Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 11 – TEHNICI DE SIMULARE

Modele de simulare

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

1. Generalități privind modelele de așteptare
2. Procese de naștere și deces – modelarea unui sistem de așteptare
3. Evaluarea unor caracteristici ale modelului de așteptare
4. Validarea unui sistem cu o stație
5. Validarea unui sistem cu N stații

1 Generalități privind modelele de așteptare (1)

- *Ipoteze ale modelului de așteptare:*

$$A/S/c : (L_c; d)$$

unde

- A – este o informație despre repartiția de probabilitate a timpului de intersosire, AT
- S – este o informație despre repartiția de probabilitate a duratei serviciului, ST
- c – precizează numărul de stații de serviciu și topologia lor (adică dacă sunt conectate în serie, în paralel sau în rețea)
- L_c – reprezintă lungimea maximă a cozii (un număr $n \in \mathbb{N}$ sau ∞ dacă coada poate avea lungime infinită)
- d – este disciplina de serviciu, care precizează regulile de efectuare a serviciului. Dacă clienții sunt serviți în ordinea sosirii atunci disciplina este FIFO (First In First Out). Pot exista și reguli de tipul LIFO (Last In First Out) sau disciplina de serviciu cu priorități sau modele cu clienți care atunci când așteaptă mai mult de u_0 unități de timp părăsesc sistemul fără să mai beneficieze de serviciu.

1 Generalități privind modelele de așteptare (2)

- *Exemple de modele matematice de așteptare:*
  - Model cu o stație de servire

$$Exp(\lambda)/Exp(\mu)/1 : (\infty, FIFO)$$

  - Model cu N stații paralele presupuse identice (adică au aceeași repartiție pentru timpul de serviciu), coada poate fi infinită, iar disciplina este cea standard (primul venit primul servit)

$$Exp(\lambda)/Exp(\mu)/N(paralele) : (\infty, FIFO)$$

- Modelele matematice ale teoriei cozilor se bazează pe utilizarea unor procese Markov particulare, numite *procese de naștere și deces*.
- *Numărul de clienți* în sistemul de așteptare la un moment dat de timp t este un *proces stochastic de naștere și deces*.

2 Procese de naștere și deces (1)

- *Definiție:* Procesul stochastic discret $N(t)$ cu creșteri independente se numește *proces de naștere și deces* dacă satisface proprietățile:

$$\begin{aligned} &P(N(t+\Delta t) = n+1 \mid N(t) = n) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t) \\ &P(N(t+\Delta t) = n-1 \mid N(t) = n) = \mu_n \Delta t + o(\Delta t) \\ &P(N(t+\Delta t) = n \pm i \mid N(t) = n) = o(\Delta t), i > 1 \end{aligned} \tag{1}$$

unde $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ și $\{\mu_n, n \geq 1\}$ sunt șiruri de numere pozitive date, iar $o(\Delta t)$ este un element al unei clase de funcții ce satisfac condițiile

$$\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t) = 0 \text{ și } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \tag{2}$$

- Procesul este cu creșteri independente în sensul că oricare ar fi $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, variabilele $N(t_2) - N(t_1)$ și $N(t_4) - N(t_3)$ sunt independente stochastic

2 Procese de naștere și deces (2)

- Constantele λ_n se numesc *intensități de natalitate*, iar constantele μ_n se numesc *intensități de mortalitate*.
- Funcțiile $o(\Delta t)$ reprezintă *cantități neglijabile în raport cu* Δt, deci care tind la zero dacă $\Delta t \to 0$, dar mai repede decât acesta; mulțimea lor este inchisă față de operațiile de adunare și înmulțire cu alte funcții sau constante.
- Relațiile (1) indică faptul că *nașterile* și *decesele* evoluează *rar* în timp.
- *Intensitățile de natalitate* și cele *de mortalitate* corespund în cazul sistemelor de așteptare *sosirilor* în sistem, respectiv obținerii serviciilor și *plecărilor* din sistem.

2 Procese de naștere și deces (3)

- Ne dorim ca pornind de la relațiile (1) să determinăm *probabilitățile*

$$P_n(t) = P(N(t) = n) \tag{3}$$

care reprezintă *repartiția procesului de naștere și deces*.

- *Teoremă utilă:* Probabilitățile $P_n(t)$ satisfac ecuațiile diferențiale

$$\begin{aligned} P_0^{'}(t) &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \\ P_n^{'}(t) &= -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t), n > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

2 Procese de naștere și deces (4)

- Dându-se *condiții inițiale* pentru $P_n(t)$ (ca de exemplu, $P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, i > 0$) sistemul (4) are *soluție unică*.
- O *condiție suficientă* ca soluția sistemului (4) să satisfacă condiția

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1, \forall t \tag{5}$$

este

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}} = \infty. \tag{6}$$

2 Procese de naștere și deces (5)

- *Procesul de naștere și deces* este *staționar* dacă repartiția sa nu depinde de timp, adică

$$P_n(t) = p_n = constant, \forall t \tag{7}$$

- *Procesul de naștere și deces* se numește *ergodic* dacă

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = p_n = constant. \tag{8}$$

- În ipoteza din ecuația (7) sau cea din ecuația (8) sistemul (4) devine

$$\begin{aligned} &-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0 \\ &-(\lambda_n + \mu_n)p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = 0, n > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

2 Procese de naștere și deces (6)

- Notăm $Z_k = -\lambda_k p_k + \mu_{k+1} p_{k+1}$
- Ecuațiile sistemului (9) se pot rescrie prin $Z_0 = 0, Z_n = Z_{n-1}$.
- Rezultă $Z_n = 0$ și

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n, n \geq 0 \tag{10}$$

- Prin recurență deducem

$$p_n = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, n \geq 1 \tag{11}$$

- Ținând cont de condiția $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ obținem constanta p_0 dată prin

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)^{-1}. \tag{12}$$

3 Evaluarea unor caracteristici ale modelului de așteptare

- *Studiul unor parametri de ieșire* pentru un sistem de așteptare cu c stații, considerând cunoscute probabilitățile p_n.
  - *Numărul mediu de clienți din sistem*

$$E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \tag{13}$$

  - *Lungimea medie a cozii*

$$E[WL] = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)p_n \tag{14}$$

  - *Timpul mediu de așteptare*

$$E[WT] = E[WL] \cdot E[ST] \tag{15}$$

  - *Numărul mediu de stații care lenevesc*

$$E[NID] = \sum_{n=0}^{c} (c-n)p_n \tag{16}$$

  - *Timpul mediu de lenevire al celor c stații*

$$E[TID] = E[NID] \cdot E[AT]. \tag{17}$$

4 Validarea unui sistem cu o stație (1)

- Considerăm *modelul*

$$Exp(\lambda)/Exp(\mu)/1 : (\infty, FIFO) \tag{18}$$

  în care timpul de intersosire și timpul de servire au repartiții exponențiale.

- *Vrem* să determinăm *repartiția v.a.* $N(t)$ – numărul de clienți din sistem la momentul de simulare t și alte *caracteristici ale sistemului* prezentate în Secțiunea 3

4 Validarea unui sistem cu o stație (2)

- Presupunem că *sistemul* poate fi modelat folosind *procese de naștere și deces* și considerăm următoarele

  IPOTEZE – pentru *intervalul de lungime* Δt considerat astfel încât să aibă loc cel mult o tranziție în acest interval

  - Definim *intensitățile de natalitate* $\lambda_n, n \geq 0$ astfel încât

$$P(0 < AT < \Delta t) = P(N(t+\Delta t) = n+1 \mid N(t) = n) = \\ = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t), \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0 \tag{19}$$

  - Definim *intensitățile de mortalitate* $\mu_n, n \geq 1$ astfel încât

$$P(0 < ST < \Delta t) = P(N(t+\Delta t) = n-1 \mid N(t) = n) = \\ = \mu_n \Delta t + o(\Delta t), \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0 \tag{20}$$

4 Validarea unui sistem cu o stație (3)

- Cum AT este repartizat $Exp(\lambda)$ și folosind descompunerea în serie Taylor a funcției e^{-x} obținem

$$\begin{aligned} P(0 < AT < \Delta t) &= 1 - e^{-\lambda \Delta t} = 1 - 1 + \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{21}$$

- Din (19) și (21) deducem că

$$\lambda_n \Delta t + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \tag{22}$$

- Rezultă din ecuația (22)

$$\lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0. \tag{23}$$

- În mod simular, obținem că

$$\mu_n = \mu, \forall n \geq 1. \tag{24}$$

4 Validarea unui sistem cu o stație (4)

- Din ecuațiile (11) și (12) obținem formulele

$$p_n = \rho^n p_0, \rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ și } p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right]^{-1} = 1 - \rho \qquad (25)$$

- V.a. AT (timpul de intersosire) și ST (durata serviciului) sunt repartizate $Exp(\lambda)$ și respectiv $Exp(\mu)$, deci $E[AT] = 1/\lambda$, $E[ST] = 1/\mu$. Rezultă de aici, că
  - λ – reprezintă *numărul mediu de clienți sosiți* în sistem pe unitatea de timp
  - μ – reprezintă *numărul mediu de clienți serviți* pe unitatea de timp
  - ρ – reprezintă *intensitatea de trafic* a clienților prin sistem
- Pentru a avea sens p_0 trebuie ca $0 < \rho < 1$, deci un sistem de așteptare cu $\lambda > \mu$ nu are sens.

4 Validarea unui sistem cu o stație (5)

- *Validarea modelelor de simulare* se realizează când

$$AWT \approx E[WT] \text{ și } ATID \approx E[TID] \tag{26}$$

  unde

  - AWT – este timpul mediu de așteptare (determinat empiric prin simulare)
  - ATID – este timpul mediu de lenevire (determinat empiric prin simulare)

- Dacă ipoteza de validare este verificată atunci modelul de simulare construit poate fi utilizat și dacă repartițiile v.a. AT și ST sunt oarecare (nu doar exponențiale).

5 Validarea unui sistem cu N stații (1)

- Considerăm *modelul matematic asociat sistemului de așteptare*
$$Exp(\lambda)/Exp(\mu)/N : (\infty, FIFO) \tag{27}$$
adică modelul cu N stații paralele identice, cu timp de intersosire exponențial de parametru λ și cu timpul de servire repartizat exponențial de parametru μ.
- Se obțin *intensitățile de natalitate* $\lambda_n, n \geq 0$ (analog ca în cazul sistemului cu o stație):
$$\lambda_n = \lambda, n \geq 0 \tag{28}$$
- Deoarece intensitatea servirilor pentru fiecare stație este μ și serviciul se realizează în paralel, avem
$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq N-1 \\ N\mu, & n \geq N \end{cases} \tag{29}$$

5 Validarea unui sistem cu N stații (2)

- Notăm $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ și deducem probabilitățile:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, & 1 \le n \le N-1 \\ \dfrac{\rho^n}{N! N^{n-N}} p_0, & N \le n < \infty \end{cases},$$
$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-\rho} \right]^{-1} \tag{30}$$

- *Condițiile de validare* sunt (ca în cazul sistemului cu o stație)

$$|E[WT] - AWT| < \epsilon \text{ și } |E(TID) - ATID| < \epsilon \tag{31}$$

unde ϵ – este eroarea suficient de mică.

Bibliografie I

- I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București
- A. L. Pletea, L. Popa (1999), Teoria probabilităților, Disponibil la: http://math.etti.tuiasi.ro/lpopa/cursTP.pdf, Ultima accesare: ianuarie 2015