Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 4 – TEHNICI DE SIMULARE

Metoda acceptării – respingerii

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

- Descrierea metodei
- Algoritm general de respingere
- Teorema înfășurătoarei
  - Algoritm pentru simularea unei variabile aleatoare
  - Exemplu: Simularea v.a. normale
- A doua teoremă de respingere
  - Algoritm pentru simularea unei variabile aleatoare
  - Exemplu
- Teorema șirului descendent
  - Algoritm pentru simularea unei variabile aleatoare
  - Exemplu: Simularea v.a. exponențiale

Metoda acceptării – respingerii: Descrierea metodei

Presupunem că se cunosc următoarele elemente:

- Se cunoaște un procedeu de simulare a unei v.a. N care ia valori naturale pozitive
- Se cunosc metode pentru simularea unor v.a. $S_i \in S, i \geq 1$, unde S este o familie de v.a. dată
- Se cunoaște un predicat $\mathcal{P}(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ care se poate calcula $\forall S_i, n$ (acest predicat sau condiție trebuie evaluat(ă) fără calcule de mare complexitate)
- Se cunoaște funcția ψ astfel încât $X = \psi(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, $\mathcal{P}(S_1, S_2, \ldots, S_n) = true$.

Observație: pentru $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate astfel încât

$$\Omega_1 \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{P}(S_1, S_2, \ldots, S_n) = true\} \subseteq \mathcal{B} \tag{1}$$

avem

$$X : \Omega_1 \to \mathbb{R}, X = \psi(S_1, S_2, \ldots, S_n). \tag{2}$$

Algoritm general de respingere

Intrare	V.a. N, v.a. $S_1, S_2, \ldots, S_n \in S$, predicatul $\mathcal{P}(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, funcția $\psi(S_1, S_2, \ldots, S_n)$
	Repetă Pas 1 – Pas 3 până când $\mathcal{P}(S_1, S_2, \ldots, S_n) = true$
Pas 1	Se simulează o valoare n a lui N
Pas 2	Se simulează valorile de selecție $S_1, S_2, \ldots, S_n \in S$
Pas 3	Se verifică dacă $\mathcal{P}(S_1, S_2, \ldots, S_n) = true$
Pas 4	Se consideră $x = \psi(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X

Observații

- Dacă $\mathcal{P}(S_1, S_2, \dots, S_n) = \mathit{false}$ atunci mulțimea de variabile aleatoare $\{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subseteq S$ *se respinge*, de unde provine și numele de *metodă de respingere*.
- Dacă $p_a = P(\mathcal{P}(S_1, S_2, \dots, S_n) = \mathit{true})$, numită *probabilitate de acceptare*, este mare (apropiată de 1) atunci algoritmul este rapid, altfel este lent.

Teorema înfășurătoarei (1)

Teoremă (Teorema înfășurătoarei)

Fie dată o variabilă aleatoare X care are densitatea de repartiție $f(x), x \in \mathbb{R}$ pe care dorim să o simulăm. Fie Y o altă variabilă aleatoare ce știm să o simulăm și a cărei densitate de repartiție este $h(x)$ astfel încât f, h au același suport S (adică iau valori diferite de zero pe aceeași mulțime $S \subseteq \mathbb{R}$). Presupunem că există o constantă $\alpha, 0 < \alpha < \infty$, astfel încât $f(x) \leq \alpha h(x), \forall x \in S$. În aceste condiții, dacă U este o variabilă uniformă pe [0,1] independentă de Y atunci densitatea de repartiție a variabilei Y condiționată de $0 \leq U \leq f(Y)/(\alpha h(Y))$ este f.

Observații (2)

- Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate
- Definim

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega \mid 0 \leq U(\omega) \leq f(Y(\omega))/(\alpha h(Y(\omega)))\} \tag{3}$$

și

$$X : \Omega_1 \to \mathbb{R}, X = Y|\Omega_1 \tag{4}$$

- $f(x) = F'(x), F(x) = P(X \leq x) \stackrel{def}{=} P(Y \leq x|\Omega_1)$
- $(\exists)\epsilon_0$ a.î. $\dfrac{p_A}{p_{\Omega_1}} - \epsilon_0 < \dfrac{k_A}{k_{\Omega_1}} < \dfrac{p_A}{p_{\Omega_1}} + \epsilon_0$, unde
  - $p_A = P(Y \leq x \cap \Omega_1), p_{\Omega_1} = P(\Omega_1)$
  - k_A, k_{Ω_1} reprezintă numărul de apariții ale evenimentelor A, respectiv Ω_1 pentru un număr suficient de mare de repetări ale experimentului aleator.

Demonstrația teoremei înfășurătoarei (3)

- Trebuie demonstrat că

$$P(Y \leq x | 0 \leq U \leq f(Y)/(\alpha h(Y))) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v) dv \tag{5}$$

- Considerăm evenimentele

$$A = \{Y \leq x\} \text{ și } \Omega_1 = \{0 \leq U \leq f(Y)/(\alpha h(Y))\} \tag{6}$$

- Din (5) și (6) rezultă că trebuie să calculăm $P(A|\Omega_1)$ având definiția

$$P(A|\Omega_1) = \frac{P(A \cap \Omega_1)}{P(\Omega_1)} \tag{7}$$

Demonstrația teoremei înfășurătoarei (4)

- Calculăm $P(\Omega_1)$:

$$\begin{aligned} P(\Omega_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{f(v)/(\alpha h(v))} du \right] h(v)dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(v)}{\alpha h(v)} h(v)dv = \frac{1}{\alpha}, \alpha > 1 \end{aligned} \tag{8}$$

- Astfel, $P(A|\Omega_1)$ devine:

$$\begin{aligned} P(A|\Omega_1) &= \alpha \int_{-\infty}^{x} \left[\int_0^{f(v)/(\alpha h(v))} du \right] h(v)dv = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{x} \frac{f(v)}{\alpha h(v)} h(v)dv = \int_{-\infty}^{x} f(v)dv \end{aligned} \tag{9}$$

Algoritm pentru simularea unei v.a. bazat pe teorema înfășurătoarei (5)

Intrare	Știm să generăm v.a. Y având densitatea de repartiție $h(y)$
Pas 1	Se caută o constantă α a. î. $f(x) \leq \alpha h(x), \forall x \in S$
	Repetă Pas 2 – Pas 4 până când $u \leq f(y)/\alpha h(y)$, cu u și y valori de selecție obținute în pașii indicați
Pas 2	Se simulează o valoare de selecție u a v.a. $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
Pas 3	Se simulează o valoare de selecție y a v.a. Y cu dens. $h(y)$
Pas 4	Se verifică dacă $u \leq f(y)/\alpha h(y)$
Pas 5	Se consideră $x = y$.
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X având densitatea de repartiție $f(x)$

Simularea variabilei aleatoare normale (6)

- Spunem că $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ dacă X are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

- Se va prezenta un algoritm de simulare a variabilei aleatoare $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ bazat pe o metodă de compunere - respingere. Se deduce ușor un algoritm de simulare a v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ folosind relația:

  "Dacă $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ atunci $X = \sigma Z + \mu$ este o v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$"

Simularea variabilei aleatoare normale (7)

- Considerăm v.a. X_1 și $X_2 = -X_1$ având densitățile de repartiție

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

și respectiv,

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- Densitatea de repartiție a v.a. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ se poate scrie sub forma

$$f(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x), \tag{13}$$

adică este o compunere discretă a densităților $f_1(x)$ și $f_2(x)$.

Simularea variabilei aleatoare X_1 (8)

Aplicăm teorema înfășurătoarei pentru a genera v.a. X_1 cu densitatea de repartiție $f_1(x)$:

- se consideră ca înfășurătoare densitatea de repartiție $h(x)$ a v.a. $Y \sim Exp(1)$
- raportul $r(x) = \frac{f_1(x)}{h(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}+x}$
- ecuația $r'(x) = 0$ are soluția $x_0 = 1$ care este punct de maxim pentru funcția $r(x)$. Rezultă, de aici,

$$r(x) \leq r(x_0) = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}. \tag{14}$$

- considerăm constanta $\alpha = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$. De asemenea, se observă că densitățile $f_1(x)$ și $h(x)$ au același suport $S = (0, \infty)$.

Algoritmul pentru simularea variabilei aleatoare normale $Z \sim N(0,1)$ (9)

Intrare	Pp. că știm să generăm v.a. $Y \sim Exp(1)$.
	Repetă Pas 1 – Pas 3 până când $u \leq e^{-\frac{y^2}{2}+y-0.5}$, cu u și y valori de selecție generate în pașii indicați.
Pas 1	Se simulează o valoare de selecție u a v.a. $U \sim \mathcal{U}([0,1])$
Pas 2	Se simulează o valoare de selecție y a v.a. $Y \sim Exp(1)$
Pas 3	Se verifică dacă $u \leq e^{-\frac{y^2}{2}+y-0.5}$
Pas 4	Se generează u_1 val. de selecție a v.a. $U_1 \sim \mathcal{U}([0,1])$.
Pas 5	Dacă $u_1 \leq 0.5$ atunci mergi la Pas 6; altfel mergi la Pas 7
Pas 6	Se consideră $z = y$. Mergi la Ieșire.
Pas 7	Se consideră $z = -y$.
Ieșire	Valoarea de selecție, z, a v.a. $Z \sim N(0,1)$

Teorema a doua de respingere (1)

Teoremă

Fie X o v.a. având funcția de repartiție de forma

$$F(x) = c\int_{-\infty}^{x} Q(\phi(y))dR(y) \tag{15}$$

unde $Q(z)$ este funcția de repartiție a unei v.a. $Z, Z \in [0, M]$, $\phi(y)$ este o funcție ce ia valori în intervalul $[0, M]$ (unde M poate lua și valoarea ∞), iar $R(y)$ este funcția de repartiție a unei v.a. $Y, Y \in \mathbb{R}$, iar variabilele Z, Y sunt independente stochastic. Atunci funcția de repartiție a variabilei Y condiționată de $Z \leq \phi(Y)$ este $F(x)$.

Teorema a doua de respingere - observații (2)

- Probabilitatea de acceptare este $p_a = P(Z \leq \phi(Y)) = \frac{1}{c}$, unde c este o constantă de normare cu formula

$$c = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\phi(x)) dR(x) \right]^{-1} \quad (16)$$

- Condiția (15) se poate scrie în termeni de densități de repartiție:

$$f(x) = cQ(\phi(x))r(x), r(x) = R'(x). \quad (17)$$

- O formă duală a teoremei se obține dacă $F(x)$ este de forma

$$F(x) = c \int_{-\infty}^{x} (1 - Q(\phi(y))) dR(y) \quad (18)$$

pentru $c = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - Q(\phi(x))) dR(x) \right]^{-1}$; predicatul devine $\{Z \geq \phi(Y)\}$.

Teorema a doua de respingere - exemplu (3)

- Fie X o v.a. având densitatea de repartiție

$$f(x) = c\mu(1 - e^{-\lambda x})e^{-\mu x}, x \geq 0 \tag{19}$$

- Variabila X se poate simula folosind un algoritm de respingere, pentru

$$\phi(x) = x, Q(z) = 1 - e^{-\lambda z} \text{ și } r(x) = \mu e^{-\mu x} \tag{20}$$

- Se obține $c = \left[\int_0^\infty \mu(1 - e^{-\lambda x})e^{-\mu x} dx\right]^{-1} = \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right]^{-1}$

Teorema șirului descendent (1)

Presupunem date variabilele aleatoare $Z_i, i \geq 1$ cu funcțiile de repartiție $G(x)$ și Z_0 cu funcția de repatiție $G_0(x)$, independente stochastic. Atunci sunt adevărate afirmațiile:

1. Dacă x este fixat și numărul k este fixat atunci

$$P(x \geq Z_1 \geq Z_2 \geq \ldots \geq Z_{k-1} < Z_k) = \frac{[G(x)]^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{[G(x)]^k}{k!}. \tag{21}$$

2. Dacă x este fixat și K este indicele aleator la care se “rupe” subșirul descendent (ca la punctul 1.) atunci

$$P(K = \text{nr. impar}) = e^{-G(x)}. \tag{22}$$

Teorema șirului descendent (2)

3. Dacă subșirul descendent este $Z_0 \geq Z_1 \geq \ldots \geq Z_{K-1} < Z_K$ atunci

$$F(x) = P(Z_0 \leq x | K = \text{nr. impar}) = \frac{1}{p_a} \int_{-\infty}^{x} e^{-G(t)} dG_0(t), \quad (23)$$

unde p_a este constanta de normare dată prin

$$p_a = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G(t)} dG_0(t) \right]^{-1}. \quad (24)$$

Algoritm de simulare a unei v.a. bazat pe teorema șirului descendent (3)

Intrare	Pp. că știm să generăm v.a. $Z_i \hookrightarrow G(x), i \geq 1$ și $Z_0 \hookrightarrow G_0(x)$
	Repetă Pas 1 – Pas 2 până când $K =$ nr. impar
Pas 1	Se generează val. de selecție z_0 a v.a. $Z_0 \hookrightarrow G_0(x)$ și z_1 a v.a. $Z_1 \hookrightarrow G(x)$. Se ia $z* = z_0$, $K = 1$;
Pas 2	Repetă Pas 3 - Pas 4 cât timp $z_0 \geq z_1$
Pas 3	$K = K + 1$; $z_0 = z_1$
Pas 4	Se generează o val. de selecție z_1 a v.a. $Z_1 \hookrightarrow G(x)$
Pas 5	Se consideră $x = z*$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. $X \hookrightarrow F(x)$

Teorema șirului descendent - performanța algoritmului (4)

- Cu cât p_a este mai mare cu atât mai repede va fi acceptată o val. de selecție a v.a. Z_0 (când $K =$ nr. impar)
- Performața algoritmului depinde de numărul de valori Z_i generate pentru a obține un Z_0 acceptat
- Se arată că valoarea medie a numărului de val. de selecție $Z_i, i \geq 1$ necesare până la acceptarea unui Z_0, notat N^* este

$$E[N^*] = \frac{1}{p_a}\left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{G(x)} dG_0(x)\right) \tag{25}$$

Teorema șirului descendent - exemplu (5)

- Considerăm în Teorema șirului descendent, variabilele $Z_i, i \geq 0$ repartizate $\mathcal{U}([0,1])$ și independente stochastic.
- Avem

$$\begin{aligned} & P(Z_0 \leq x | K = \text{nr. impar}) = \frac{1}{p_a} \int_0^x e^{-x} dx; \text{ unde} \\ & p_a = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1} \end{aligned} \tag{26}$$

- Astfel, Z_0 acceptat are funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-1}}, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases} \tag{27}$$

adică repartiția exponențială de parametru 1, trunchiată pe intervalul [0,1].

Bibliografie I

I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București