Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 12 – TEHNICI DE SIMULARE

Modele de simulare

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

1 Introducere în teoria matematică a stocurilor (1)

- *Stocul* este o *resursă* (de orice fel) având o valoare economică, caracterizată prin *intrări* și *ieșiri*.
- *Stocul* poate fi privit ca fiind o *entitate/resursă* cu mai multe *spații/unități* care pot fi ocupate sau eliberate.
- *Stocul* se poate *măsura*
  - în unități fizice: kilograme, metri, bucăți
  - în unități valorice convenționale: unități monetare
- *Scopul* unui model de stocare este să definească *regulile de încărcare optimă* a stocului astfel încât *costul* (sau *profitul*) legat de aprovizionarea sau întreținerea stocului să fie *minim* (*maxim*).

1 Introducere în teoria matematică a stocurilor (2)

- *Variabilele și parametrii* unui model general de stocare sunt:
  - t – timpul
  - $I(t)$ – nivelul curent al stocului
  - $a(t)$ – rata intrării în stoc la momentul t
  - $b(t)$ – rata ieșirii din stoc la momentul t
  - $r(t)$ – rata cererii (când aceasta nu coincide cu ieșirea de altă natură)
- *Rata cererii*, ca și alte elemente ce caracterizează un stoc, poate fi *aleatoare*.
- De obicei, *intrarea în stoc* se realizează în cantități mari (numite *comenzi*), care se introduc în stoc la intervale de timp numite *cicluri de reaprovizionare*.
- *Costurile* sunt parametri de tipul:
  - h – costul de stocare a unei unități de stoc într-o unitate de timp
  - d – costul lipsei unei unități de stoc într-o unitate de timp
  - s – costul de lansare a unei comenzi

1 Introducere în teoria matematică a stocurilor (3)

- *Obiectivul* modelului de simulare poate fi *optimizarea unui cost* (sau a unui *profit*) determinat în funcție de *rata cererii* și de *costurile h, d, s*.
- Dacă *cererea* este *aleatoare* atunci *funcția obiectiv* reprezintă o *medie* (cost mediu sau beneficiu mediu).
- În general, *scopul modelului de stocare* este de a defini $a(t)$ *optim* pentru $b(t)$ și $r(t)$ date.

1 Introducere în teoria matematică a stocurilor (4)

- *Ipoteze* posibile într-un model de stocare
  - se presupune că stocul nu depășește un nivel maxim S
  - stocul scade în timp cu o rată dată
  - când stocul scade până la un nivel P, numit *nivel de reaprovizionare*, se lansează o *comandă q* care va intra în stoc după *un timp de avans L*
  - comenzile intră în stoc la intervale de timp de lungime T
  - dacă nivelul de reaprovizionare P satisface cererea pe o perioadă de timp de lungime $t^{'}, t^{'} < T$ atunci există o perioadă $t^{''} = T - t^{'}$ când are loc o *lipsă de stoc*.
- *Exemplu de model de stocare:* se dau costurile h, s și/sau d, se dă rata cererii și timpul de avans L și se cer q (nivelul comenzii) și P (nivelul de reaprovizionare) optime.

1 Introducere în teoria matematică a stocurilor (5)

- *Concluzie:* modelele din teoria stocurilor și propun să determine *o politică de reaprovizionare optimă*.
- *Câteva tipuri de modele:*
  - Dacă r, L nu sunt aleatoare atunci modelul se numește *determinist*, iar în cazul în care cel puțin una dintre aceste variabile este aleatoare modelul se numește *stochastic*.
  - Dacă timpul nu intervine în mod explicit în model atunci modelul se numește *static*, altfel modelul se numește *dinamic*.

2 Modelul clasic al lotului economic (1)

- *Ipotezele modelului:*
  - rata cererii r este constantă, cunoscută și cererea este continuă;
  - ciclul de reaprovizionare T este constant și necunoscut;
  - comanda q este constantă, necunoscută; intrările cantităților q în stoc au loc instantaneu la intervale de timp T;
  - timpul de avans L este zero, adică neglijabil, comenzile q intră în stoc imediat după ce se lansează comanda;
  - nivelul de reaprovizionare P este zero;
  - costurile de stocare h și de lansare a comenzii s sunt constante date;
  - nu se admite lipsă de stoc $(d = 0)$

2 Modelul clasic al lotului economic (2)

- Se observă că între necunoscutele q și T are loc relația

$$T = \frac{q}{r} \tag{1}$$

- Costul total de întreținere a stocului pe perioada T este

$$C_T = C_{h,T} + s \tag{2}$$

unde $C_{h,T}$ este costul de stocare și s este costul de lansare a comenzii.

- Avem

$$C_{h,T} = h \int_0^T I(t)dt = \frac{hq}{2}T = \frac{hq^2}{2r} \tag{3}$$

- Vrem să minimizăm costul $C(q)$ pe unitatea de timp, adică

$$C(q) = \frac{C_T}{T} = \frac{hq^2}{2rT} + \frac{s}{T} = \frac{hq}{2} + \frac{sr}{q} = minim \tag{4}$$

2 Modelul clasic al lotului economic (3)

- Impunând condiția de minim lui $C(q)$ obținem politica optimă de reaprovizionare (q_0, T_0) dată de

$$q_0 = \sqrt{\frac{2rs}{h}}, \, T_0 = \frac{q_0}{r} = \sqrt{\frac{2s}{rh}} \tag{5}$$

iar costul optim minim este

$$C_0 = \sqrt{2rsh} \tag{6}$$

3 Modelul clasic al lipsei de stoc (1)

- *Ipotezele modelului:*
  - ipotezele modelului clasic al lotului ecomnomic cu excepția faptului că există lipsă de stoc (adică, $d > 0$, d o constantă dată) și nivelul stocului poate crește până la o valoare S dată.
- Se consideră funcția obiectiv pe care ne propunem să o minimizăm

$$C(S,T) = \frac{1}{T}\left[C_{h,t'} + C_{d,t''} + s\right] \tag{7}$$

unde $C_{h,t'}$ a fost definit în (3), iar $C_{d,t''}$ se definește similar.
- Obținem funcția de minimizare

$$C(S,T) = \frac{1}{T}\left(s + h\frac{S}{2}t^{'} + d\frac{q-S}{2}t^{''}\right), q = rT. \tag{8}$$

- Folosind un raționament similar ca în cazul modelului lotului economic avem relațiile:

$$t^{'} = \frac{S}{r}, t^{''} = T - \frac{S}{r} = \frac{rT - S}{r} \tag{9}$$

3 Modelul clasic al lipsei de stoc (2)

- Deducem formula asociată costului

$$C(S,T) = \frac{s}{T} + \frac{hS^2}{2rT} + \frac{d(rT-S)^2}{2rt} \tag{10}$$

- Perechea (S, T) care minimizează costul $C(S, T)$ verifică condițiile:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = 0, \frac{\partial C}{\partial T} = 0 \tag{11}$$

de unde deducem valorile S_1, T_1 care determină costul minim C_1

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{2s}{rh}}\sqrt{\frac{1}{\rho}}, \rho = \frac{d}{h+d} \\ S_1 &= \sqrt{\frac{2rs}{h}}\sqrt{\rho} \end{aligned} \tag{12}$$

- Se observă că $0 < \frac{d}{h+d} < 1$, ceea ce conduce la

$$C_1 = \sqrt{\rho}C_0 < C_0. \tag{13}$$

Bibliografie I

- I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București
- A. L. Pletea, L. Popa (1999), Teoria probabilităților, Disponibil la: http://math.etti.tuiasi.ro/lpopa/cursTP.pdf, Ultima accesare: ianuarie 2015