Última actualización: 4 de marzo de 2021

Clase 3

En las sesiones anteriores estudiamos los axiomas de campo y los axiomas de orden de los números reales, pero por separado. En esta ocasión ocuparemos los dos tipos de axiomas, y las propiedades derivadas de estos, para resolver desigualdades.

Desigualdades

Comenzaremos con algo de notación. Para los números reales a, b y c escribiremos:

(1) $a < c < b$ si se cumple que $a < c$ y $c < b$.

(2) $a \leq c \leq b$ si se cumple que $a \leq c$ y $c \leq b$.

(3) $a < c \leq b$ si se cumple que $a < c$ y $c \leq b$.

(4) $a \leq c < b$ si se cumple que $a \leq c$ y $c < b$.

Definición 1 (Intervalos "acotados") *Sean a y b dos números reales tales que $a \leq b$. Al conjunto de los números reales x que satisfacen que:*

*(1) $a < x < b$, lo llamaremos **intervalo abierto** y lo denotaremos por (a, b), es decir*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

*(2) $a \leq x \leq b$, lo llamaremos **intervalo cerrado** y lo denotaremos por $[a, b]$, es decir*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

*(3) $a < x \leq b$, lo llamaremos **intervalo semiabierto por la izquierda** y lo denotaremos por $(a, b]$, es decir*

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

*(4) $a \leq x < b$, lo llamaremos **intervalo semiabierto por la derecha** y lo denotaremos por $[a, b)$, es decir*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Hay otro tipo de intervalos, los "no acotados":

Sea a un número real. Al conjunto de números reales x que satisfacen que:

(1) $a < x$, lo denotaremos por (a, ∞), es decir

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

(2) $a \leq x$, lo denotaremos por $[a, \infty)$, es decir

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}.$$

(3) $x < a$, lo denotaremos por $(-\infty, a)$, es decir

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

(4) $x \leq a$, lo denotaremos por $(-\infty, a]$, es decir

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}.$$

Como seguramente recordarán, los números reales pueden ser representados por los puntos sobre una recta, de la siguiente manera:

1. Se elige un punto para representar el 0.
2. A la derecha del cero se elige un punto para representar el 1. Esta elección determina una "escala".
3. Si $a < b$, entonces el punto que representa a a estará a la izquierda del punto que representa a b.

A esta representación gráfica de los números reales se le llama *recta real* (vea figura 1) y es muy común utilizar las palabras *número real* y *punto* como sinónimos.

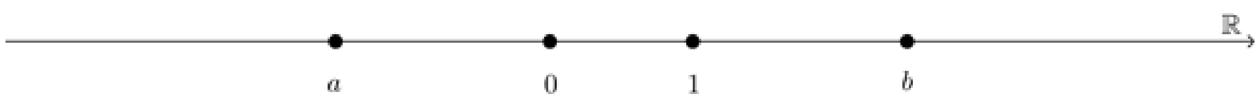

Figura 1: El conjunto de números reales puede ser representado gráficamente por una recta, la recta real. Si $a < b$, el punto que representa a a está a la izquierda del punto que representa a b.

Los intervalos también pueden ser representados gráficamente en la recta real, vea figura 2.

(a) Se muestra el intervalo abierto (a, b).

(b) Se muestra el intervalo cerrado $[a, b]$.

(c) Se muestra el intervalo semiabierto por la derecha $[a, b)$.

(d) Se muestra el intervalo "no acotado" $[a, -\infty)$.

Figura 2

Procedemos ahora a mostrar como se utilizan tanto los axiomas de campo como los axiomas de orden para justificar los procedimientos que ya conocen para resolver desigualdades.

Ejemplo 2 *Halle todos los números reales x que satisfacen que* $3x - 9 < 5x + 11$.

Solución. Supongamos que x es un número que satisface

$$3x - 9 < 5x + 11. \tag{1}$$

Recuerde que si $a < b$, entonces $a + c < b + c$, así, sumando 9 de ambos lados tenemos que

$$(3x - 9) + 9 < (5x + 11) + 9.$$

Ahora, usando la asociatidad de la suma, se tiene que

$$3x + (-9 + 9) < 5x + (11 + 9).$$

Luego, de la propiedad del inverso aditivo, se sigue que

$$3x + 0 < 5x + 20.$$

Por la propiedad del neutro para la suma, tenemos que

$$3x < 5x + 20.$$

Usando, una vez más, que si $a < b$, entonces $a + c < b + c$, sumando $-5x$ de ambos, tenemos que

$$3x - 5x < -5x + (5x + 20).$$

De la asociatividad de la suma se sigue que

$$-2x < (-5x + 5x) + 20$$

y de aquí, usando la propiedad del inverso aditivo, tenemos que

$$-2x < 0 + 20.$$

Ahora, por la propiedad del neutro para la suma, tenemos que

$$-2x < 20. \tag{2}$$

Como $-2 < 0$ (¿puede decir por qué?), se tiene que $(-2)^{-1} < 0$ (¿qué propiedad de orden usamos aquí?). Ahora, recordando que si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$; multiplicando por $(-2)^{-1}$ la desigualdad (2), se tiene que

$$(-2)^{-1}(-2x) > (-2)^{-1}(20).$$

Luego, usando la asociatividad para el producto, se tiene que

$$\left((-2)^{-1}(-2)\right) x > -10.$$

Se sigue de la propiedad del inverso multiplicativo que

$$1 \cdot x > -10.$$

Finalmente, usando la propiedad del neutro multiplicativo, tenemos que

$$x > -10. \tag{3}$$

En resumen, si x satisface la desigualdad (1), entonces debe satisfacer (3). Pero note que todos los pasos anteriores son "reversibles", es decir, si x satisface (3), entonces satisface (1). Así, los números que satisfacen la desigualdad (1), son aquellos que satisfacen la desigualdad (3), es decir aquellos que pertenecen al intervalo $(-10, \infty)$. ■

En el siguiente ejemplo omitiremos justificar cada uno de los pasos, pero esperamos que ustedes los justifiquen, además usaremos la siguiente afirmación que es parte de la Tarea 01:

$$ab > 0 \text{ si y sólo si } a \text{ y } b \text{ son ambos positivos o ambos negativos.} \tag{4}$$

.

Ejemplo 3 *Halle todos los números reales x que satisfacen que $2x^2 + 7x - 15 > 0$.*

Solución. Primero, usando algunos axiomas de campo de los números reales, se tiene que

$$2x^2 + 7x - 15 = (2x - 3)(x + 5).$$

Así, hallar los números x que satisfacen que $2x^2 + 7x - 15 > 0$ es equivalente a encontrar todos los números x que satisfacen que

$$(2x - 3)(x + 5) > 0. \tag{5}$$

Ahora, por la afirmación (4), debe suceder que $2x - 3 > 0$ y $x + 5 > 0$ o bien el otro caso, es decir, que $2x - 3 < 0$ y $x + 5 < 0$. En el primer caso, es decir cuando $2x - 3 > 0$ y $x + 5 > 0$, tenemos que x debe cumplir que $x > \dfrac{3}{2}$ y $x > -5$. Como deben suceder ambas condiciones a la vez (puede pensarlo como la intersección de los intervalos que estas desigualdades determinan), en este caso, concluimos que los números x que satisfacen que $x > \dfrac{3}{2}$ satisfacen la desigualdad (5). En términos de intervalos, los números que pertenecen al intervalo $(-3/2, \infty)$ satisfacen la desigualdad (5).

En el segundo caso, es decir cuando $2x - 3 < 0$ y $x + 5 < 0$, tenemos que x debe cumplir que $x < \dfrac{3}{2}$ y $x < -5$. Como deben suceder ambas condiciones a la vez, en este caso, concluimos que los números x que satisfacen que $x < -5$ satisfacen la desigualdad (5), es decir, los números que pertenecen al intervalo $(-3/2, \infty)$ satisfacen la desigualdad (5).

De ambos casos tenemos que, si x pertenece al intervalo $(-3/2, \infty)$ satisface (5) o si pertenece al intervalo $(-3/2, \infty)$ también satisface (5). Así, los números que satisfacen la desigualdad $2x^2 + 7x - 15 > 0$ son aquellos que pertenecen al conjunto

$$(-3/2, \infty) \cup (-3/2, \infty).$$

■