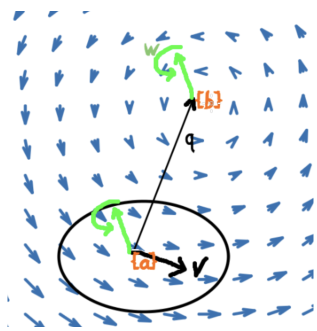
Featherstone 알고리즘 쉽게 이해하기

윤기범

December 7, 2025

1 강체의 움직임을 속도 벡터장으로 이해하기

a 지점을 중심으로 w각속도로 회전하며 v의 속도로 나아가는 강체를 생각해 봅니다. 강체의 원자마다 속도 벡터를 그려보고 더 나아가 공간 전체에 질량이 0인 원자가 있다고 가정하고, 속도벡터를 그려봅시다.



이 속도벡터장은 b 지점에서 선속도가 0이면서 w로 회전하는 전공간을 덮는 강체의 속도벡터장과 같습니다. 즉 강체의 질량이 있는 점에 그린 속도벡터장은 공간 전체에 그린 속도벡터장으로 확장해 볼 수 있습니다. 이렇게 그림을 그리고 보면 **강체의 움직임은 찰나의 한 순간에는 한 점 중심으로 등속원운동 하는 상태로 생각할 수 있습니다.** 속도 벡터장 V를 필수적인 정보로만 표혀하고자 한다면, 각속도 w벡터, 측정 지점(예시에서 a,b), 마지막으로 측정지점에서의 선속도 v를 기록하면 됩니다.
지금은 순전히 화살표 그림, 즉 기하적인 얘기를 하고 있는 것이기 때문에 각 벡터들 특정 좌표계에 종속된 숫자가 아닙니다. 외적연산 또한 대수 연산이 아니고 오른손 법칙을 사용해 그린 그림임입니다. 좌표계를 도입하면 대수 연산 때문에 핵심을 놓칠 수 있습니다. 속도장 V에 지점 a,b를 지정하면 그 지점의 w,v를 출력하는 기호를 정의해 봅시다.

$$\overrightarrow{V_b} = (w, 0) \tag{1}$$
$$\overrightarrow{V_a} = (w, w \times \overrightarrow{ba}), \tag{2}$$

임의이 지점 P를 고른다면 $\overrightarrow{V_p} = (w, w \times \overrightarrow{bp})$임을 알수 있습니다. w,v를 같이 출력하기 때문에 선속도,회전속도를 합쳐서 spatial velocity 또는 generalized velocity

라고 합고 se(3)라는 그룹의 원소라고 분류합니다. 이렇게 벡터장으로 생각하는 것은 고전역학과의 핵심적인 차이로, 고전역학에서 정지한 관찰자의 위치에서 강체의 v,w,를 관찰한다는 개념에서 관찰자의 위치는 사라지고 공간 전체의 벡터장으로 운동을 표현합니다.

1.0.1 임의 지점 P의 속도

강체에 부착한 a 지점에서 $\overrightarrow{V_a} =< w, v >$인 속도 벡터장이 주어졌을 때, 임의의 P지점 속도는어떻게 될까요? 우선 벡터장의 중심인 b좌표의 $\overrightarrow{V_b} =< w, 0 >$으로 부터 구해봅시다.

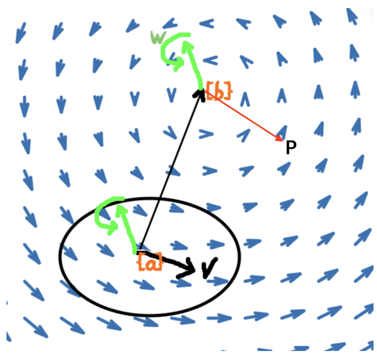


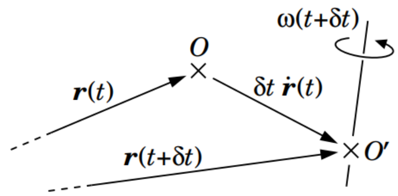
Figure 1: V_a 를 알고 있을 때 임의의 P점의 V_P를 얻는 방법

$$\overrightarrow{V_a} = (w, v) \tag{3}$$
$$\overrightarrow{V_p} = (w, w \times (\overrightarrow{bp})) \tag{4}$$
$$= (w, w \times (\overrightarrow{ap} - \overrightarrow{ab})) \tag{5}$$
$$= (w, w \times \overrightarrow{ap} + v) \tag{6}$$
$$= \overrightarrow{V_a} + (0, w \times \overrightarrow{ap}) \tag{7}$$

로 기하적으로 $\overrightarrow{ap}$, 즉 a에서 p까지의 벡터에 관한 항목을 더해줌으로써 구할 수 있습니다.

1.1 가속도의 해석. 벡터장 vs 고전역학

1장에서 찰나의 강체 움직임은 등속원운동의 속도벡터장으로 표현할 수 있다고 했습니다. 강체가 움직이면 속도장도 변하게 됩니다. 그 변화량을 구하는 방법을 알아보겠습니다.[Featherstone 29p] 속도벡터장은 질점을 따라가는 것이 아니라 CCTV처럼 고정된 지점을 지나는 속도를 관찰합니다. 강체의 한 점 O에서 선속도 $\dot{r}(t)$를 갖고 있기 때문에 $t + \delta t$시점에는 O'로 옮겨갈 것입니다. $t + \delta t$시점에 속도벡터장은 O'지점에서 $V_{O'}(t + \delta t) =< w(t + \delta t), v_{o'}(t + \delta t) >$ 로 측정됩니다. 여기서 r(t)벡터는 공간 상에 고정된 한 점에서 시작해 O를 추적하는 벡터입니다. 공간 상에 고정된 점은 어느 곳에 잡아도 상관 없으나 속도 벡터장에 의해 움직이지 않는 점이다는 것을 의미합니다.



$t + \delta t$시점에 O지점을 관찰하면

$$v_o(t+\delta t) = \dot{r}(t+\delta t) - w \times \delta t \dot{r}(t) \tag{8}$$

가 될 것입니다.

$$\dot{v_o} = \frac{\dot{r}(t+\delta t) - w \times \delta t \dot{r}(t) - \dot{r}(t)}{\delta t} \tag{9}$$

$$= \ddot{r} - w \times \dot{r} \tag{10}$$

가 되어야 함을 알 수 있습니다.

$$\dot{\vec{V}}_o = \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \ddot{r} - w \times \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{v_o} \end{pmatrix} \tag{11}$$

1.1.1 임의 지점 P에서 관측한 가속도장

속도벡터장과 마찬가지로 가속도도 벡터장으로 생각할 수 있습니다. 임의 P지점에 대해 1.1장과 같은 유도를 할 수 있습니다. 여기서는 고전역학과의 통일성을 확인하기 위해 고전역학 식으로 부터 임의점 P의 가속도장을 측정해 보겠습니다. 고전역학에서 우선 $\dot{r}$은 강체가 회전중심 o에서 ¡w,v¿ 속도를 갖고 있으면 임의지점 p 의 속도는

$$\dot{r} = v + w \times \overrightarrow{op} \tag{12}$$

위와 같이 구할 수 있고, 가속도는

$$\ddot{r} = \dot{v} + \dot{w} \times \overrightarrow{op} + w \times w \times \overrightarrow{op} \tag{13}$$

가 됩니다. 이제 속도장 v_o항목을 대체해보면

$$\ddot{r} - w \times \dot{r} = \dot{v} + \dot{w} \times \overrightarrow{op} - w \times v \tag{14}$$

가 됩니다.

$$V_o = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} - w \times v \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\dot{V}_p = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} - w \times v + \dot{w} \times \overrightarrow{op} \end{bmatrix} = \dot{V}_o + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w} \times \overrightarrow{op} \end{bmatrix} \tag{16}$$

로 속도 벡터장과 똑같은 변환이 성립합니다.

1.2 속도장 위의 속도장

강물 위에서 움직이는 배를 생각해 보면, 속도장 위의 속도장 개념을 이해할 수 있습니다. 가만히 있어도 W강물에 의해 움직이지만 배 자체의 운동 J가 더해졌을 때의 속도장과 가속도는 어떻게 구해야 할까요?

$$\vec{V_b} = \vec{W}_b + \vec{J}_b \tag{17}$$

측정지점을 b로 통일한 후에 더하는 방식으로 속도장을 구할수 있습니다. 가속도는 약간 더 복잡해 집니다.

1.2.1 $\vec{W_b} = (\alpha, 0), \vec{J_b} = (w, v), \dot{\vec{W}}_b = 0, \dot{\vec{J}}_b = 0$

강물이 W_b으로 회전하는 강물이 흐르고 배가 J로 움직이는 경우를 생각해봅시다. α에 의해서 속도장은 회전하게 됩니다.

$$\dot{\vec{V}}_b = \begin{pmatrix} \alpha \times w \\ \alpha \times v \end{pmatrix} \tag{18}$$

1.2.2 $\vec{W_b} = (\alpha, \beta), \vec{J_b} = (w, v), \dot{\vec{W}}_b = 0, \dot{\vec{J}}_b = 0$

강물에 선속도 β 까지 넣게 되면, 1.1에서 선속도에 의한 영향까지 고려해

$$\dot{\vec{V}}_b = \begin{pmatrix} \alpha \times w \\ \alpha \times v + w \times -\beta \end{pmatrix} \tag{19}$$

가 됩니다. 정리해 보면,

$$\dot{\vec{V}}_b = \begin{pmatrix} \alpha\times & 0 \\ \beta\times & \alpha\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \vec{W_b} \times \vec{J_b} \tag{20}$$

로 강물의 속도가 배의 속도를 변화시키는 변화량을 구할 수 있습니다.

1.2.3 $\vec{W}_b = (\alpha, \beta), \vec{J_b} = (w, v), \dot{\vec{W_b}} \neq 0, \dot{\vec{J_b}} \neq 0$

이제 일반적으로 강물과 배도 가속도를 갖는다고 핢 때 아래와 같이 구할 수 있습니다.

$$\dot{\vec{V}}_b = \dot{\vec{W}}_b + \dot{\vec{J_b}} + \vec{W_b} \times \vec{J_b} \tag{21}$$

1.3 좌표계를 가정한 대수적 표현

a지점에 x,y,z 좌표계를 잡으면, 임의의 벡터 p는 xyz로 분해해

$$\vec{p} = p_x \vec{x} + p_y \vec{y} + p_z \vec{z} \tag{22}$$

로 표현할 수 있다. 이를 벡터형태로 모아 놓으면

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$= \{a\} p_a \tag{24}$$

로 쓸 수 있다. 좌표계 a에서 측정한 것이므로 아랫첨자 a로 적는다. 대수적으로는 p_a가 $\vec{p}$를 나타내지만 실제로는 a 좌표계를 알고 있어야만 의미가 있는 것이다. 벡터를 표현한 좌표계를 따지지 않고 숫자를 더한다면, 숫자는 나오지만 아무 의미 없는 결과를 얻게 된다.

1.4 같은 점 위의 a,b좌표계에서 표현한 p_b와 p_a의 관계

$$\{b\} = \begin{bmatrix} \vec{x}' & \vec{y}' & \vec{z}' \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\vec{p} = \{b\} p_b \tag{26}$$

이제 각 x'y'z'을 다시 a좌표계 축으로 분해해서 표현해보면

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \{a\}x'_a & \{a\}y'_a & \{a\}z'_a \end{bmatrix} p_b \tag{27}$$

$$= \{a\} \begin{bmatrix} x'_a & y'_a & z'_a \end{bmatrix} p_b \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

와 같다. $\vec{p} = \{a\}p_a$ 이기 때문에,

$$p_a = \begin{bmatrix} x'_a & y'_a & z'_a \end{bmatrix} p_b \tag{30}$$

가 성립한다. 좌표계 간의 대수 벡터를 변환해주는 행렬은 회전행렬이기 때문에 그 의미로 R을 쓴다. 그리고 그 기하적인 의미는 b좌표계를 a좌표계에서 분해한 것이다.

$$\begin{bmatrix} x'_a & y'_a & z'_a \end{bmatrix} = \{b\}_a = R_{ab} \tag{31}$$

a에서 분해한 b라는 의미를 표현하기 위해 R의 아랫첨자로 ab를 사용한다.

$$p_a = R_{ab} p_b \tag{32}$$

이렇게 쓰면, 우측에 좌표벡터가 올 때는, 그 좌표계 b 와 앞의 회전행렬의 마지막 첨자 b가 일치해야만 올바른 연산이라는 것을 알 수 있다. 즉,

$$R_{ba} p_b \tag{33}$$

와 같은 연산을 의미가 없고, 허용하지 않기로 한다.

1.5 원점을 고려한 p_b와 p_a의 관계

좌표계의 원점까지 고려해 SE(3)그룹의 원소형태로 적으면,

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & t_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} p_a \\ 1 \end{bmatrix} = T_{ab} \begin{bmatrix} p_b \\ 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

${T_{ab}}^{-1} = T_{ba}$가 성립한다.

$$T_{ba} = \begin{bmatrix} R_{ba} & t_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t_b = R_{ba}(-t_a) \tag{36}$$

t자리에 $R_{ba}(-t_a)$로 -가 붙은 것에 의문이 생길 수 있다. 대수를 보기 전에 기하적인 그림을 생각해 보면, T_{ab}에서 t 자리에는 $\overrightarrow{ab}$ 벡터가 오는 것이고 T_{ba} 에서는 $\overrightarrow{ba}$가 와야 하므로 반대방향 벡터를 넣어줘야 한다. 대수적으로 기호가 헷갈릴 때는 항상 기하적인 그림으로 돌아가야 한다.

1.6 속도 벡터장에 좌표계 도입

$V_a = (w, v)$ 는 기하적인 속도 벡터장이었습니다. 이제 대수연산을 할 수 있도록 a에 좌표계를 할당하겠습니다. w,v 는 a좌표계에 의해 좌표벡터로 바뀌며 w_a, v_a 라고 쓰겠습니다.

$$V_a = \begin{bmatrix} w_a \\ v_a \end{bmatrix} \tag{37}$$

1.6.1 a,b 지점의 속도장 벡터를 변환하는 방법

속도 벡터장 V_b를 다른 위치 a에서 본 V_a는 어떻게 구해야 할까요?

$$V_a = \begin{bmatrix} w_a \\ v_a + w_a \times t_a \end{bmatrix}, t = \overrightarrow{ba} \tag{38}$$

여야 하므로,

$$V_a = \begin{bmatrix} w_a \\ v_a - t_a \times w_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & 0 \\ [p_a]_\times R_{ab} & R_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ v_b \end{bmatrix} = \{T_{ab}\} V_b \tag{39}$$

$$\vec{p} = -\vec{t} = \overrightarrow{ba} \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

속도장을 변환할 때는, T_{ab}를 이용해 만든 $\{T_{ab}\}$를 사용하면 됩니다.

1.7 T_{sb}로부터 V_s, V_b 구하기

b좌표계가 여러 joint의 dof θ의 움직임과 body transform에 의해 아래와 같은 T_{sb}로 표현할 수 있습니다.

$$T_{sb}(t) = \begin{bmatrix} R_{sb}(\theta_1(t),...,\theta_n(t)) & \overrightarrow{sb}_s(\theta_1(t),...,\theta_n(t)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sb}(t) & \overrightarrow{sb}_s(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

(t)가 가독성을 떨어트리기 때문에 빼고 T_{bs}를 구하면 아래와 같습니다.

$$T_{bs} = \begin{bmatrix} R_{bs} & \overrightarrow{bs}_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{bs} & -R_{bs}\overrightarrow{sb}_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

T_{sb}의 미분은 아래와 같습니다.

$$\dot{T_{sb}} = \begin{bmatrix} [w_s]R_{sb} & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_s = \dot{\overrightarrow{sb}}_s \quad (44)$$

직관을 얻기 위해, 앞에서는 w,v등을 이미 관측한 벡터, 즉 입력으로 가정했습니다. 그러나 컴퓨터시뮬레이션에서는 w,v는 입력이 아니라 joint의 움직임으로부터 얻어지는 출력입니다. $T_{sb}(t)$로 부터 V_b를 얻는 방법은 다음과 같습니다.

$$[V_b] = T_{sb}^{-1}\dot{T_{sb}} = \begin{bmatrix} R_{bs} & -R_{bs}\overrightarrow{sb}_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [w_s]R_{sb} & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [w_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

원점좌표인 s에서의 V_s는 아래와 같이 구할 수 있습니다.

$$[V_s] = \dot{T_{sb}}T_{sb}^{-1} = T_{sb}[V_b]T_{sb}^{-1} \quad (46)$$

위의 식은 벡터 형식으로는 아래와 같습니다.

$$V_s = \{T_{sb}\}V_b \quad (47)$$

2 로봇의 관절을 속도장으로 분석

Chain으로 이뤄진 로봇 body i 의 속도는 body i-1의 속도에 joint에 의한 속도를 더한 것과 같습니다. 이는 기하적인 설명으로 좌표계 설정이 필요 없습니다. 수식으로 표현하면 아래와 같습니다.

$$\overrightarrow{V}_b^i = \overrightarrow{V}_b^{i\text{-}1} + \overrightarrow{J}_b^i \quad (48)$$

i 강체의 속도장은 i-1 강체 속도장에 joint의 속도장을 더한 것인데, 여기서 속도장을 측정하는 위치는 동일해야 합니다. 대수적으로 실제 연산을 하려고 하면 좌표계를 할당하고 엄밀한 계산 방법을 제공해야 합니다. Joint 위치까지의 transform M_i와 관절 trnasform을 하나의 Group으로 묶은경우를 예를 들어보겠습니다.

$$T_{i\text{-}1i} = T_{\lambda i} = M_i e^{[A_i]\theta_i} \quad (49)$$

A_i는 아래와 같습니다.

$$[A_i] = T_{\lambda i}^{-1}\dot{T_{\lambda i}} \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

V_i^i는 i관절의 속도를 i 에 부착한 좌표계로 측정한다는 뜻으로 아래와 같게 재귀적으로 정의할 수 있습니다.

$$[V_i^i] = {T_{si}}^{-1}\dot{T_{si}} = {T_{i,i\text{-}1}}^{-1}{T_{s,i\text{-}1}}^{-1}(\dot{T_{s,i\text{-}1}}T_{i\text{-}1,i} + T_{s,i\text{-}1}\dot{T_{i\text{-}1,i}}) \tag{52}$$

$$= T_{i\text{-}1,i}^{-1}[V_b^{i\text{-}1}]T_{i\text{-}1,i} + T_{i,i\text{-}1}^{\text{-}1}\dot{T_{i\text{-}1,i}} \tag{53}$$

이를 Vector 형식으로 정리하면 다음과 같습니다.

$$V_i^i = [T_{i,i\text{-}1}]V_i^{i\text{-}1} + A_i\dot{\theta}_i \tag{54}$$

식 (48) 에서 본 것과 같은 꼴임을 볼 수 있습니다. 해석해보면, i-1강체 속도장을 i 좌표계의 속도장으로 변환한 것에 Joint i의 속도벡터장을 더한다는 것입니다.

2.1 관절 연쇄에 따른 가속도

1.2.3 기하적으로 $W_\times J$항목이 나타나는 이유를 이해했다면, 대수적으로 검증해봅시다. 2좌표계가 움직이는 속도장은 강물이고 이 강물의 속도장 V^1을 구하기 위해 공간에 움직이지 않는 s점을 잡고 T_{s2}로 표현하겠습니다. 배가 떠 있는 강물의 속도는 $\dot{T_{s2}}$가 됩니다.

$$V_s^2 = V_s^1 + \{T_{s2}\}J_2^2 \tag{55}$$

그리고 미분을 해보면 아래와 같습니다.

$$\dot{V_s^2} = \dot{V_s^1} + \frac{d}{dt}(\{T_{s2}\}J_2^2) \tag{56}$$

$$= \dot{V_s^1} + \{\dot{T_{s2}}\}J_2^2 + \{T_{s2}\}\dot{J_2^2} \tag{57}$$

이제 관절2가 1에 의해 영향을 받는 것을 측정하기 위해, 좌표계2로 변환해 보겠습니다.

$$\dot{V_2^2} = \{T_{2s}\}\dot{V_s^2} \tag{58}$$

$$= \dot{V_2^1} + \{T_{2s}\}\{\dot{T_{s2}}\}J_2^2 + \dot{J_2^2} \tag{59}$$

$$= \dot{V_2^1} + V_2^2{\times}J_2^2 + \dot{J_2^2} \tag{60}$$

예상대로 $V\times$ 항목이 나타납니다. 이를 통해 일반적으로 아래와 같은 재귀식이 성립함을 알 수 있습니다.

$$\dot{V_i^i} = \dot{V_i^{i\text{-}1}} + V_i^i{\times}J_i^i + \dot{J_i^i} \tag{61}$$

그런데 한가지 이상한 점음 V_i^i가 강물이 아니라 배의 속도를 나타내는 것 아닌가요? 맞습니다.

$$V_i^i = V_i^{i\text{-}1} + J_i^i \tag{62}$$

$$V_i^i{\times}J_i^i = V_i^{i\text{-}1}{\times}J_i^i + J_i^i{\times}J_i^i = V_i^{i\text{-}1}{\times}J_i^i \tag{63}$$

$$\tag{64}$$

로 강물에 배 속도를 더한 것과 같은 결과입니다.

2.2 spatial force 벡터장

속도장에 대응하는 force벡터장도 생각해 봅시다. b 지점에서 측정한 spatial force $\vec{F_b} = (\vec{\tau}, \vec{f})$를 a 지점에서 측정한다면 아래와 같습니다.

$$\vec{F_a} = (\vec{\tau} + \vec{t} \times \vec{f}, \vec{f}), \vec{t} = \overrightarrow{ab} \tag{65}$$

대수적으로 좌표계를 잡으면 아래와 같이 변환식을 세울 수 있습니다,

$$F_a = (\tau_a + t_a \times f_a, f_a) \tag{66}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{ab} & [t_a]_\times R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_b \\ f_b \end{bmatrix} = \{T_{ab}\}^* F_b \tag{67}$$

2.3 Spatial Momentum

운동에너지는 속도 벡터의 길이와 질량에만 의존하는 값으로 좌표계와 완전히 상관없는 기하적인 값입니다. 고전 뉴턴역학에서 운동량이나 운동에너지를 측정하는 식을 만들면 각 질점들의 위치와 질량의 합이 한 개의 질량 Tensor로 나타나게 됩니다. 이와 같은 유도 방식을 Spatial Velocity에 대해서 수행할 수 있는데 여기서는 운동에너지로부터 유도합니다.

$$\dot{p}_b = \begin{bmatrix} -[\overrightarrow{bp_b}] & I \end{bmatrix} \overrightarrow{V_b} \tag{68}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i ||\dot{p}_b||^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_b^T \begin{bmatrix} [\overrightarrow{bp_b}] \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -[\overrightarrow{bp_b}] & I \end{bmatrix} V_b \tag{69}$$

가독성을 위해 $\overrightarrow{bp_b}$를 줄여 r_b라고 적겠습니다.

$$T = \frac{1}{2}\mathcal{V}_b^T \begin{bmatrix} \sum_i -m_i[r_b][r_b] & \sum_i m_i[r_b] \\ \sum_i -m_i[r_b] & m\mathit{1} \end{bmatrix} \mathcal{V}_b = \frac{1}{2}\mathcal{V}_b^T \mathcal{I}_b \mathcal{V}_b \tag{70}$$

$$\tag{71}$$

위 식은 좌표계가 꼭 무게중심이 아닌 임의의 b좌표계에서 성립하는 것입니다. V_b 사이의 matrix를 generalized Inertia tensor라고 부르고 아래와 같이 정리할 수 있습니다. $\overrightarrow{bc}$는 b좌표계 원점에서 강체의 무게중심을 가리키는 벡터입니다.

$$\mathcal{I}_b = \begin{bmatrix} I_b & m[\overrightarrow{bc_b}] \\ -m[\overrightarrow{bc_b}] & m\mathit{1} \end{bmatrix} \tag{72}$$

tensor란 좌표계 선택에 따라 변환되면서 물리적인 의미를 갖는 scalar, 벡터나 행렬 또는 더 고차원의 배열을 의미합니다. Inertia tensor의 경우, 질점들의 위치를 속도장 안쪽으로 모아서 계산함으로써 좌표변환에 따라 변하는 물리량을 찾아냈습니다. 두 강체가 붙은 상태로 같은 속도 벡터장에서 움직이고 있으면, $I = I_1 + I_2$가 됨을 계산식으로부터 알 수 있습니다. 다른 좌표계 a에서 I_a는 어떤 값을 가질지

알아봅니다.

$$T = V_b^T I_b V_b \tag{73}$$
$$= V_a^T \{T_{ba}\}^T I_b \{T_{ba}\} V_a \tag{74}$$
$$I_a = \{T_{ba}\}^T I_b \{T_{ba}\} \tag{75}$$
$$= \{T_{ab}\}^* I_b \{T_{ba}\} \tag{76}$$

a,b좌표계에 따라 변환하는 방법을 제공했습니다.

a 지점의 운동량은

$$L_a = \{T_{ba}\}^T L_b = \{T_{ab}\}^* L_b \tag{77}$$

가 성립합니다. 운동량 벡터장은 속도벡터장과는 다르게 *변환이 되기 때문에 dual se(3)라고 쓰고 dse(3)라고 명칭합니다. 그리고 Inertia tensor는 se(3)벡터를 곱해주면 dse(3)를 출력하는 연산자로 볼수 있습니다.

2.4 Inertia transform 의 대수 연산

$$I_a = \{T_{ba}\}^T I_b \{T_{ba}\} \tag{78}$$
$$\tag{79}$$

가 성립하는데 $T_{ba} = (R_{ba}, q_b)$가 주어진다면, 아래처럼 분해해서

$$\{T_{ba}\} = \begin{bmatrix} R_{ba} & 0 \\ [q_b]R_{ba} & R_{ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ [q_b] & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ba} & 0 \\ 0 & R_{ba} \end{bmatrix} \tag{80}$$
$$\{T_{ba}\}^T = \begin{bmatrix} R_{ba}^T & 0 \\ 0 & R_{ba}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & [q_b]^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{81}$$
$$\tag{82}$$

$$I_a = |R_{ba}|^T \begin{bmatrix} I & [-q_b] \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_b & [c_b] \\ -[c_b] & m1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ [q_b] & I \end{bmatrix} |R_{ba}| \tag{83}$$

계산해 보면

$$= |R_{ab}| \begin{bmatrix} \Sigma + [q][c] & [c] - m[q] \\ -[c] & m1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ [q] & I \end{bmatrix} |R_{ba}| \tag{84}$$
$$= |R_{ab}| \begin{bmatrix} \Sigma + [q][c] + [c][q] - m[q]^2 & [c] - m[q]) \\ -[c] + m[q] & m1 \end{bmatrix} |R_{ba}| \tag{85}$$

가 된다. 반대로 $T_{ab} = (R_{ab}, p_a)$가 주어진다면, $q = -R_{ab}^T p_a$를 대입해

$$= \begin{bmatrix} \Sigma_a - [p_a][c_a] - [c_a][p_a] - m[p_a]^2 & [c_a] + m[p_a]) \\ -[c_a] - m[p_a] & m1 \end{bmatrix} \tag{86}$$

세부 텀은 아래와 같이 계산된다.

$$[q]^2 = \begin{bmatrix} -q_z^2 - q_y^2 & q_y q_x & q_z q_x \\ q_x q_y & -q_z^2 - q_x^2 & q_z q_y \\ q_x q_z & q_y q_z & -q_y^2 - q_x^2 \end{bmatrix} \tag{87}$$

$$[a][b] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \tag{88}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_z b_z - a_y b_y & a_y b_x & a_z b_x \\ a_x b_y & -a_z b_z - a_x b_x & a_z b_y \\ a_x b_z & a_y b_z & -a_y b_y - a_x b_x \end{bmatrix} \tag{89}$$

$$[a][b] + [b][a] = \begin{bmatrix} -2(a_z b_z + a_y b_y) & a_y b_x + a_x b_y & a_z b_x + b_z a_x \\ a_x b_y + a_y b_x & -2(a_z b_z + a_x b_x) & a_z b_y + a_y b_z \\ a_x b_z + a_z b_x & a_y b_z + a_z b_y & -2(a_y b_y + a_x b_x) \end{bmatrix} \tag{90}$$

2.5 몇가지 연산

$$e^{[S]\theta}[S] = [S]e^{[S]\theta} \tag{91}$$

$$e^{[S]\theta}[S]e^{-[S]\theta} = [S]e^{[S]\theta}e^{-[S]\theta} = [S] \tag{92}$$

$$\therefore Ad_{e^{[S]\theta}}(S) = S \tag{93}$$

$$V_i^i \times J^i = V_i^{i\text{-}1} \times J^i + J^i \times J^i = V_i^{i\text{-}1} \times J^i \tag{94}$$

$$A\dot{d}_{T_{bs}} Ad_{T_{sb}} = \begin{bmatrix} R^T[w_s]^T & 0 \\ \frac{d}{dt}(R^T[\vec{sb}]^T) & R^T[w]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ [\vec{sb}]R & R \end{bmatrix} \tag{95}$$

$$= \begin{bmatrix} -[w_b] & 0 \\ -[\dot{\vec{sb}}] & -[w_b] \end{bmatrix} = -V_b \times \tag{96}$$

$$\tag{97}$$

2.6 spatial Inertia tensor의 미분

Spatial Inertia tensor I_b는 b좌표계에서 상수여야 하지만 CCTV방식에서관찰지점 b는 고정이지만 b좌표계가 움직이기 때문에 $I_b(t+\delta t) \neq I_b(t)$입니다. $I_b(t+\delta t)$를 구하기 위해 s프레임에서 b프레임을 따라가기 방식으로 관측합니다.

$$I_s(t + \delta t) = [T_{sb}(t + \delta t)]^* I_b[T_{bs}(t + \delta t)] \tag{98}$$

즉, 관측 점 b를 고정하지 않고 움직이는 b프레임을 따라가면 I_b가 계속 상수입니다. 실제로 바뀌는 것은 b프레임까지의 transform입니다. 이를 미분하면

$$\dot{I}_s = \dot{[T_{sb}]}^* I_b[T_{bs}] + [T_{sb}]^* I_b \dot{[T_{bs}]} \tag{99}$$

$$\dot{I}_b = [T_{bs}]^* \dot{I}_s [T_{sb}] \tag{100}$$

$$= [T_{bs}]^* \dot{[T_{sb}]}^* I_b + I_b \dot{[T_{bs}]}[T_{sb}] \tag{101}$$

$$= V_b \times^* I_b + I_b V_b \times \tag{102}$$

를 얻을 수 있습니다. I를 변환하는 식이 $\dot{I}$에도 동일한 이유는 미분은 I간의 차이를 구하는 것으로 선형함수이기 때문입니다.

2.6.1 Spatial Inertia tensor의 미분을 dse(3)의 미분으로

Inertia tensor를 미분하는 또다른 방식은 살표볼 텐데 우선 Inertia Tensor가 Covariance matrix고 대칭행렬로 orthogonal 대각화가 가능하다. 즉 transform 부분을 제외하고 eigenvalue 6개로 이뤄져 있다는 것입니다. Spatial Inertia tensor를 $XX^T = RDR^T$ 로 diagonal term eigen value를 갖는

$$E_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\lambda_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, ... \tag{103}$$

를 만든 뒤에, $X_i = RE_i = g^i \in dse(3)$벡터의 outer product 합 6개로 쓸 수 있습니다.

$$I = \sum_i^6 g^i {g^i}^T \tag{104}$$

$$\dot{I} = \sum_i \dot{g^i}({g^i}^T) + g^i \dot{{g^i}^T} = \sum_i V\times^* g^i {g^i}^T - \sum_i g^i {g^i}^T V\times \tag{105}$$

$$= V\times^* I - IV\times \tag{106}$$

2.7 spatial force 와 Momentum의 관계

Spatial force는 spatial momentum의 미분이기 때문에 dse(3)의 원소이고 momentum과 마찬가지로 $[T_{ba}]^*$ 연산이 사용됩니다. 여기서는 torque가 오히려 선속도의 역할을 하고, force가 각속도에 해당합니다. 그래서 se(3)의 dual이라고 하는 것이고요.

spatial force는 spatial momentum 의 미분과 같습니다.

$$F_b = \frac{dL_b}{dt} = \dot{I}_b V_b + I_b \dot{V}_b = V_b \times^* L_b + I_b \dot{V}_b \tag{107}$$

고전 역학에서 b좌표계를 center of mass로 잡았을 때 힘과 토크는

$$f_b = m\dot{v}_b \tag{108}$$
$$\tau_b = I_b\dot{w}_b + w_b \times I_b w_b \tag{109}$$

와 같습니다. 자유 운동하는 강체의 spatial force 식과 같은지 확인해 봅시다.

$$V_b =< w, v > \tag{110}$$
$$\dot{V}_b =< \dot{w}, \dot{v}_b >, \dot{v}_b = \dot{v} - w \times v \tag{111}$$
$$\mathcal{F}_b = \begin{bmatrix} \tau_b \\ f_b \end{bmatrix} = I_b\dot{V}_b + V_b \times^* L_b \tag{112}$$
$$= \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & m\mathit{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} - w \times v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [w] & [v] \\ 0 & [w] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & m\mathit{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \tag{113}$$
$$= \begin{bmatrix} I_b\dot{w} + [w]I_b w \\ m\dot{v} \end{bmatrix} \tag{114}$$

2.8 OpenChain 강체의 dynamics

코드 구현에서 좌표계 변수를 joint에 넣어야 할지 link에 넣어야 할지 고민될 수 있다. CCTV방식 관측에서 좌표계는 joint나 body에 종속된 것이 아니기 때문에 joint frame을 기준으로 dynamics를 계산해도 되고, body 기준으로 해도 된다.

관절로 연결된 다른 강체에서 나에게 작용하는 힘을 합치면 1개 강체의 물리식을 만들 수 있다. 부모 λ 에서 나에게 이어지는 힘, 내가 child에 보내는 힘을 벡터에 F 심벌을 할당한다. child에서 내가 받는 반작용힘, 내가 부모에게 주는 반작용힘은 -F 로 표기한다. A_i는 관절의 Spatial velocity를 body i frame에서 측정한 것이다. $A_{\underset{\sim}{i}}$는 따라가기 방식의 미분으로, i지점을 고정한 것이 아니라 움직이는 i frame 내에서 변화하는 관절 Spatial velocity의 미분이다. 대부분의 관절은 $\dot{A}_{\underset{\sim}{i}} = 0$ 이다.

$$F_i^i + F_i^{ext} + \sum_{k \in \mu(i)} [T_{ik}]^*(-F_k) = I_i^i \dot{V}_i^i + V_i \times^* L_i \tag{115}$$
$$V_i = [T_{i,i\text{-}1}]V_{i\text{-}1} + A_i\dot{\theta}_i \tag{116}$$
$$\dot{V}_i = [T_{i,i\text{-}1}]\dot{V}_{i\text{-}1} + A_i\ddot{\theta}_i + V_i \times (A_i\dot{\theta}_i) + \dot{A}_{\underset{\sim}{i}}\dot{\theta}_i \tag{117}$$

2.8.1 Inverse Dynamics

Inverse Dynamics란 모든 강체의 $V^i, \dot{V}^i$가 입력으로 주어지고, 그러한 가속도를 만들기 위한 힘이 무엇인지를 구하는 것입니다. 선언적 프로그래밍에서는 아래의 식만 선언하면 연산 순서에 상관없이 값을 구할 수 있습니다.

$$F_i = I_i\dot{V}_i + V_i \times^* I_i V_i - F_i^{ext} + \sum_{k \in \mu(i)} [T_{ik}]^* F_k \tag{118}$$

명령형 프로그래밍에서는 먼저 계산해야 할 변수들의 순서를 분석해야 하는데 관련 알고리즘은 참고하십시오. 힘을 구하고 난 뒤, 강체에 작용한 힘 중에 Constraint force를 제외하고 joint에 의해 active 하게 전달된 힘만 구하고 싶으면 아래와 같이 구한다.

$$\tau_i = A_i^T F_i^{\lambda i} \tag{119}$$

위 식은 어떤 coordinate를 잡던지 발생한 Power는 동일해야 한다는 명제로 부터 유도한다.

$$\tau^T \dot{\theta} = F^T A \dot{\theta} \tag{120}$$

$$\therefore \tau = A^T F \tag{121}$$

2.9 Forward dynamics

Foward 에서는 주어진 torque에 대해 $\ddot{\theta}$를 구하는 것이다. 따라서 $\ddot{\theta}$를 한 쪽으로 몰아야 하는데 물리식이

$$F_i = I_i \dot{V}_i(\ddot{\theta}_i, \dot{V}_\lambda) + V_i \times^* I_i V_i - F_i^{ext} + \sum_{k \in \mu(i)} [T_{ik}]^* F_k(\dot{V}_i, \ddot{\theta}_k) \tag{122}$$

$\dot{V}_i \rightarrow \dot{V}_\lambda$로 i에서 그 부모인 λ변수를 참조하고, $F_k \rightarrow \ddot{\theta}_k$로 자식 변수를 참조한다. 이를 풀기 위해서는 말단 강체 n부터 부모 i 쪽으로 거슬러 올라가며 식을 정리하는 방식을 쓰고자 한다.

$$F_n = I_n\{[T_{ni}]\dot{V}_i + A_n\ddot{\theta}_n\} + \underbrace{I_n\{V_n \times (A_n\dot{\theta}_n) + \dot{A}_{\underset{\sim}{n}}\dot{\theta}_n\} + V_n \times^* I_n V_n \text{-} F_n^{ext}}_{F_n(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_n}) = const} \tag{123}$$

$F_n(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_n})_n$은 변수가 없는 상수로만 이뤄진 식으로 재귀 없이 계산 가능하다. 우선 $\dot{V}_\lambda$에 관한 식을 부모에 합치는데

$$F_i = \underbrace{\{I_i + \sum_{n \in \mu(i)} [T_{in}]^* I_n [T_{ni}]\}}_{\hat{I}_i} \dot{V}_i + ... \tag{124}$$

꼴이 된다. 그리고 $\ddot{\theta}_n$부분은 식 (123)에서 치환한다.

$$A_n^T F_n = \tau_n = A_n^T I_n\{[T_{ni}]\dot{V}_i + A_n\ddot{\theta}_n\} + A_n^T F_n(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_n}) \tag{125}$$

$$\ddot{\theta}_n = (A_n^T I_n A_n)^{-1}\{\tau_n - A_n^T I_n [T_{ni}]\dot{V}_i - A_n^T F_n(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_n})\} \tag{126}$$

$$= \text{-}(A_n^T I_n A_n)^{-1} A_n^T I_n [T_{ni}]\dot{V}_i + \underbrace{(A_n^T I_n A_n)^{-1}\{\tau_n \text{-} A_n^T F_n(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_n})\}}_{\ddot{\theta}_n(\cancel{\dot{V}_i})} \tag{127}$$

식 (124)에 마저 넣어 정리하면 아래와 같다.

$$F_i = \overbrace{\{I_i + \sum_{n\in\mu(i)} [T_{in}]^*\{I_n - I_n A_n (A_n^T \hat{I}_n A_n)^{-1} A_n^T I_n\}[T_{ni}]\}}^{\hat{I}_i} \dot{V}_i \tag{128}$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \sum_{n\in\mu(i)} [T_{in}]^*\{I_n A_n \underbrace{(A_n^T I_n A_n)^{-1}\{\tau_n - F_n(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_n})\}}_{\ddot{\theta}(\cancel{\dot{V}_i})} \\ &+ I_n\{V_n \times A_n \dot{\theta}_n + \underset{\sim}{A_n} \dot{\theta}_n\} - F_n^{ext}\} + V_i \times^* I_i V_i - F_i^{ext} \end{aligned}\right\} f_i \tag{129}$$

$$= \hat{I}_i \dot{V}_i + f_i \tag{130}$$

이제, 말단이 아닌 i강체의 dynamics 식을 부모로 한번 더 넘겨보자.

$$\tau_i = A_i^T \hat{I}_i\{[T_{i\lambda}]\dot{V}_\lambda + A_i \ddot{\theta}_i\} + \underbrace{A_i^T\{\hat{I}_i\{V_i \times (A_i \dot{\theta}_i) + \underset{\sim}{\dot{A}_i} \dot{\theta}_i\} + f_i\}}_{F_i(\cancel{\dot{V}_\lambda}, \ddot{\theta})} \tag{131}$$

f_i 항목이 추가되고 $\hat{I}$항목이 생겼다. $\ddot{\theta}_i$를 구하면,

$$\ddot{\theta}_i = (A_i^T \hat{I}_i A_i)^{-1}\{\tau_i - A_i^T \hat{I}_i [T_{i\lambda}]\dot{V}_\lambda - F_i(\cancel{\dot{V}_\lambda}, \cancel{\ddot{\theta}_i})\} \tag{132}$$

$\ddot{\theta}$를 똑같은 방법으로 F_λ 부모 식으로 넘기면,

$$F_\lambda = \overbrace{\{I_\lambda + \sum_{i\in\mu(\lambda)} [T_{\lambda i}]^*\{\hat{I}_i - \hat{I}_i A_k (A_i^T \hat{I}_i A_i)^{-1} A_i^T \hat{I}_i\}[T_{i\lambda}]}^{\hat{I}_\lambda} \dot{V}_\lambda + \tag{133}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in\mu(\lambda)} [T_{\lambda i}]^*\{\hat{I}_i A_i (A_i^T \hat{I}_i A_i)^{-1}\{\tau_i - F_i(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_\lambda})\} + \\ &\hat{I}_i\{V_i \times A_i \dot{\theta}_i + \underset{\sim}{A_i} \dot{\theta}_i\} + f_i\} + V_\lambda \times^* I_\lambda V_\lambda - F_\lambda^{ext} \end{aligned}\right\} f_\lambda \tag{134}$$

$\hat{I}_1$를 호출하면, 재귀적으로 말단까지 따라가 계산하고 f_1도 마찬가지다. 이로써 선언적 프로그래밍에 필요한 식은 아래와 같이 정리하 수 있다.

$$
\begin{aligned}
f_n =& V_n \times^* I_n V_n - F_n^{ext} && (135)\\
\hat{I}_i =& I_\lambda + \sum_{i \in \mu(\lambda)} [T_{\lambda i}]^* \{\hat{I}_i - \hat{I}_i A_k \underbrace{(A_i^T \hat{I}_i A_i)^{-1}}_{\Psi_i} A_i^T \hat{I}_i\}[T_{i\lambda}] && (136)\\
F_i(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_i}) =& A_i^T \{\hat{I}_i \{\underbrace{V_i \times A_i \dot{\theta}_i + \dot{A}_{\underset{\sim}{i}} \dot{\theta}_i}_{\eta_i}\} + f_i\} && (137)\\
f_i =& \sum_{k \in \mu(i)} [T_{ik}]^* \{\hat{I}_i \{A_i \underbrace{(A_i^T \hat{I}_i A_i)^{-1}}_{\Psi_i} \{\tau_i - F_i(\cancel{\dot{V}_i}, \cancel{\ddot{\theta}_i})\} + && (138)\\
& \underbrace{\{V_i \times A_i \dot{\theta}_i + A_{\underset{\sim}{i}} \dot{\theta}_i\}}_{\eta_i}\} + f_i\} + V_\lambda \times^* I_\lambda V_\lambda - F_\lambda^{ext} && (139)\\
\ddot{\theta}_i =& \Psi_i \{\tau_i - A_i^T \hat{I}_i \{[T_{i\lambda}]\dot{V}_\lambda + \underbrace{V_i \times A_i \dot{\theta}_i + \dot{A}_{\underset{\sim}{i}} \dot{\theta}_i}_{\eta_i}\} - A_i^T f_i\} && (140)\\
& && (141)
\end{aligned}
$$

η, Ψ의 경우 여러곳에서 사용되므로 별도의 식으로 만들면 연산을 줄일 수 있다.

2.10 중력을 body 좌표계 계산하기

중력은 center of mass 에서 $(0, mg)$로 나타난다. 그러나 body 좌표계 b가 com 이 아니고, com 의 위치가 c_b 벡터로 주어진다고 하자. com에는 s와 동일한 space 좌표계를 잡되 c좌표계라고 명명하자.

$$
\begin{aligned}
T_{bc} &= (R_{bs}, c_b) && (142)\\
F_c &= (0, mg) && (143)\\
F_b &= \{T_{bc}\}^* F_c = (m[c_b]R_{bs}g, mR_{bs}g) && (144)\\
&= \begin{bmatrix} I_b & m[c_b] \\ -m[c_b] & mI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R_{bs}g \end{bmatrix} = I_b \begin{bmatrix} 0 \\ R_{bs}g \end{bmatrix} && (145)
\end{aligned}
$$

로 body 좌표계에서 중력을 구할 수 있다.

재귀적인 정의를 코드로 옮기려면, f[i] = g(f[i+1]) 와 같이 f의 재귀적인 호출을 감지했을 때, 아래와 같은 코드로 변환해줘야 한다. 따라서 g(f[i+1]) 의 assign이 일어날 때, 재귀적인 경우 f[i]는 f(i)를 호출하는 함수로 치환해준다.

```
function f(i)
if(i== n)
return f(n);
else
g(f(i+1))
```

2.11 $IA\Psi A^T I$ 의 연산 줄이기

aa^T 꼴의 행렬은 transpose해도 같은 symmetric matrix이기 때문에 tridiagonal 한 부분만 계산함으로써 연산을 줄일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} L_0 & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0^T \\ L_1^T \end{bmatrix} = \{ \begin{bmatrix} L_0 a & L_0 b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 b & L_1 c \end{bmatrix} \} \begin{bmatrix} L_0^T \\ L_1^T \end{bmatrix} \tag{146}$$

$$= (L_0 a + L_1 b) L_0^T + (L_0 b + L_1 c) L_1^T \tag{147}$$

$$= a L_0 L_0^T + b(L_1 L_0^T + L_0 L_1^T) + c L_1 L_1^T \tag{148}$$

2.12 exponential matrix의 회전행렬 증명

$$p(\theta) = e^{[\bar{w}]}\theta p(0) \tag{149}$$

$$e^{[\bar{w}]\theta} = I + [w]\theta + \frac{[w]^2\theta^2}{2!} + ... \tag{150}$$

$$= I + ([w]\theta - \frac{[w]\theta^3}{3!} + \frac{[w]\theta^5}{5!} + ...) + (\frac{[w]^2\theta^2}{2!} + ...) \tag{151}$$

$$= I + [w]sin\theta + (1 - cos\theta)[w]^2 \tag{152}$$

라는 해를 얻을 수 있습니다. 기하적으로도 w회전축으로 돌리니까 회전 matrix가 될 것이고, $RR^T = I$가 성립함을 봐서도 $e^{[w\theta]} \in SO(3)$이다.

$$(I + [w]sin\theta + (1 - cos\theta)[w]^2)(I - [w]sin\theta + (1 - cos\theta)[w]^2) \tag{153}$$

$$= I + \cancel{[w]sin\theta} + (1 - cos\theta)[w]^2 \tag{154}$$

$$\cancel{-[w]sin\theta} - [w]^2 sin\theta^2 - \cancel{(1 - cos\theta)[w]^3 sin\theta} \tag{155}$$

$$+(1 - cos\theta)[w]^2 + \cancel{sin\theta(1 - cos\theta)[w]^3} + (1 - cos\theta)^2[w]^4 \tag{156}$$

$$= I + 2(1 - cos\theta)[w]^2 - [w]^2 sin\theta^2 - (1 - cos\theta)^2[w]^2 \tag{157}$$

$$= I + [w]^2(1 - sin\theta^2 - cos\theta^2) = I \tag{158}$$

즉 대수적으로 w 를 skew matrix로 다루면 선형미분방정식이 되어 p(t)를 구할 수 있습니다.

2.12.1 se(3) Matrix exponential

일반적인 Matrix A에 대해 아래와 같이 미분 방정식의 해가 성립합니다.

$$\dot{x(t)} = Ax(t) \tag{159}$$

라는 식이 있을 때 해를

$$x(t) = e^{At} x_0 \tag{160}$$

$$e^{At} \triangleq (I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ...) \tag{161}$$

라고 가정하자. 그러면 다시 해를 미분해,

$$\dot{x(t)} = (\frac{d}{dt}e^{At})x_0 = \frac{d}{dt}(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ...)x_0 \tag{162}$$

$$= (A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + ...)x_0 \tag{163}$$

$$= Ae^{At}x_0 = Ax(t) \tag{164}$$

가 되어 해가 맞다는 것을 알 수 있다.

2.13 속도 벡터장에의한 질점의 궤적

속도벡터장을 고정하면 질점이 어떻게 움직일까요? 실제 자유 운동하는 강체와는 다릅니다. 속도벡터장으로 표현할 수 있는 움직임에 대해 분석해 봅시다. 속도장 V_s가 고정이라고 할 때 그 위의 점 P는 아래와 같이 움직입니다.

$$\dot{p_s}(t) = [V_s]p_s(t) \tag{165}$$

이 미분 방정식을 풀면 아래와 같은 해가 나옵니다. w,v 에 따라 어떤 움직임을 보이는지 살펴보겠습니다.

$$p_s(t) = e^{[V_s]t}p_s(0) \tag{166}$$

$$e^{[V_s]t} = \begin{bmatrix} e^{[w]t} & (It + \frac{t^2}{2!}[w] + \frac{t^3}{3!}[w]^2 + ...)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{167}$$

Case 1. revolute joint

$$V_b = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_s = \begin{pmatrix} w \\ w \times \overrightarrow{bs} \end{pmatrix} \tag{168}$$

$$e^{[V_s]t} = \begin{bmatrix} e^{[w]t} & (-[w]t - \frac{t^2}{2!}[w]^2 + \frac{t^3}{3!}[w] + ...)\overrightarrow{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{169}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{[w]t} & (I - e^{[w]t})\overrightarrow{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{170}$$

대수적으로 기하를 표현하고 나면, 그 의미가 모호해지게 됩니다. 기하적인 의미를 잃지 않기 위해, Revolute joint를 SE(3) chain형태로 표현해 보겠습니다.

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{sp(t)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \overrightarrow{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{[w_b]t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{bp} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{171}$$

$$= \begin{bmatrix} R & \overrightarrow{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{[w_b]t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & R^T\overrightarrow{bs} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{sp} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{172}$$

그 Transform의 경로는 벡터장을 미분 방정식으로 보고 푼 경로인 $e^{[V_s]t}$와 동일함을 알 수 있습니다,.

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{sp}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = [T_{sb}]e^{[V_b]t} \begin{bmatrix} \overrightarrow{sp(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = e^{[V_s]t} \begin{bmatrix} \overrightarrow{sp}(0) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{173}$$

Case 2. w=0 인 경우에는,

$$\begin{bmatrix} I & vt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{174}$$

Slider, Prismatic Joint를 나타낼 수 있습니다.
Case 3. $v \neq 0, w \neq 0, v \parallel w$ 인 경우에는

$$\begin{bmatrix} e^{[w]t} & (I - e^{[w]t})q + vt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{175}$$

Screw Joint를 나타낼 수 있습니다.
Case 4. $v \neq 0, w \neq 0$ 일반적인 경우에는, v,w가 평행하지 않으면, w에 의해 점이 나선형을 그리며 멀어집니다. 즉, v의 속도로 직진하면서 w로 회전하는 임의의 강체 모션을 표현하지는 못합니다. 벡터장에서 움직이는 particle의 궤적을 표현할 수는 있지만, 임의 rigid body 궤적을 나타낼 수는 없고, 특정 Joint의 모션을 표현 가능하다는 것으로 정리하면 되겠습니다.
se(3)와 SE(3)의 관계가 더 명확해진다. se(3)는 SE(3)를 속도로 바꾸며, exponential로 se(3)를 쌓으면, 스스로 SE(3)가 된다.

$$exp : se(3) \rightarrow SE(3) \tag{176}$$

$$\tag{177}$$

2.14 Vector 외적을 행렬 Skew로 바꾸기

물리 시뮬레이션에서는 계속 연산을 하다가 State를 변수를 한 번 업데이트 한다. 그리고 또 다음 프레임을 바로 계산하기 때문에 State는 거의 항상 Dirty야. 따라서 computedState, NextState 로 구분해서 NextState를 업데이트 하게 만들고, computedState는 NextState가 계산되자마자 값을 교체하는 방식으로 가야 해. 근데 NextState를 참조하니까 computedState는 바로 또 dirty가 되잖아. 즉 LazyInit 방식에 안 맞아. [w] =

$$\begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

54 **??**