Clase 31

La sesión anterior enunciamos y demostramos el Teorema de Rolle:

Teorema 1 (de Rolle) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Y como corolario de este teorema obtuvimos el Teorema del Valor Medio:

Corolario 2 (Teorema del Valor Medio) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esta sesión la dedicaremos a enunciar y demostrar algunos resultados donde aplicamos el Teorema del Valor Medio.

Consecuencias del Teorema del Valor Medio

Corolario 3 *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b). Si $f'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es una función constante en (a, b), es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para toda $x \in (a, b)$.*

Demostración. Sean $c, d \in (a, b)$ distintos, digamos que $c < d$. Como f es derivable en (a, b), entonces es continua en (a, b), en particular es derivable en (c, d) y continua en $[c, d]$. Así, por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi \in (c, d)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Se sigue, de que $f'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$, que $f(d) = f(c)$. Lo anterior muestra que f toma el mismo valor en cada punto de (a, b), es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para cualquier $x \in (a, b)$. ■

Corolario 4 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es una función constante en $[a, b]$.*

Demostración. Por el corolario anterior, tenemos que f es constante en (a, b), es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para toda $x \in (a, b)$. Veamos entonces que $f(a) = f(b) = k$.

Supongamos que $f(a) \neq k$, digamos que $f(a) > k$. Se tiene, por el Teorema del Valor Intermedio aplicado a f en $[a, (a + b)/2]$, que existe $\xi \in (a, (a + b)/2)$ tal que $f(\xi) = \dfrac{k + f(a)}{2}$, pero esto contradice que $f(x) = k$ para todo $x \in (a, b)$. Así, $f(a) = k$. De manera similar se demuestra que $f(b) = k$. Por lo tanto $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$. ■

Corolario 5 *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Si $f'(x) = g'(x)$ para toda $x \in (a, b)$, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Sea $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = f(x) - g(x)$. Note que h es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y además $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para toda $x \in (a,b)$. Así, por el corolario anterior, se tiene que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = k$ para toda $x \in [a,b]$, esto es, $f(x) = g(x) + k$ para toda $x \in [a,b]$. ■

El Corolario 5 aparecerá, en repetidas ocaciones, en su curso de Cálculo II y la manera de recordarlo es con la siguiente frase: *Dos funciones con la misma derivada difieren por una constante.*

El siguiente corolario nos proporciona información útil para esbozar la gráfica de una función derivable en un intervalo.

Corolario 6 *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a,b). Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para toda $x \in (a,b)$, entonces f es creciente (decreciente) en (a,b).*

Demostración. Supongamos que $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,b)$ y sean $c, d \in (a,b)$, con $c < d$. Por el Teorema del Valor Medio, aplicado a f en el intervalo $[c,d]$, se tiene que existe $\xi \in (c,d)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Como $f'(\xi) > 0$ y $d - c > 0$, se sigue que $f(d) - f(c) > 0$, es decir, $f(d) > f(c)$. Por lo tanto, f es creciente.

De manera *simétrica* se demuestra que f es decreciente si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$. ■

El siguiente corolario extiende el resultado anterior a intervalos cerrados y la demostración, ejercicio para ustedes, usa la continuidad de f de manera similar que en la demostración del Corolario 4.

Corolario 7 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para toda $x \in (a,b)$, entonces f es creciente (decreciente) en $[a,b]$.*

Ejemplo 8 *Sea $f : [1, 7/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = (x-2)^3 - (x-2) + 1$.*

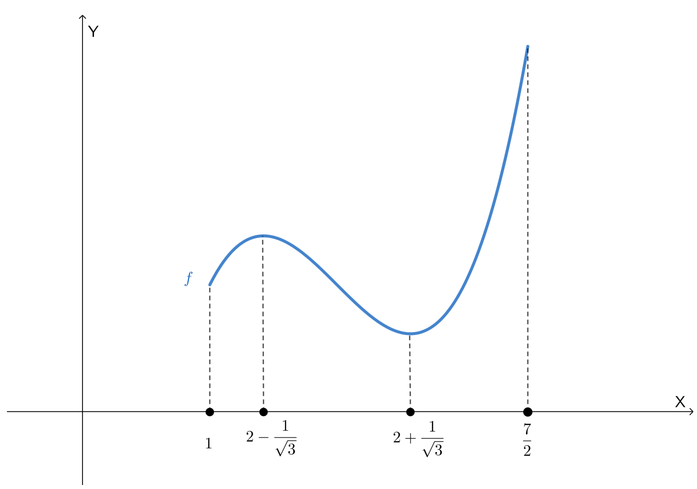

Figura 1: Gráfica de la función f.

"Justifique" la gráfica de la figura 1.

Solución. En la Clase 30 vimos que el valor mínimo de f en $[1,7/2]$ es $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{9}$ y lo alcanza en $x=2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ mientras que el valor máximo de f en $[1,7/2]$ es $\dfrac{23}{8}$ y lo alcanza en $x=7/2$.

Ahora, como $f'(x)=3(x-2)^2-1$, se tiene que $f'(x)>0$ si y sólo si $3(x-2)^2-1>0$ mientras que $f'(x)<0$ si y sólo si $3(x-2)^2-1<0$. Pero, $3(x-2)^2-1>0$ ocurre si y sólo si $x>2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x<2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ mientras que $3(x-2)^2-1<0$ ocurre si y sólo si $2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Lo anterior muestra que f es creciente en $\left[1,2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ y en $\left[2+\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{7}{2}\right]$ y decreciente en $\left[2-\dfrac{1}{\sqrt{3}},2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.
$\blacksquare$

¿Hemos justificado totalmente la gráfica de la figura 1? ¿Por qué en el intervalo $\left[1,2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ es dibujada "abriendo hacia abajo" y en el intervalo $\left[2+\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{7}{2}\right]$ es dibujada "abriendo hacia arriba"? Muy pronto podremos justificar este hecho.

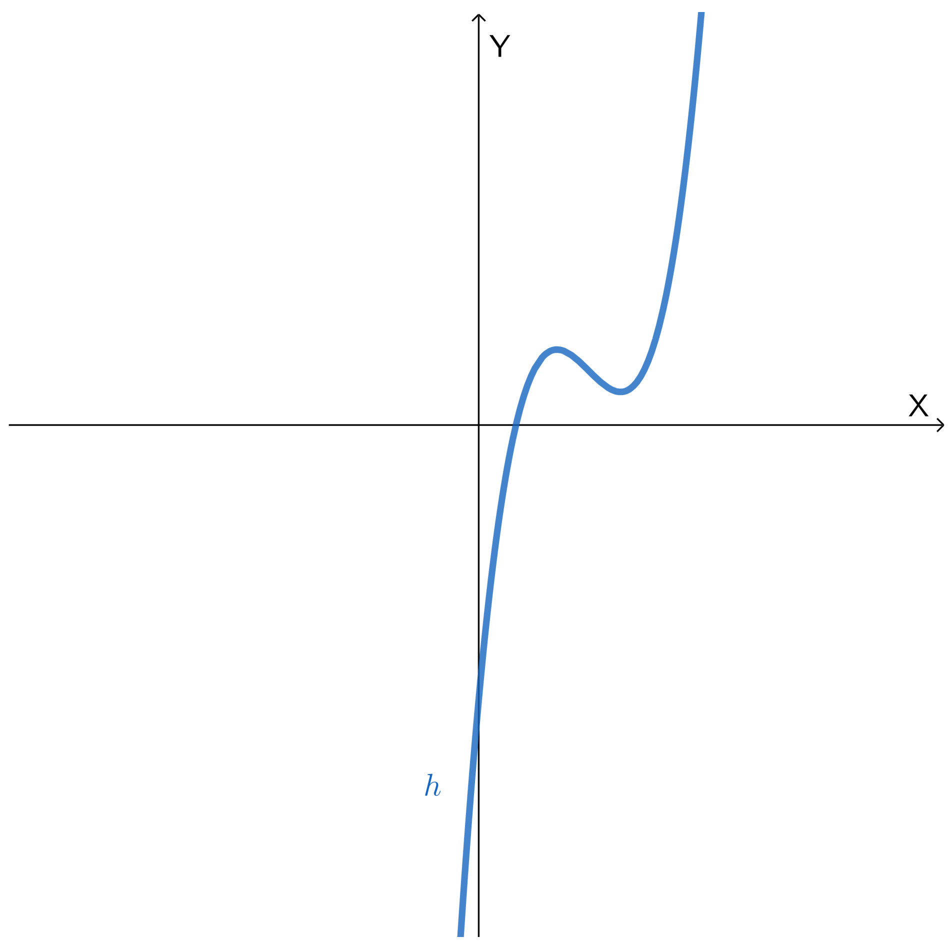

Figura 2: Gráfica de la función h.

Aprovechando la función del ejemplo anterior, podemos hacer lo siguiente:
Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por $h(x) = (x-2)^3 - (x-2) + 1$, se tiene que h es derivable en todo $\mathbb{R}$ y además

$$h'(x) = 3(x-2)^2 - 1.$$

Así, $h'(x) > 0$ si y sólo si $x > 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x < 2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ mientras que $h'(x) < 0$ si y sólo si $2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto h es creciente en $\left(-\infty, 2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ y en $\left[2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ y decreciente en $\left[2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{7}{2}\right]$.

Además, como $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ entonces la figura 2 muestra una buena representación de la gráfica de h.

Note que analizar los *límites al infinito* es necesario para conocer el comportamiento cuando x es muy grande o bien cuando es muy pequeño, no basta con saber que la función es creciente o decreciente en algunos intervalos como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9 *Analice la función g, que está dada por la siguiente regla de correspondencia*

$$g(x) = \frac{x-2}{x-1},$$

para obtener un esbozo de su gráfica.

Solución. Primero notemos que $Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ahora,

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

y

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) = \infty.$$

Luego, $g(x) = 0$ si y sólo si $x = 2$, mientras que $g(0) = 2$ (note que esto nos proporciona la intersección de la gráfica de g con los ejes coordenados).

Por otro lado, la función g es derivable en todo su dominio y

$$g'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Así, $g'(x) > 0$ para todo x en el dominio de g, de donde g es creciente en todo su dominio.

Note también que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) = 1$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) = 1.$$

Pero, $g(x) < 1$ si $x > 1$ mientras que $g(x) > 1$ si $x < 1$, así que la figura 3 es un buen esbozo de la gráfica de g. ■

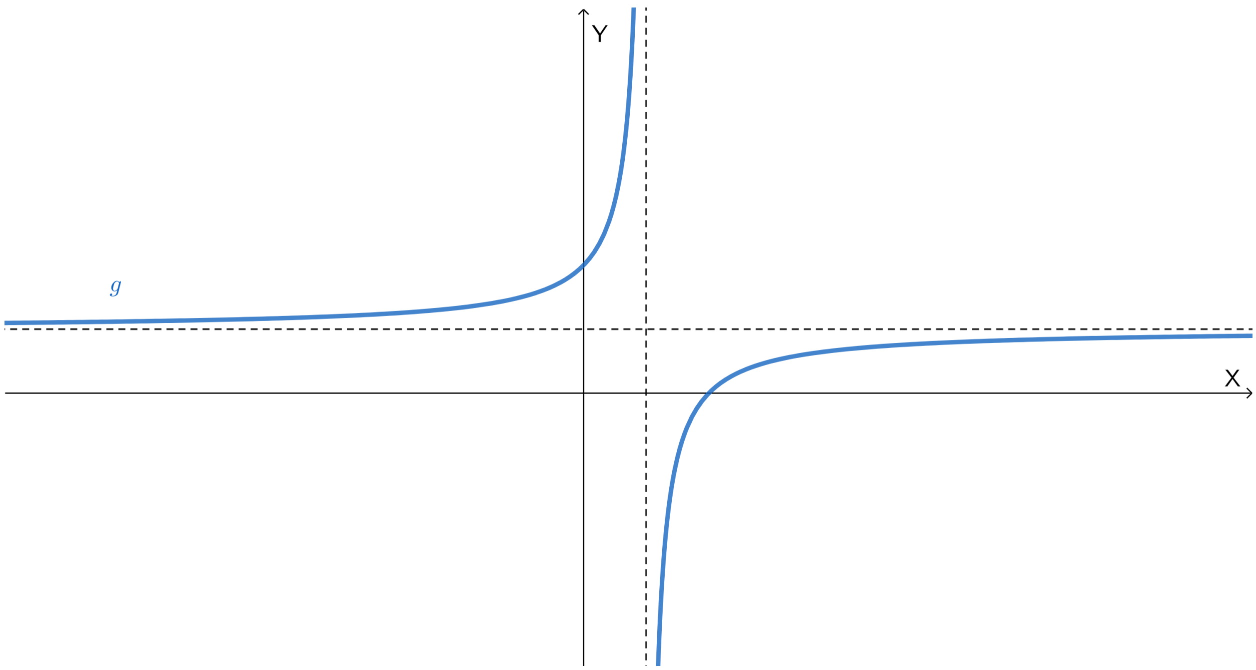

Figura 3: Gráfica de la función g.