Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 13

Funciones trigonométricas

En esta sesión, en primer lugar, daremos una definición intuitiva de las dos principales funciones trigonométricas: seno y coseno. Una vez dadas dichas definiciones recordaremos las otras 4 funciones relacionadas.

Definición 1 (Funciones trigonométricas (parte 1))**.** Consideremos el plano cartesiano XY. Recordemos que medimos los ángulos respecto a la parte positiva del eje X; si es en sentido contrario a las manecillas del reloj decimos que el ángulo es positivo y si es en el sentido de las manecillas del reloj, entonces el ángulo tiene medida negativa (vea la Figura 1).

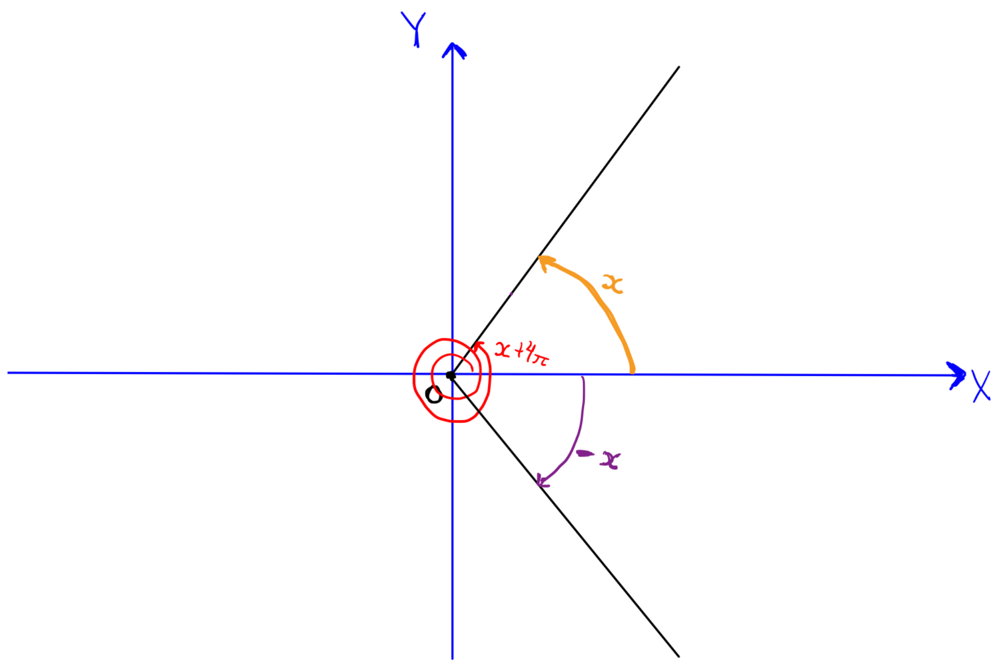

Figura 1: Medición de ángulos.

Ahora, consideremos la circunferencia unitaria con centro en $(0,0)$ y tomemos la intersección del rayo que define al ángulo de medida $x \in \mathbb{R}$ (note que no hay restricción en el signo de x), dicho punto tiene coordenadas (x_0, y_0). Definimos las funciones **seno** y **coseno**, denotadas por sen y cos, respectivamente, como

$$\operatorname{sen}(x) = y_0$$

y

$$\cos(x) = x_0,$$

es decir, se cumple que

$$(\cos(x),\ \operatorname{sen}(x)) = (x_0,\ y_0)\,.$$

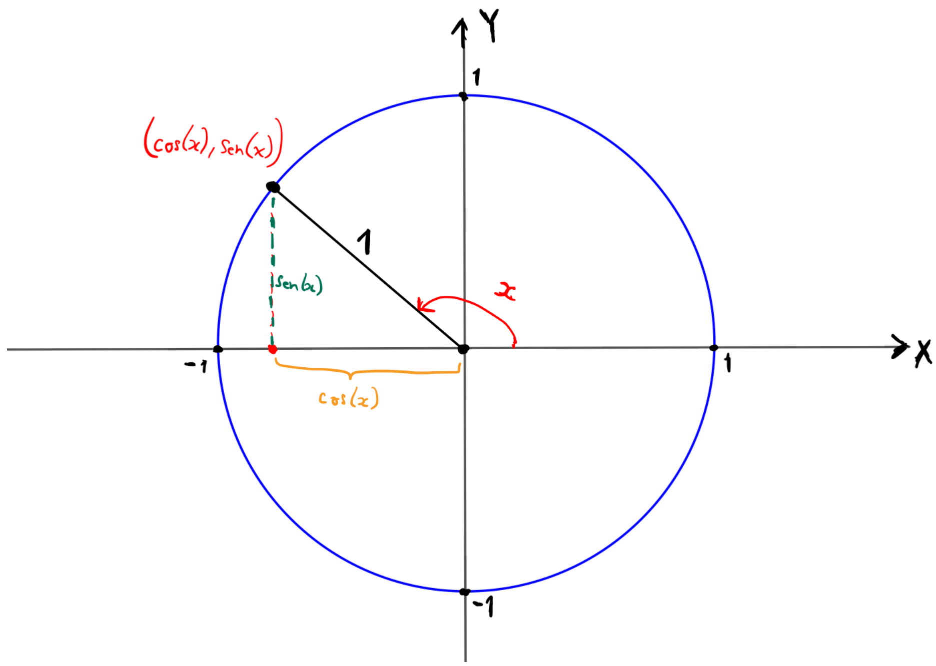

Figura 2: Definición de las funciones seno y coseno.

Observación 2. Como lo mencionó Óscar, a partir de la definición anterior[1] es inmediato que

$$|\mathrm{sen}(x)| \leq 1$$

y también

$$|\cos(x)| \leq 1.$$

Definición 3 (Funciones trigonométricas (parte 2))**.** Definimos las funciones **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante**, denotadas por tan, cot, sec y csc, respectivamente, por

(I) $\tan(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$

(II) $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$

(III) $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

(IV) $\csc(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)}$

Pregunta 4. *¿Cuál es el dominio de cada una de las funciones que aparecen en la definición anterior?*

Teorema 5 (Límites trigonométricos)**.** *Si $c \in \mathbb{R}$, entonces:*

(I) $\lim_{x\to c} \mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(c)$.

(II) $\lim_{x\to c} \cos(x) = \cos(c)$.

Demostración. A partir de la Definición 1 obtenemos que para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|\mathrm{sen}(x)| \leq |x|\,. \tag{1}$$

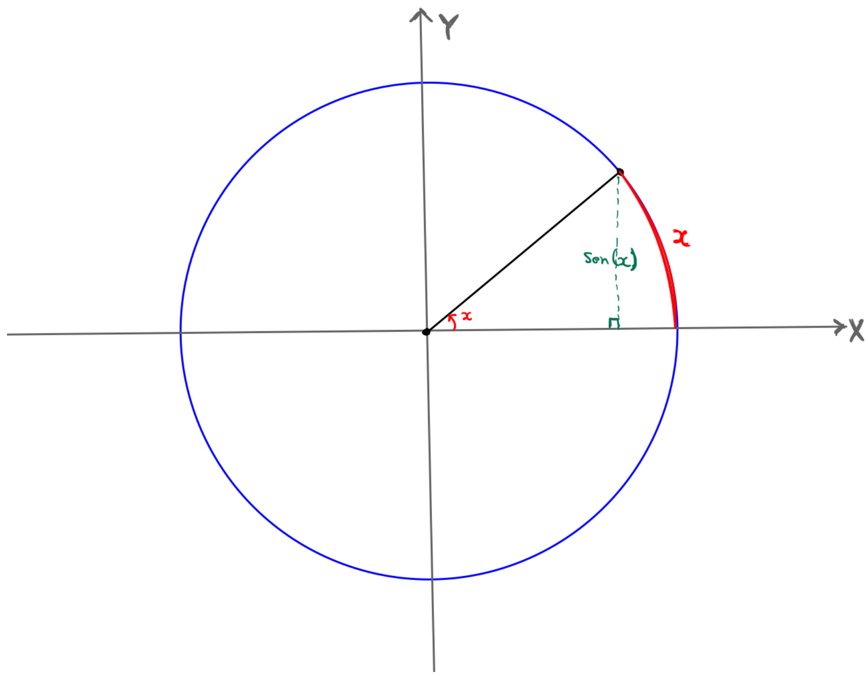

Figura 3: Ilustración de la desigualdad (1).

Ahora procedemos a las pruebas.

(I) Sea $\varepsilon > 0$. Recordamos del curso de Geometría Analítica que

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

A partir de lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(c)| &= \left|2\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \\
&= 2\left|\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \\
&\leq 2(1)\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| && (2)\\
&\leq 2\left|\frac{x-c}{2}\right| && (3)\\
&= |x-c|
\end{aligned}$$

donde la desigualdad (2) se obtiene a partir de la Observación 2 mientras que la desigualdad (3) se obtiene a partir de la desigualdad (1).

En virtud de lo anterior, proponemos $\delta = \varepsilon > 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(c)| \leq |x - c| < \delta = \varepsilon.$$

[1] La definición anterior se formalizará en su curso de cálculo integral, donde se utilizará una integral para definir a la función seno y, a partir de ella, se definirá a la función coseno (y las subsiguientes funciones).

Luego, por definición de límite obtenemos que $\lim\limits_{x \to c} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(c)$.

(II) Sea $\varepsilon > 0$. A partir de nuestro curso de Geometría Analítica sabemos que

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

En virtud de la igualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
|\cos(x) - \cos(c)| &= \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+c}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right) \right| \\
&= 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x+c}{2}\right) \right| \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right) \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{x-c}{2} \right| \qquad (4) \\
&= |x - c|
\end{aligned}$$

donde la desigualdad (4) se obtiene a partir de la Observación 2 y de la desigualdad (1).

Finalmente, proponemos $\delta = \varepsilon > 0$. Así, si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$|\cos(x) - \cos(c)| \leq |x - c| < \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto, por definición de límite obtenemos que $\lim\limits_{x \to c} \cos(x) = \cos(c)$. □

El siguiente resultado es inmediato a partir de la definición de las funciones trigonométricas involucradas y del Teorema del álgebra de límites.

Corolario 6. *Sea c un número real en el dominio de la función indicada. Se cumple que:*

(I) $\lim\limits_{x \to c} \tan(x) = \tan(c)$.

(II) $\lim\limits_{x \to c} \cot(x) = \cot(c)$.

(III) $\lim\limits_{x \to c} \sec(x) = \sec(c)$.

(IV) $\lim\limits_{x \to c} \csc(x) = \csc(c)$.

Límites importantes

Teorema 7. *Se cumple que*

(I) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

(II) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = 0$.

Demostración. (I) Para el cálculo de cualquier límite no es necesario considerar todo el dominio de la función, sino solamente un intervalo que contenga al punto que nos interesa. Así, restringiremos nuestro análisis al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Además, por la propia definición de límite, tampoco necesitamos considerar al punto de interés, por lo cual siempre tomaremos puntos $x \neq 0$.

Así, dada $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, consideremos la siguiente construcción geométrica en el plano cartesiano: sea A el punto $(1, 0)$, sea $P = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ el punto donde se intersecan la circunferencia unitaria con centro en $(0, 0)$ y el rayo que define al ángulo de medida x, tomemos B el pie de la

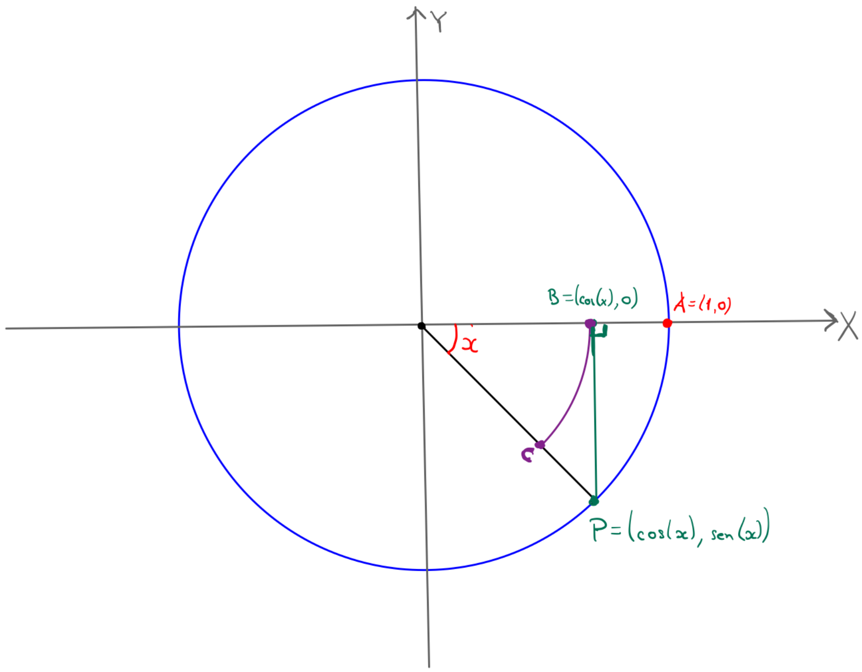

Figura 4: Construcción geométrica en el caso $x < 0$.

perpendicular desde P hacia el eje X, esto es, $B = (\cos(x), 0)$; finalmente, consideremos el arco de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\cos(x)$, y sea C su intersección con el rayo $\overrightarrow{OP}$.

La construcción anterior muestra que

$$\text{área}\,(\text{sector } OBC) \leq \text{área}\,(\Delta OBP) \leq \text{área}\,(\text{sector } OAP)$$

Ya que sabemos que el área de un triángulo se puede obtener como la mitad del producto de su base por su altura, tenemos que área $(\Delta OBP) = \frac{\cos(x)|\text{sen}(x)|}{2}$, y aquí usamos el valor absoluto de $\text{sen}(x)$ porque la altura de un triángulo siempre es un número positivo. También, sabemos que el área de un sector circular con ángulo central x y radio r es igual a $\frac{r^2|x|}{2}$. Por lo tanto, la cadena de desigualdades anterior se convierte en

$$\frac{\cos^2(x)\,|x|}{2} \leq \frac{\cos(x)\,|\text{sen}(x)|}{2} \leq \frac{1^2\,|x|}{2},$$

que al multiplicar por $\frac{2}{|x|\cos(x)} > 0$ se convierte en

$$\cos(x) \leq \frac{|\text{sen}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Ahora, por la Definición 1 tenemos que si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, entonces x y $\text{sen}(x)$ tienen el mismo signo, por lo cual, en este caso $\frac{|\text{sen}(x)|}{|x|} = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y, por lo tanto, para toda $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ se cumple que

$$\cos(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Por el Teorema (II) sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, y esto implica que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$. Así, estamos en condiciones de aplicar el Teorema del Sándwich, y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

(II) Usaremos el inciso anterior para demostrar el límite solicitado. Para ello, notemos que si $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(x)}{x} &= \frac{(1-\cos(x)\,(1+\cos(x)))}{x\,(1+\cos(x))} \\
&= \frac{1-\cos^2(x)}{1\,(1+\cos(x))} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(0) = 0$, $\lim_{x\to 0} (1+\cos(x)) = 1+\cos(0) = 1+1 = 2$, por el teorema del álgebra de límites obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Y ya que por el inciso (I) anterior sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}}{x} = 1$, entonces, por el álgebra de límites obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} \right) = 1(0) = 0.$$

Esto termina la prueba. □

La prueba del siguiente resultado es un Ejercicio para el lector.

Proposición 8. *Sea f una función definida en un intervalo alrededor de 0. Supongamos que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = l$ y consideremos $b \neq 0$, entonces*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(bx)}{x} = \ell.$$

□

Corolario 9. *Si $a \neq 0$, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} = 1$.*

Demostración. En virtud del inciso (I) del Teorema 7 sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, y por la Proposición 8, como $a \neq 0$, al tomar $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} = 1.$$

Esto termina la prueba. □