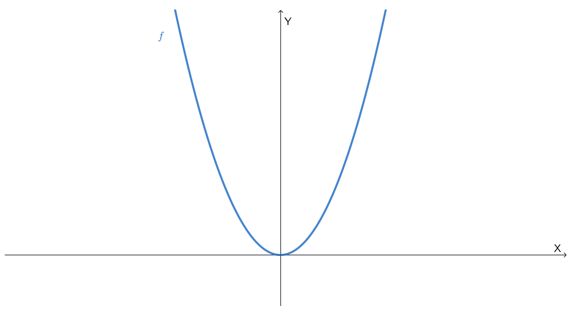
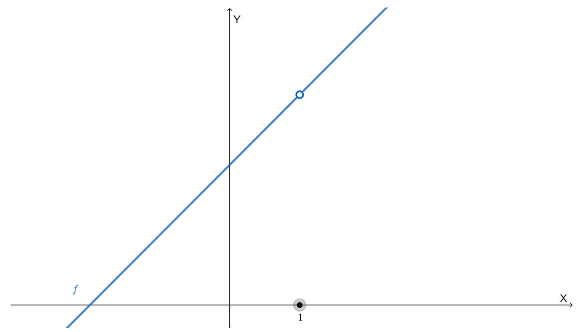
Clase 23

Comenzamos este nuevo capítulo estudiando la *continuidad* de una función en un punto, este concepto a veces es llamado *continuidad puntual*.

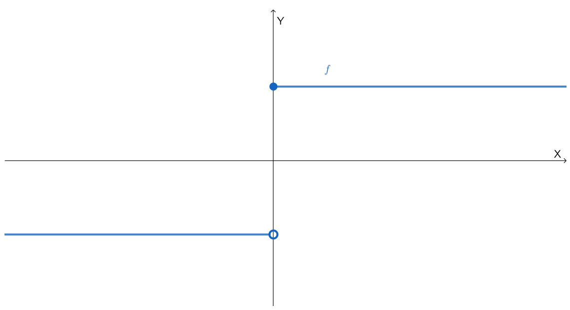
Continuidad Puntual



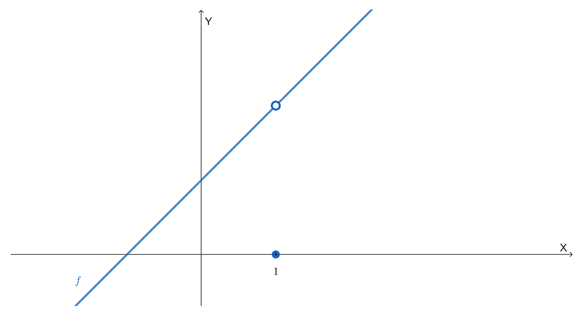
(a) Es posible dibujar la gráfica de la función $f(x) = x^2$ “sin despegar el lápiza del papel”.



(b) La función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ no está definida en $c = 1$.



(c) Para la función $f(x) = 1$, si $x \geq 0$, y $f(x) = -1$, si $x < 0$, no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.



(d) Para $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, si $x \neq 1$ y $f(1) = 0$, sí existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, pero no coincide con $f(1)$.

Figura 1

Definición 1 *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$. Diremos que f es continua en c si*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

En otro caso diremos que f es discontinua en c.

Observación 2 *Para que una función f sea continua en c deben ocurrir las siguientes afirmaciones:*

(a) f está definida en c.

(b) Existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.

(c) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 3 *Las siguientes funciones son continuas en cada número real c:*

(1) $f(x) = k$, *donde k es un número real fijo.*

(2) $\mathrm{Id}(x) = x$.

(3) $f(x) = x^2$

Ejemplo 4 *Las siguientes funciones NO son continuas en el punto c que se indica:*

(1) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ *en $c = 1$, pues aunque $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, f no está definida en $c = 1$.*

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \geq 0, \\ -1 & \textit{si } x < 0. \end{cases}$ *en $c = 0$, pues aunque f está definida en $c = 0$, no existe $\lim_{x\to c} f(x)$.*

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \textit{si } x \neq 1 \\ 0 & \textit{si } x = 1. \end{cases}$ *en $c = 1$, pues aunque f está definida en $c = 1$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ existe,* $\lim_{x\to c} f(x) = 2 \neq 0 = f(c)$.

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del teorema "Aritmética de los límites de funciones".

Teorema 5 *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$. Si f y g son continuas en c, entonces:*

(1) $f + g$ *es continua en c.*

(2) kf *es continua en c, donde k es un número real fijo.*

(3) fg *es continua en c.*

(4) *si $g(c) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ es continua en c.*

(5) *si $g(c) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es continua en c.*

Observación 6 (Continuidad en términos de ε-δ) *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$. f es continua en c si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ que cumple que $|x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.*

Teorema 7 *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que existe $(d, e) \subseteq B$ con $f(c) \in (c, d)$. Si f es continua en c y g es continua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en c.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $f(c)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cualquier $y \in (d, e)$ que cumple que $|y - f(c)| < \delta_1$ se tiene que $|g(y) - g(f(c))| < \varepsilon$. Ahora, por ser f continua en c, para el número positivo $\delta_2 = \min\{\delta_1, e - f(c), f(c) - d\}$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ que cumple que $|x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(c)| < \delta_2$. Así, si $x \in (a, b)$ cumple que $|x - c| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(c)| < \delta_2$ y de aquí que $|g(f(x)) - g(f(c))| < \varepsilon$. ■

Ejemplo 8 *Muestre que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es continua en cada número real c.

Solución. Se tiene que $\lim_{x \to 0} x = 0$ y que la función sen es acotada, así que por el Ejercicio 7 de la lista "Ejercicios de práctica sobre límites de funciones" se tiene que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Luego,

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = f(0),$$

es decir, f es continua en 0.

Ahora, si $c \neq 0$, se tiene que la función $\dfrac{1}{x}$ es continua en c. Por otro lado, en el Teorema 5 de la Ayudantía 13 mostraron que $\lim_{x \to c} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(c)$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$, es decir, mostraron que la función sen es continua en cualquier $c \in \mathbb{R}$. Así, por el Teorema 7, se tiene que la función $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ es continua en cualquier $c \neq 0$. Luego, por el inciso 3 del Teorema 5, se tiene que f es continua en cualquier $c \neq 0$. Por lo tanto, f es continua en cada número real c. ■

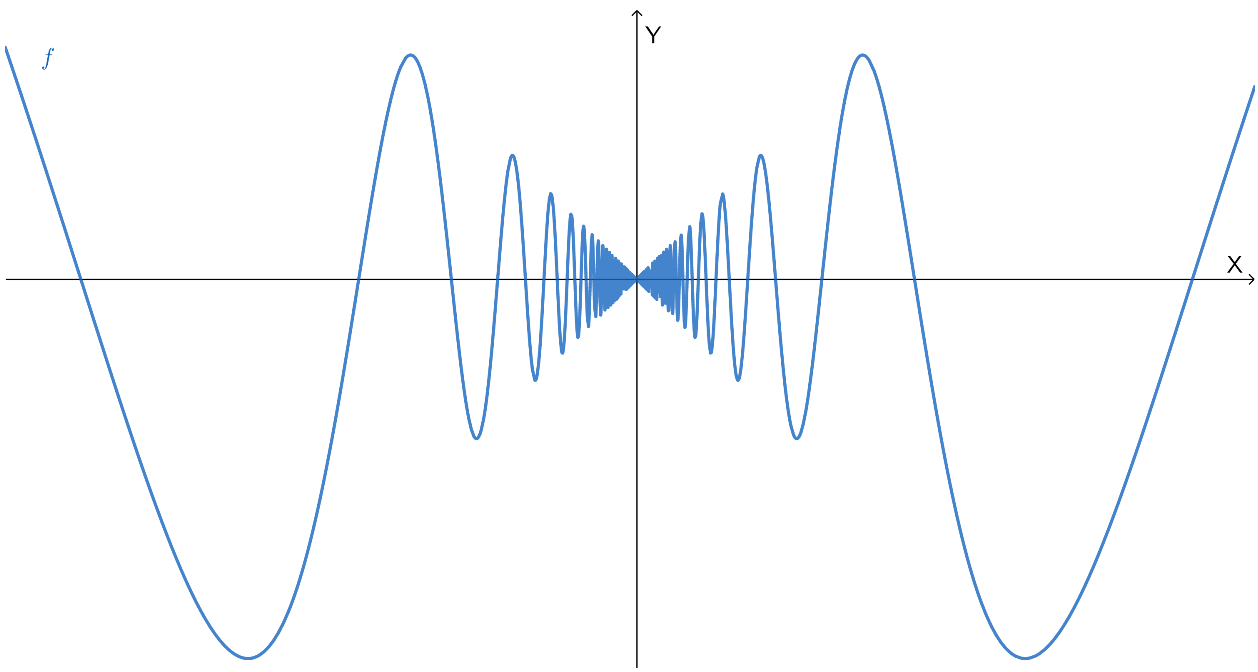


Figura 2: Se muestra la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$