Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 3 – TEHNICI DE SIMULARE

Metoda amestecării – compunerii

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

Metoda amestecării – compunerii

- Definiții: amestecare discretă și amestecare continuă
- Descrierea metodei
- Algoritm general de amestecare – compunere
- Fundamentarea matematică a metodei
- Exemple: Simularea v.a. Laplace si Lomax

Metoda compunerii (1): Definiții amestecare discretă și amestecare continuă

- Spunem că funcția de repartiție $F(x)$ este o *amestecare (compunere sau mixtură) discretă* a mulțimii de funcții de repartiție $\{F_j(x)\}_{1\leq j\leq m}$ cu repartiția discretă J dacă

$$F(x)=\sum_{j=1}^{m} p_j F_j(x) \text{ și } J:\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1 \quad (1)$$

- Spunem că funcția de repartiție $F(x)$ este o *amestecare continuă* a familiei de funcții de repartiție $\{G(x,Y)\}_{Y\in\mathbb{R}}$, cu funcția de repartiție continuă $H(y)$ a lui Y dacă este de forma

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}} G(x,y)dH(y). \quad (2)$$

Metoda compunerii (2): Descrierea metodei

- Fie X o v.a. cu funcția de repartiție $F(x)$ definită în (1) și $X_j, 1 \leq j \leq m$ v.a. având funcțiile de repartiție $F_j(x)$. Atunci

$$X = X_j \text{ cu probabilitatea } p_j \quad (3)$$

- Fie X o v.a. cu funcția de repartiție $F(x)$ definită în (2) și $Z_Y, Y \in \mathbb{R}$ v.a. având funcțiile de repartiție $G(x, Y)$, unde Y are funcția de repartiție $H(y)$. Atunci

$$X = Z_y \text{ unde } y \text{ este generat cu funcția de repartiție } h(y) \quad (4)$$

- În definiția amestecării se pot considera în loc de funcții de repartiție, densități de repartiție și formulele devin

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i f_i(x), \text{ respectiv } f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y)h(y)dy \quad (5)$$

Metoda compunerii (3): Algoritm pentru simularea unei variabile aleatoare bazat pe noțiunea de amestecare discretă

Intrare	Se cunosc algoritmi pentru simularea v.a. X_j având funcțiile de repartiție $F_j(x)$ Repartiția v.a. discrete J: $P(J=j)=p_j, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$
Pas 1	Se generează un indice j având repartiția J
Pas 2	Se generează x_j cu funcția de repartiție $F_j(x)$
Pas 3	Se definește $x = x_j$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X având funcția de repartiție $F(x)$

Metoda compunerii (4): Algoritm pentru simularea unei variabile aleatoare bazat pe noțiunea de amestecare continuă

Intrare	Se cunosc algoritmi pentru simularea v.a Z_Y având funcțiile de repartiție în familia $\{G(x, Y)\}_{Y \in \mathbb{R}}$ Se cunoaște un algoritm pentru simularea v.a. Y cu funcția de repartiție $H(y)$
Pas 1	Se generează y cu funcția de repartiție $H(y)$
Pas 2	Se generează z_y cu funcția de repartiție $G(x, y)$
Pas 3	Se definește $x = z_y$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X având funcția de repartiție $F(x)$

Metoda compunerii (5): Exemplu amestecare discretă

- Fie X variabila având repartiția Laplace a cărei densitate de repartiție este

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \tag{6}$$

- Observăm că

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x), p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

unde

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{dacă } x \leq 0 \\ 0 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Metoda compunerii (6): Algoritmul pentru simularea v.a. X având repartiția Laplace

Intrare	V.a. $X_1 \sim Exp(\lambda)$ cu densitatea de repartiție $f_1(x)$ și V.a. $X_2 = -X_1$ cu densitatea de repartiție $f_2(x)$
Pas 1	Se generează val. de selecție u a v.a. $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
Pas 2	Dacă $u \leq 0.5$ atunci mergi la Pas 3; altfel mergi la Pas 4
Pas 3	s $=$ 1; mergi la Pas 5
Pas 4	s $=$ -1
Pas 5	Se generează val. de selecție x_1 a v.a. $X_1 \sim Exp(\lambda)$
Pas 6	Se definește $x = sx_1$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X.

Metoda compunerii (7): Exemplu amestecare continuă

- Fie variabila $X, X > 0$, durata de funcționare a unui aparat, repartizată Exponențial($\eta\lambda$), unde
  - λ este un parametru determinat de producător, iar
  - η este un parametru aleator care indică influența mediului în care este studiat aparatul.
- Repartiția de probabilitate a lui η este de tip *Gamma*$(0, b, a)$:

$$h(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{b^a}{\Gamma(a)} \eta^{a-1} e^{-b\eta}, & \text{altfel} \end{cases} \tag{7}$$

- Densitatea de repartiție a lui X, pentru $x \geq 0$ va fi de forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \eta\lambda e^{-\lambda\eta x} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \eta^{a-1} e^{-b\eta} d\eta = \\ &= \frac{a\theta}{(\theta x + 1)^{a+1}}, \text{ unde } \theta = \frac{\lambda}{b} \end{aligned} \tag{8}$$

- Repartiția având densitatea (8) se numește *repartiție Lomax*.

Bibliografie I

- M. Craiu (1998), *Statistică matematică: teorie și probleme*, Editura Matrix Rom, București
- W. L. Martinez, A. R. Martinez (2002), *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington, D.C.
- I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București