Última actualización: 10 de agosto de 2021

Clase 28

En esta ocasión definiremos las derivadas de orden superior y los puntos máximos y mínimos de una función dada en un subconjunto de su dominio.

Máximos y mínimos

Antes de comenzar con el material que le da el título a este documento notemos lo siguiente: Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos considerar la función

$$f' : \{x \in A \mid f \text{ es derivable en } x\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Luego, este mismo razonamiento lo podemos aplicar a la función f', es decir, considerar la función

$$f'' : \left\{x \in Dom(f') \mid f' \text{ es derivable en } x\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

A esta función (f'') la llamamos **la segunda derivada de** f. Continuando este proceso podemos definir, de manera recursiva, **derivadas de orden superior**:

$$f^{(1)} = f'$$

$$f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)',$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1 *Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^n$. Muestre que*

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y que

$$f^{(k)}(x) = 0,$$

para toda $k > n$, lo anterior, en ambos casos, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Comenzamos, ahora sí, con el material de esta sesión.

Definición 2 *Sean f una función, $A \subseteq Dom(f)$ y $y \in A$. Diremos que y es **un punto máximo de f en A** si*

$$f(x) \leq f(y),$$

*para todo $x \in A$. Al número $f(y)$ se le llama **valor máximo de f en A.***

Observación 3 *Dada una función f y $A \subseteq Dom(f)$, pueden existir distintos puntos máximos de f en A, pero no distintos valores máximos.*

Ejemplo 4 *Sea* $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* $f(x) = (x-1)^2 + 1$. *Como* f *es una función continua en* $[0,2]$, f *alcanza su valor máximo en* $[0,2]$. *De hecho, si* $x \in [0,2]$, *es decir, si* $0 \leq x \leq 2$, *entonces* $-1 \leq x-1 \leq 1$ *y de aquí que* $0 \leq (x-1)^2 \leq 1$. *Se sigue que* $1 \leq (x-1)^2 + 1 \leq 2$, *es decir,* $1 \leq f(x) \leq 2$, *para todo* $x \in [0,2]$. *Ahora, note que* $f(0) = f(2) = 2$, *por lo que tenemos dos puntos máximos de* f *en* $[0,2]$, *a saber,* $x = 0$ *y* $x = 2$, *luego, el valor máximo de* f *en* $[0,2]$ *es* $2 = f(0) = f(2)$, *vea figura 1*

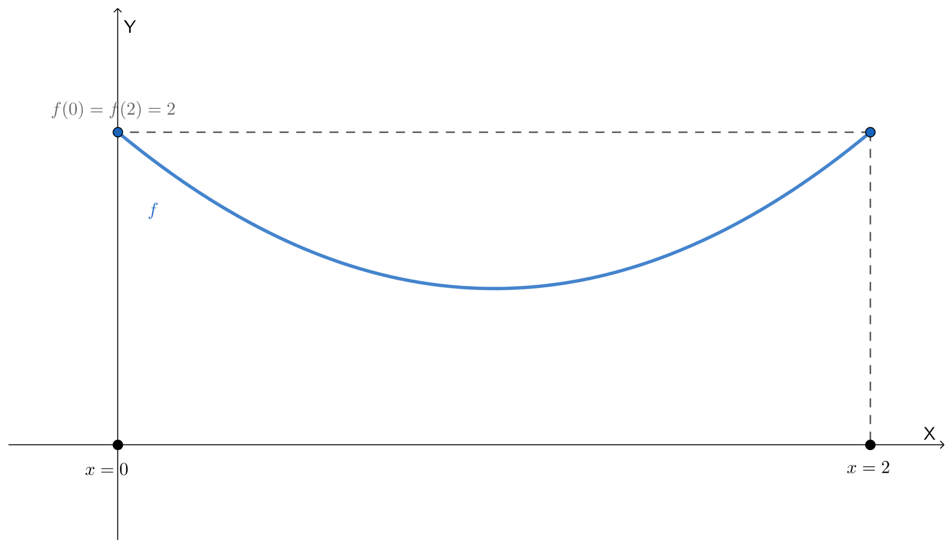

Figura 1: La función $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-1)^2 + 1$ tiene dos puntos máximos en $[0,2]$, a saber 0 y 2, y el valor máximo de f en $[0,2]$ es $2 = f(0) = f(2)$.

Teorema 5 *Sean* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $y \in (a,b)$. *Si* y *es un punto máximo de* f *en* (a,b) *y además* f *es derivable en* y, *entonces* $f'(y) = 0$.

Demostración. Note que para cualquier $h > 0$ tal que $y + h \in (a,b)$ se tiene que

$$\frac{f(y+h) - f(y)}{h} \geq 0,$$

por lo que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \geq 0.$$

De manera simétrica, para cualquier $h < 0$ tal que $y + h \in (a,b)$ se tiene que

$$\frac{f(y+h) - f(y)}{h} \leq 0,$$

por lo que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \leq 0.$$

Por otro lado, como f es derivable en y, se tiene que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(y+h) - f(y)}{h}$ existe, por lo que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = f'(y) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(y+h) - f(y)}{h}.$$

Así,

$$0 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = f'(y) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \leq 0,$$

con lo que $f'(y) = 0$. ■

Definición 6 *Sean f una función, $A \subseteq Dom(f)$ y $y \in A$. Diremos que y es* ***un punto mínimo de f en*** *A si*

$$f(y) \leq f(x),$$

para todo $x \in A$. Al número $f(y)$ se le llama ***valor mínimo de f en A.***

Corolario 7 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $y \in (a, b)$. Si y es un punto mínimo de f en (a, b) y además f es derivable en y, entonces $f'(y) = 0$.*

Demostración. Basta considerar la función $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -f(x)$ y aplicar el Teorema 5. ■

Definición 8 *Sean f una función, $A \subseteq Dom(f)$ y $y \in A$. Diremos que y* ***es un punto máximo (mínimo) local de f en*** *A si existe algún $\delta > 0$ tal que y es un punto máximo (mínimo) de f en $A \cap (y - \delta, y + \delta)$.*

Corolario 9 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $y \in (a, b)$. Si y es un máximo (o mínimo) local de f en (a, b) y f es derivable en y, entonces $f'(y) = 0$.*

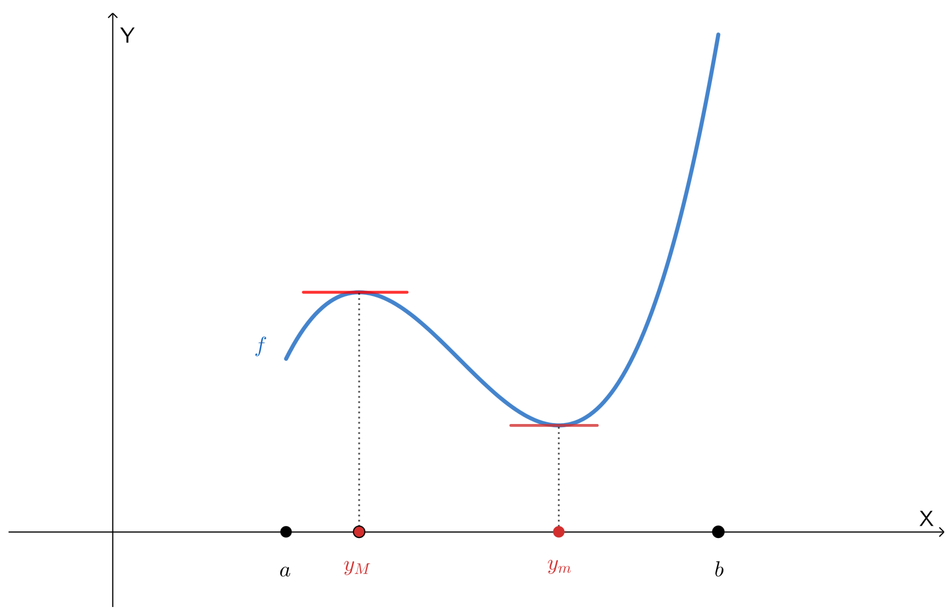

Figura 2: Geométricamente, el Teorema 5 y el Corolario 7 nos indican que en un punto máximo local, mínimo local respectivamente, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es cero.

¿Vale el regreso del corolario anterior? es decir, si f es derivable en $y \in (a, b)$ y $f'(y) = 0$ entonces ¿y es un punto máximo o mínimo local de f en (a, b)? La respuesta es No, por ejemplo, si consideramos la función $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es facil ver que $f'(x) = 0$ si y sólo sí $x = 0$, pero $x = 0$ no es ni un máximo ni un mínimo local de f en $(-1, 1)$, vea figura 3.

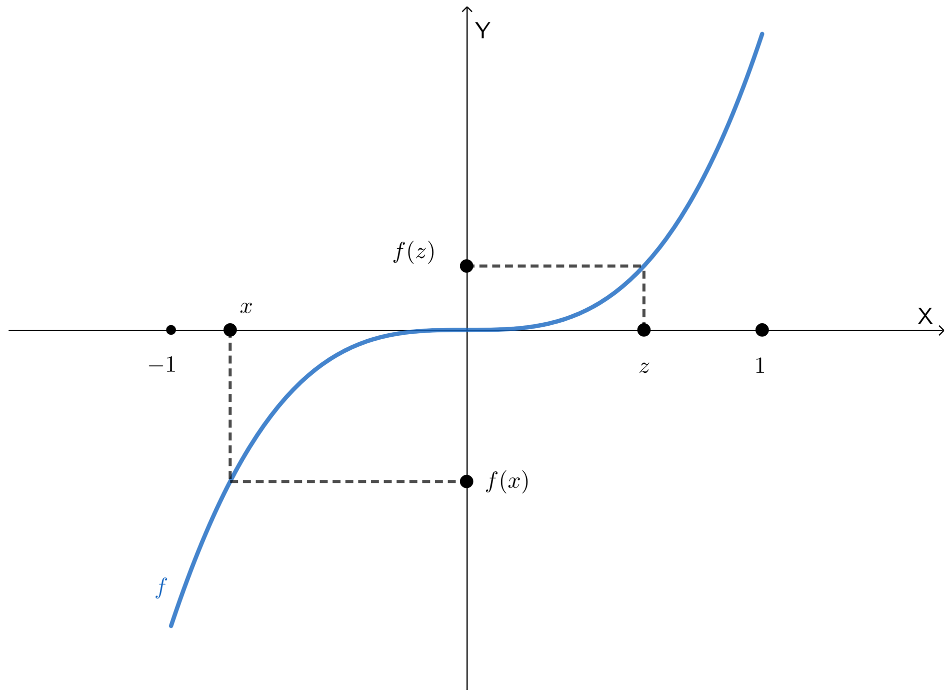

Figura 3: Si $-1 < x < 0$, entonces $f(x) < f(0) = 0$ y si $0 < z < 1$ entonces $0 = f(0) < f(z)$. Así, aunque $f'(0) = 0$, f no tiene ni un punto máximo ni un punto mínimo en 0.

Definición 10 *Sea f una función. Un **punto crítico de** f es un número y tal que $f'(y) = 0$. En este caso, al número $f(y)$ se le denomina **valor crítico de f.***