

Cálculo diferencial e integral IV
Examen final
Primera parte

Indicaciones: Resuelva exactamente **3 ejercicios**. Para resolver cada problema únicamente puede utilizar los resultados vistos hasta antes del tema correspondiente y, además, cada resultado que use debe ser enunciado.

1. Sean $R = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ y $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable sobre R .

2. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto Jordan-medible A . Pruebe que si $f(\bar{x}) = 0$ para toda $\bar{x} \in \text{int}(A)$, entonces f es integrable sobre A y además $\int_A f = 0$.
3. Calcule la integral de la función $f(x, y) = x^3 y$ sobre la región acotada por el eje Y y la parábola $x = -4y^2 + 3$.
4. De una esfera de radio ρ se corta una cuña mediante dos planos que se intersecan en un diámetro de la esfera. Si el ángulo entre los planos es $\frac{\pi}{3}$, ¿cuál es el volumen de la cuña?