Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 2 – TEHNICI DE SIMULARE

1. Recapitulare: noțiuni de statistică

2. Metode generale de simulare a v.a.: metoda inversă

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

Partea I

- Scopul experimentului aleator. Statistică inferențială.
- Populație țintă. Eșantion
- Model probabilist. Selecție. Repartiția selecției
- Model statistic. Statistică.
- Convergența in probabilitate
- Estimator. Estimație. Consistența unui estimator

Partea a II - a

- Numere aleatoare. Variabile uniforme
- Metode generale de simulare a variabilelor aleatoare: Metoda inversă

Scopul experimentului aleator

- *Experimentul aleator* se realizează pentru *colectarea de date* necesară pentru a obține informații privind un anumit fenomen de interes.
- Pe baza datelor se emit *concluzii* care, în general, ies din sfera experimentului particular.
- Cercetătorii *generalizează concluziile experimentului* pentru clasa tuturor experimentelor similare.
- Problema acestui demers este că *nu putem garanta corectitudinea concluziilor* obținute.
- Totuși, folosind tehnici statistice, putem măsura și administra *gradul de incertitudine* al rezultatelor.

Statistică inferențială

- *Statistica inferențială* este o colecție de *metode* care permit cercetătorilor să observe o submulțime a obiectelor de interes și folosind informația obținută pe baza acestor observații să facă afirmații sau inferențe privind întreaga populație.
- Câteva dintre aceste *metode* sunt:
  - estimarea parametrilor unei populații
  - verificarea ipotezelor statistice
  - estimarea densității de probabilitate.

Populație țintă

- *Populația țintă* este definită ca fiind întreaga colecție de obiecte sau indivizi despre care vrem să obținem anumite informații.
- Populația țintă trebuie *bine definită* indicând
  - ce constituie *membrii* acesteia (de ex, populația unei zone geografice, o anumită firmă care construiește componente hardware, etc.)
  - *caracteristicile* populației (de ex, starea de sănătate, numărul de defecțiuni, etc.).
- In majoritatea cazurilor este imposibil sau nerealist să observăm întreaga populație; cercetătorii măsoară numai o parte a populației țintă, denumită *eșantion*.
- Pentru a face inferențe privind întreaga populație este important ca *mulțimea eșantion* să fie *reprezentativă* relativ la întreaga populație.

Model probabilist

- Fie X o v.a. cu densitatea $f(x,\theta), x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$.

Definiție

Mulțimea densităților de repartiție $f(x,\theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, ce depind de parametrul θ se numește *model probabilist unidimensional*.

$$\{f(x,\theta) | x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta\}. \tag{1}$$

- Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator cu densitatea de repartiție

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^k.$$

Definiție

Mulțimea densităților de repartiție $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ cu parametrul $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ se numește *model probabilist multidimensional*.

$$\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) | \theta \in \Theta\}. \tag{2}$$

Selecție. Repartiția selecției

Definiție

O *selecție* este o mulțime de v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ având aceeași densitate de repartiție $f(x, \theta)$.

- Deoarece selecția este o mulțime de variabile aleatoare asociate unui model probabilist, selecția trebuie să aibă o repartiție, pe care o vom numi *repartiția selecției*.

Definiție

Repartiția selecției $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este definită ca fiind repartiția vectorului $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, notată prin $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$.

- Cea mai folosită formă de selecție este selecția aleatoare și este bazată pe ideea experimentului aleator.

Selecție aleatoare

Definiție

Spunem că $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o *selecție aleatoare* asupra v.a. X care are densitatea de repartiție $f(x;\theta)$ dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt v.a. independente și identic repartizate ca X.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ se numesc *variabile de selecție*.

- În cazul selecției aleatoare, densitatea de repartiție comună a variabilelor de selecție este

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

- O selecție aleatoare poate fi construită prin repetarea unui experiment aleator de n ori.
- Un *rezultat al selecției aleatoare* se notează prin $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și mulțimea tuturor rezultatelor definesc *spațiul observațiilor* $S \equiv \mathbb{R}^n$.

Model statistic. Statistică

Definiție

Modelul probabilist

$$\{f(x;\theta), \theta \in \Theta)\}$$

împreună cu selecția $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ definesc *modelul statistic*.

Definiție

Statistica este o funcție $t_n : S \to \Theta \subset \mathbb{R}^k$ care nu conține niciun parametru necunoscut.

- Cele mai utilizate statistici sunt momentele de selecție.

Momente de selecție

- *Momentul de selecție de ordinul r*

$$m'_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^r \tag{3}$$

- *Momentul de selecție de ordin 1* – *media de selecție*

$$m'_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{4}$$

- *Momentul centrat de selecție de ordin r*

$$m_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{X}_n)^r. \tag{5}$$

- *Momentul centrat de selecție de ordin 2* – *dispersia de selecție*

$$m_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{X}_n)^2. \tag{6}$$

Convergență în probabilitate

Definiție

Șirul de v.a. $(X_n)_n$ *converge în probabilitate* la v.a. X dacă

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\}\right) = 1. \tag{7}$$

Propoziție

Avem relația

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[n\to\infty]{P} E[X] = \mu$$

Estimator. Estimație

Definiție

Se numește *estimator*, variabila aleatoare

$$t_n(X) : \Omega \to \Theta, \tag{8}$$

unde $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, Ω este spațiul de selecție; $t_n(x), x \in S$, S spațiul observațiilor se numește *estimație*.

Definiție

Un estimator $t_n = t_n(X)$ se numește *consistent* pentru θ dacă

$$\lim_{n\to\infty} P(|t_n - \theta| < \epsilon) = 1 \tag{9}$$

și notăm $t_n \xrightarrow{P} \theta$.

Consistența unui estimator

- Consistența unui estimator reprezintă o proprietate asimptotică a estimatorului.
- Un estimator bun pentru parametrul θ trebuie să aibă o repartiție cu o valoare centrală în vecinătatea lui θ.
- Definiția următoare cere ca estimatorul să aibă o valoare centrală în vecinătatea lui θ nu numai pentru valori mari ale lui n, ci pentru orice n.

Definiție

Estimatorul t_n se numește *nedeplasat* pentru θ dacă

$$E[t_n] = \theta. \tag{10}$$

Numere aleatoare

- Majoritatea metodelor de generare a v.a. se bazează pe generarea unor numere aleatoare uniform distribuite pe intervalul (0,1).
- Datorită calculatorului avem posibilitatea de a genera foarte ușor numere aleatoare uniforme.
- Totuși, trebuie cunoscut faptul că numerele generate de calculator sunt pseudo-aleatoare, deoarece acestea sunt generate cu un algoritm determinist.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (1)

- În Matlab există funcția **rand** pentru generarea variabilelor aleatoare uniforme.
- **rand**(n), unde n este un număr natural, returnează o matrice de dimensiune $n \times n$ având ca elemente numere aleatoare uniform distribuite între 0 și 1.
- **rand**(m, n), unde m, n sunt numere naturale, returnează o matrice de dimensiune $m \times n$ având ca elemente numere aleatoare uniform distribuite între 0 și 1.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (2)

- O secvență de numere aleatoare generată în Matlab depinde de "sămânța" sau starea generatorului. Starea este resetată la valoarea implicită în momentul pornirii Matlab-ului, astfel aceeași secvență de variabile aleatoare este generată la o nouă pornire a Matlab-ului. Acesta poate fi un avantaj în situațiile în care analistul are nevoie să reproducă rezultatele unei simulări pentru a verifica anumite concluzii.
- Folosind sintaxa **rand('state',0)** Matlab-ul resetează generatorul la starea inițială.
- Se folosește sintaxa **rand('state',*j*)** pentru a seta generatorul la starea j.
- Pentru a obține vectorul de stări se apelează $\mathbf{S} = \mathbf{rand('state')}$, S va reprezenta vectorul conținând cele 35 de stări posibile.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (3)

Pentru a genera numere aleatoare uniform ditribuite pe un interval (a,b), și scriem $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, pornind de la un număr generat uniform pe intervalul (0,1) se poate folosi transformarea

$$X = (b - a) \cdot U + a, \tag{11}$$

unde $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$

Generarea numerelor uniforme în Matlab (4)

Exemplu care ilustrează utilizarea funcției **rand**.

% Generam un vector de numere aleatoare pe intervalul (0,1).
x = rand(1,1000);
% Histograma eșantionului generat in x.
[N,X] = hist(x,15);
% x: mulțimea eșantion
% 15 reprezintă numărul de dreptunghiuri ale histogramei
% N: vector conținând numărul de elemente din fiecare dintre dreptunghiuri.
% X: vector conținând centrele dreptunghiurilor
% Folosirea funcției bar pentru reprezentarea grafică a histogramei.
bar(X,N,1,'w')
title('Histograma asociata unei variabile aleatoare uniforme')
xlabel('X')
ylabel('Frecventa absoluta')

Histograma rezultată este prezentată în Figura 1.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (5)

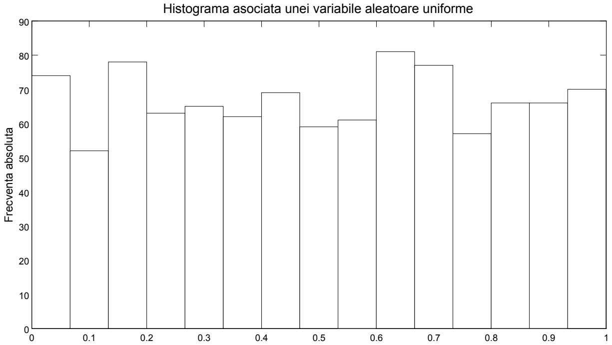


Figura: 1 – Histograma asociată unui eșantion de numere aleatoare uniform distribuite

Funcții de o variabilă aleatoare (1)

- Fie X o v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ care ia valori în $D \subset \mathbb{R}$ și $\phi : D \to \mathbb{R}$, ϕ continuă.
- Atunci v.a. $Y = \phi(X) : \Omega \to \phi(D) \subset \mathbb{R}$ are repartiția dată de

$$P(\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \in A\} = P(\left\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \phi^{-1}(A)\right\})) \quad (12)$$

pentru orice $A \subset \phi(D)$ și $\phi^{-1}(A) = \{z | \phi(z) \in A\}$.

Funcții de o variabilă aleatoare (2): Exemplu 1

Propoziție

Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ atunci $Y = e^X$ are densitatea de repartiție:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}}, y > 0 \tag{13}$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \leq y\}) &= P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = \\ &= F_X(\ln y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\ln y} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt. \end{aligned}$$

Definiție

Variabila aleatoare Y având densitatea de probabilitate (13) se numește lognormală.

Funcții de o variabilă aleatoare (3): Exemplu 2

Propoziție

Dacă $X \sim U(0,1)$ atunci variabila aleatoare

$$Y = \left(-\frac{1}{a}\ln(1-X)\right)^{1/b}$$

cu $a, b > 0$ are densitatea de probabilitate

$$f(y) = aby^{b-1}e^{-ay^b}, \quad 0 < y < \infty.$$

Definiție

O variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate (0.15) se numește Weibull cu parametrii a și b și este notată $W(a, b)$.

Metoda inversă (1): Teorema lui Hincin

Propoziție

Fie X o variabilă aleatoare (v.a.) cu funcția de repartiție inversabilă $F(x)$. Atunci variabila aleatoare $Y = F(X)$ este repartizată uniform pe $[0, 1]$.

Teoremă (Teorema lui Hincin)

Fie $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ și $F(x)$ o funcție de repartiție inversabilă, de tip continuu. Atunci variabila aleatoare

$$X = F^{-1}(U) \tag{14}$$

este o variabilă aleatoare continuă cu funcția de repartiție $F(x)$.

Demonstrație: Funcția de repartiție a v.a. X este

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$$

deoarece F este strict crescătoare.
Cum $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ rezultă $F_U(u) = u$ pentru $u \in (0,1)$. Obținem astfel $P(X \leq x) = F(x)$.

Metoda inversă (2): Descrierea metodei

- este introdusă ca o consecință directă a teoremei lui Hincin
- se aplică în cazul în care funcția de repartiție se poate inversa ușor
- dacă am putea produce valorile de selecție $u_1, u_2, \ldots, u_n$ asupra v.a. $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ și am cunoaște funcția de repartiție F a variabilei X atunci am putea produce valorile de selecție $x_1, x_2, \ldots, x_n$ asupra lui X cu formula $x_i = F^{-1}(u_i), 1 \leq i \leq n$

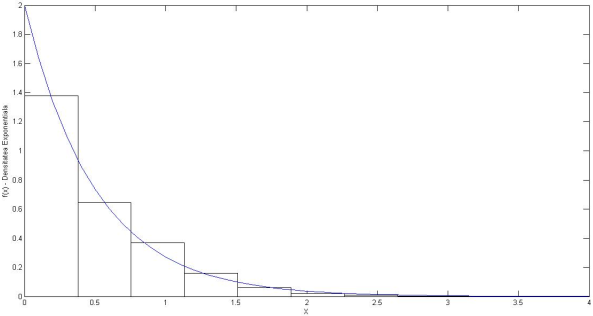
Metoda inversă (3): Algoritm pentru simularea unor variabile aleatoare continue

Intrare	$F(x)$: funcția de repartiție a variabilei X pe care ne propunem să o simulăm
Pas 1	Se generează o valoare de selecție u uniformă pe [0,1]
Pas 2	Se determină expresia inversei funcției de repartiție $F^{-1}(u)$
Pas 3	Se obține valoarea de selecție dorită $x = F^{-1}(u)$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X

Metoda inversă (4): Variabile aleatoare continue care pot fi simulate folosind metoda inversă

Repartiția	**Densitatea** f	**Inversa** F^{-1}
$Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(u)$
$Weib(0, 1, \nu)$, $\nu > 0$	$f(x) = \nu x^{\nu-1} e^{-x^{\nu}}$	$x = (-\ln(u))^{1/\nu}$
Cauchy	$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$	$x = \tan\pi(u - 1/2)$
Arcsin	$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1, 1]$	$x = \sin\pi(u - 1/2)$

Metoda inversă (5): Histograma asociată variabilei aleatoare exponențiale



Metoda inversă (6): Simularea unei variabile aleatoare discrete

- Fie v.a. discretă X definită prin repartiția

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, x_1 < x_2 < \dots < x_m. \tag{15}$$

- Funcția de repartiție a v.a. X este dată de

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} & x < x_1 \\ p_1 & \text{dacă} & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{dacă} & x_2 \le x < x_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & \text{dacă} & x_k \le x < x_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \text{dacă} & x \ge x_m \end{cases} \tag{16}$$

Metoda inversă (7): Algoritm pentru simularea unor variabile aleatoare discrete

- Regula de generare a unei valori de selecție asupra v.a. X:

$$X = x_i \quad \text{dacă } F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i) \text{ și } x_0 < x_1. \tag{17}$$

- Algoritmul pentru simularea v.a. X:

Intrare	Repartiția variabilei X $P(X = x_i) = p_i, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, x_1 < x_2 < \ldots < x_m.$
Pas 1	Se generează o valoare de selecție u uniformă pe [0,1]
Pas 2	Dacă $u \leq p_1$ atunci $x = x_1$ Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2$ atunci $x = x_2$ Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2 + p_3$ atunci $x = x_3$ ... Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2 + \ldots + p_m$ atunci $x = x_m$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X

Metoda inversă (8): Exemplu simularea unei v.a. discrete

- Vrem să generăm o v.a. discretă X cu repartiția

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{18}$$

- Funcția de repartiție este dată de

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} & x < 0 \\ 0.3 & \text{dacă} & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{dacă} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{dacă} & x \geq 2 \end{cases} \tag{19}$$

- Se generează valori de selecție asupra v.a. X conform regulilor

$$X = \begin{cases} 0 & U \leq 0.3 \\ 1 & 0.3 < U \leq 0.5 \\ 2 & 0.5 < U \leq 1 \end{cases} \tag{20}$$

- Dacă v.a. $u = 0.78$ atunci obținem valoarea de selecție $x = 2$.

Bibliografie I

M. Craiu (1998), *Statistică matematică: teorie și probleme*, Editura Matrix Rom, București

W. L. Martinez, A. R. Martinez (2002), *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington, D.C.

I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București