Tema 2

la disciplina *Bazele electrotehnicii*

Călin Jugănaru, 314CA

Universitatea POLITEHNICA din Bucureşti

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

calin_vlad.juganaru@stud.acs.upb.ro

May 28, 2018

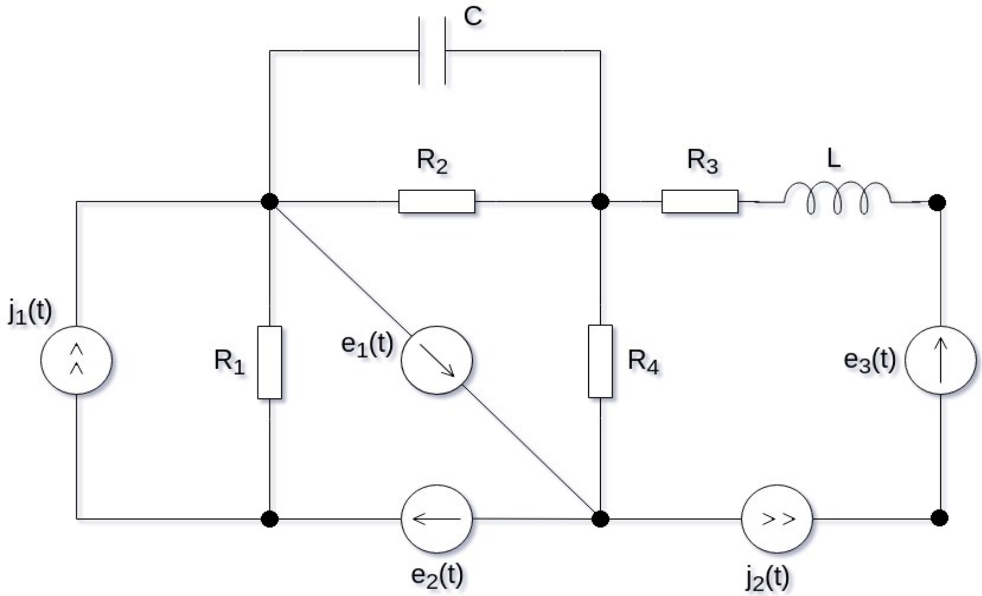
Cuprins

Circuite electrice de curent alternativ şi tranzitoriu

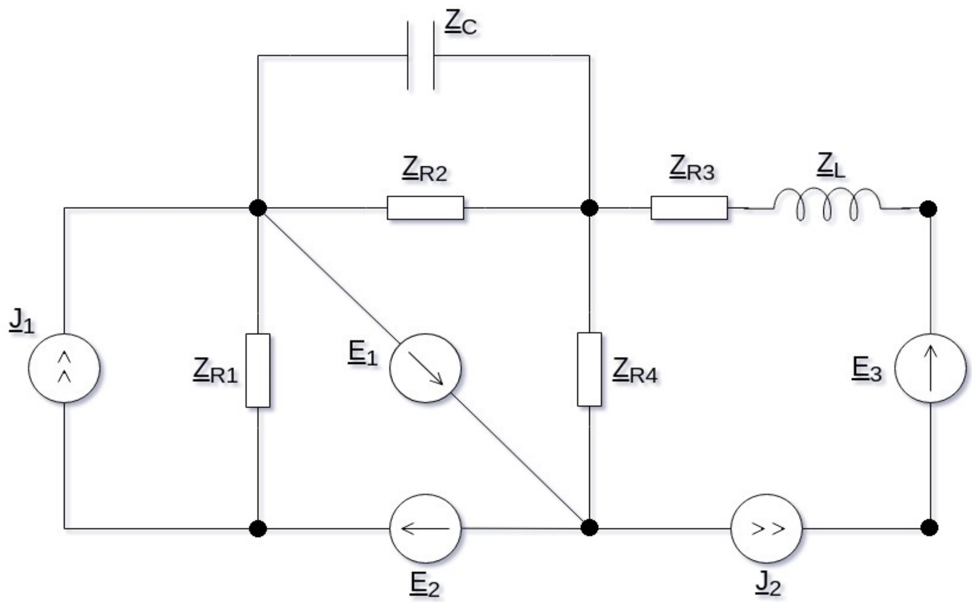
1 Rezolvarea circuitelor de curent alternativ

1.1 Trecerea din real în complex

În cadrul circuitului generat pentru prima temă am adăugat bobina L, în serie cu rezistorul R_3, şi condensatorul C, în paralel cu rezistorul R_2. Pentru următorul pas vom înlocui toate sursele independente de curent şi tensiune cu surse sinusoidale, apoi vom trece toate mărimile din real în complex:



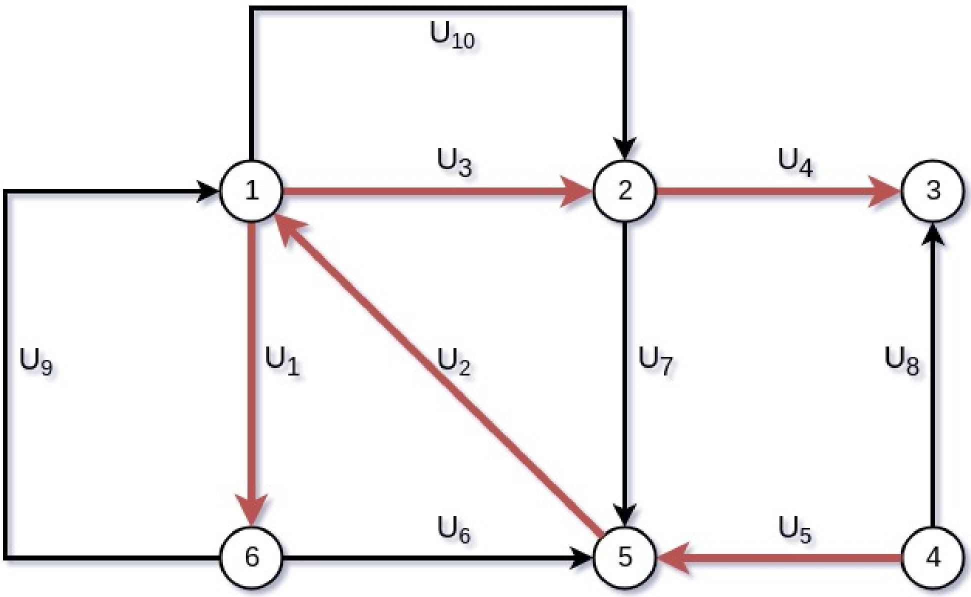
Noul circuit, cu surse sinusoidale



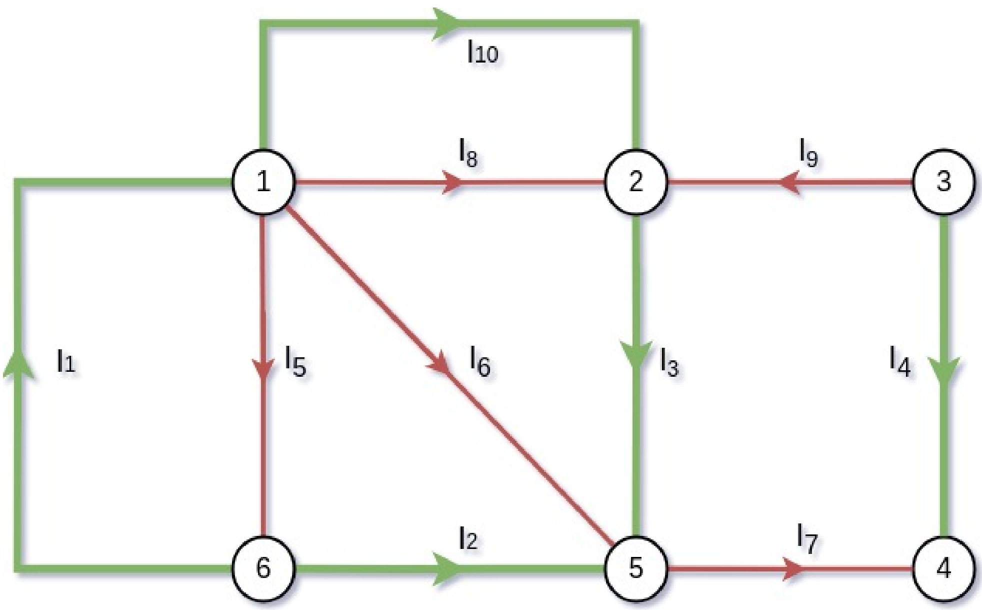
Reprezentarea în complex a circuitului

După adăugarea noilor elemente de circuit, perechea de grafuri orientate (G_I, G_U), corespunzătoare grafului de curenţi, respectiv de tensiuni ale circuitului electric ales trebuie modificate prin adăugarea unei noi laturi, aceea pe care se află condensatorul, şi, implicit, a unui nou curent şi a unei noi tensiuni corespunzătoare acelei laturi (acestea vor fi I_{10}, respectiv U_{10}). De asemenea, prin adăugarea unei noi laturi pe graf, numărul total de laturi şi bucle va creşte cu 1. Deci

$$(N, L, B) = (6, 10, 5).$$



Graful de tensiuni, având arborele evidenţiat cu roşu



Graful de curenţi, având coarborele evidenţiat cu verde

Procedând ca la prima temă, pentru a afla valorile tuturor mărimilor elementelor de circuit, tensiunilor şi curenţilor de pe laturi, putem folosi metoda arborelui: alegem un arbore maximal de acoperire pe graf, apoi fixăm tensiunile de pe ramurile arborelui şi curenţii de pe coardele coarborelui. Dacă aceste valori alese iniţial sunt numere întregi, aplicând teoremele I şi II ale lui Kirchhoff, toate celelalte valori vor fi, de asemenea, întregi.

Astfel, tensiunile alese iniţial pe ramurile arborelui şi intensităţile alese pe coardele coarborelui sunt:

- $U_1 = 2$ V
- $U_2 = 5$ V
- $U_3 = 3$ V
- $U_4 = 2$ V
- $U_5 = 1$ V

- $I_1 = 6$ A
- $I_2 = 4$ A
- $I_3 = 3$ A
- $I_4 = -2$ A
- $I_{10} = 1$ A

De aici, putem aplica foarte simplu teoremele I şi II ale lui Kirchhoff pentru aflarea tuturor celorlalte tensiuni şi intensităţi. Astfel,

- $[1] : U_9 = -U_1$
- $[2] : U_6 = -U_1 - U_2$
- $[3] : U_7 = -U_2 - U_3$
- $[4] : U_8 = U_4 + U_5 - U_7$
- $[5] : U_{10} = U_3$

- $(2) : I_8 = I_3 - I_9$
- $(3) : I_9 = -I_4$
- $(4) : I_7 = -I_4$
- $(5) : I_6 = I_7 - I_2 - I_3$

unde (n) este nodul, iar $[b]$ este bucla pe care au fost aplicate teoremele lui Kirchhoff.

Din aceste relaţii rezultă valorile:

- $U_6 = -7$ V
- $U_7 = -8$ V
- $U_8 = 11$ V
- $U_9 = -2$ V
- $U_{10} = 3$ V

- $I_6 = -5$ A
- $I_7 = 2$ A
- $I_8 = 1$ A
- $I_9 = 2$ A

Putem observa că unele dintre aceste valori, alese iniţial sau calculate mai sus, reprezintă tensiunile sau curenţii electromotori debitaţi de sursele ideale din circuit, mai exact:

- $E_1 = U_2 = -5$ V
- $E_2 = U_6 = -7$ V
- $E_3 = -U_8 = -11$ V

- $J_1 = I_1 = 6$ A
- $J_2 = I_7 = 2$ A

Tot din aceste valori de tensiuni şi intensităţi calculate, putem deduce şi rezistenţele de pe laturi:

- $R_1 = \frac{U_1}{I_5} = \frac{1}{5}\ \Omega$
- $R_2 = \frac{U_3}{I_8} = 3\ \Omega$

- $R_3 = \frac{U_4}{I_9} = 1\ \Omega$
- $R_4 = \frac{U_7}{I_3} = -\frac{8}{3}\ \Omega$

Cum $R_2 = 3\ \Omega$ şi $R_3 = 1\ \Omega$, rezultă că $L = \frac{100}{\pi}\ mH$, iar $C = \frac{300}{\pi}\ \mu F$. În continuare, vom folosi valorile rezistenţelor calculate, ale bobinei şi condensatorului adăugate ulterior, precum şi expresiile sinusoidale ale surselor pentru a calcula toate tensiunile şi intensităţile.

Considerând tesiunile şi curenţii electromotori de mai sus ca valori efective şi alegând diferite valori pentru fazele iniţiale, obţinem funcţiile sinusoidale:

- $e_1(t) = E_1\sqrt{2}\sin(\omega t)$
- $e_2(t) = E_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$
- $e_3(t) = E_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$
- $j_1(t) = J_1\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$
- $j_2(t) = J_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

Cum frecvenţa f este impusă din enunţ (50 Hz), iar pulsaţia este $2\pi f$, rezultă că $\omega = 100\pi$. Înlocuind pulsaţia şi valorile efective în relaţiile de mai sus, obţinem sistemul:

- $e_1(t) = -5\sqrt{2}\sin(100\pi t)$
- $e_2(t) = -7\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})$
- $e_3(t) = -11\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$
- $j_1(t) = 6\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})$
- $j_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$

Folosind formulele

$$\begin{cases} x(t) = X\sqrt{2} \cdot sin(\omega t + \phi) \\ \underline{X} = Xe^{j\phi} = Xcos(\phi) + jXsin(\phi) \end{cases}$$

şi înlocuind în relaţiile de mai sus pentru valorile noastre, obţinem:

- $\underline{E_1} = -5cos(0) - 5j \cdot sin(0)$
- $\underline{E_2} = -7cos(-\frac{\pi}{2}) - 7j \cdot sin(-\frac{\pi}{2})$
- $\underline{E_3} = -11cos(\frac{\pi}{2}) - 11j \cdot sin(\frac{\pi}{2})$
- $\underline{J_1} = 6cos(-\frac{\pi}{4}) + 6j \cdot sin(-\frac{\pi}{4})$
- $\underline{J_2} = 2cos(\frac{\pi}{4}) + 2j \cdot sin(\frac{\pi}{4})$

În final, înlocuind şi cu valorile sinusurilor şi cosinusurilor, rezultă valorile complexe:

- $\underline{E_1} = -5$
- $\underline{E_2} = 7j$
- $\underline{E_3} = -11j$
- $\underline{J_1} = 3\sqrt{2} - 3j\sqrt{2}$
- $\underline{J_2} = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$

Rezistenţele trecute în complex îşi păstrează valoarea, schimbându-se doar notaţia şi denumirea (din rezistenţa R în impedanţa complexă $\underline{Z}$). Pentru bobină şi condensator, valorile impedanţelor complexe vor fi:

$$\begin{cases} \underline{Z}_L = j\omega L = \frac{100j \cdot 100\pi}{\pi} = 10^4 j \\ \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j\pi}{300 \cdot 100\pi} = -\frac{10^{-4}}{3} j \end{cases}$$

1.2 Rezolvarea sistemului de ecuaţii

Pentru a afla relaţiile dintre necunoscute şi rezolva sistemul de ecuaţii, rezultând valorile tuturor curenţilor şi tensiunilor din circuit, putem aplica metoda ecuaţiilor lui Kirchhoff. În plus faţă de prima temă, la sistemul de ecuaţii voim adăuga încă un curent şi o tensiune, corespunzătoare noii laturi:

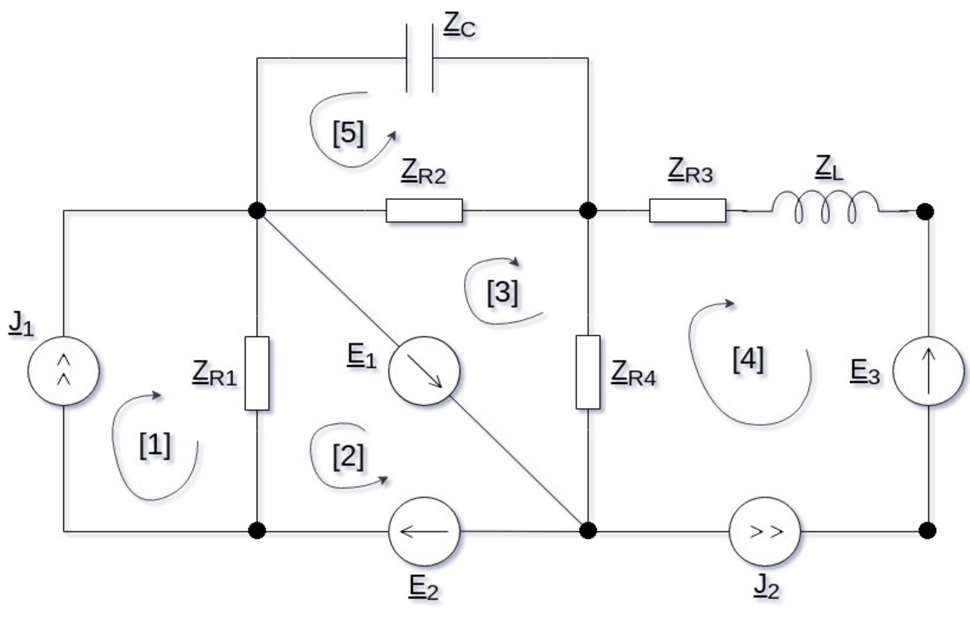
- Aplicăm teorema I a lui Kirchhoff pentru $N-1$ noduri:

$$\begin{cases} (1) : \underline{I}_1 = \underline{I}_5 + \underline{I}_6 + \underline{I}_8 + \underline{I}_{10} \\ (2) : \underline{I}_8 + \underline{I}_9 + \underline{I}_{10} = \underline{I}_3 \\ (3) : \underline{I}_4 + \underline{I}_9 = 0 \\ (4) : \underline{I}_4 + \underline{I}_7 = 0 \\ (5) : \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_6 = \underline{I}_7 \end{cases}$$

Înlocuind cu valorile cunoscute şi trecând necunoscutele în membrul drept, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} \underline{I}_4 + \underline{I}_9 = 0 \\ \underline{I}_3 - \underline{I}_8 - \underline{I}_9 - \underline{I}_{10} = 0 \\ \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_6 = \underline{J}_2 \\ \underline{I}_5 + \underline{I}_6 + \underline{I}_8 + \underline{I}_{10} = \underline{J}_1 \\ \underline{I}_4 = -\underline{J}_2 \end{cases}$$

- Aplicăm teorema a II-a a lui Kirchhoff pe B bucle:



$$\begin{cases} [1]\text{:}\ \underline{U}_1 + \underline{U}_9 = 0 \\ [2]\text{:}\ \underline{U}_1 + \underline{U}_6 + \underline{U}_2 = 0 \\ [3]\text{:}\ \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_7 = 0 \\ [4]\text{:}\ \underline{U}_4 + \underline{U}_5 - \underline{U}_7 - \underline{U}_8 = 0 \\ [5]\text{:}\ \underline{U}_3 - \underline{U}_{10} = 0 \end{cases}$$

Procedăm la fel ca mai sus şi ne rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{R_1} \cdot \underline{I}_5 + \underline{U}_9 = 0 \\ \underline{Z}_{R_1} \cdot \underline{I}_5 = -\underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ \underline{Z}_{R_2} \cdot \underline{I}_8 + \underline{Z}_{R_4} \cdot \underline{I}_3 = -\underline{E}_1 \\ (\underline{Z}_{R_3} + \underline{Z}_L) \cdot \underline{I}_9 + \underline{U}_5 - \underline{Z}_{R_4} \cdot \underline{I}_3 = \underline{E}_3 \\ \underline{Z}_{R_2} \cdot \underline{I}_8 - \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_{10} = 0; \end{cases}$$

Reunind cele două sisteme, obţinem un sistem de 11 ecuaţii liniare complexe, cu 11 necunoscute, deci matricea coeficienţilor **A** va fi de 11×11, iar **b**, un vector coloană, reprezentând coloana termenilor liberi, va avea tot 11 elemente. Astfel, putem scrie sistemul de ecuaţii liniare sub forma matriceală $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, unde $\mathbf{x}$ este vectorul soluţie $([\underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_4, \underline{I}_5, \underline{I}_6, \underline{I}_7, \underline{I}_8, \underline{I}_9, \underline{I}_{10}, \underline{U}_5, \underline{U}_9])$, apoi să-l rezolvăm cu ajutorul unui utilitar numeric precum GNU Octave [**?**].

```
Zc = (-10^(-4)) * j / 3;
 X = 1 + j*10^4;

    %I2 I3   I4  I5   I6  I7  I8   I9   I10   U5  U9
A = [0    0   1   0    0    0   0    1    0    0   0;
     0    0   1   0    0    1   0    0    0    0   0;
     0    1   0   0    0    0  -1   -1   -1    0   0;
     1    1   0   0    1    0   0    0    0    0   0;
     0    0   0   1    1    0   1    0    1    0   0;
     0    0   1   0    0    0   0    0    0    0   0;
     0    0   0  1/5   0    0   0    0    0    0   1;
     0    0   0  1/5   0    0   0    0    0    0   0;
     0  -8/3  0   0    0    0   3    0    0    0   0;
     0   8/3  0   0    0    0   0    X    0    1   0;
     0    0   0   0    0    0   3    0   -Zc   0   0];

b = [ 0; 0; 0; sqrt(2) + j*sqrt(2)
      3*sqrt(2) - 3j*sqrt(2)
      -sqrt(2) - j*sqrt(2)
      0; 5 - 7j; 5; -11j; 0];

x = inv(A)*b;
```

Cea mai simplă, dar, totodată, ineficientă metodă de rezolvare a sistemului este să înmulţim ecuaţia matriceală în partea stângă cu $\mathbf{A}^{-1}$, rezultând soluţia $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$.

```
x =

   2.0757e+01 - 3.0757e+01i
  -1.8750e+00 + 4.1115e-05i
  -1.4142e+00 - 1.4142e+00i
   2.5000e+01 - 3.5000e+01i
  -1.7468e+01 + 3.2172e+01i
   1.4142e+00 + 1.4142e+00i
  -1.5713e-05 + 3.6547e-05i
   1.4142e+00 + 1.4142e+00i
  -3.2892e+00 - 1.4142e+00i
   1.4136e+04 - 1.4155e+04i
  -5.0000e+00 + 7.0000e+00i
```

1.3 Bilanţul puterilor complexe

Calculând sumele puterilor debitate pe receptoare şi pe generatoare, separat, obţinem:

$$\sum_{R}^{\underline{S}} = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_5^* + \underline{U}_3 \cdot \underline{I}_8^* + \underline{U}_4 \cdot \underline{I}_9^* + \underline{U}_7 \cdot \underline{I}_3^* + \underline{U}_{10} \cdot \underline{I}_{10}^*$$

$$= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_5^2 + \underline{Z}_{R_2} \cdot \underline{I}_8^2 + (\underline{Z}_{R_3} + \underline{Z}_L) \cdot \underline{I}_9^2 + \underline{Z}_{R_4} \cdot \underline{I}_3^2 + \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_{10}^2$$

$$\sum_{G}^{\underline{S}} = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_6^* + \underline{U}_6 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_5 \cdot \underline{I}_7^* + \underline{U}_8 \cdot \underline{I}_4^* + \underline{U}_9 \cdot \underline{I}_1^*$$

$$= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_6^* + \underline{U}_5 \cdot \underline{J}_2^* - \underline{U}_9 \cdot \underline{J}_1^* + \underline{E}_3 \cdot \underline{I}_4^* - \underline{E}_2 \cdot \underline{I}_2^*$$

```
I(1) = 3*sqrt(2) - 3j*sqrt(2); % J1
for i = 1 : 9
  I(i + 1) = x(i);
endfor

U5 = x(10);
U9 = x(11);

Z = [1/5; 3; 1; -8/3];
Zc = (-10^(-4)) * j / 3;
ZL = j*10^4;

E = [-5; 7j; -11j];

Sc = Z(1) * I(5)^2 + Z(2) * I(8)^2 + (Z(3) + ZL) * I(9)^2
   + Z(4) * I(3)^2 + Zc * I(10)^2;

Sg = E(1) * conj(I(6)) + U5 * conj(I(7)) + U9 * conj(I(1))
   + E(3) * conj(I(4)) + E(2) * conj(I(2));

abs(Sc - Sg)
```

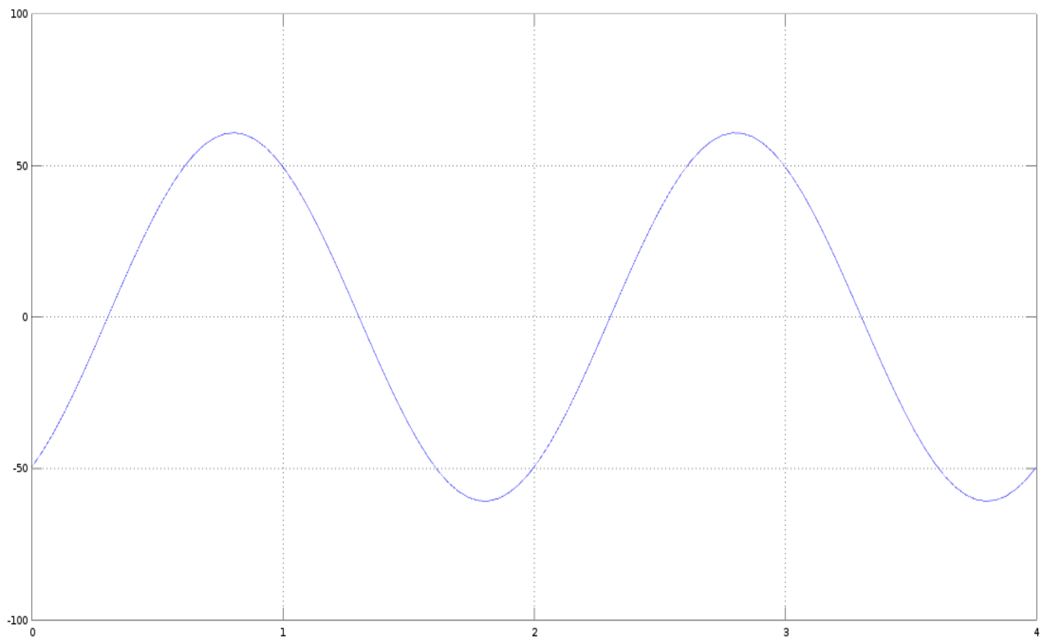
Verificarea bilanţului de puteri folosind Octave

1.4 Reprezentarea grafică a unei mărimi obţinute

Pentru simplitate, am ales curentul $\underline{I}_5 = 25 - 35j$, din care obţinem valoarea efectivă $I_5 = \sqrt{25^2 + 35^2} = 43.012$ şi faza iniţială $\phi_{I_5} = arctg(-\frac{35}{25}) = -0.95055$, deci, forma sinusoidală va fi $I_5\sqrt{2} \cdot sin(\omega t + \phi_{I_5})$. Rezultă:

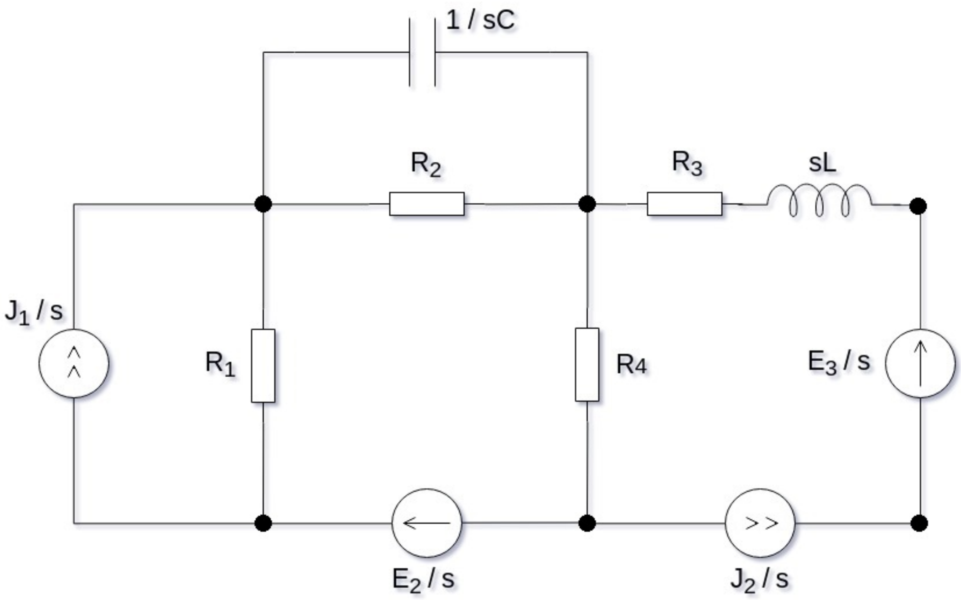
$$i_5(t) = 60.828 \cdot sin(100\pi t - 0.95055)$$

```
x = linspace(0, 4);
y = 60.828 * sin(100*pi*x - 0.95055);
plot(x, y);
```

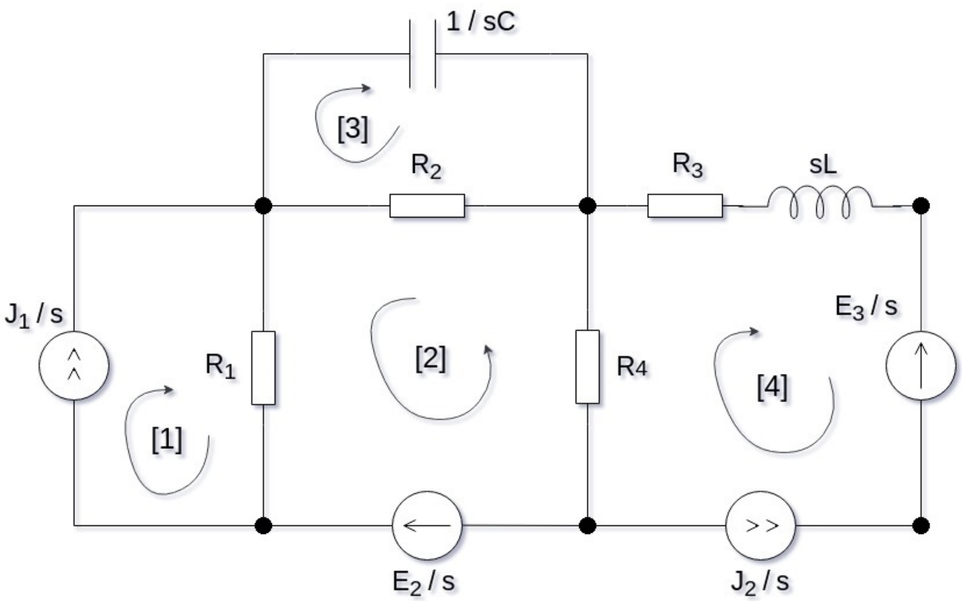


2 Rezolvarea circuitelor în regim tranzitoriu

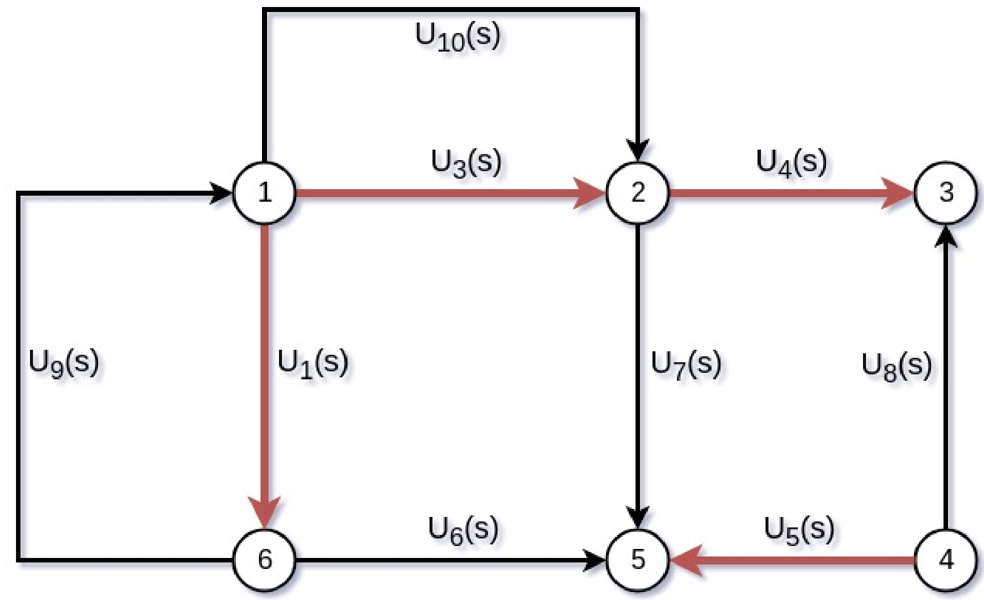
Pentru această cerinţă am păstrat amplasarea bobinei şi condensatorului adăugate anterior şi am eliminat latura (1, 5), apoi am trecut toate mărimile în operaţional.



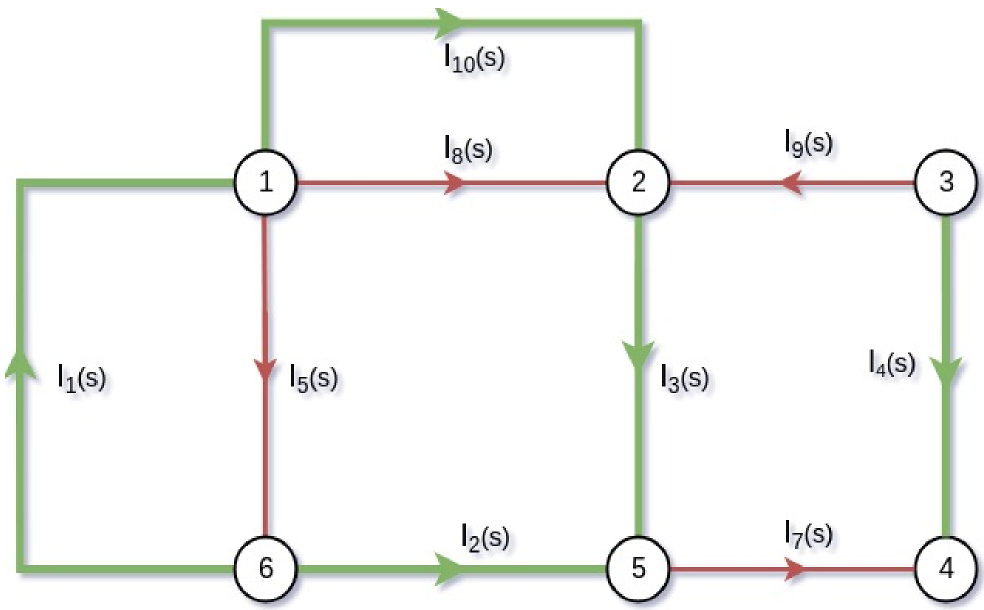
Noul circuit, trecut în operaţional



Alegem şi sensurile de parcurgere pentru bucle



Noul graf de tensiuni



Noul graf de curenţi

- Din nou, aplicăm teorema I a lui Kirchhoff pentru $N-1$ noduri:

$$\begin{cases} (1): I_1 - I_5 - I_8 - I_{10} = 0 \\ (2): I_8 + I_9 + I_{10} - I_3 = 0 \\ (3): I_4 + I_9 = 0 \\ (4): I_4 + I_7 = 0 \\ (5): I_2 + I_3 - I_7 = 0 \end{cases}$$

Înlocuind cu valorile cunoscute şi trecând necunoscutele în membrul drept, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} I_5 + I_8 + I_{10} = \frac{J_1}{s} \\ I_3 - I_8 - I_9 - I_{10} = 0 \\ I_4 + I_9 = 0 \\ I_4 = -\frac{J_2}{s} \\ I_2 + I_3 = \frac{J_2}{s} \end{cases}$$

- Aplicăm teorema a II-a a lui Kirchhoff pe B bucle:

$$\begin{cases} [1]\colon\ U_1 + U_9 = 0 \\ [2]\colon\ U_1 + U_6 - U_3 - U_7 = 0 \\ [3]\colon\ U_3 - U_{10} = 0 \\ [4]\colon\ U_4 + U_5 - U_7 - U_8 = 0 \end{cases}$$

Procedăm la fel ca mai sus şi ne rezultă sistemul:

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_5 + U_9 = 0 \\ R_1 \cdot I_5 - R_2 \cdot I_8 - R_4 \cdot I_3 = -\frac{E_2}{s} \\ R_2 \cdot I_8 - \frac{1}{sC} \cdot I_{10} = 0 \\ (R_3 + sL) \cdot I_9 + U_5 - R_4 \cdot \underline{I}_3 = \frac{E_3}{s} \end{cases}$$

```
pkg load symbolic
syms s

X = pi / (300 * s);
Y = (100/pi) * s + 1;

     %I2  I3   I4   I5   I8   I9  I10   U5  U9
A = [ 0    0    0    1    1    0    1    0   0;
      0   -1    0    0    1    1    1    0   0;
      0    0    1    0    0    1    0    0   0;
      0    0    1    0    0    0    0    0   0;
      1    1    0    0    0    0    0    0   0;
      0    0    0   1/5   0    0    0    0   1;
      0   8/3   0   1/5  -3    0    0    0   1;
      0    0    0    0    3    0   -X    0   0;
      0   8/3   0    0    3   -Y    0    1   0 ];

b = [ 6/s; 0; 0; -2/s; 2/s; 0; 7/s; 0; 11/s ];

x = inv(A)*b
```

3 Calculul şi reprezentarea unui câmp electric

O distribuţie foarte simplă de sarcină care să depindă numai de rază într-un sistem de coordonate sferice este:

$$\rho(r,\theta,\phi) = \begin{cases} r, \text{ dacă } r \in [0,a] \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

Conform legii fluxului electric:

$$\Psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$$
$$\Longleftrightarrow \int_\Sigma \overline{D} \cdot dA = \int_{D_\Sigma} \rho \cdot dV$$
$$\Longrightarrow 4\pi r^2 \cdot \overline{D} = \Psi$$
$$\Longleftrightarrow \overline{D} = \frac{\Psi}{4\pi r^2}$$

Cum $\Psi_\Sigma = \int_{D_\Sigma} \rho \cdot dV$, în coordonate sferice, θ şi $\phi \in [0, 2\pi]$, iar raza $r \in [0,a]$, deci pe intervalul $[0,a]$ vom avea:

$$\Psi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a r \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a r \cdot dr = 2\pi^2 a^2.$$
$$\Longrightarrow \overline{D} = \frac{2\pi^2 a^2}{4\pi r^2} = \frac{\pi a^2}{2r^2}.$$

Pentru orice altă valoare a lui r, ρ va fi 0, integrala va fi 0, deci şi $\overline{D}$ va fi tot 0.

```
function graficD()

  a = 2;
  x = 10 : 10 : 100*a;
  for i = 10 : 10 : 100*a
    y(i/10) = pi * a^2 /(2 * (i/100)^2);
  end
  plot(x, y);

end
```