Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 12

Ejercicio 1. *Sea* $a > 0$. *Halle* $\lim_{x\to a} \sqrt{a}$.

Demostración. Denotemos $f(x) = \sqrt{x}$. Notamos que $\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$ (¿puede demostrarlo?). Sea $a > 0$.

Afirmación. Se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = \sqrt{a}$.

Usaremos la definición de límite para hacer la prueba. Tomemos $\varepsilon > 0$. Queremos hallar $\delta > 0$ tal que $((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Dom}(f)$ y si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\left|f(x) - \sqrt{a}\right| < \varepsilon.$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \sqrt{a}\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| \\
&= \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\
&\leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

donde la desigualdad anterior se obtiene porque $\sqrt{a} \leq \sqrt{x} + \sqrt{a}$ pues $\sqrt{x} \geq 0$.

Ya que queremos que $|f(x) - \sqrt{a}| < \varepsilon$, en virtud de la desigualdad anterior debe cumplirse que $|x - c| < \varepsilon\sqrt{a}$. Ya que también debe cumplirse que $((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Dom}(f)$, debemos tener que $a - \delta > 0$.

Dado lo anterior, consideremos $\delta = \min\left\{\frac{a}{2}, \varepsilon\sqrt{a}\right\}$. En primer lugar tenemos que $((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Dom}(f)$, y si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x - a| < \delta$, en particular, $|x - a| < \varepsilon\sqrt{a}$, de donde

$$\frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

así que en virtud de la desigualdad 1 obtenemos que

$$\left|f(x) - \sqrt{a}\right| < \varepsilon.$$

Así, por definición de límite de una función en un punto obtenemos que, cuando $a > 0$,

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Esto termina la prueba.

$\square$

Ejercicio 2. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Demuestre que NO existe el límite de $f(x)$ *cuando* x *tiende a* 0.

Demostración. Es importante hacer dos observaciones antes de dar la prueba. La primera es acerca de la notación. Observe que el problema está expresado *en palabras*, y no utilizando el símbolo $\lim_{x\to 0} f(x)$, la razón es justamente la dfefinición de límite, la cual involucra la notación: el símbolo de límite tiene sentido cuando el límite existe; sin embargo, es un abuso de notación común el escribirlo incluso cuando dicho límite no existe, lo cual lleva a errores comunes, como el utilizar incorrectamente el *álgebra de límites* cuando alguno de los límites no existe por separado. Sea cuidadoso cuando utilice dicho símbolo.

La segunda observación es respecto a cómo haremos la prueba. Nuestra única herramienta es la definición (y todo el conocimiento previo), así que para demostrar que el límite no existe tenemos que ver que para toda $\ell \in \mathbb{R}$ no se cumple la definición de límite, lo cual plantea un problema importante: ¿cómo se niega la definición de límite? Notemos que la definición inicia con *para toda* $\varepsilon > 0$, así que su negación será *existe* $\varepsilon_0 > 0$, y después continua con *existe* $\delta > 0$, que se niega como *para toda* $\delta > 0$. Después se debe negar una implicación que es *si* $0 < |x-a| < \delta$ *entonces* $|f(x) - \ell| < \varepsilon_0$, que es del tipo ($p$ implica q), cuya negación es (p y no q), así que la negación que debemos usar es $0 < |x-a| < \delta$ *y no* $|f(x) - \ell| < \varepsilon_0$, donde la última negación se puede escribir como $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$ (¿puede decir por qué?).

Procedemos a la prueba. Sea $\ell \in \mathbb{R}$. Probemos que ℓ no cumple la definición de límite, para ello demostraremos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ se cumple que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x_0 - a| < \delta$ y $|f(x_0) - \ell| \geq \varepsilon_0$.

Sea $\ell \in \mathbb{R}$. Tenemos 3 casos.

Caso 1. Supongamos que $\ell \neq 1$ y $\ell \neq -1$. En particular $|1-\ell| \neq 0$. Proponemos $\varepsilon_0 = \frac{|1-\ell|}{2} > 0$. Ahora, sea $\delta > 0$ y tomemos $x_0 \in (0, \delta)$. Entonces $x_0 \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x_0 - 0| < \delta$ y también

$$|f(x_0) - \ell| = |1 - \ell| \geq \frac{|1-\ell|}{2} = \varepsilon_0.$$

Esto prueba que ℓ no cumple la definición de límite.

Caso 2. Supogamos que $\ell = 1$. Proponemos $\varepsilon_0 = 1$. Sea $\delta > 0$ y tomemos $x_0 \in (-\delta, 0)$, entonces $x_0 \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x_0 - 0| < \delta$ y también

$$|f(x_0) - 1| = |-1 - 1| = |-2| = 2 \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Por lo tanto, $\ell = 1$ no cumple la definición de límite.

Caso 3. Supongamos que $\ell = -1$. Consideremos $\varepsilon_0 = 1$. Tomemos $\delta > 0$ y sea $x_0 \in (0, \delta)$, así que $x_0 \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x_0 - 0| < \delta$ y además

$$|f(x_0) - (-1)| = |1 + 1| = |2| = 2 \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Lo anterior muestra que $\ell = -1$ tampoco cumple la definición de límite.

Los Casos 1, 2 y 3 muestran que para toda $\ell \in \mathbb{R}$, ℓ no es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0. Esto termina la prueba. □

Ejercicio 3. *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq 0$. *Halle* $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{x}$.

Demostración. Denotemos $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Notemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Además, sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

Afirmación. Se cumple que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$.

Como es de esperarse, haremos la prueba utilizando la definición. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, entonces

$$\left| f(x) - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon.$$

Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, el $\delta > 0$ que queremos encontrar también debe cumplir que

$$((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Dom}(f) \tag{2}$$

en virtud de la definición de límite.

Notamos que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{a} \right| &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| \\ &= \left| \frac{a-x}{ax} \right| \\ &= \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-a| \end{aligned}$$

Ahora, realmente controlar *la distancia* que hay entre x y a es sencillo, la parte difícil es controlar el tamaño de $\frac{1}{x}$, que puede hacerse muy grande cuando x es *muy cercano* a 0. Para ello, notemos que

$$|a| = |a - x + x| \leq |a-x| + |x|$$

de donde se sigue que

$$|a| - |a-x| \leq |x|.$$

Ahora, notemos que si tomamos $\delta_0 = \frac{|a|}{2}$, y $x \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\}$, es decir, $0 < |x-a| < \delta_0$, entonces $x \neq a$ y también $-\delta_0 < -|x-a|$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \frac{|a|}{2} &= |a| - \frac{|a|}{2} \\ &= |a| - \delta_0 \\ &< |a| - |a-x| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

esto es, si $0 < |x-a| < \delta_0$ entonces

$$\frac{|a|}{2} < |x|. \tag{3}$$

Proponemos $\delta = \min\{\frac{a^2\varepsilon}{2}, \delta_0\} > 0$. Así, si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x-a| < \delta$, entonces $x \neq a$ y también

$$-\frac{|a|}{2} = -\delta < x - a < \delta = \frac{|a|}{2}.$$

Ahora, si $a > 0$, entonces la primera desigualdad de la cadena anterior implica que $0 < \frac{a}{2} < x$, esto es, $x > 0$, con lo cual $x \neq 0$. Por otro lado, si $a < 0$, entonces la segunda desigualdad implica que

$x < \frac{a}{2} < 0$, es decir, $x < 0$, con lo cual también en este caso se satisface que $x \neq 0$. Esto prueba que $\delta > 0$ cumple la condición (2).

Para concluir observamos que si $x \in \mathbb{R}$ satisface que $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{a} \right| &= \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x - a| \\ &< \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \delta \qquad (4) \\ &\leq \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2 \varepsilon}{2} \qquad (5) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

donde la desigualdad (4) se cumple en virtud de la desigualdad (3), mientras que la desigualdad 5 se sigue por la elección de δ. Así, por la definición de límite obtenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$

$\square$