Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 6 – TEHNICI DE SIMULARE

Simularea unor variabile aleatoare continue

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

1. Simularea variabilelor aleatoare:
   1.1 Exponențială(λ), $\lambda > 0$
   1.2 Gamma(α, λ, ν), $\alpha, \lambda, \nu \in \mathbb{R}_+$
   1.3 Beta(a, b), $a, b > 0$
2. Repartiții simulate pornind de la v.a. uniforme pe (0,1)
3. Simularea unor variabile aleatoare înrudite cu repartiția normală

1.1 Simularea variabilei aleatoare Exponențiale (λ)

- Densitatea de repartiție a v.a. $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$ este

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

- Dacă $Z \sim Exp(1)$ atunci $X = \dfrac{Z}{\lambda} \sim Exp(\lambda)$
- V.a. $Z \sim Exp(1)$ se poate simula folosind o variantă a *Teoremei șirului descendent*:

  "Se consideră în Teorema șirului descendent $Z_0 = U_0, Z_i = U_i, i \geq 1$, unde $U_0, U_i, i \geq 1$ sunt v.a. uniforme pe [0,1]. Dacă notăm cu N numărul aleator de subșiruri descendente respinse până se acceptă un subșir, atunci $X = N + Z_0 \sim Exp(1)$, unde Z_0 este cel acceptat (din ultimul subșir descendent)."

1.1 Demonstrația teoremei care fundamentează algoritmul de simulare a v.a. Exponențiale (2)

- Pentru $x \in [0, 1]$ avem

$$\begin{aligned} P(Z_0 \leq x \,|\, K = \text{nr. impar}) &= \frac{1}{p_a} \int_0^x e^{-x} dx = \\ &= \frac{1 - e^{-x}}{p_a}, p_a = 1 - e^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

- Cum $p_a = P(K = \text{nr. impar}, Z_0 \in \mathbb{R})$, rezultă că probabilitatea de a respinge un șir descendent de forma $Z_0 \geq Z_1 \geq \ldots \geq Z_{K-1} < Z_K$ este $p_r = 1 - p_a = e^{-1}$.
- Deducem $P(N = n) = e^{-n}(1 - e^{-1})$.

1.1 Demonstrația teoremei care fundamentează algoritmul de simulare a v.a. Exponențiale (3)

- Vrem să arătăm că

$$P(N + Z_0 \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}. \tag{3}$$

- Pentru un $x > 0$ dat, notăm $x = k + z, k = [x], z \in [0, 1)$, și avem

$$\begin{aligned} P(N + Z_0 \leq x) &= P(N + Z_0 \leq k + z) \\ &= P(N < k) + P(N = k, Z_0 \leq z) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (1 - e^{-1}) e^{-j} + (1 - e^{-1}) \frac{e^{-k}}{1 - e^{-1}} \int_0^z e^{-u} du = \\ &= 1 - e^{-k} + e^{-k}(1 - e^{-z}) = 1 - e^{-(k+z)} = 1 - e^{-x}. \end{aligned} \tag{4}$$

1.1 Algoritm de simulare a unei v.a. Exponențiale(1) (4)

Intrare	Pp. că știm să generăm v.a. $Z_i \hookrightarrow G(x), i \geq 1$ și $Z_0 \hookrightarrow G_0(x)$
Pas 1	Se inițializează $N = 0$
Pas 2	Se generează val. de selecție z_0 a v.a. $Z_0 \hookrightarrow G_0(x)$ și z_1 a v.a. $Z_1 \hookrightarrow G(x)$. Se ia $z* = z_0$, $K = 1$;
Pas 3	Repetă Pas 4 - Pas 5 cât timp $z_0 \geq z_1$
Pas 4	$K = K + 1$; $z_0 = z_1$
Pas 5	Se generează o val. de selecție z_1 a v.a. $Z_1 \hookrightarrow G(x)$
Pas 6	Dacă $K =$ nr. par atunci $N = N + 1$ și mergi la Pas 2
Pas 7	Se consideră $x = N + z*$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. $X \sim Exp(1)$

1.2 Simularea variabilei aleatoare $Gamma(\alpha, \lambda, \nu)$ (1)

- Densitatea de repartiție a v.a. $X \sim Gamma(\alpha, \lambda, \nu), \alpha, \lambda, \nu \in \mathbb{R}_+$ este

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq \alpha \\ \dfrac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}(x-\alpha)^{\nu-1}e^{-\lambda(x-\alpha)}, & \text{dacă } x > \alpha \end{cases} \quad (5)$$

unde $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}dx$ și $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

- Dacă $Z \sim Gamma(0, 1, \nu)$ atunci $X = \alpha + \dfrac{Z}{\lambda} \sim Gamma(\alpha, \lambda, \nu)$.
- *Metode de simulare a v.a. $Gamma(0, 1, \nu), 0 < \nu < 1$*
  - o metodă de respingere bazată pe înfășurarea cu densitatea $Weibull(0, 1, \nu)$
  - o metoda de compunere - respingere
- *Metode de simulare a v.a. $Gamma(0, 1, \nu), \nu > 1$*
  - două metode de respingere bazate pe înfășurarea cu densitățile $Exp(\frac{1}{\nu})$ și Cauchy nonstandard trunchiată pe $[0, \infty)$.

1.2 Simularea v.a. $Gamma(0, 1, \nu), 0 < \nu < 1$ folosind o metodă de respingere bazată pe înfășurarea cu densitatea $Weibull(0, 1, \nu)$ (2)

- Densitățile de repartiție ale v.a. $Gamma(0, 1, \nu)$ și $Weibull(0, 1, \nu)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x}, & x > 0 \end{cases}, h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \nu x^{\nu-1} e^{-x^{\nu}}, & x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

- Pentru determinarea constantei α a înfășurătoarei calculăm raportul:

$$r(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{1}{\nu \Gamma(\nu)} e^{-x+x^{\nu}}. \tag{7}$$

- Punctul de maxim al funcției $r(x)$ este $x_0 = \nu^{1/(1-\nu)}$, de unde rezultă

$$\alpha = \frac{e^{\zeta(1-\nu)}}{\Gamma(\nu+1)}, \zeta = \nu^{\frac{\nu}{1-\nu}}. \tag{8}$$

1.2 Simularea v.a. $Gamma(0, 1, \nu), 0 < \nu < 1$ folosind o metodă de compunere – respingere (3)

- Descompunem densitatea de repartiție a v.a. $Gamma(0, 1, \nu), 0 < \nu < 1$ sub forma:

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x), \tag{9}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{p_1}, & x \in (0, 1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{p_2}, & x \in (1, \infty] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \tag{10}$$

$$p_1 = \frac{\Gamma(1; \nu)}{\Gamma(\nu)}, p_2 = 1 - p_1 = \frac{\Gamma(\nu) - \Gamma(1; \nu)}{\Gamma(\nu)} \tag{11}$$

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} dx, \Gamma(1; \nu) = \int_0^1 x^{\nu-1} e^{-x} dx \tag{12}$$

- p_1 și p_2 sunt aleși a.î. $\int_0^1 f_1(x)dx = 1$ și $\int_1^\infty f_2(x)dx = 1$.

1.2 Simularea v.a. $Gamma(0, 1, \nu), 0 < \nu < 1$ folosind o metodă de compunere – respingere (4)

- Definim $X_1 \hookrightarrow f_1(x)$ și $X_2 \hookrightarrow f_2(x)$
- Variabila X_1 se simulează folosind *Teorema șirului descendent* pentru $Z_0 = U_0^{1/\nu}$, $Z_i = U_i, i \geq 1$, cu $\{U_i\}_{i\geq 0}$ v.a. uniforme pe (0,1).
- Variabila X_2 se simulează folosind *forma duală a celei de a doua teoreme de respingere*, scriind $f_2(x)$ de forma

$$f_2(x) = c\,(1 - Q(x))\,r(x), x > 0, \quad c = \frac{1}{e\,(\Gamma(\nu) - \Gamma(1;\nu))}, \tag{13}$$

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ e^{-x+1}, & x > 1 \end{cases}, Q(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1 - x^{\nu-1}, & x > 1 \end{cases}. \tag{14}$$

1.2 Simularea v.a. $Gamma(0,1,\nu), 0<\nu<1$ folosind o metodă de compunere – respingere (5)

- Arătăm că $X_1 = Z_0 \mid K = \text{nr. impar}$, unde $Z_0 = U_0^{1/\nu} \geq Z_1 \geq \ldots \geq Z_{K-1} < Z_K$, $Z_i = U_i, i \geq 1$, $\{U_i\}_{i\geq 0}$ v.a. uniforme pe (0,1), *are densitatea de repartiție $f_1(x)$*.
- Determinăm, mai întâi, $G_0(x)$:

$$G_0(x) = P(U_0^{1/\nu} \leq x) = P(U_0 \leq x^\nu) = x^\nu. \qquad (15)$$

- Funcția de repartiție a v.a. X_1, notată $F_1(x)$ devine

$$F_1(x) = P(Z_0 \leq x \mid K = \text{nr. impar}) = \frac{1}{p_a}\int_0^x e^{-t} dG_0(t) =$$

$$= \frac{1}{p_a}\int_0^x e^{-t}\nu t^{\nu-1}dt, p_a = \int_0^1 e^{-t}\nu t^{\nu-1}dt = \nu\Gamma(1;\nu)$$

- Derivând $F_1(x)$ obținem $F_1'(x) = \dfrac{e^{-x}x^{\nu-1}}{\Gamma(1;\nu)} = f_1(x), x \in (0,1]$.

1.2 Simularea v.a. *Gamma*$(0, 1, \nu), 0 < \nu < 1$ folosind o metodă de compunere – respingere (6)

- Variabila $X_2 = Y \mid \{Z \geq Y\}$ *are densitatea de repartiție* $f_2(x)$. Rezultă din Teorema a doua de respingere și relația

$$f_2(x) = c(1 - Q(x))r(x), x > 0. \tag{16}$$

- Definim $Y = Y_1 + 1, Y_1 \sim Exp(1)$, atunci $Y \hookrightarrow r(x)$. Într-adevăr,

$$P(Y \leq x) = P(Y_1 + 1 \leq x) = P(Y_1 \leq x - 1) = r(x). \tag{17}$$

deoarece $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.

- Definim $Z = \left(\frac{1}{1-U}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}, U \sim \mathcal{U}(0,1)$, atunci $Z \hookrightarrow Q(x)$. Într-adevăr,

$$P(Z \leq x) = P(\left(\frac{1}{1-U}\right)^{\frac{1}{1-\nu}} \leq x) = P(U \leq 1 - x^{\nu-1}) = Q(x). \tag{18}$$

1.2 Simularea v.a. $Gamma(0, 1, \nu), \nu > 1$ folosind o metodă de respingere bazată pe înfășurarea cu densitatea $Exp(\frac{1}{\nu})$ (7)

- Fie $X \hookrightarrow f(x) \hookrightarrow Gamma(0, 1, \nu)$ și $Y \hookrightarrow h(x) \hookrightarrow Exp(\frac{1}{\nu})$
- Se calculează raportul

$$r(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\nu x^{\nu-1} e^{-x}}{\Gamma(\nu) e^{-\frac{x}{\nu}}}, \nu > 1 \tag{19}$$

- Punctul de maxim al funcției $r(x)$ este $x_0 = \nu$, de unde se obține

$$\alpha = r(\nu) = \frac{\nu^{\nu} e^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}. \tag{20}$$

1.2 Simularea v.a. *Gamma*$(0, 1, \nu), \nu > 1$ folosind o metodă de respingere bazată pe înfășurarea cu o densitate *Cauchy* nonstandard trunchiată pe $[0, \infty)$ (8)

- Densitatea Cauchy nonstandard trunchiată pe $[0, \infty)$:

$$h(x) = \frac{k}{1 + \frac{(x-(\nu-1))^2}{c}}, x > 0, k = \left[\frac{\pi}{2} + arctg\left(-\frac{\nu - 1}{\sqrt{2\nu - 1}}\right)\right]^{-1} \tag{21}$$

- Dacă înfășurăm densitatea $f(x) \hookrightarrow$ *Gamma*$(0, 1, \nu)$ cu densitatea $h(x)$ atunci pentru $c \geq 2\nu - 1$avem

$$r(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \leq \alpha = \frac{1}{k\Gamma(\nu)}(\nu - 1)^{\nu-1}e^{-(\nu-1)}. \tag{22}$$

- Pentru generarea unei v.a. $Y \hookrightarrow h(x)$ se definește

$$Y = Z \mid Z > 0, \text{ unde } Z = \nu - 1 + \sqrt{2\nu - 1}tg[\pi(U - 0.5)]. \tag{23}$$

1.3 Simularea variabilei aleatoare Beta (1)

- Densitatea de repartiție a v.a. $Beta(a, b), a, b > 0$ este

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 0, \text{ altfel} \end{cases} \quad (24)$$

unde

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \quad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (25)$$

- Metodele de simulare a v.a. $Beta(a, b)$ sunt bazate pe următoarele propoziții.

1.3 Simularea variabilei aleatoare Beta (2)

- Dacă $X_1 \sim Gamma(0,1,a)$, $X_2 \sim Gamma(0,1,b)$, X_1 și X_2 independente atunci variabila
$$X = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \tag{26}$$
este o variabilă $Beta(a,b)$.
- Dacă $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ și $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ independente și dacă $V = U_1^{\frac{1}{a}}$, $T = U_2^{\frac{1}{b}}$ atunci repartiția variabilei $X = \frac{V}{V+T}$ condiționată de $V + T < 1$ este $Beta(a,b)$.
- Dacă $0 < a < 1$, $b > 1$ și $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ independente și considerăm $V = U_1^{\frac{1}{a}}$, $T = U_2^{\frac{1}{b-1}}$, atunci repartiția variabilei V condiționată de $V + T < 1$ este $Beta(a,b)$.

2 Repartiții simulate pornind de la v.a. uniforme pe (0,1)

Repartiția	Densitatea de repartiție	Variabila simulată
Normală	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ x \in \mathbb{R}$	$X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$
Modul	$f(x) = \begin{cases} 1 - \lvert x \rvert, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$	$X = U_1 - U_2$
Maximului	$f(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$	$X = max_{i=\overline{1,n}} \{U_i\}$
Minimului	$f(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$	$X = min_{i=\overline{1,n}} \{U_i\}$
Erlang(k)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)}, & x \geq 0, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$	$X = -ln \left\{ \prod_{i=1}^{k} U_i \right\}$

3 Simularea unor variabile aleatoare înrudite cu repartiția normală: Repartiția χ^2 (1)

- Dacă $Z_i, 1 \leq i \leq f$ sunt variabile normale N(0,1) independente atunci
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{f} Z_i^2 \tag{27}$$
se numește variabilă *hi pătrat centrată cu f grade de libertate*, notată χ_f^2.
- Dacă $Z_i \sim N(m_i, 1)$ atunci variabila χ^2 se numește *variabilă hi pătrat necentrată cu f grade de libertate și cu parametrul de excentricitate δ*, notată $\chi^2_{f,\delta}$, unde $\delta^2 = \sum_{i=1}^{f} m_i^2$.
- Variabila χ_f^2 centrată este o variabilă de tip $Gamma(0, \frac{1}{2}, \frac{f}{2})$.
- Formula (27) permite simularea directă, pornind de la definiție, a variabilelor χ_f^2 și $\chi^2_{f,\delta}$.

3 Simularea unor variabile aleatoare înrudite cu repartiția normală: Repartiția t a lui Student (2)

- Dacă $Z \sim N(0,1)$ este independentă de variabila hi pătrat χ^2_f atunci variabila

$$t_f = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_f}{f}}} \tag{28}$$

  se numește *variabila t a lui Student cu f grade de libertate*.

- Dacă în (28) se introduce $\chi^2_{f,\delta}$ atunci se obține variabila notată $t_{f,\delta}$ care se numește *variabila t Student necentrată cu f grade de libertate și parametrul de excentricitate δ*.

- Variabilele t Student se simulează cu formula (28).

3 Simularea unor variabile aleatoare înrudite cu repartiția normală: Repartiția F a lui Snedecor (3)

- Dacă variabilele $\chi^2_{f_1}, \chi^2_{f_2}$ sunt independente atunci variabila

$$F_{f_1,f_2} = \frac{f_2\chi^2_{f_1}}{f_1\chi^2_{f_2}} \tag{29}$$

se numește *variabila F a lui Snedecor centrată cu f_1, f_2 grade de libertate*.

- Dacă în (29) se folosește câte una dintre $\chi^2_{f_1,\delta_1}, \chi^2_{f_2,\delta_2}$ sau ambele atunci se obțin *variabilele F Snedecor simplu necentrate $F_{f_1,f_2,\delta_1,0}, F_{f_1,f_2,0,\delta_2}$ cu parametrii corespunzători de excentricitate*, sau *variabila F Snedecor dublu necentrată $F_{f_1,f_2,\delta_1,\delta_2}$*.

- Variabilele F Snedecor se simulează cu formula (29).

Bibliografie I

I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București