada simple, $\overline{x} \in \operatorname{int}(\Omega_\epsilon)$ para toda $0 < \epsilon < c$ y $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \operatorname{diám}(\Omega_\epsilon) = 0$. Entonces

$$\operatorname{Rot}(F(\overline{x})) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}(\Omega_\epsilon)}$$

donde γ_ϵ es una parametrización de Γ_ϵ que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Demostración. Notamos que para cada $0 < \epsilon < c$ se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, por lo cual

$$\int_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Luego, para cada ϵ, por el Teorema del Valor Promedio para integrales sobre conjuntos Jordan–medibles (¿recuerda dicho resultado?), existe $\overline{\xi}_\epsilon \in \Omega_\epsilon$ tal que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\overline{\xi}_\epsilon\right) \right) \cdot m\left(\Omega_\epsilon\right)$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \left(\overline{\xi}_\epsilon \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\overline{\xi}_\epsilon \right) \right) \cdot \text{área} \left(\Omega_\epsilon \right).$$

Ya que $\overline{x} \in \text{int}\left(\Omega_\epsilon\right)$, entonces $\text{int}\left(\Omega_\epsilon\right) \neq \emptyset$, lo cual implica que $\text{área}\left(\Omega_\epsilon\right) \neq 0$, de donde, al combinar las dos igualdades anteriores, para toda ϵ se cumple que

$$\frac{\int\limits_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}\left(\Omega_\epsilon\right)} = \frac{\partial Q}{\partial x} \left(\overline{\xi}_\epsilon \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\overline{\xi}_\epsilon \right).$$

Para concluir, notamos que las funciones $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son continuas porque F es de clase C^1, además,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{\xi}_\epsilon = \overline{x}$$

porque $\overline{x} \in \text{int}\left(\Omega_\epsilon\right)$ para toda $0 < \epsilon < c$ y $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \text{diám}\left(\Omega_\epsilon\right) = 0$, entonces por un teorema de cambio de variable en límites (¿conoce algún teorema así?) obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\int\limits_{\Gamma_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon}{\text{área}\left(\Omega_\epsilon\right)} &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \left(\overline{\xi}_\epsilon \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\overline{\xi}_\epsilon \right) \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} \left(\overline{x} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\overline{x} \right) \\ &= \text{Rot}\left(F(\overline{x}) \right). \end{aligned}$$

Esto termina la prueba.

□

Aunque no lo parezca, la Proposición 2.1 se puede interpretar como la **rotación promedio** generada por el campo F en el punto $\overline{x}$.

Para concluir esta sesión presentamos una aplicación directa del Teorema de Green: el cálculo de una integral.

Exercise 2.1. Calcule la integral $\int\limits_\Gamma F \cdot d\gamma$, donde $F(x, y) = \left(3x^3 - y^3, x^3 + 2y^3\right)$ y Γ es el círculo unitario con centro en el origen y recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Demostración. Tenemos que F es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y si $\Omega = B_1(0,0)$, entonces Ω es un conjunto Jordan–medible y $\text{Fr}\left(\Omega\right) = \partial\Omega = \Gamma$. Como $\mathbb{R}^2$ es una región, claramente se tiene que $\Omega \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema de Green, así que

$$\int\limits_{\Gamma = \partial\Omega} F \cdot d\gamma = \int\limits_\Omega \text{Rot}\left(F\right),$$

donde γ es la parametrización usual de Γ que la recorre una vez en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Notamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3x^2$$

y también

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -3y^2,$$

por lo cual

$$\mathrm{Rot}(F)(x,y) = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2).$$

En virtud de lo anterior, tenemos que

$$\int\limits_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = 3 \int\limits_{B_1(0,0)} f$$

donde $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Notamos que al aplicar el cambio de variable a coordenadas polares obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_1(0,0)} f &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 r^3 dr \right) d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int\limits_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma = \frac{3\pi}{2}.$$

$\square$

¿Obtiene el mismo resultado si hace los cálculos directamente?

A

Por aprender

Este sería el final. Ver la Proposición 2.1.