

Tema 1

la disciplina *Bazele electrotehnicii*

Călin Jugănar, 314CA

Universitatea POLITEHNICA din București

Facultatea de Automatică și Calculatoare

calin_vlad.juganaru@stud.acs.upb.ro

April 14, 2018

Cuprins

1	Generarea circuitului	3
2	Metoda ecuațiilor lui Kirchhoff	6
3	Simulatorul SPICE	8
4	Dioda Zener	10

Circuite electrice de curent continuu

1 Generarea circuitului

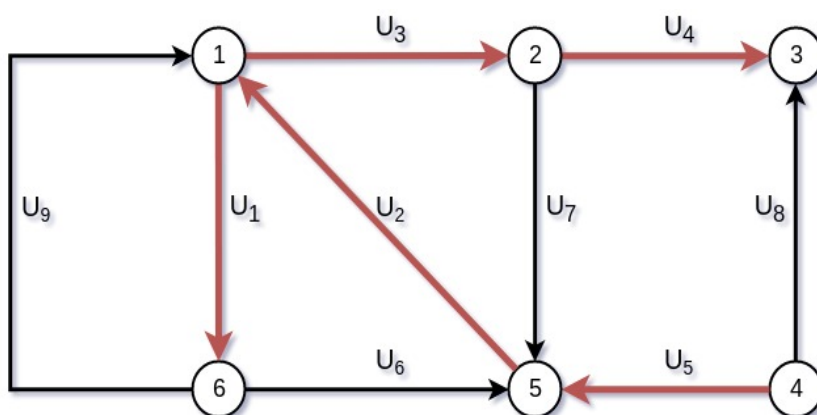
Prima cerință din enunțul temei este generarea unui circuit electric liniar, rezistiv, alcătuit din rezistoare, surse independente de tensiune și surse independente de curent, având cel puțin o sursă ideală de tensiune și una de curent.

Rezolvare

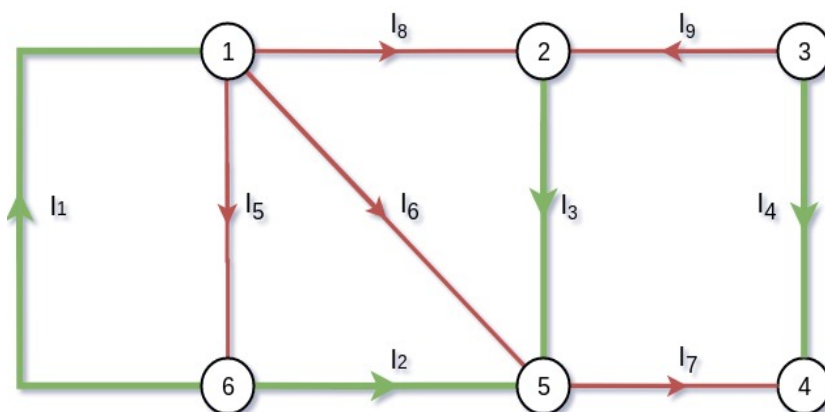
- a) Începem prin alegerea unei perechi de grafuri orientate (G_I, G_U) , corespunzătoare grafului de curenți, respectiv de tensiuni ale aceluiași circuit electric. Cerința temei impune alegerea unei topologii a grafului astfel încât acesta să aibă cel puțin cinci noduri și trei ochiuri. Astfel, am ales un graf alcătuit din șase noduri, nouă laturi și patru ochiuri. Deci

$$(N, L, B) = (6, 9, 4)$$

În continuare, alegând un arbore de acoperire din acest graf, putem calcula cu ușurință curenții și tensiunile, fixând arbitrar tensiunile din arbore și curenții din coarbore cu valori întregi. Astfel, toate valorile alese și rezultate vor fi întregi.

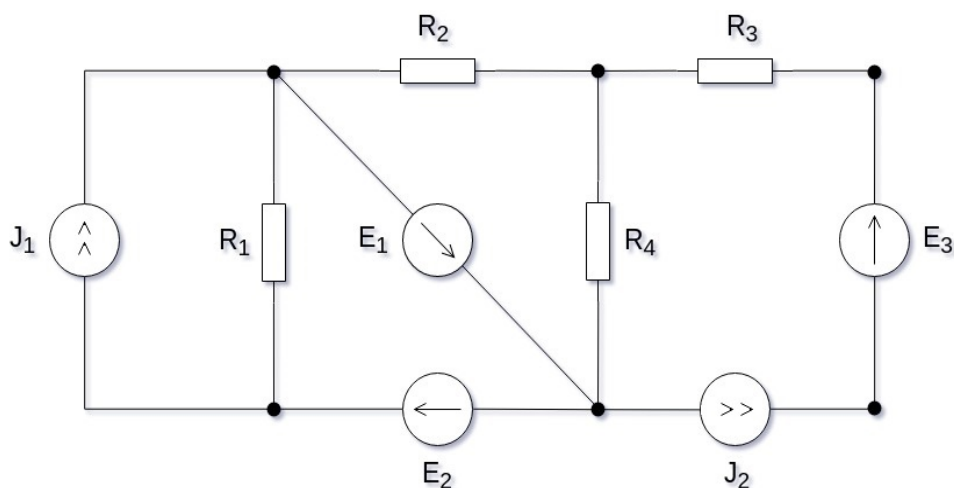


Graful de tensiuni, având arborele evidențiat cu roșu

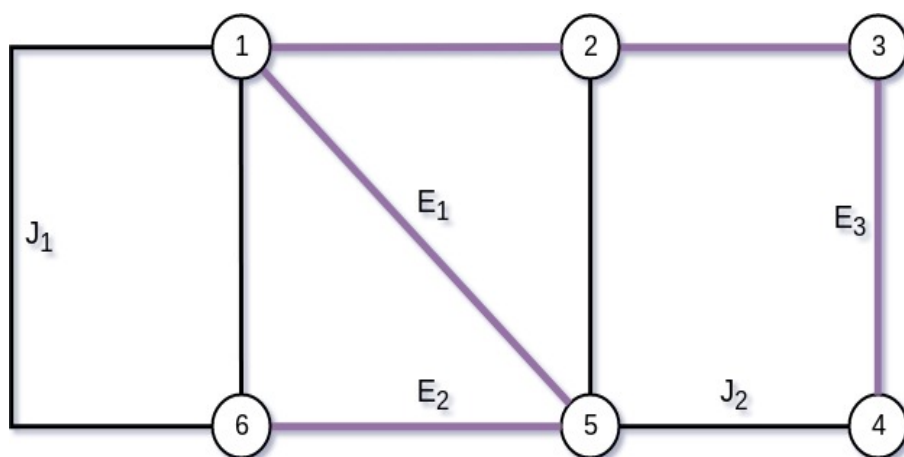


Graful de curenți, având coarborele evidențiat cu verde

- b) Punând rezistoare, surse ideale de tensiune și surse ideale de curent pe laturile grafului, am obținut următorul circuit electric:



Astfel, circuitul creat este bine formulat, deoarece sursele ideale de tensiune nu formează bucle, iar cele de curent nu formează secțiuni. Un exemplu de arbore normal pentru graful acestui circuit este:



- c) Am ales sensurile curenților și tensiunilor pe grafuri astfel încât să existe laturi orientate atât după regula de la receptoare, cât și după regula de la generatoare, mai exact, cinci, respectiv patru.

Tensiunile alese inițial pe ramurile arborelui și intensitățile alese pe coardele coarborelui sunt:

- $U_1 = 2 \text{ V}$
- $U_2 = 5 \text{ V}$
- $U_3 = 3 \text{ V}$
- $U_4 = 2 \text{ V}$
- $U_5 = 1 \text{ V}$
- $I_1 = 6 \text{ A}$
- $I_2 = 4 \text{ A}$
- $I_3 = 3 \text{ A}$
- $I_4 = -2 \text{ A}$

De aici, putem aplica foarte simplu teoremele I și II ale lui Kirchhoff pentru aflarea celorlalte tensiuni și intensități. Astfel,

- [1] : $U_9 = -U_1$
- [2] : $U_6 = -U_1 - U_2$
- [3] : $U_7 = -U_2 - U_3$
- [4] : $U_8 = U_4 + U_5 - U_7$
- (2) : $I_8 = I_3 - I_9$
- (3) : $I_9 = -I_4$
- (4) : $I_7 = -I_4$
- (5) : $I_6 = I_7 - I_2 - I_3$

unde (n) este nodul, iar $[b]$ este bucla pe care au fost aplicate teoremele lui Kirchhoff.

Din aceste relații rezultă valorile:

- $U_6 = -7 \text{ V}$
- $U_7 = -8 \text{ V}$
- $U_8 = 11 \text{ V}$
- $U_9 = -2 \text{ V}$
- $I_6 = -5 \text{ A}$
- $I_7 = 2 \text{ A}$
- $I_8 = 1 \text{ A}$
- $I_9 = 2 \text{ A}$

Putem observa că unele dintre aceste valori, alese inițial sau calculate mai sus, reprezintă tensiunile sau curenții electromotori debitați de sursele ideale din circuit, mai exact:

- $E_1 = U_2 = -5 \text{ V}$
- $E_2 = U_6 = -7 \text{ V}$
- $E_3 = -U_8 = -11 \text{ V}$
- $J_1 = I_1 = 6 \text{ A}$
- $J_2 = I_7 = 2 \text{ A}$

Calculând sumele puterilor pe receptoare și pe generatoare separat, obținem:

$$\sum_R^P = U_1 \cdot I_5 + U_3 \cdot I_8 + U_6 \cdot I_2 + U_7 \cdot I_3 + U_9 \cdot I_1$$

$$\sum_G^P = U_2 \cdot I_6 + U_4 \cdot I_9 + U_5 \cdot I_7 + U_8 \cdot I_4$$

Rezultă:

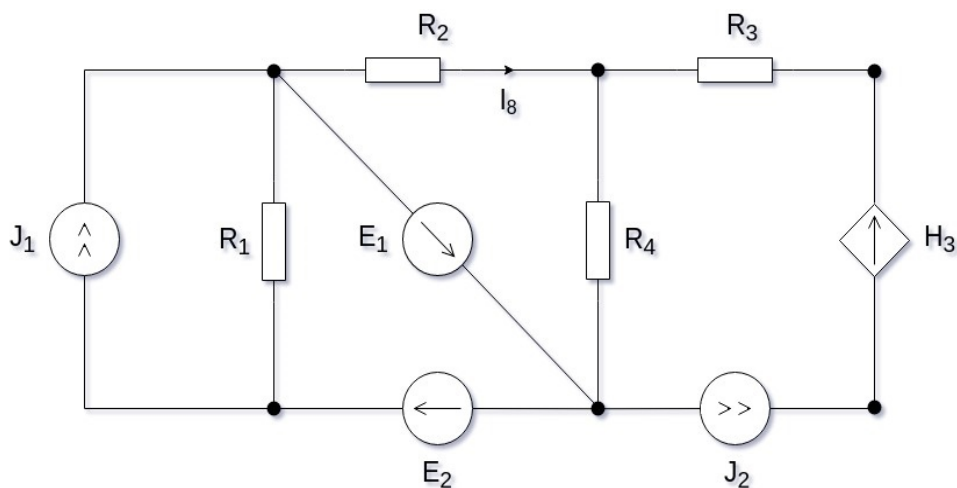
$$\sum_R^P = 20 + 3 - 28 - 24 - 12 = -41 \text{ W}$$

$$\sum_G^P = -25 + 4 + 2 - 22 = -41 \text{ W}$$

Deci bilanțul puterilor și teorema lui Tellegen sunt satisfăcute, ceea ce demonstrează că valorile tensiunilor și curenților din circuit au fost calculate corect.

- d) Dacă înlocuim sursa ideală de tensiune E_3 cu o sursă de tensiune comandată în curent (H_3), și alegem curentul I_8 , aceasta va debita o tensiune $U = \rho \cdot I_8$, unde $\rho = \frac{E_3}{I_8} = -11$.

Deoarece am ales tensiunea U_8 în același sens cu tensiunea debitată de sursa E_3 , și, întâi am calculat tensiunea din fir, apoi pe cea de la borne, sursa are o tensiune electromotoare negativă. Enunțul temei cere ca, înlocuind sursa ideală cu o sursă comandată, soluția problemei să nu se modifice, deci vom pune noua sursă orientată la fel ca cea anterioară, rezultă că ρ , și, implicit, tensiunea electromotoare a sursei comandată în curent vor fi negative pentru un curent I_8 pozitiv, și invers.



Circuitul, cu sursa de tensiune H_3 comandată de curentul I_8

2 Metoda ecuațiilor lui Kirchhoff

- a) În cazul în care cunoaștem valorile tensiunilor electromotoare, ale curenților electromotori și ale rezistențelor, putem afla valorile tuturor tensiunilor și curenților din circuit. Tensiunile și intensitățile, printre care și cele electromotoare, au fost calculate mai sus, dar valorile rezistențelor reies din acestea:

- $R_1 = \frac{U_1}{I_5} = \frac{1}{5} \Omega$
- $R_2 = \frac{U_3}{I_8} = 3 \Omega$
- $R_3 = \frac{U_4}{I_9} = 1 \Omega$
- $R_4 = \frac{U_7}{I_3} = -\frac{8}{3} \Omega$

Acum, există mai multe metode prin care putem afla relațiile dintre necunoscute și rezolva sistemul de ecuații pentru a afla valorile curenților și tensiunilor din circuit, ca de exemplu, metoda ecuațiilor lui Kirchhoff:

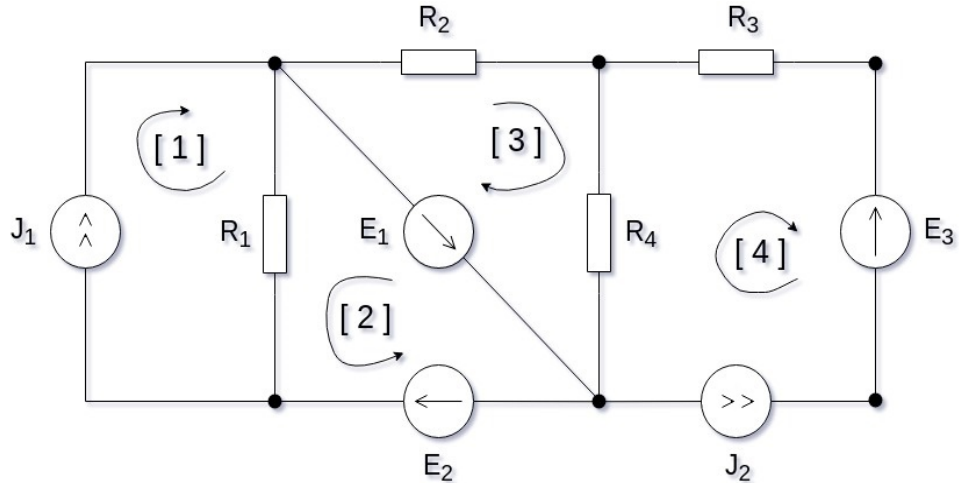
- Aplicăm teorema I a lui Kirchhoff pentru $N - 1$ noduri:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : I_1 = I_5 + I_6 + I_8 \\ (2) : I_8 + I_9 = I_3 \\ (3) : I_4 + I_9 = 0 \\ (4) : I_4 + I_7 = 0 \\ (5) : I_2 + I_3 + I_6 = I_7 \end{array} \right.$$

Înlocuind cu valorile cunoscute și trecând necunoscutele în membrul drept, obținem sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_4 + I_9 = 0 \\ I_3 - I_8 - I_9 = 0 \\ I_2 + I_3 + I_6 = J_2 \\ I_5 + I_6 + I_8 = J_1 \\ I_4 = -J_2 \end{array} \right.$$

- Aplicăm teorema a II-a a lui Kirchhoff pe B bucle:



$$\begin{cases} [1]: U_1 + U_9 = 0 \\ [2]: U_1 + U_6 + U_2 = 0 \\ [3]: U_2 + U_3 + U_7 = 0 \\ [4]: U_4 + U_5 - U_7 - U_8 = 0 \end{cases}$$

Procedăm la fel ca mai sus și ne rezultă sistemul:

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_5 + U_9 = 0 \\ R_1 \cdot I_5 = -E_1 - E_2 \\ R_2 \cdot I_8 + R_4 \cdot I_3 = -E_1 \\ R_3 \cdot I_9 + U_5 - R_4 \cdot I_3 = E_3 \end{cases}$$

Reunind cele două sisteme obținem un sistem de 9 ecuații liniare cu 9 necunoscute, deci matricea coeficienților \mathbf{A} va fi de 9×9 , iar \mathbf{b} , un vector coloană, reprezentând coloana termenilor liberi, va avea 9 elemente. Astfel, putem scrie sistemul de ecuații liniare sub forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, unde \mathbf{x} este vectorul soluție ($[I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_8, I_9, U_5, U_9]$), apoi să-l rezolvăm cu ajutorul unui utilitar precum GNU Octave [1].

```
>> A = [0 0 0 1 1 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 -1 -1 0 0; 0 0 1 0 0 0 1 0 0; 0 0 1 0 0 0 0 0 0; 1 1 0
0 1 0 0 0 0; 0 0 0 1/5 0 0 0 0 1; 0 0 0 1/5 0 0 0 0 0; 0 -8/3 0 0 0 3 0 0 0; 0 8/3 0 0 0 0
-1 1 0]
A =
```

```
0.00000 0.00000 0.00000 1.00000 1.00000 1.00000 0.00000 0.00000 0.00000
0.00000 1.00000 0.00000 0.00000 0.00000 -1.00000 -1.00000 0.00000 0.00000
0.00000 0.00000 1.00000 0.00000 0.00000 0.00000 1.00000 0.00000 0.00000
0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1.00000 1.00000 0.00000 0.00000 1.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
0.00000 0.00000 0.00000 0.20000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 1.00000
0.00000 0.00000 0.00000 0.20000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
0.00000 -2.66667 0.00000 0.00000 0.00000 3.00000 0.00000 0.00000 0.00000
0.00000 2.66667 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 -1.00000 1.00000 0.00000
```

```
>> b = [6 0 0 -2 2 0 2 -5 11]'
```

```
b =
```

```
6
0
0
-2
2
0
2
-5
11
```

Cea mai simplă, dar, totodată, ineficientă metodă de rezolvare a sistemului este să înmulțim ecuația matriceală în partea stângă cu \mathbf{A}^{-1} , rezultând soluția $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

```
>> x = inv(A)*b;
>> x'
ans =

    4    3   -2   10   -5    1    2    5   -2
```

- b) Dacă înlocuim sursa ideală de tensiune cu sursa comandată, tensiunea electromotoare nu va mai fi o constantă, ci o funcție care depinde de intensitatea aleasă, adică $U = \rho \cdot I_8$. Astfel, va trebui înlocuit E_3 din ultima ecuație cu $\rho \cdot I_8$, și, cum ρ este -11 , coeficientul lui I_8 din ultima ecuație va fi -11 , iar termenul liber devine 0. Dacă totul a fost calculat corect, ar trebui ca noul sistem să aibă aceeași soluție ca primul.

```
>> A = [0 0 0 1 1 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 -1 -1 0 0; 0 0 1 0 0 0 1 0 0; 0 0 1 0 0 0 0 0 0; 1 1 0 0 1 0 0 0 0;
0 0 0 1/5 0 0 0 0 1; 0 0 0 1/5 0 0 0 0 0; 0 -8/3 0 0 0 3 0 0 0; 0 8/3 0 0 0 -11 -1 1 0]
A =

    0.00000    0.00000    0.00000    1.00000    1.00000    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000   -1.00000   -1.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000    1.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    1.00000    1.00000    0.00000    0.00000    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000    0.00000    0.20000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    1.00000
    0.00000    0.00000    0.00000    0.20000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000   -2.66667    0.00000    0.00000    0.00000    3.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    2.66667    0.00000    0.00000    0.00000   -11.00000   -1.00000    1.00000    0.00000

>> b = [6 0 0 -2 2 0 2 -5 0]'; b'
ans =

    6    0    0   -2    2    0    2   -5    0

>> x = inv(A)*b; x'
ans =

    4    3   -2   10   -5    1    2    5   -2
```

3 Simulatorul SPICE

În programul SPICE este necesară existența unei borne 0, care, implicit va avea potențialul $V(0) = 0$. Cum nodurile grafului (bornele circuitului) au fost numerotate mai sus de la 1 la 6, în netlist-ul din SPICE nodul 1 va fi 0, toate celelalte rămânând la fel.

Pentru a înlocui sursa ideală cu sursa comandată în SPICE, este necesară și introducerea unui fir ideal între rezistența R_3 și nodul 2, reprezentat printr-o sursă ideală de tensiune cu tensiunea electromotoare 0. Aici am introdus un nou nod, nodul 1, între nodurile 0 și 2, și sursa pe latura 1 – 2.

Simulând circuitul în SPICE, observăm că obținem valorile corecte ale curenților și tensiunilor, doar unele având semnul inversat, ceea ce nu este o problemă, înseamnă doar că sensul a fost inversat. Pentru rezistența cu valoare reală R_4 am folosit cea mai bună aproximare pe care o acceptă programul SPICE, iar valorile calculate sunt numere întregi exacte.

SIT

```
R1 0 6 0.2
R2 0 2 3
R3 3 2 -1
R4 2 5 -2.666666667
```

```
V1 5 0 5
V2 6 5 -7
V3 3 4 -11
```

```
I1 6 0 6
I2 5 4 2
```

```
.op
```

* SIT		
--- Operating Point ---		
V(6):	-2	voltage
V(2):	-3	voltage
V(3):	-5	voltage
V(5):	5	voltage
V(4):	6	voltage
I(I2):	2	device_current
I(I1):	6	device_current
I(R4):	3	device_current
I(R3):	2	device_current
I(R2):	1	device_current
I(R1):	10	device_current
I(V3):	-2	device_current
I(V2):	4	device_current
I(V1):	5	device_current

SUCI

```
R1 0 6 0.2
R2 0 1 3
R3 3 2 -1
R4 2 5 -2.666666667
```

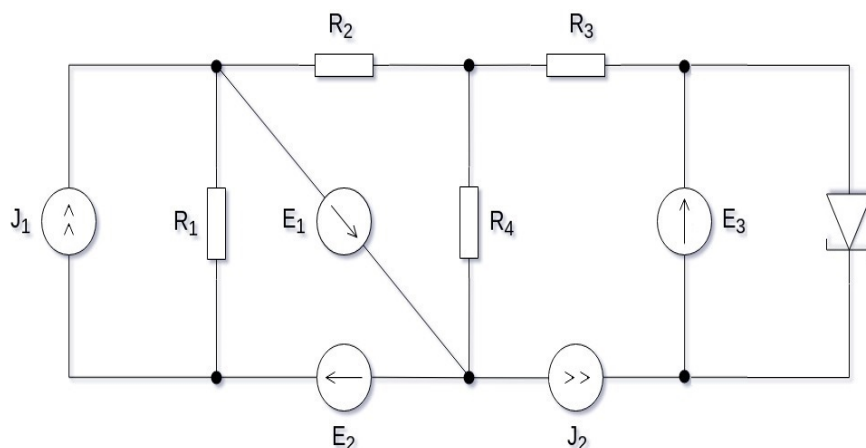
```
V0 1 2 0
V1 5 0 5
V2 6 5 -7
H3 3 4 V0 -11
```

```
I1 6 0 6
I2 5 4 2
```

```
.op
```

* SUCI		
--- Operating Point ---		
V(6):	-2	voltage
V(1):	-3	voltage
V(3):	-5	voltage
V(2):	-3	voltage
V(5):	5	voltage
V(4):	6	voltage
I(H3):	-2	device_current
I(I2):	2	device_current
I(I1):	6	device_current
I(R4):	3	device_current
I(R3):	2	device_current
I(R2):	1	device_current
I(R1):	10	device_current
I(V2):	4	device_current
I(V1):	5	device_current
I(V0):	1	device_current

4 Dioda Zener

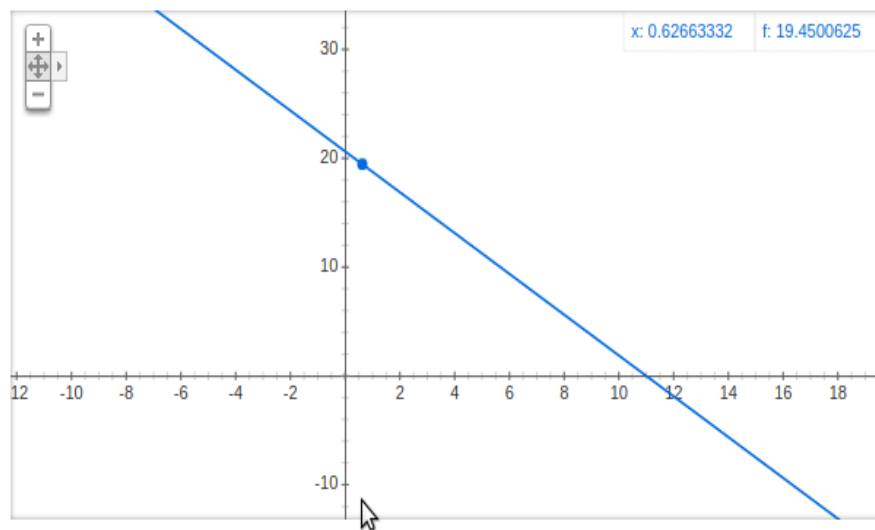


Conectând o diodă de tip Zener în paralel cu nodurile 3 și 4, prin aceasta va trece un curent cu tensiunea U_8 , generatorul echivalent de tensiune pentru diodă fiind E_3 . Rezistența echivalentă reiese din pasivizarea circuitului, laturile pe care se aflau surse ideale de curent dispărând, iar laturile cu surse de tensiune devin fire ideale. Astfel, prin firele 1 – 5 și 2 – 3 nu va mai trece curent, deci rezistența echivalentă a circuitului este:

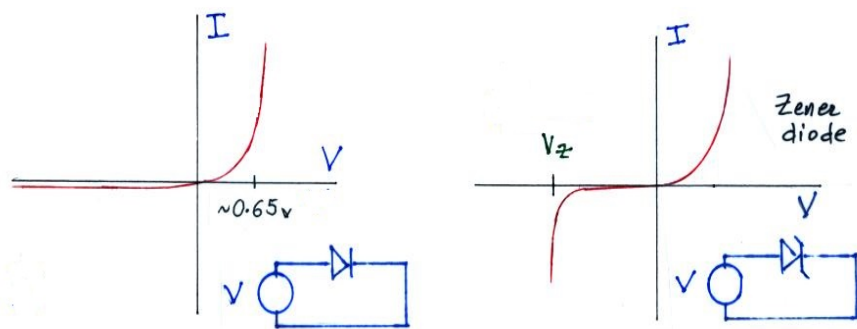
$$R_e = R_1 + R_2 + R_4 = \frac{8}{15}$$

Având aceste două valori, putem reprezenta graficul intensității în funcție de tensiune, $I = \frac{U_e - U}{R_e}$, care este dreapta de sarcină.[4]

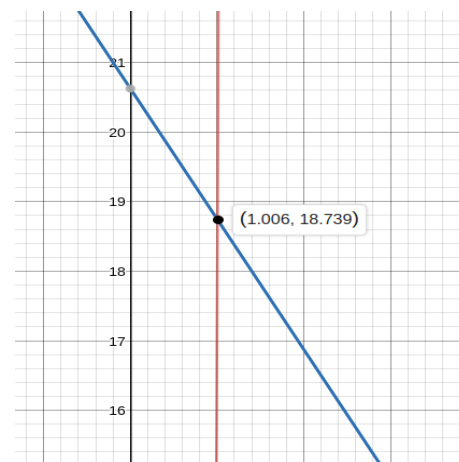
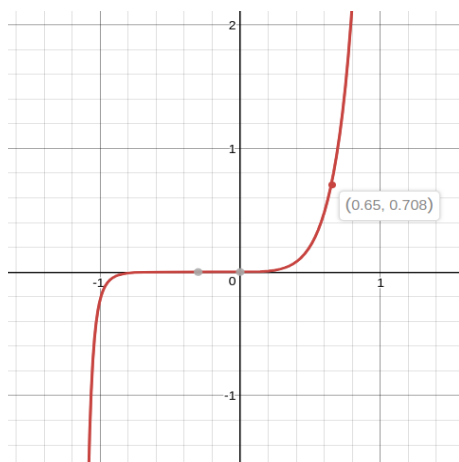
Graficul pentru $(11-x)*15/8$



Dioda Zener are două tensiuni standardizate, pentru frontul crescător, respectiv pentru frontul descrescător, cea mai comună valoare pentru prima fiind între 0.6 și 0.7 volți.[2]



Graficul acestei diode este, la bază, o exponențială, pe care o putem aproxima, de exemplu, prin funcția $(x + 0.3)^7 \cdot e^{x^8}$, apoi să o intersectăm cu dreapta de sarcină obținută anterior și aflăm punctul static de funcționare al diodei.[3]



Bibliografie

- [1] <https://www.gnu.org/software/octave/>
- [2] www.atmo.arizona.edu/students/courselinks/spring15/atmo589/lecture_notes/apr01_2015.html
- [3] <https://www.desmos.com/calculator>
- [4] [https://www.google.ro/search?q=f\(x\)+%3D+\(11+-+x\)+*+15+%2F+8](https://www.google.ro/search?q=f(x)+%3D+(11+-+x)+*+15+%2F+8)