Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 10 – TEHNICI DE SIMULARE

Modele de simulare

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

1.1 Generalități privind procesele stochastice (1)

- *Definiție:* Fie $(E, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate. Se numește *proces stochastic* o familie de variabile aleatoare
$$\{X_t : E \to \mathbb{R}\}_{t \in T \subseteq \mathbb{R}}$$
depinzând de parametrul real t (considerat adesea timpul).
- *Observații:*
  - Dacă T este o mulțime discretă $(T = \{0, 1, 2, \ldots\})$ atunci procesul se numește *lanț*.
  - Dacă $T = I \subseteq \mathbb{R}$, I un interval atunci procesul este cu *timp continuu*.
- *Notație:* fie S mulțimea tuturor valorilor pe care le pot lua v.a. X_t. Elementele mulțimii S se numesc *stări*.
- *Definiție:* Mulțimea $\{(t, X_t), t \in T\}$ se numește *traiectorie a procesului stochastic*.

1.1 Generalități privind procesele stochastice (2)

- *Procesul stochastic este cunoscut* dacă pentru $\forall n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ este cunoscută funcția de repartiție:

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n). \tag{1}$$

- *Definiție:* Procesul stochastic $\{X_t\}_{t \in T \subseteq \mathbb{R}}$ se numește *staționar tare* dacă $\forall n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ avem

$$F_{t_1+h,t_2+h,\ldots,t_n+h}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

- *Definiție:* Procesul stochastic $\{X_t\}_{t \in T \subseteq \mathbb{R}}$ se numește *staționar slab* dacă admite momente de ordinul doi, adică există și sunt finite

$$\begin{aligned} m_t &= E[X_t], \sigma_{st} = cov[X_s, X_t], s < t \text{ și} \\ m_t &= m = constant \text{ și } \sigma_{st} = \sigma(t - s). \end{aligned} \tag{3}$$

1.1 Generalități privind procesele stochastice (3)

- *Simularea proceselor stochastice* înseamnă producerea de puncte ale unei traiectorii finite
- *Simularea unui proces stochastic* constă în:
    - generarea unei valori X_0 a procesului presupusă a se afla pe o traiectorie a sa la momentul $t = 0$;
    - simularea unei valori X_1 aflată pe aceeși traiectorie la momentul $t = 1$ (care poate depinde de variabila X_0);
    - simularea unei valori X_2 aflată pe aceeși traiectorie la momentul $t = 2$ (care poate depinde de variabilele X_0 și X_1), etc.
- *Problema simulării unui proces stochastic* este mult mai complicată decât a variabilelor aleatoare, deoarece v.a. X_t generate la momentul de timp t pot să nu fie independente pentru diverse valori ale lui t.

1.2 Lanțuri și procese Markov (1)

- *Definiție:* Procesul $\{X_t\}_{t \in T \subseteq \mathbb{R}}$ discret este un *proces Markov* dacă pentru orice $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ satisface proprietatea:

$$P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = x_1) = \\ = P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \tag{4}$$

  adică procesul *nu are memorie*.

- *Definiție:* Probabilitățile

$$P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \tag{5}$$

  se numesc *probabilități de tranziție sau probabilități de trecere*.

- Dacă $T = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ și $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ atunci procesul Markov este un *lanț cu un număr finit de stări*.

1.2 Lanțuri și procese Markov (2)

- *Ipoteză:* Presupunem cunoscute probabilitățile inițiale:

$$p_i = P(X_t = i), \forall i \in S \tag{6}$$

- *Proprietate:* Dacă $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un lanț Markov are loc următoarea relație:

$$P(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = p_{i_0} \prod_{t=1}^{n} P(X_t = i_t \mid X_{t-1} = i_{t-1}) \tag{7}$$

- *Notație:*

$$p_{t;i_{t-1}i_t} = P(X_t = i_t \mid X_{t-1} = i_{t-1}) \tag{8}$$

- *Definiție:* Un lanț Markov se numește *omogen* dacă $p_{t;i_{t-1}i_t}$ nu depinde de t și notăm $p_{t;i_{t-1}i_t} = p_{i_{t-1}i_t}$. Altfel, se numește lanț *neomogen*.

1.2 Lanțuri și procese Markov (3)

- Pentru un lanț Markov omogen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ considerăm matricea $P = (p_{ij})_{i,j}$, unde

$$p_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i), \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{9}$$

numită *matrice de trecere*.

- Matricea de trecere P a unui lanț Markov omogen satisface relațiile:

$$p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in S \text{ și } \sum_{j\in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S \tag{10}$$

- Fiind dat un lanț Markov omogen, *vrem să determinăm probabilitățile*

$$P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) \tag{11}$$

numite *probabilități de trecere în n pași*.

1.2 Lanțuri și procese Markov (4)

- Definim recursiv *șirul $p_{ij}^{(n)}$* prin

$$\begin{cases} p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \\ p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{12}$$

- *Proprietate:* Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem relația

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i), m \in \mathbb{N} \tag{13}$$

- Dacă într-un lanț Markov omogen se cunosc *probabilitățile inițiale* și *probabilitățile de tranziție* atunci probabilitatea ca la momentul $n \in \mathbb{N}$ sistemul să se afle în starea $i, i \in S$, pe care o notăm $p_i(n) = P(X_n = i)$ este

$$p_i(n) = \sum_{j\in S} p_j(n-1)p_{ji}. \tag{14}$$

1.3 Exemplu: modelarea unui sistem de așteptare folosind lanțuri Markov (1)

- *Ipoteze ale modelului:*
  - Sistemul conține o stație de servire care poate servi clienții la momentele $0, 1, 2, \ldots$
  - Definim v.a. X_n – numărul de clienți care sosesc în intervalul $(n, n+1)$. Presupunem că v.a. X_n sunt i.i.d.:

$$X_n : \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k=0}^{\infty}, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \tag{15}$$

  - Se consideră că există un loc de așteptare pentru cel mult m clienți (inclusiv clientul care este servit); clienții care găsesc m clienți în sistem pleacă fără a fi serviți.
  - Fie Y_n – numărul de clienți din sistem la momentul n (incluzând și clientul care este servit)
- Rezultă că $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un lanț Markov cu stările $0, 1, 2, \ldots, m$, deoarece Y_{n+1} depinde doar de Y_n, iar Y_{n+1} și X_n sunt independente.

1.3 Exemplu: modelarea unui sistem de așteptare folosind lanțuri Markov (2)

- *O formulă recursivă pentru lanțul Y_n*

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n - 1 + X_n, \text{ dacă } 1 \leq Y_n \leq m, 0 \leq X_n \leq m + 1 - Y_n \\ X_n, \text{ dacă } Y_n = 0, 0 \leq X_n \leq m - 1 \\ m, \text{în rest} \end{cases} .$$

- Notăm cu $\overline{p_m} = p_m + p_{m-1} + \ldots p_0$. *Probabilitățile de tranziție* pot fi calculate cu formulele:

$$p_{0j} = P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = 0) =$$
$$= \begin{cases} P(X_n = j) = p_j \text{ dacă } 0 \leq j \leq m - 1 \\ P(X_n \geq m) = 1 - \overline{p_m} \text{ dacă } j = m \end{cases}$$

$$p_{ij} = P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) =$$
$$= \begin{cases} P(X_n = j + 1 - i) = p_{j-i+1} \text{ dacă } i - 1 \leq j \leq m - 1 \\ P(X_n \geq m + 1 - i) = 1 - \overline{p_{m+1-i}} \text{ dacă } j = m \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Bibliografie I

- I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București
- A. L. Pletea, L. Popa (1999), Teoria probabilităților, Disponibil la: http://math.etti.tuiasi.ro/lpopa/cursTP.pdf, Ultima accesare: ianuarie 2015