Última actualización: 2 de marzo de 2021

Clase 1

Los número reales, son “conocidos” por nosotros, ya que hemos trabajado con ellos durante toda nuestra vida. Es tan “natural” trabajar con ellos que la primera vez que escuchamos afirmaciones como *el cero es único* o *el uno es distinto del cero*, nos parecieron una broma, algo absolutamente obvio.

En la primera parte de este curso desarrollaremos/justificaremos todas las propiedades que ya conocemos de los números reales a partir de axiomas, en particular las mencionadas en el parrafo anterior (sí, se pueden/deben justificar). Estos axiomas se dividen en tres tipos, axiomas de campo, axiomas de orden y el último grupo con un solo axioma, el axioma del supremo.

Axiomas de campo de los números reales

El primer grupo de axiomas que enlistaremos tiene que ver con las dos operaciones fundamentales que se pueden realizar entre números reales, la suma (o adición) y el producto (o multiplicación), y son llamados *Axiomas de campo*:

(A1) La suma es asociativa. Para cualesquiera números reales a, b y c se cumple que:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

(A2) Existe un elemento neutro para la suma. Existe un número real, que denotaremos por 0, tal que

$$a+0=0+a=a.$$

(A3) Existen inversos aditivos. Para cualquier número real a existe un número real b tal que

$$a+b=b+a=0.$$

(A4) La suma es conmutativa. Para cualesquiera números reales a y b se cumple que

$$a+b=b+a.$$

(A5) La multiplicación es asociativa. Para cualesquiera números reales a, b y c se cumple que:

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

(A6) Existe un elemento neutro para la multiplicación. Existe un número real, que denotaremos por 1, tal que

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

(A7) Existen inversos multiplicativos. Para cualquier número real a, distinto de 0, existe un número real b tal que

$$a\cdot b=b\cdot a=1.$$

(A8) La multiplicación es conmutativa. Para cualesquiera números reales a y b se cumple que

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

(**A9**) **Distributividad.** Para cualesquiera números reales a, b y c se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Como mencionamos antes, a partir de estos axiomas se pueden deducir algunas de las propiedades de los números reales (no todas las que conocemos, porque algunas de ellas tienen que ver, por ejemplo, con axiomas de orden).

Teorema 1 *En lo siguiente a, b y c son números reales cualesquiera, a menos que se diga otra cosa. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) ***Ley de cancelación para la suma.*** *Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.*

(2) ***El cero es único.*** *Si x es un número real que cumple que $x + a = a$ para todo a, entonces $x = 0$. El hecho de que el neutro aditivo sea único es la razón de denotarlo con el "símbolo" fijo 0 (de hecho, acostumbramos ponerle nombre a lo que es único, ¿no?) .*

(3) ***El inverso aditivo, de cada número, es único.*** *Si b y c son, cada uno, un inverso aditivo de a, entonces $b = c$. Por esta razón denotaremos por $-a$ al inverso aditivo de a.*

(4) ***Ley de cancelación para el producto.*** *Si $a \cdot b = a \cdot c$ y a es distinto de 0, entonces $b = c$.*

(5) ***El uno es único.*** *Si x es un número real que cumple que $x \cdot a = a$, para todo a, entonces $x = 1$. Igual que en el caso del cero, esta es la razón para denotar al neutro multiplicativo por un "símbolo" fijo, es decir, por 1.*

(6) ***El inverso multiplicativo, de cada número, es único.*** *Si a es distinto de cero y tanto b como c son inversos multiplicativos de a, entonces $b = c$. Por esta razón denotaremos por a^{-1} o bien por $1/a$ al inverso multiplicativo de a.*

(7) ***Multiplicar por cero da cero.*** *$a \cdot 0 = 0$, para todo a.*

(8) ***Si un producto es cero, alguno de los factores es cero.*** *Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.*

(9) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

(10) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Demostración. Mostraremos solo algunas de las afirmaciones anteriores y el resto serán parte de la Tarea 01.

(1) Aplicando (**A3**) al número real a, sabemos que existe un número real d tal que $a+d = d+a = 0$. Ahora, dado que $a + b = a + c$, tenemos que $d + (a + b) = d + (a + c)$. Luego, usando (**A1**), se tiene que $(d + a) + b = (d + a) + c$, de donde $0 + b = 0 + c$. Finalmente, usando (**A2**), se sigue que $b = c$.

(2) Aplicando nuestra hipótesis (con a=0), tenemos que $x + 0 = 0$. Ahora, usando (**A2**) (con a=0), sabemos que $0 + 0 = 0$. Por lo tanto, tenemos que $x + 0 = 0 + 0$. Finalmente, usando el inciso anterior, concluimos que $x = 0$.

(6) Se tiene, por hipótesis, que $1 = a \cdot b$ y $1 = a \cdot c$. Por lo tanto, $a \cdot b = a \cdot c$. Ahora, dado que a es distinto de cero, podemos aplicar el inciso (4), por lo que $b = c$.

(7) De (**A9**), se tiene que $a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Por otro lado, de (**A2**), sabemos que $0 + 0 = 0$. Se sigue entonces que $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Luego, por (**A3**) podemos sumar, a ambos lados de la igualdad $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$, el inverso aditivo de $a \cdot 0$ y, usando (**A1**), obtenemos que $0 = a \cdot 0$.

(8) Supongamos que $a \neq 0$ y demostremos que en este caso $b = 0$. Como $a \cdot b = 0$, multiplicando ambos lados de la igualdad por a^{-1}, tenemos que $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$. Luego, usando (**A5**) y el inciso (7) del lado izquierdo y el lado derecho de la igualdad $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$, respectivamente, tenemos que $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$. Finalmente, de (**A6**), se sigue que $b = 0$.

$\blacksquare$

Notación: A partir de este momento escribiremos ab en lugar de $a \cdot b$ y $a - b$ en lugar de $a + (-b)$.

¿Está claro qué hemos hecho en esta sesión? Intentare aclarar lo que hemos hecho con la siguiente situación:
Si ahorita yo les pido resolver la ecuación

$$x^2 - 2x - 35 = 0, \tag{1}$$

de inmediato me dirán que es equivalente a resolver la ecuación

$$(x-7)(x+5) = 0 \tag{2}$$

y después me dirán que esta última ecuación tiene solución si $x - 7 = 0$ o $x + 5 = 0$. Concluirán diciendome que las soluciones son $x = 7$ y $x = -5$ y estarán en lo correcto, Pero, ¿por qué su procedimiento es válido? ¿qué sustenta su procedimiento? Con lo visto hasta ahora pueden darse cuenta que en lugar de resolver la ecuación (1) podemos resolver la ecuación (2) porque usando algunos axiomas y algunos incisos del Teorema 1 (¿pueden decir cuáles?), se justifican cada uno de los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
(x-7)(x+5) &= x \cdot (x+5) + (-7) \cdot (x+5) \\
&= x \cdot x + x \cdot 5 + (-7) \cdot x + (-7) \cdot 5 \\
&= x \cdot x + x \cdot 5 + x \cdot (-7) + (-7) \cdot 5 \\
&= x^2 + x \cdot (5 + (-7)) + (-35) \\
&= x^2 + x \cdot (5 + (-7)) - 35 \\
&= x^2 - 2x - 35.
\end{aligned}$$

Y para justificar que la ecuación (2) tiene solución si $x - 7 = 0$ o $x + 5 = 0$ solo hay que utilizar un inciso del Teorema 1 (¿cuál?). Ahora ya les queda claro porqué su procedimiento es correcto y qué sustenta a dicho procedimiento.
Es posible que alguno de ustedes se les haya ocurrido utilizar la "chicharronera" (fórmula general) para resolver la ecuación (1), entonces les pregunto, con los axiomas y propiedades vistas hasta ahora ¿podríamos justificar el uso de la fórmula general?