

# Systèmes Nonlinéaires et Introduction au Chaos

28 mars 2009

## Table des matières

<b>1 Définitions</b>	<b>1</b>
1.1 Représentation d'un système physique . . . . .	1
1.2 Espace des phases, degré de liberté . . . . .	2
1.3 Points fixes, sous espaces invariants . . . . .	2
<b>2 Systèmes dynamiques linéaires</b>	<b>2</b>
2.1 Bille au sommet d'une colline . . . . .	2
2.2 Bille au fond d'une vallée . . . . .	2
2.3 Les différents types de points fixes . . . . .	3
<b>3 Systèmes dissipatifs et hamiltoniens</b>	<b>3</b>
3.1 Conservation des aires . . . . .	3
3.2 Systèmes dissipatifs . . . . .	3
<b>4 Systèmes hamiltoniens non linéaires</b>	<b>3</b>
4.1 Bille dans un potentiel à deux puits . . . . .	4
4.2 Le pendule pesant . . . . .	4
<b>5 Intégrabilité des systèmes hamiltoniens</b>	<b>5</b>
5.1 Système de deux oscillateurs harmoniques couplés	5
5.2 Problème à deux corps, mouvement dans un champ de force central . . . . .	5
5.3 Rôle des invariants, systèmes séparables . . . . .	6
<b>6 Existence et caractérisation du chaos</b>	<b>6</b>
6.1 Problème à deux corps, champ de force non-central	6
6.2 Caractérisation du Chaos : Spectre de puissance .	7
6.3 Caractérisation du chaos : sensibilité aux conditions initiales . . . . .	7
<b>7 Systèmes à une fréquence</b>	<b>8</b>
7.1 Les petites oscillations et l'existence d'harmoniques . . . . .	8
7.2 Evolution de la période d'oscillation . . . . .	9
7.3 Structure d'une résonance . . . . .	9
<b>8 Systèmes à deux fréquences</b>	<b>10</b>
8.1 Boussole soumise à deux champs . . . . .	10
8.2 Critère de stochasticité . . . . .	10
<b>9 Section de POINCARÉ</b>	<b>11</b>
9.1 Stroboscopie des trajectoires . . . . .	11
9.2 Coupe de POINCARÉ . . . . .	11
9.3 Allure d'une coupe de POINCARÉ de la boussole	11
<b>10 Trajectoires passantes</b>	<b>11</b>
10.1 Accrochage 1/2 . . . . .	12
10.2 Le spectre de la vitesse . . . . .	13
10.3 Nombre de rotation rationnel . . . . .	13
10.4 Tores de K.A.M. . . . .	13

<b>11 Trajectoires appartenant à une résonance</b>	<b>13</b>
11.1 Résonances secondaires . . . . .	13
11.2 Hiérarchie des résonances . . . . .	14
11.3 Disparition d'une résonance par doublement de période . . . . .	14
<b>12 Stochasticité à grande échelle</b>	<b>14</b>
12.1 Allure de l'espace des phases . . . . .	15
12.2 Disparition du dernier tore de KAM . . . . .	15

## Résumé

Le but de ce chapitre consiste à déterminer les conditions requises pour qu'un système physique possède un comportement chaotique. Nous verrons qu'il est nécessaire que celui-ci soit non-linéaire et qu'il ait au moins trois degrés de liberté. L'étude rigoureuse de ce type de système étant en général délicate, nous nous limiterons à une étude qualitative purement graphique. Pour cela, nous introduisons l'espace des phases, dont nous discutons les éléments remarquables.

Quelques définitions préliminaires permettent de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques. Elles sont illustrées par des exemples simples dont chacun permet de présenter un aspect de l'espace des phases.

Nous partons de systèmes réguliers connus pour aller vers des systèmes chaotiques simples. Nous abordons les systèmes linéaires à deux degrés de liberté, les systèmes non linéaires, ceux qui possèdent quatre degrés de liberté et enfin ceux qui ont un comportement chaotique. Nous dégageons ainsi les conditions minimales nécessaires pour qu'un système présente un comportement chaotique.

Finalement, nous formulons les critères permettant de caractériser les mouvements chaotiques et les mouvements réguliers.

## 1 Définitions

### 1.1 Représentation d'un système physique

Pour décrire l'évolution dynamique d'un système physique, il est souvent commode d'en faire une représentation graphique. A chaque état du système est associé un vecteur  $\vec{X}$ . Suivre la dynamique du système correspond alors à observer l'évolution du vecteur  $\vec{X}$  dans un espace vectoriel  $\mathcal{E}$  appelé **espace des phases**. Cette évolution est décrite par un ensemble de  $n$  équations différentielles munies de conditions initiales :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(\vec{X}) \quad (+c. i. : \vec{X}_{(t=0)}) \quad (1)$$

L'application qui fait passer d'un vecteur de  $\mathcal{E}$  à un autre au cours du temps s'appelle un *flot*.

## 1.2 Espace des phases, degré de liberté

Ce type d'équation vectorielle, qui décrit l'évolution déterministe d'un processus physique, est étudié par la théorie des équations différentielles ordinaires. L'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  est caractérisé par sa dimension  $n$ . Elle constitue aussi le nombre de *degrés de liberté* du système dynamique considéré.

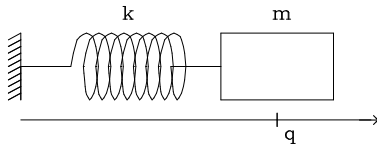


FIGURE 1 – L'oscillateur harmonique obtenu avec une masse  $m$  attaché à un ressort  $k$ .

Cette notion d'espace des phases fut d'abord introduite en mécanique [1], où nous trouvons notre premier exemple de système dynamique : l'oscillateur harmonique à une dimension. Sa position est déterminée par la variable  $q$ . Pour connaître complètement son état dynamique, il faut préciser son impulsion  $p$ . L'espace des phases possède ainsi deux dimensions ; selon la définition que nous avons donnée, l'oscillateur harmonique possède deux degrés de liberté. Cette définition est différente de celle traditionnellement donnée en mécanique où un degré de liberté est associé à chaque couple  $(q, p)$  [1].

En général, la fonction  $F$  est différentiable un nombre suffisant de fois et peut être non linéaire. Dans le cas de l'oscillateur harmonique (une masse solidaire d'un ressort voir Fig.1) la fonction  $F$  prend la forme <sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \partial q / \partial t = p/m \\ \partial p / \partial t = -kq \end{cases} \quad (2)$$

## 1.3 Points fixes, sous espaces invariants

Le comportement d'un système dynamique s'étudie en caractérisant ses points d'équilibre, également appelés *points fixes* :

$$\frac{d\vec{X}_0}{dt} = \vec{0} = F(\vec{X}) \quad (3)$$

Leur stabilité est étudiée en approximant  $F$  au voisinage de  $\vec{X}_0$  par une application linéaire.

On se ramène donc à l'étude d'un système linéaire :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \mathcal{L}_{X_0}(\vec{X}) \quad (4)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'application tangente à  $F$  en  $\vec{X}_0$ . Valeurs et vecteurs propres de  $\mathcal{L}$  déterminent l'évolution du système dans le voisinage de  $\vec{X}_0$ .

## 2 Systèmes dynamiques linéaires

La notion de système dynamique est très générale : elle peut s'appliquer à des systèmes d'origine mécanique, électronique, chimique, thermique, etc. Pour éclairer les définitions que nous venons de donner, et en particulier pour expliciter les différents types de points fixes, nous nous proposons de les illustrer à l'aide de quelques exemples simples tirés de la mécanique.

1. La formulation habituelle est donnée par une équation avec une dérivée seconde :  $m\ddot{q} + kq = 0$ . Nous lui préférons la forme de deux équations aux dérivées premières qui met en valeur chacune des variables de l'espace des phases

## 2.1 Bille au sommet d'une colline

Considérons maintenant le cas d'une particule matérielle au sommet d'une colline parabolique dans un espace à une dimension. C'est un système à deux degrés de liberté : la position  $q$  et l'impulsion  $p$ , régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial q / \partial t = p/m \\ \partial p / \partial t = kq \end{cases} \quad (5)$$

Le point fixe est l'origine ( $q = 0, p = 0$ ). Sa stabilité est obtenue en cherchant les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Les valeurs propres sont  $\lambda = \pm \sqrt{k/m}$  et les vecteurs propres associés :  $\vec{V}_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{km} \end{pmatrix}$ . L'espace des phases est représenté sur la figure 2, une trajectoire correspondant à une solution de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_+ \exp(\sqrt{k/m} t) + \vec{V}_- \exp(-\sqrt{k/m} t) \quad (7)$$

Lorsque les valeurs propres vérifient  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ , on qualifie le point fixe de **point col** ou de **point selle** (saddle node).

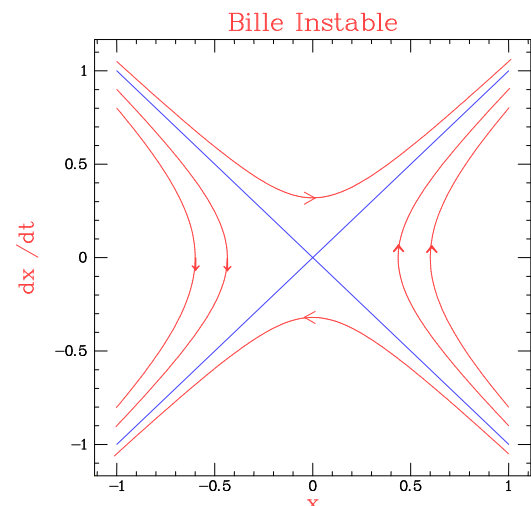


FIGURE 2 – Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille au sommet d'une colline. Les trajectoires illustrent un point col. Elles s'échappent toutes à l'infini, sauf celles qui démarrent exactement sur la direction contractante et conduisent précisément la bille au sommet de la colline. Les hyperboles telle que  $x > 0$  correspondent aux cas où la vitesse initiale de la bille est trop faible pour passer au dessus de la colline.

Comme on pouvait s'y attendre, le point d'équilibre est instable puisqu'il existe une valeur propre positive, c'est-à-dire une direction de l'espace des phases suivant laquelle une trajectoire s'écarte de l'origine. La trajectoire qui s'en rapproche correspond au cas où la bille est lancée loin du sommet de la colline avec une vitesse juste suffisante pour l'atteindre. Les autres trajectoires correspondent à des cas intermédiaires : soit la vitesse est trop grande et la bille passe au dessus de la colline pour redescendre de l'autre côté, soit elle est trop faible et la bille rebrousse chemin avant d'arriver au sommet.

## 2.2 Bille au fond d'une vallée

Considérons maintenant le cas d'une particule matérielle au fond d'une vallée parabolique. Ce système possède deux degrés de li-

berté associés à la position  $q$  et l'impulsion  $p$  : il s'agit de l'oscillateur harmonique, régi par les équations 2.

Le point fixe est toujours le point ( $q = 0, p = 0$ ). Une fois de plus recherchons les valeurs propres de la matrice pour étudier la stabilité :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées  $\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$  et avec les vecteurs propres :  $\vec{V}_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\sqrt{km} \end{pmatrix}$ . Une trajectoire correspond à une solution de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_+ \exp(i\sqrt{k/m}t + \phi) + \vec{V}_- \exp(-i\sqrt{k/m}t + \phi) \quad (9)$$

L'espace des phases est représenté sur la figure 3. Les trajectoires y sont maintenant des ellipses. Le mouvement de la bille est une oscillation dont la fréquence est indépendante de l'amplitude (le "rayon" de l'ellipse) et donnée par les valeurs propres  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, le point fixe est appelé *foyer* ou *centre*.

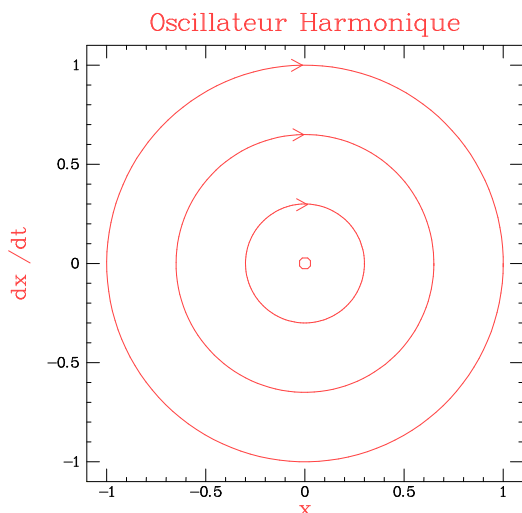


FIGURE 3 – Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille au fond d'une vallée ou d'un oscillateur harmonique. Ces trajectoires sont décrites dans le sens des aiguilles d'une montre. Le point invariant est un centre.

### 2.3 Les différents types de points fixes

Pour des valeurs propres réelles, le point fixe est un *nœud stable* si elles sont toutes négatives, un *point col* ou encore un *point selle* si certaines sont positives.

Pour des valeurs propres complexes, le point fixe est un *foyer* ou *centre*.

## 3 Systèmes dissipatifs et hamiltoniens

Les trois exemples que ne nous venons de discuter présentent des différences importantes qui permettent de distinguer certaines classes de systèmes. Le circuit aux deux condensateurs relaxe toujours vers l'origine quelles que soient les conditions initiales choisies. L'énergie électrique accumulée dans les condensateurs est dissipée par les résistances au cours du temps. Par contre les deux exemples mécaniques conservent l'énergie du système. Au cours des mouvements de la bille, on assiste seulement à des

transferts entre énergie potentielle et énergie cinétique. Evidemment, ceci n'est vrai qu'en l'absence de frottements.

On appelle *systèmes hamiltoniens* ou *systèmes conservatifs* les systèmes qui conservent l'énergie totale et *systèmes dissipatifs* les autres.

### 3.1 Conservation des aires

L'espace des phases des systèmes hamiltoniens présente des caractéristiques remarquables. D'une part, deux trajectoires distinctes n'y ont aucun point d'intersection. C'est une conséquence immédiate du caractère déterministe du système : puisque des conditions initiales identiques conduisent à des trajectoires confondues et comme tout point de l'espace des phases peut être choisi comme une condition initiale, un point commun implique l'identité des deux trajectoires. D'autre part, les systèmes hamiltoniens conservent les aires dans l'espace des phases, ce qui constitue le *théorème de LIOUVILLE*. Considérons un volume  $\Omega$  à l'instant  $t_0$ , et suivons son évolution au cours du temps. Il va se déformer mais son volume va rester constant. Ceci résulte de la nullité de la divergence de  $d\vec{X}/dt$  :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \int_{\Omega(t)} \text{div} \left( \frac{d\vec{X}}{dt} \right) dv \\ &= \int_{\Omega(t)} \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dv \end{aligned} \quad (10)$$

où  $v$  est le volume de l'espace des phases du domaine  $\Omega(t)$  transporté par le flot et  $H$  est l'Hamiltonien du système.

Il en résulte une propriété intéressante des valeurs propres d'un point fixe d'un système hamiltonien : leur somme a toujours une partie réelle nulle. Ainsi la bille en haut de la colline tombe avec une valeur propre  $+\sqrt{k/m}$  mais il existe une trajectoire ramenant la bille au sommet avec la valeur propre opposée.

### 3.2 Systèmes dissipatifs

Une façon simple d'obtenir un système dissipatif consiste à prendre un système hamiltonien et à lui ajouter des frottements. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'équation du mouvement devient :

$$\begin{cases} \partial q / \partial t = p/m \\ \partial p / \partial t = -kq - \gamma p \end{cases} \quad (11)$$

Il est facile de voir que le terme de frottement  $\gamma$  induit l'apparition d'une partie réelle dans les valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  qui transforme les trajectoires elliptiques du cas sans frottements, en des spirales convergeant vers l'origine. On pourra de la même façon étudier l'influence du terme  $\gamma$  sur un point col.

Les systèmes dissipatifs peuvent aussi correspondre à une augmentation de l'énergie totale du système ; ceci se modélise par un  $\gamma$  négatif.

## 4 Systèmes hamiltoniens non linéaires

Les systèmes hamiltoniens ayant fait l'objet d'études intensives [2, 3], il nous est possible de dégager les conditions nécessaires pour observer des trajectoires chaotiques. Comme nous le verrons, le caractère *non-linéaire* constitue l'une de ces conditions essentielles. Cependant tous les systèmes non-linéaires ne sont pas chaotiques, comme nous l'illustrons avec les deux exemples qui suivent.

## 4.1 Bille dans un potentiel à deux puits

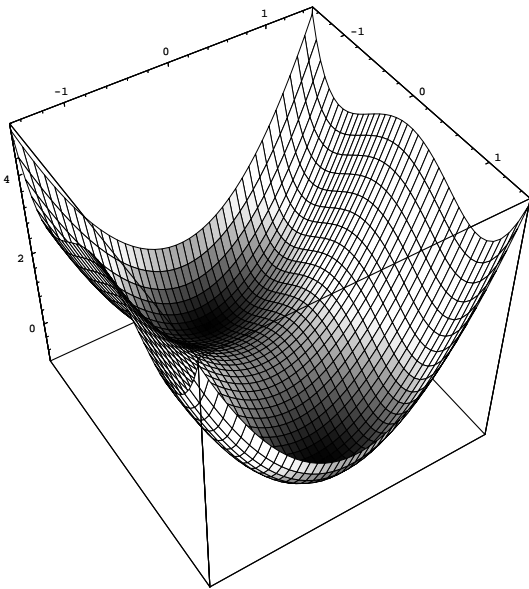


FIGURE 4 – Représentation de la surface d'énergie totale en fonction de la position et de la vitesse de la bille dans un potentiel à deux puits

Un système est *non-linéaire* dès que les équations qui le gouvernent ne sont plus des fonctions linéaires de  $\vec{X}$ .

C'est le cas, par exemple, si la force qui agit sur une bille est du type :  $\partial p / \partial t = q - q^3$ . Cette situation correspond à une bille placée dans un potentiel à deux puits, situés en  $q = \pm 1$ . Le système possède toujours deux degrés de liberté et est décrit par :

$$\begin{cases} \partial q / \partial t = p/m \\ \partial p / \partial t = q - q^3 \end{cases} \quad (12)$$

Les solutions de l'équation 12 sont beaucoup moins faciles à déterminer que celles d'un système linéaire. Nous verrons par la suite qu'il est même parfois impossible de trouver les solutions de certains systèmes non-linéaires. A ce stade, nous ferons une analyse qualitative des trajectoires dans l'espace des phases. Pour ce faire nous commençons par en déterminer les points fixes, qui sont au nombre de trois :

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Autour de chacun d'eux, nous pouvons maintenant linéariser les équations 12. Autour de l'origine, nous retrouvons les équations 5 et donc prédire que ce point fixe est un point col. Pour les deux points fixes restants :  $A_{-1}$  et  $A_1$  on constate que la linéarisation conduit à un système d'équations du type 2. Ces points fixes sont donc des centres et les trajectoires voisines sont des ellipses. Pour obtenir les trajectoires du système dans tout l'espace des phases, on est tenté de prolonger à la main le motif formé par le point col entouré de deux centres.

En fait, il existe une façon rigoureuse de procéder. Nous avons vu que les systèmes hamiltoniens conservent l'énergie au cours du temps. Construisons donc un graphique à trois dimensions dont deux sont celles de l'espace des phases et la troisième l'énergie totale du système. Ainsi nous obtenons une surface  $S$  avec un point col à l'origine séparant deux bassins autour des autres points fixes. Puisque l'énergie est invariante, une trajectoire du mouvement correspond à une coupe de la surface  $S$  selon une énergie constante. Les trajectoires du système sont équivalentes aux courbes de niveau de la surface  $S$ , reproduites sur la figure 5.

La méthode que nous venons de décrire est tout à fait générale : elle ne dépend pas du potentiel non-linéaire et elle peut

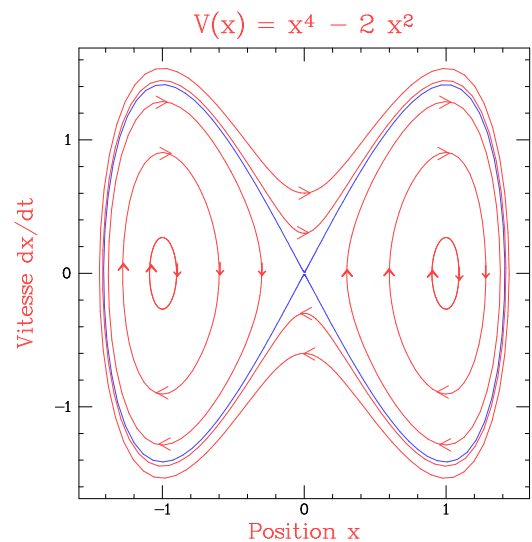


FIGURE 5 – Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille dans un potentiel à deux puits. Ces trajectoires correspondent aussi aux lignes de niveau de la surface décrite sur la figure 4.

s'appliquer à tous les systèmes hamiltoniens ayant deux degrés de liberté. Dans la mesure où la surface  $S$  ne présente pas de pathologie particulière, nous obtiendrons soit des trajectoires fermées, soit des trajectoires qui partent à l'infini. Par contre, cette méthode ne nous permet pas de déterminer les dynamiques de parcours de ces trajectoires. S'il est clair que les trajectoires fermées correspondent à des mouvements périodiques, il n'est pas possible d'en déterminer la fréquence avec le seul raisonnement que nous venons de faire. Près des points fixes de type centre, la fréquence sera celle des oscillations harmoniques. Nous nous attendons à un allongement de la période en nous approchant du point col, puisque celle-ci diverge lorsque la trajectoire l'atteint.

## 4.2 Le pendule pesant

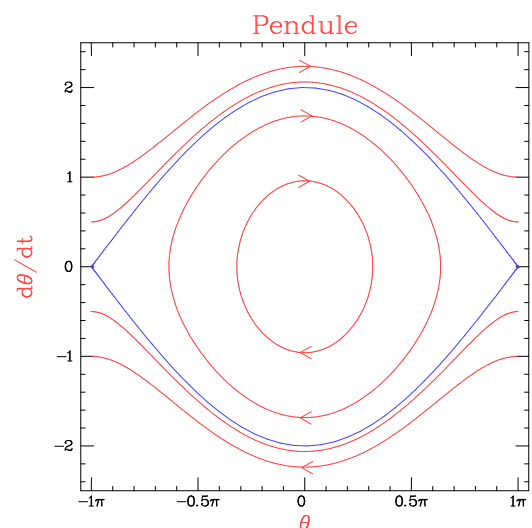


FIGURE 6 – Trajectoires dans l'espace des phases du pendule. L'espace des phases est périodique dans la direction  $\theta$ , les trajectoires qui atteignent  $(+\pi, \dot{\theta})$  reviennent ainsi en  $(-\pi, \dot{\theta})$ . Ces trajectoires, dites passantes, correspondent au cas où le pendule est animé d'un mouvement de rotation. Les trajectoires fermées au centre décrivent les mouvements d'oscillation du pendule. La trajectoire qui délimite les deux types de mouvements joint les points col en  $(\pm\pi, 0)$  ; c'est la séparatrice.

Nous allons constamment revenir sur cet exemple du pendule



car il constitue un des systèmes non-linéaires les plus simples. Il possède deux degrés de liberté (au sens des systèmes dynamiques) : sa position angulaire  $\theta$  et sa vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ . Elles sont régies par les équations :

$$\begin{cases} \partial\theta/\partial t = \dot{\theta} \\ \partial\dot{\theta}/\partial t = -g/l \sin \theta \end{cases} \quad (14)$$

Nous pouvons répéter la même analyse que celle déjà faite en 4.1. L'origine de l'espace des phases apparaît comme un centre : c'est le domaine des petites oscillations. Si l'on restreint  $\theta$  à l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , nous y trouvons deux points fixes de type col en  $\theta = \pm\pi$  et  $\dot{\theta} = 0$ . Les courbes de niveau à énergie constante conduisent à la figure 6.

Il existe une trajectoire très particulière qui relie les points invariants entre eux : c'est la *séparatrice*. Lorsqu'il suit cette trajectoire, le pendule part de la position retournée ( $\theta = -\pi$ ), s'en écarte doucement puis bascule rapidement autour de  $\theta = 0$  et finalement remonte pour atteindre asymptotiquement  $\theta = \pi$ . Le nom de séparatrice provient du fait que cette trajectoire est la frontière dans l'espace des phases entre les trajectoires fermées entourant le point fixe centre  $\dot{\theta} = 0$ , et les trajectoires passantes pour lesquelles  $\dot{\theta} \neq 0$  où  $\dot{\theta}$  représente la vitesse moyenne de rotation. Ces trajectoires passantes correspondent au cas où le pendule tourne continûment.

## 5 Intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Lorsqu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace des phases, ce système est dit *intégrable*.

Nous venons de voir deux exemples de tels systèmes non-linéaires. L'invariance de l'énergie, caractéristique des systèmes hamiltoniens, permettant de déterminer les trajectoires des systèmes possédant deux degrés de liberté, il en résulte que tous ces systèmes sont intégrables. Cela ne signifie pas pour autant qu'il soit facile de trouver l'expression analytique des solutions des équations du mouvement, mais nous sommes sûrs qu'elles existent.

Quant aux systèmes ayant un plus grand nombre de degrés de liberté  $n$ , l'invariance de l'énergie nous permet de dire que leurs trajectoires appartiennent à un sous-espace de dimension  $n - 1$ . Mais cela ne permet plus de les caractériser.

Pourtant, dans nos cours de mécanique, nous avons déjà rencontré des exemples de systèmes ayant plus de deux degrés de liberté et dont nous pouvions déterminer analytiquement les trajectoires. Nous nous proposons de rappeler deux exemples de ce type qui vont nous permettre d'illustrer les conditions nécessaires à l'intégrabilité.

### 5.1 Système de deux oscillateurs harmoniques couplés

Considérons deux oscillateurs harmoniques couplés linéairement comme ceux de la figure 7.

Il nous faut désormais quatre équations pour décrire notre système :

$$\begin{cases} \partial q_1/\partial t = p_1/m \\ \partial p_1/\partial t = -Kq_1 + k(q_1 - q_2) \\ \partial q_2/\partial t = p_2/m \\ \partial p_2/\partial t = -Kq_2 + k(q_2 - q_1) \end{cases} \quad (15)$$

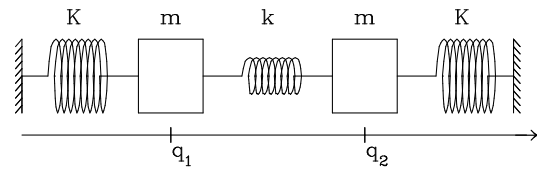


FIGURE 7 – Système de deux oscillateurs harmoniques couplés linéairement.

Comme le système est linéaire, nous savons qu'il est possible de trouver les solutions. Or la recherche de ces solutions consiste à déterminer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice. Il existe donc un changement de base où la matrice est diagonale, c'est-à-dire où le couplage des oscillateurs disparaît (ici  $u = q_1 + q_2$  et  $v = q_1 - q_2$ ). Dans cette nouvelle base, nous pouvons séparer les oscillateurs couplés en deux nouveaux oscillateurs indépendants ayant deux fréquences différentes :  $\omega_+ = \sqrt{(K + 2k)/m}$  et  $\omega_- = \sqrt{K/m}$ . Le mouvement est donc la composée de deux oscillations. Nous avons vu qu'à une oscillation correspondait une courbe fermée dans l'espace des phases (pour un oscillateur linéaire une ellipse) ; la composée de deux mouvements de cette nature engendre une surface torique. Nous pouvons donc dire que la dimension de la trajectoire dans l'espace des phases est ici deux. L'espace des phases étant *a priori* de dimension quatre, l'invariance de l'énergie totale nous conduit à une solution appartenant à un sous-espace de dimension trois. La symétrie particulière de ce problème conduit à une solution n'explorant que deux dimensions.

### 5.2 Problème à deux corps, mouvement dans un champ de force central

Le problème d'un système composé de deux particules matérielles en interaction a eu une très grande importance historique. C'est traditionnellement le *problème à deux corps* (la Terre et la Lune, par exemple). Comme les corps peuvent se déplacer dans les trois directions de l'espace physique, l'espace des phases de ce système est *a priori* de dimension 12 puisqu'il faut 3 coordonnées d'espace et autant de coordonnées d'impulsion pour caractériser chaque particule. Nous allons montrer comment il est possible de séparer les différents degrés de liberté et ainsi prédire le mouvement des deux corps.

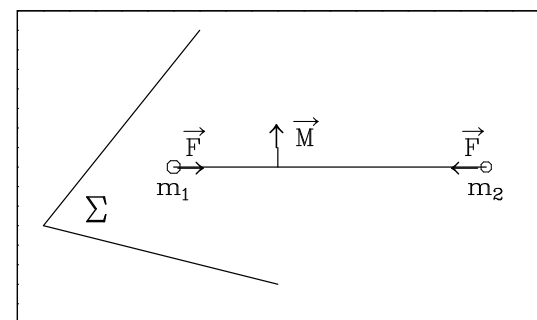


FIGURE 8 – Deux corps en interaction avec force centrale, le mouvement a lieu dans le plan  $\Sigma$  perpendiculaire au moment cinétique.

Dans la mesure où les deux corps ne sont soumis à aucune force extérieure et puisque l'énergie d'interaction ne dépend que de la distance entre les deux particules, le mouvement du centre de masse est une translation à vitesse uniforme [1] et chacune des composantes de cette vitesse est invariante. Comme nous pouvons associer trois variables de position et trois d'impulsion au centre de masse, nous pouvons réduire d'autant le nombre de degrés de liberté en nous plaçant dans le référentiel du centre de masse. Nous devons maintenant déterminer le mouvement d'un

corps soumis à un champ de force central, c'est à dire dont le vecteur force pointe toujours vers l'origine, et dont l'amplitude ne dépend que du module de la distance à l'origine du corps  $r$ . Le moment cinétique de cette particule  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$  est par définition perpendiculaire à  $\vec{r}$ , donc à la force, et par suite invariant. Cette invariance impose au mouvement d'avoir lieu dans un plan perpendiculaire à  $\vec{M}$ . Ainsi nous nous ramenons à un problème plan limité à deux coordonnées d'espace et deux d'impulsion. L'invariance du moment cinétique permet de déterminer le mouvement de la particule. Exprimée en coordonnées polaires  $(r, \phi)$ , l'énergie totale du système s'écrit :

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (16)$$

où  $U(r)$  est le potentiel d'interaction. Grâce à l'invariance du moment cinétique, cette énergie ne dépend pas explicitement de  $\phi$ , et prend la forme de celle d'un oscillateur placé dans un potentiel effectif :

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (17)$$

Ainsi avons-nous séparé le problème en couples de variables conjuguées  $(q_i, p_i)$ . Comme tous les systèmes à deux degrés de liberté sont intégrables, nous savons que celui de l'oscillateur dans le potentiel  $U_{eff}$  l'est aussi, et ceci quel que soit  $U(r)$ . Le mouvement final est donc la composition d'une oscillation dans le potentiel  $U_{eff}$  avec une rotation à la vitesse  $\dot{\phi} = M/mr^2$ . L'oscillation se fait entre deux valeurs  $r_{min}$  et  $r_{max}$  positives. La vitesse rotation présente un comportement analogue. La trajectoire dans l'espace des phases est à nouveau la composition de deux courbes fermées : elle a la topologie d'un tore. La projection d'une trajectoire dans le plan  $(r, \phi)$  est donnée sur la figure 9.

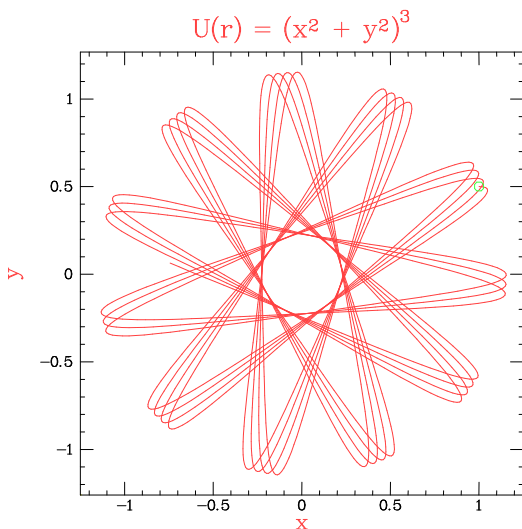


FIGURE 9 – Trajectoire d'une particule dans un champ de force central : c'est la composition d'une rotation et d'une oscillation.

### 5.3 Rôle des invariants, systèmes séparables

Les deux exemples que nous venons de discuter permettent de généraliser la notion d'intégrabilité. On dit qu'un système est *intégrable* s'il est possible de le séparer en couples de variables conjuguées indépendants les uns des autres, c'est-à-dire de le séparer en oscillateurs indépendants. Comme nous savons décrire les trajectoires de tout oscillateur à deux dimensions (une variable d'espace et une d'impulsion), la trajectoire d'un système

séparé est obtenue en composant les mouvements de ses différents oscillateurs.

Bien qu'il existe une définition de l'intégrabilité, il n'existe pas de méthode infaillible permettant de séparer les variables. Dans les deux exemples précédents, l'existence d'une symétrie particulière du problème, nous a permis de trouver le changement de variables adapté conduisant à la séparation. La présence d'un invariant (comme le moment cinétique) est un indice fondamental de l'intégrabilité d'un système.

Or l'intégrabilité d'un système dont l'espace des phases est de dimension  $2n$ , implique l'existence de  $n$  invariants. En effet, parmi les systèmes hamiltoniens à  $2n$  degrés de liberté, les trajectoires de ceux qui sont intégrables explorent un sous-espace correspondant aux composées de  $n$  oscillations. Ce sous-espace est donc de dimension  $n$ .

Si un système n'est pas intégrable, la restriction minimale liée à l'invariance de l'énergie impose à l'espace exploré par sa trajectoire d'être de dimension  $2n - 1$  au plus. Les systèmes intégrables sont donc des systèmes très particuliers, moins généraux que ceux qui ne le sont pas.

## 6 Existence et caractérisation du chaos

Nous avons longuement discuté l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens ; nous allons ici décrire rapidement les conséquences de la non intégrabilité d'un système.

### 6.1 Problème à deux corps, champ de force non-central

Que se passe-t-il quand le champ de force agissant sur les deux corps n'est plus de symétrie centrale ?

En premier lieu, si le champ de force n'est plus central, le moment cinétique n'est plus invariant et nous ne pouvons plus découpler l'oscillation radiale de la rotation suivant  $\phi$ . Inutile de dire qu'on ne peut pas donner d'expression analytique de la trajectoire du système.

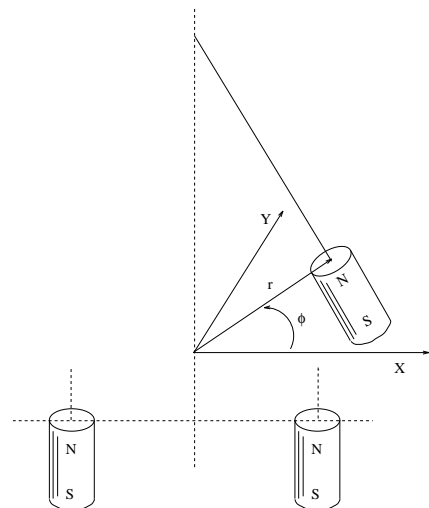


FIGURE 10 – Dispositif du pendule magnétique. Il permet de passer d'un système à champ de force central à un qui ne l'est pas, et d'observer ainsi une trajectoire chaotique.

La façon la plus simple de comprendre ce qui se passe est sûrement de réaliser une petite expérience. Constituons un pendule en accrochant un aimant à un fil et laissons lui la possibilité d'explorer les deux directions  $x$  et  $y$  accessibles avec le fil tendu. Ce système possède quatre degrés de liberté : deux variables de position

$x$ ,  $y$  et deux d'impulsions  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$ . En plaçant un autre aimant statique à l'aplomb du pendule, nous réalisons un dispositif à champ de force central qui nous permet de retrouver les trajectoires de la figure 9. Si nous remplaçons cet aimant par deux aimants situés de part et d'autre de l'aplomb du pendule, nous créons un champ de force qui n'est plus à symétrie centrale. Écarté de sa position d'équilibre, le pendule évolue sous l'influence des deux aimants, et décrit une trajectoire bien définie, compliquée, le plus souvent *chaotique* ! Une trajectoire de ce type est présentée sur la figure 11.

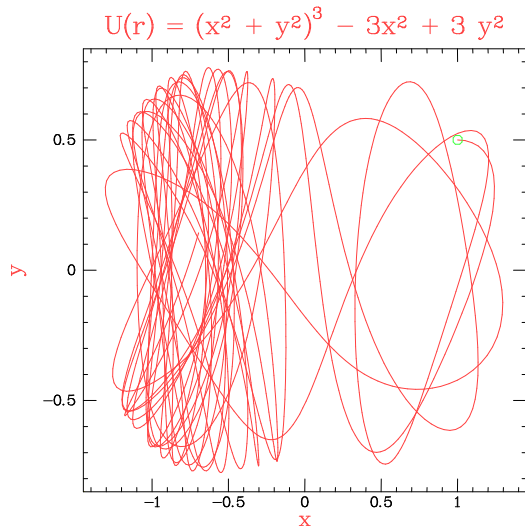


FIGURE 11 – Trajectoire du pendule magnétique soumis à un champ de force non central.

## 6.2 Caractérisation du Chaos : Spectre de puissance

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de FOURIER de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Nous avons vu que les trajectoires d'un système intégrable étaient la composition de mouvements d'oscillation ayant chacun une pulsation  $\omega_i$ . Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations  $\omega_i$ , à leurs harmoniques  $m\omega_i$  avec  $m \in \mathbb{N}$ , et aux combinaisons linéaires de fréquences  $m\omega_i + n\omega_j$  avec  $m$  et  $n \in \mathbb{Z}$  (voir figure 12). Les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapports simple sont dit *quasipériodiques*.

L'oscillation du pendule magnétique dans la configuration avec deux aimants statiques fournit un large spectre de FOURIER s'étendant sur une gamme de fréquences, proche du spectre d'un bruit, comme le montre la figure 13.

L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système. Toutefois, il est possible qu'en plus des raies larges, un système chaotique présente aussi des raies étroites semblables à celles d'un système régulier.

## 6.3 Caractérisation du chaos : sensibilité aux conditions initiales

Une façon plus directe de caractériser une trajectoire chaotique revient à mesurer le degré d'imprévisibilité du système. Certes, bien que non intégrable, le pendule magnétique est un système déterministe, et deux expériences partant de conditions initiales rigoureusement identiques évoluent suivant la même trajectoire.

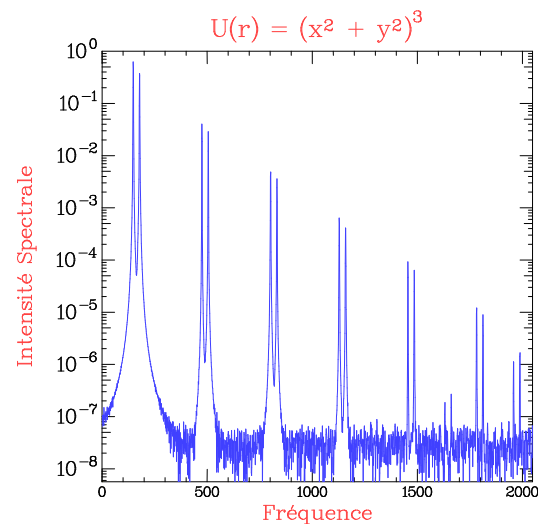


FIGURE 12 – Spectre de puissance du pendule magnétique ayant un comportement régulier. On remarque la présence de deux fréquences et de leurs harmoniques.

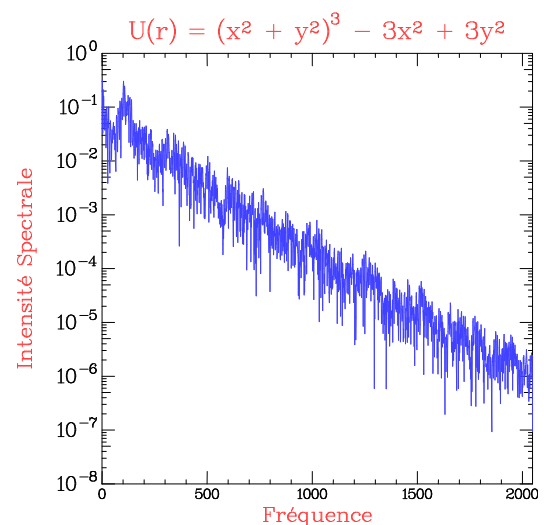


FIGURE 13 – Spectre de puissance du pendule magnétique ayant un comportement chaotique.

Mais si les deux conditions initiales ne sont simplement que voisines, la distance séparant les deux trajectoires dans l'espace des phases évolue très différemment selon que la trajectoire est régulière ou chaotique.

En effet pour une trajectoire régulière, comme celle du pendule magnétique soumis à un champ de force central, des amplitudes d'oscillations mais surtout des fréquences légèrement différentes vont être associées à deux conditions initiales voisines. Il en résulte que les oscillateurs associés vont se décaler linéairement avec le temps comme le font deux montres mal réglées. Pour les trajectoires régulières, la séparation dans l'espace des phases croît **linéairement** avec le temps, comme le montre la figure 14.

Lorsque le système n'est pas intégrable et qu'il présente des solutions chaotiques, comme le pendule magnétique avec deux aimants, les oscillations issues de deux conditions initiales voisines sont fortement corrélées au début de l'évolution, mais, rapidement, la différence entre les deux trajectoires augmente et conduit à une décorrélation totale après quelques oscillations. Cette fois-ci, la distance entre les deux trajectoires augmente **exponentiellement** avec le temps. Notons que cette évolution n'est pas homogène en fonction du temps mais simplement en valeur moyenne comme le montre la figure 15.

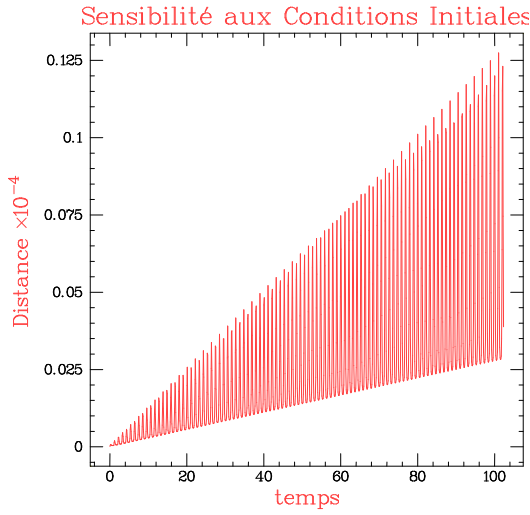


FIGURE 14 – Evolution de la distance entre deux trajectoires voisines pour le pendule magnétique soumis à un champ de force central. Remarquer l'échelle linéaire des distances. Les oscillations rapides correspondent au va et vient de la trajectoire.

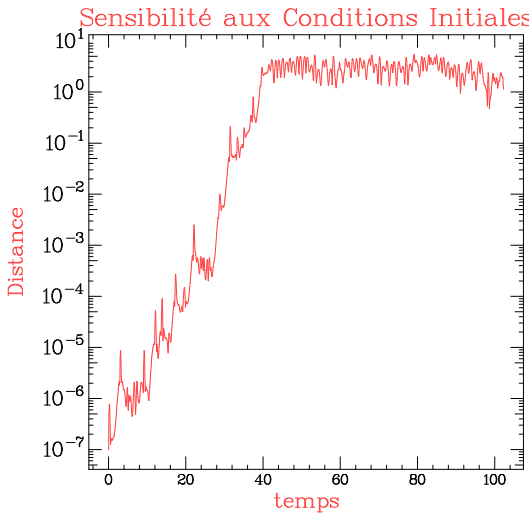


FIGURE 15 – Evolution de la distance entre deux trajectoires voisines chaotiques. Remarquez l'échelle logarithmique. A  $t = 40$ , la distance sature car elle devient égale à la taille du domaine exploré par la trajectoire.

## 7 Systèmes à une fréquence

Revenons d'abord sur les exemples réguliers de la particule dans un potentiel à deux puits et du pendule pesant, afin de faire ressortir certains aspects fondamentaux des systèmes non-linéaires, dont les rôles sont cruciaux en présence de trajectoires chaotiques. Particulièrement, l'importance des harmoniques et la notion de résonance.

### 7.1 Les petites oscillations et l'existence d'harmoniques

La particule dans un potentiel à deux puits permet d'illustrer une méthode de perturbation des trajectoires pour les petites oscillations.

La force agissant sur la particule a la forme :  $f(q) = q - q^3$  ; les petites oscillations ont lieu près des deux points d'équilibre stables caractérisés par  $q = \pm 1$ . Au voisinage du point  $q_+ = 1$ , en faisant le changement de variable  $u = q - 1$ , l'expression de la force devient :  $f(u) = -2u - 3u^2 - u^3$ . Bien évidemment le terme linéaire en  $u$  conduit à une oscillation avec la fréquence

$$\omega_0 = \sqrt{2}.$$

Examinons maintenant séparément le rôle de chacun des termes non-linéaires  $u^2$  et  $u^3$  en les traitant en perturbations. Pour cela nous écrivons :

$$\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - 3\epsilon u^2 \end{cases} \quad (18)$$

et nous allons chercher une solution de la forme :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (19)$$

En résolvant ordre par ordre nous obtenons :

**A l'ordre 0 :**

l'équation linéaire conduisant à  $u_0 = A \cos(\omega_0 t)$  avec  $\omega_0^2 = 2$ .

**A l'ordre 1 :**

$$\begin{cases} du_1/dt = \dot{u}_1 \\ d\dot{u}_1/dt = -2u_1 - 3A^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{cases} \quad (20)$$

En développant le terme en  $\cos^2(\omega_0 t)$  sous la forme :

$$(A^2/2) [1 + \cos(2\omega_0 t)]$$

on décompose  $u_1$  en deux parties  $u_{10}$  et  $u_{12}$  correspondant respectivement aux fréquences 0 et  $2\omega_0$ .

On obtient  $u_{10} = -3A^2/4$ , qui correspond à un déplacement de la position moyenne d'oscillation, lié à la dissymétrie du potentiel, relativement à la transformation  $+u \rightarrow -u$ . Plus "raide" du côté des  $u > 0$ , les excursions sont donc plus faciles du côté  $u < 0$ .<sup>2</sup>

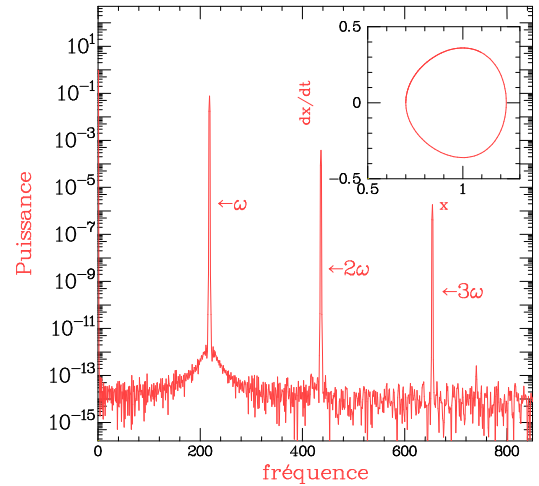


FIGURE 16 – Spectre de puissance de la particule oscillant dans un puit non-linéaire. On remarque la présence d'harmoniques de la fréquence d'oscillation

La contribution à la fréquence  $2\omega_0$  prend la forme  $u_{12} = (A^2/4) \cos(2\omega_0 t)$  et correspond à l'apparition d'un harmonique 2. Comme pour l'harmonique zéro, l'amplitude de l'harmonique deux varie comme  $A^2$ . Ceci justifie donc le traitement en perturbations de ces harmoniques dans la limite des petites oscillations.

Procédons de la même façon pour le terme cubique :

$$\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - \epsilon u^3 \end{cases} \quad (21)$$

L'ordre 0 conduit toujours à la solution linéaire. L'ordre 1 fait apparaître un forçage en  $A^3 \cos^3(\omega_0 t) = A^3/4(\cos 3\omega_0 t +$

2. Quoique cet harmonique zéro soit rarement mentionné, il joue souvent un rôle physique important. Pour ne citer qu'un exemple, c'est lui qui permet d'expliquer la dilatation des solides avec la température  $T$  où  $A^2 \propto k_b T$  ce qui implique  $u_0 \propto T$ . [?]



$3 \cos \omega_0 t$ ), soit une contribution à la fréquence  $3\omega_0$  et une à la fréquence  $\omega_0$ . Si celle à  $3\omega_0$  conduit à la formation d'un harmonique 3 attendu, la contribution à  $\omega_0$  est précisément à la fréquence de résonance du système linéaire. Or elle conduit à un terme en  $u_{31} \propto -(3A^3/4)t \sin \omega t$ , c'est-à-dire à une contribution dont l'amplitude augmente continûment avec le temps ! Ceci est incompatible avec l'hypothèse de perturbation faite au début du calcul. L'échec de la méthode vient du fait que nous avons implicitement supposé que la fréquence du mouvement restait inchangée.

## 7.2 Evolution de la période d'oscillation

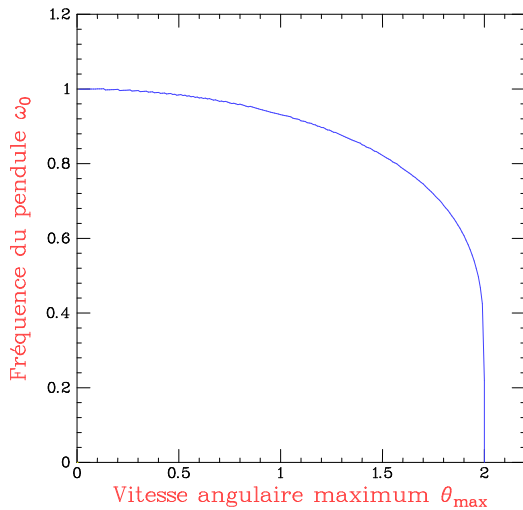


FIGURE 17 – Evolution de la fréquence d'oscillation du pendule en fonction de la vitesse de rotation maximum  $\theta_{max}$ .

Pour obtenir une approche en perturbation correcte, nous devons supposer que  $u$  est une fonction périodique de fréquence  $\omega$  telle que :

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (22)$$

En recherchant la solution sous la forme d'une fonction de la variable  $y = \omega t$  et en développant jusqu'à l'ordre 1, nous obtenons :

$$\begin{cases} du/dy &= v \\ \omega^2 d^2u/dy^2 &= -2u - \epsilon u^3 \end{cases} \quad (23)$$

### A l'ordre 0 :

l'équation linéaire conduisant à  $u_0 = A \cos(\omega_0 t)$  avec  $\omega_0^2 = 2$

### A l'ordre 1 :

On obtient  $2\omega_0\omega_1\ddot{u}_0 + \omega_0^2\ddot{u}_1 = -2u_1 - (A^3/4)(\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)$  (avec  $\ddot{u} = d^2/dy^2$ ). Le paramètre  $\omega_1$  peut être choisis de telle façon que la composante  $\cos \omega_0 t$  disparaisse, ce qui évite le problème précédemment rencontré. La valeur de  $\omega_1$  est ainsi fixée à :

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} \quad (24)$$

Ainsi la fréquence d'oscillation de la bille dans un potentiel à deux puits va d'abord augmenter comme le carré de l'amplitude des oscillations. Dans le cas du pendule, le signe du terme en  $\theta^3$  est opposé, et l'on trouve  $\omega_1 = -A^2/(8\omega_0)$  : sa fréquence décroît avec l'amplitude.

Le calcul en perturbations, que nous avons esquissé, nous montre l'apparition d'harmoniques dus aux termes non linéaires et surtout l'importance de la variation de la fréquence d'oscillation en fonction de l'amplitude.

Dans le cas particulier des systèmes hamiltoniens dont l'espace des phases est de dimension deux, on peut écrire la période des oscillations sous une forme intégrale en fonction de l'énergie totale du système :

$$\frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) = E \quad (25)$$

qui conduit à :

$$t = \sqrt{2m} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \quad (26)$$

où  $q_{min}$  et  $q_{max}$  correspondent aux excursions extrémales de l'oscillation. Notons que l'intégrale de l'équation 26 est elliptique. Nous avons reproduit le comportement typique de la fréquence d'oscillation du pendule en fonction de sa vitesse maximum de rotation sur la figure 17.

## 7.3 Structure d'une résonance

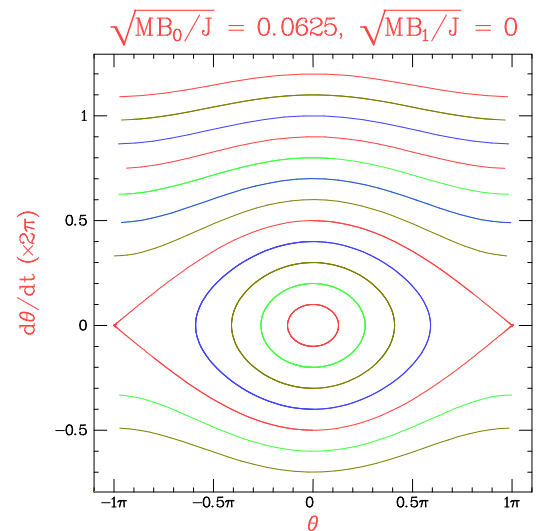


FIGURE 18 – Trajectoires d'une boussole dans un champ magnétique ou d'un pendule dans l'espace des phases. Le domaine des oscillations délimité par la séparatrice définit une résonance.

Une variante du pendule étudié précédemment est constituée d'une boussole dans un champ magnétique. En faisant varier continûment le champ, on modifie le potentiel agissant sur la boussole. Appelons  $\mathcal{M}$  l'aimantation de la boussole,  $J$  son moment d'inertie et  $\vec{B}$  le champ magnétique appliqué. Les équations régissant ce système dynamique sont :

$$\begin{cases} d\theta/dt &= \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt &= -(\mathcal{M}B/J) \sin \theta \end{cases} \quad (27)$$

Si le champ appliqué est nul,  $B = 0$ , les trajectoires dans l'espace des phases sont des droites parallèles à l'axe  $\theta = 0$  puisque  $\dot{\theta} = cte$ . Le mouvement correspondant de la boussole est une rotation uniforme dans un sens ou dans l'autre. Observons maintenant l'évolution de ces trajectoires quand nous augmentons le champ magnétique jusqu'à une valeur  $B_0$ . Comme nous l'avons reproduit sur la figure 18, des trajectoires de type *centre* apparaissent autour de l'origine et des points *cols* surgissent en  $\theta = \pm\pi$  et  $\dot{\theta} = 0$ . Le domaine des oscillations est délimité par la trajectoire particulière que constitue la *séparatrice*, déjà décrite dans le cas du pendule. Les trajectoires de rotations à vitesse constante existent encore mais voient leur vitesse modulée par la présence de trajectoires d'oscillations. Tout se passe, en quelque

sorte, comme si le champ magnétique  $B_0$  avait écarté les trajectoires de rotations pour y insérer un flot d'oscillations.

Cet flot de trajectoires oscillantes est appelé *résonance*.

Il est facile de calculer son extension dans l'espace des phases : en effet, la demi-largeur correspond à la vitesse maximale que prend la boussole en décrivant la séparatrice soit :

$$\dot{\theta}_{max} = 2\sqrt{MB/J} \quad (28)$$

Ainsi la demi-largeur de la résonance croît avec le champ magnétique  $B$ . Puisque  $\dot{\theta}$  est également une pulsation, il est utile de la comparer à la fréquence propre des petites oscillations  $\omega_0 = \sqrt{MB/J}$ . On voit que  $\dot{\theta}_{max} = 2\omega_0$ .

## 8 Systèmes à deux fréquences

Nous nous proposons maintenant d'étudier qualitativement la transition vers le chaos de systèmes hamiltoniens particulièrement simples. Nous avons vu qu'il suffit que leur espace des phases soit de dimension 4 pour qu'ils ne soient pas intégrables. Nous allons introduire trois dispositifs très voisins dans leurs principes, munis d'un paramètre de contrôle qui permet de les faire évoluer depuis une situation intégrable vers une qui ne l'est pas. Par ailleurs nous allons montrer que l'une des dimensions de leurs espaces des phases correspond à un comportement trivial ; on peut donc décrire leur évolution dans un espace des phases plus commode à représenter, car ayant seulement trois dimensions.

### 8.1 Boussole soumise à deux champs

Plaçons une boussole dans un champ magnétique statique  $B_0$  et rapprochons la suffisamment d'une seconde boussole pour qu'existe un couplage magnétique entre elles. Nous venons de construire un système évoluant dans un espace des phases de dimension 4 puisque nous devons utiliser les variables  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  pour décrire la première boussole, et  $\phi$  et  $\dot{\phi}$  pour la seconde. Ce système est non linéaire et possède suffisamment de degrés de liberté pour présenter des trajectoires chaotiques.

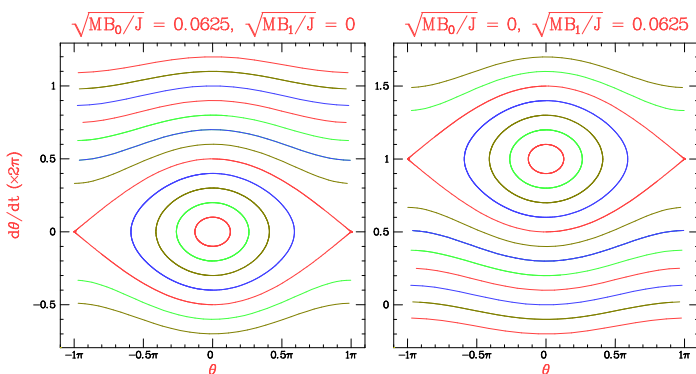


FIGURE 19 – Dans les deux cas limites où l'un des champs est nul, l'espace des phases correspond à l'existence d'une résonance centrée en  $\dot{\theta} = 0$  quand  $B_1 = 0$  (à gauche) tandis qu'elle est centrée en  $\dot{\theta} = 1$  dans le cas  $B_0 = 0$  (à droite).

Supposons maintenant que la seconde boussole soit beaucoup plus grosse et beaucoup plus lourde que la première : son moment d'inertie  $J_\phi$  est beaucoup plus grand que celui de la première. Dès lors, les mouvements de la première boussole auront peu d'influence sur la seconde tandis que l'inverse ne sera pas vrai. Dans la limite où le rapport des moments d'inertie tend vers l'infini, les mouvements de la grosse boussole ne sont pas du tout affectés par ceux de la première et ils se réduisent par exemple, à

une rotation à vitesse constante  $\dot{\phi} = \Omega$ . Ce nouvel invariant remplace avantageusement celui de l'énergie du système, puisqu'il permet de ne considérer qu'un espace des phases à trois dimensions :  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\phi$ .

D'un point de vue pratique, le rôle de la grande boussole se résume à imposer un champ magnétique  $B_1$  tournant avec une pulsation  $\Omega$ . Une façon de réaliser ce dispositif consiste à placer une seule boussole à la fois dans un champ magnétique  $B_0$  fixe et dans un champ  $B_1$  tournant. En notant  $\mathcal{M}$  le moment magnétique de la boussole et  $J$  son moment d'inertie, les équations de ce système dynamique prennent la forme :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = -\frac{\mathcal{M}B_0}{J} \sin \theta - \frac{\mathcal{M}B_1}{J} \sin(\theta - \phi) \\ d\phi/dt = \Omega \end{cases} \quad (29)$$

Il est intéressant de remarquer qu'en coupant le champ statique et en ne soumettant la boussole qu'au champ tournant (soit  $B_0 = 0$  et  $B_1 \neq 0$ ), on retrouve le problème d'une boussole dans un champ fixe (c'est-à-dire du pendule pesant) en effectuant le changement de variable  $\theta_1 = \theta - \Omega t$ . Dans ce nouveau référentiel, le champ tournant engendre sur l'axe  $\dot{\theta}$  une résonance décalée de la quantité  $\Omega$ . Quand les deux champs sont non nuls, chacun donne lieu à une résonance : le dispositif est dit à deux résonances.

### 8.2 Critère de stochasticité

Dans le cas de la boussole, une résonance correspond à un domaine où ses mouvements sont des oscillations autour du champ magnétique associé. Une résonance correspond à un *domaine de piégeage*. De ce fait il est impossible à une trajectoire d'appartenir à la fois à la résonance associée au champ fixe et à celle du champ tournant. Comme la largeur des résonances varie avec l'amplitude du champ associé, on conçoit aisément qu'en augmentant l'amplitude des champs, un problème apparaît lorsque les deux résonances viennent en contact ou même se chevauchent. Dans cette situation la boussole ne sait plus quel champ suivre et adopte généralement une trajectoire chaotique, suivant irrégulièrement l'un puis l'autre. Inversement on s'attend à des mouvements réguliers lorsque les amplitudes des champs sont faibles.

Ce raisonnement permet d'obtenir un critère rudimentaire mais simple d'existence de trajectoires chaotiques : le recouvrement des résonances a lieu quand la somme de leurs demi-largeurs est égale à la distance qui les sépare. C'est le **critère de stochasticité** :

$$\mathcal{S} = \frac{2\sqrt{\mathcal{M}B_0/J} + 2\sqrt{\mathcal{M}B_1/J}}{\Omega} = \frac{2(\omega_0 + \omega_1)}{\Omega} \quad (30)$$

où  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont respectivement les fréquences propres de la boussole dans le champ fixe et dans le champ tournant.

Nous voyons que le recouvrement des résonances a lieu lorsque  $\mathcal{S} = 1$ , ce qui peut être atteint soit en augmentant l'amplitude des champs, soit en réduisant la fréquence du champ tournant  $\Omega$ .

Ce critère peut s'appliquer à chacun des trois systèmes que nous avons décrits, où il existe plusieurs résonances décalées les unes des autres suivant l'axe  $\dot{\theta}$  d'une quantité égale à la fréquence  $\Omega$ .

## 9 Section de POINCARÉ

Jusqu'à présent, nous nous sommes bien gardés de donner une représentation de l'espace des phases (tridimensionnel !) de la boussole ou du pendule paramétrique. Nous avons aussi utilisé pour ces systèmes le concept de résonance introduit pour un espace des phases à deux dimensions, sans justifier sa validité dans le cas de trajectoires chaotiques. En fait, à l'aide d'une représentation appropriée de ces espaces des phases, nous allons voir que les résonances existent globalement dans le système de la boussole mais qu'elles peuvent être sujettes à des perturbations importantes.

### 9.1 Stroboscopie des trajectoires

La boussole et le pendule paramétrique sont tous deux perturbés par une composante périodique de fréquence  $\Omega$ . Une façon naturelle de vérifier si ces dispositifs tournent rond ou oscillent avec la fréquence de la perturbation consiste à les stroboscooper, c'est-à-dire à en observer la position angulaire  $\theta$  à des intervalles de temps réguliers  $t_n = n2\pi/\Omega$ . C'est équivalent à faire une coupe de la trajectoire de la boussole dans un plan  $\phi = \text{cte}$ . Au lieu d'une trajectoire continue, nous avons maintenant une série de points d'intersection dans un plan  $\theta, \dot{\theta}$  : c'est une coupe de POINCARÉ (nous avons utilisé la périodicité de  $\phi$  pour ramener la trajectoire dans l'intervalle d'étude  $[0, 2\pi]$ ). La coupe de POINCARÉ est un outil puissant permettant de réduire l'espace des phases d'une dimension.

Coupe de Poincaré

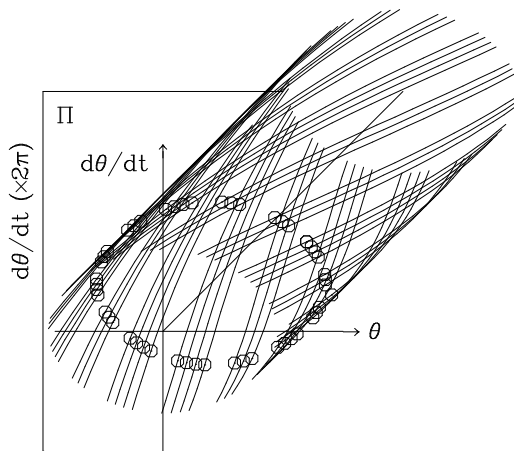


FIGURE 20 – Principe de la coupe de POINCARÉ de la boussole.

Dans les cas de la boussole ou du pendule paramétrique, on se ramène donc au plan  $\theta, \dot{\theta}$ , semblable à celui utilisé pour représenter les trajectoires du pendule simple. Toutefois ici, une trajectoire est représentée non par une courbe continue, mais par une suite discrète de points (En principe il serait judicieux de les numéroter suivant leur ordre d'apparition, quoique cela soit rarement fait en pratique).

Comme le mapping standard correspond directement à la coupe de POINCARÉ d'une boussole soumise à un champ pulsé, ces deux types de diagrammes peuvent être directement comparés.

### 9.2 Coupe de POINCARÉ

Quoique la trajectoire d'un système dynamique quelconque ne présente pas forcément de périodicité imposée par une perturbation extérieure, il est cependant toujours possible de définir

une section de POINCARÉ comme l'ensemble des points d'intersection d'une trajectoire avec un plan quelconque de l'espace des phases. On ne retient que les points correspondant à une intersection se faisant dans un sens donné. Cette fois-ci, le temps qui sépare deux intersections consécutives n'est pas forcément constant.

Une coupe de POINCARÉ réduit l'information que contient la trajectoire complète, et il est possible qu'elle ne soit pas représentative de toute la dynamique. Pour avoir une vue réaliste de la trajectoire, il faut faire varier le plan de coupe (c'est-à-dire la phase de la stroboscopie).

### 9.3 Allure d'une coupe de POINCARÉ de la boussole

Pour illustrer ce concept, observons la coupe représentée sur la figure 21, effectuée à  $\phi = 0$ , avec des champs magnétiques d'amplitudes égales, et à  $S = 1/2$ .

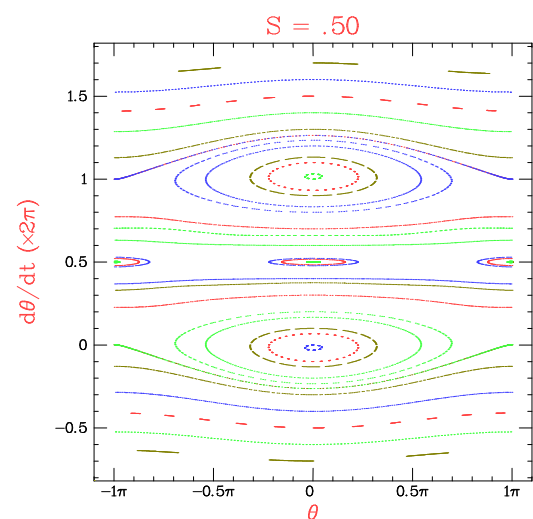


FIGURE 21 – Coupe de POINCARÉ de la boussole à  $S = 1/2$ . En variant les conditions initiales, on distingue différentes régions de l'espace des phases, et notamment les résonances.

Pour certaines conditions initiales, les séries de points s'alignent sur une courbe bien définie. On retrouve ainsi l'allure des deux résonances et des trajectoires de rotations.

## 10 Trajectoires passantes

Nous allons décrire ici l'évolution des trajectoires de rotation situées entre les deux résonances principales. Il est facile d'imaginer que les trajectoires passantes sont peu affectées par les résonances tant que  $S \ll 1$ , mais qu'elles le deviennent dès que  $S$  se rapproche de 1. Si cette image est qualitativement correcte, elle est toutefois altérée par l'existence d'accrochages de fréquences. Il en résulte une structure particulière de l'espace des phases.

Nous allons chercher à calculer une de ces trajectoires sous la forme d'un développement en  $\epsilon$  comme nous l'avons déjà fait. Nous supposons que  $B_0$  et  $B_1$  proportionnel à  $\epsilon$  (donc petit). Nous cherchons ainsi à résoudre :

$$\ddot{\theta} = -\epsilon M \sin \theta - \epsilon P \sin(\theta - \Omega t) \quad (31)$$

Où  $M = \mathcal{M}B_0/J$  et  $P = \mathcal{M}B_1/J$ . Nous cherchons une solution de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t) + \epsilon^2 \theta_2(t) + \dots \quad (32)$$

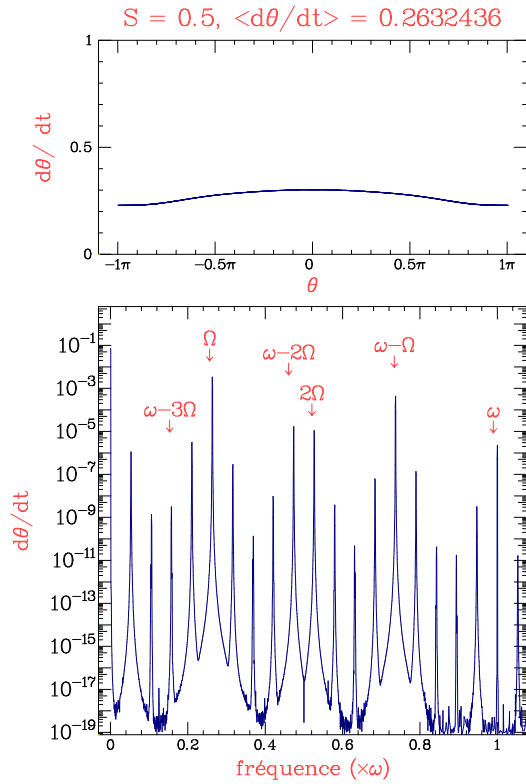


FIGURE 22 – Analyse d’une trajectoire passante. En haut section de Poincaré, on remarque que la trajectoire est dense. En bas spectre de Fourier de la vitesse angulaire.

**A l’ordre 0 :** nous avons à résoudre :  $\ddot{\theta}_0 = 0$ , ce qui conduit à :

$$\theta_0(t) = \phi + \omega t + \dots$$

Il s’agit d’une trajectoire de rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  ; le terme de phase  $\phi$  correspond à la multiplicité des choix possibles pour l’origine des phases.

**A l’ordre 1 :** nous avons à résoudre :

$$\ddot{\theta}_1 = -M \sin(\phi + \omega t) - P \sin(\phi + (\omega - \Omega)t)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\theta_1(t) = \frac{M}{\omega^2} \sin(\theta_0(t)) + \frac{P}{\omega'^2} \sin(\theta'_0(t))$$

Où  $\theta'_0(t) = (\phi + (\omega - \Omega)t)$ . En tournant, la boussole ressent le champ fixe comme une perturbation périodique de fréquence  $\omega$ . Sa vitesse de rotation est modulée à cette fréquence. De façon analogue, le champ tournant impose une perturbation à la fréquence  $\omega' = \omega - \Omega$ . Nous venons de montrer que le spectre de fréquence de la vitesse de la boussole est constitué d’au moins deux raies aux fréquences :  $\omega$  et  $\omega'$ .

**A l’ordre 2 :** nous avons à résoudre :

$$\ddot{\theta} = -\epsilon M \sin(\theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t)) - \epsilon P \sin(\theta'_0(t) + \epsilon \theta'_1(t))$$

En développant les sinus et en gardant les terme en  $\epsilon^2$  on a :

$$\ddot{\theta}_2 = -M \cos \theta_0 \left[ \frac{M}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{P}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right] - M \cos \theta'_0 \left[ \frac{M}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{P}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right]$$

Le terme  $\cos \theta_0 \sin \theta_0$  conduit à une perturbation en  $\sin(2\phi + 2\omega t)$  c’est à dire à un harmonique  $2\omega$  ; de même le terme en

$\cos \theta'_0 \sin \theta'_0$  conduit à l’harmonique  $2\omega'$ . Les termes croisés  $\cos \theta_0 \sin \theta'_0$  et  $\cos \theta'_0 \sin \theta_0$  donnent lieu à des termes  $\theta_0 \pm \theta'_0$  et  $\theta'_0 \pm \theta_0$  soit à des perturbations de fréquences  $\omega \pm \omega'$  et  $\omega' \pm \omega$ . En général nous pouvons déterminer l’expression de  $\theta_2$  et poursuivre le développement aux ordres supérieurs. Cependant dans le cas où  $\omega = \Omega/2 = -\omega'$ , nous avons à résoudre l’équation :  $\ddot{\theta}_2 \sim -\sin(2\phi)$ . Ce qui conduit à un terme qui croît en  $t^2$  qui n’est pas petit comme nous l’avions supposé au début du calcul en 32. Dans le cas  $\omega = \Omega/2$  nous avons un accrochage de fréquences.

## 10.1 Accrochage 1/2

Quand deux oscillateurs s’accrochent, il est facile de comprendre que leur différence de phase ne peut pas être quelconque. Dans l’exemple de l’accrochage 1/2, nous venons de montrer que la boussole est soumise à une perturbation en  $\sin(2\phi)$ . Pour décrire correctement l’accrochage il faut reprendre le calcul en perturbation mais en laissant à la fréquence  $\omega$  la liberté d’évoluer, comme nous l’avions fait en 7.2. Plus précisément, comme une modulation de fréquence n’est autre qu’une modulation de phase, nous allons supposer que  $\phi$  varie dans le temps. Nous allons chercher une solution de la forme :

$$\theta = \frac{\Omega}{2}t + \phi(t) + \dots$$

Nous allons analyser le mouvement correspondant à cet accrochage dans un cas particulier. Si nous choisissons  $M = P$ , l’équation 31 devient :

$$\ddot{\phi} = -2\epsilon M \sin \phi \cos(\Omega t/2)$$

Remarquons que dans cette situation, le point correspondant à  $\phi = 0$  et  $\dot{\phi} = \Omega/2$  est un point fixe tout comme le point correspondant à  $\phi = \pi$ . Pour appréhender la solution, nous allons supposer que la phase  $\phi$  est voisine de 0 mais peut osciller lentement autour de ce point fixe :

$$\phi = \exp(\epsilon \omega_0 t) [u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots]$$

**A l’ordre 0 :** on obtient :  $\ddot{u}_0 = 0$

**A l’ordre 1 :** nous avons à résoudre :

$$\ddot{u}_1 - i\omega_0 \dot{u}_0 = -2Mu_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (33)$$

ce qui conduit à :

$$\dot{u}_0 = 0 \text{ et } u_1 = \frac{8M}{\Omega^2} u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

**A l’ordre 2 :** nous avons à résoudre :

$$\ddot{u}_2 - i\omega_0 \dot{u}_1 - \omega_0^2 u_0 = -2Mu_1 \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$$

En remplaçant  $u_1$  par son expression 33, on résoud séparément les termes qui ne dépendent pas explicitement du temps, ceux en  $\cos(\Omega t)$  et ceux en  $\cos(\Omega/2t)$ . Ceci permet de trouver la forme de  $\omega_0$  :

$$\omega_0^2 = \frac{8M^2}{\Omega^2}$$

Nous voyons ainsi que la fréquence d’oscillation de la phase est parfaitement définie puisqu’elle vaut  $\epsilon \omega_0$ . Près des points fixe



$\theta = 0, \dot{\theta} = 1/2$  et  $\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 1/2$ , on assiste à une oscillation de phase qui correspond aux trajectoires elliptiques visibles sur la figure 21.

Les équations en  $\cos(\Omega t)$  et  $\cos(\Omega/2t)$  permettent de décrire la forme de  $u_2$  :

$$\begin{aligned} u_{21} &= i\omega_0 \frac{16M}{\Omega^3} u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ u_{22} &= -u_0 \frac{32M^2}{\Omega^4} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (34)$$

## 10.2 Le spectre de la vitesse

Nous pouvons généraliser les résultats du développement en  $\epsilon$  en considérant le spectre de fréquence de la vitesse de la boussole : tant que les perturbations périodiques ne sont pas de fréquence nulle, les ordres plus élevés en  $\epsilon$  font apparaître des fréquences du type  $p\omega \pm q\omega'$  avec  $p$  et  $q \in \mathbb{Z}$ . Ce spectre est compliqué mais toutes les raies peuvent s'expliquer par des combinaisons des fréquences  $\omega$  et  $\omega'$  qui définissent le *nombre de rotation*  $\sigma = \omega/\omega'$ .

## 10.3 Nombre de rotation rationnel

Chaque fois que ce nombre de rotation  $\sigma$  est rationnel, donc égal à  $p/q$ , le développement en  $\epsilon$  est singulier : il apparaît un *accrochage de fréquences*. La trajectoire de rotation se scinde en un chapelet de  $q$  petites résonances. Les  $q$  résonances font apparaître  $q$  points centres et autant de points cols. On peut voir un exemple de ce phénomène sur la figure 21. Lors d'un accrochage de fréquences, on pourrait penser que des deux fréquences de départ  $\omega$  et  $\omega'$  il n'en subsiste plus qu'une seule ; en fait, comme nous l'avons vu dans l'analyse du cas particulier de l'accrochage  $1/2$ , l'oscillation de phase fait apparaître une nouvelle fréquence  $\epsilon\omega_0$  qui peut à nouveau présenter une relation de commensurabilité ou non avec la fréquence fondamentale. Dans le cas générale, deux fréquences subsistent dans le système.

Par ailleurs, l'amplitude des chapelets de résonances est d'autant plus grande que le rationnel est simple, c'est-à-dire que  $q$  est petit. A égale distance des deux résonances fondamentales, on observe ainsi un chapelet de deux résonances lié à l'accrochage  $1/2$ . Celles de l'accrochage  $1/3$  sont plus faibles et ainsi de suite.

## 10.4 Tores de K.A.M.

Si le rapport  $\sigma = \omega/(\Omega - \omega)$  est un nombre irrationnel, le mécanisme d'accrochage précédent n'a plus lieu et le développement en  $\epsilon$  peut se construire. Cependant, il est possible que ce développement ne converge pas. La trajectoire subsiste tant que la perturbation liée aux résonances n'est pas trop forte. En introduisant le paramètre de stochasticité  $\mathcal{S}$  nous avons montré comment les résonances principales pouvaient perturber les trajectoires passantes. L'apparition de chapelets de résonances secondaires va aussi contribuer à déstabiliser les trajectoires irrationnelles voisines. En d'autres mots, certaines trajectoires vont rester régulières pour un système non intégrable. Cette proposition constitue le *théorème KAM*.

Sa preuve fut un morceau de bravoure et d'ingéniosité mathématiques de la part de KOLMOGOROV, ARNOLD et MOSER. Son importance est capitale car il nous permet d'affirmer que certaines trajectoires passantes comprises entre les deux résonances principales resteront rigoureusement régulières jusqu'à une certaine valeur seuil du paramètre de stochasticité. Ce type de trajectoire correspond à des séries de points se plaçant sur les courbes

bien définies de la figure 21. Ce théorème permet de justifier le développement en  $\epsilon$  que nous avons ébauché. En principe, il permet de dire le domaine du paramètre  $\epsilon$  pour lequel les trajectoires restent régulières.

## 11 Trajectoires appartenant à une résonance

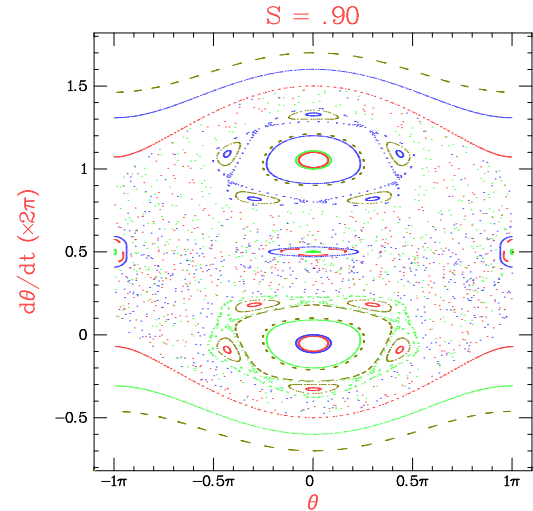


FIGURE 23 – Coupe de POINCARÉ de la boussole à  $\mathcal{S} = .9$ . On remarquera l'apparition des 5 îlots correspondant à un accrochage  $1/5$ .

Nous venons de voir que le rapport  $\sigma$  des deux fréquences qui caractérise une trajectoire passante, détermine la stabilité de cette dernière, au moins pour un paramètre de stochasticité faible. Comme ce rapport change de 0 à 1 quand la vitesse angulaire varie depuis 0, près de la résonance du champ fixe, jusqu'à  $\Omega$ , près de celle du champ tournant, nous allons observer une alternance de rationnels et d'irrationnels qui conduit à une structure de l'espace des phases très complexe. Examinons la situation au sein d'une des résonances principales.

Sans que cela soit restrictif, considérons le cas de la résonance associée au champ fixe. Au premier ordre, la boussole oscille autour du champ fixe avec la fréquence  $\omega$ . Elle est perturbée par le champ tournant qui induit une composante d'oscillation à la fréquence  $\Omega$ . Nous sommes donc en présence d'un système ayant deux fréquences, comme pour les trajectoires passantes. De la même façon, la stabilité des trajectoires va dépendre du caractère rationnel ou non du rapport  $\sigma = \omega/\Omega$ .

### 11.1 Résonances secondaires

C'est à ce stade que le comportement non-linéaire de l'oscillation de la boussole prend toute son importance. Comme nous le montre la figure 17, la fréquence évolue continûment depuis la fréquence des petites oscillations  $\omega_l$  jusqu'à 0 pour la résonance. La situation est assez comparable à celle des trajectoires passantes où la vitesse angulaire varie continûment d'une résonance à l'autre. Toutefois, le domaine des oscillations linéaires est un peu singulier puisque la variation de la fréquence  $\omega$  est du second ordre pour  $\omega \approx \omega_l$ .

On assiste donc à une alternance d'accrochages et de trajectoires régulières associées à des tores de KAM. Les accrochages font apparaître des chapelets périodiques d'îlots secondaires comme ceux de la figure 23. Dans le domaine où les oscillations sont presque linéaires, l'amplitude des harmoniques est

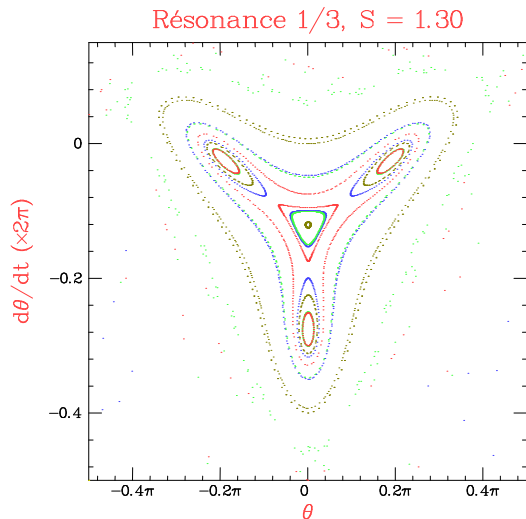


FIGURE 24 – Coupe de POINCARÉ de la boussole à  $S = 1.30$ . Accrochage  $1/3$ , remarquer que les points cols et les points centres ne sont pas répartis sur une ellipse.

petite et les accrochages sont très peu marqués. Par contre, au fur et à mesure que l'on s'écarte du centre de la résonance, les accrochages deviennent plus forts et les îlots secondaires plus larges.

Les différents accrochages ont un rapport de fréquence  $\omega_l/\Omega$  borné par  $\omega_l/\Omega = \sqrt{MB_0/J}/\Omega$ . On remarque ainsi que lorsque l'on augmente le champ magnétique  $B_0$ , les îlots d'un accrochage  $p/q$  s'écartent du centre de la résonance. Ainsi, l'augmentation de  $\omega_l$  est compensée par la décroissance de la fréquence d'oscillation avec son amplitude. Comme les accrochages sont d'autant plus intenses que le rationnel qui les caractérise est petit, la perturbation qu'ils apportent est petite pour  $\omega_l/\Omega \ll 1$  et devient très importante quand  $\omega_l/\Omega$  approche  $1/3$  et  $1/2$ .

La séparatrice de la résonance correspond à une trajectoire très sensible à toute perturbation (celle du pendule en équilibre instable). C'est également dans son voisinage que la fréquence d'oscillation varie le plus rapidement jusqu'à s'annuler. Elle constitue donc la première région de l'espace des phases à devenir chaotique quand on augmente  $S$ , comme on peut le voir sur la figure 21.

## 11.2 Hiérarchie des résonances

Les accrochages ne sont pas tous de la même nature et les plus forts sont particuliers. Si notre description des accrochages  $p/q$  avec  $q > 3$  est bonne, alors les accrochages  $1/3$  et surtout  $1/2$  sont très particuliers. Avant de les détailler, précisons pour quelles valeurs de  $S$  on peut s'attendre à les observer. Choisissons une même amplitude pour le champ fixe et le champ tournant. Alors  $\omega_l/\Omega = S/4$ . Pour atteindre le rapport  $1/3$ , il faut avoir  $S = 4/3$  (2 pour la résonance  $1/2$ ), c'est-à-dire être dans un domaine où les résonances se recouvrent. Dans ce régime, le chaos affecte la plupart des trajectoires, et seule le cœur de la résonance n'est pas chaotique.

L'accrochage  $1/3$  montre une première particularité : les trois petits îlots auxquels il donne naissance apparaissent à distance finie du cœur de la résonance et non pas en son centre, comme dans les cas des accrochages  $1/5$  ou  $1/4$ , par exemple. De plus la structure de ces îlots est différente de celle observée pour les autres accrochages (voir fig. 24).

L'accrochage  $1/2$  est encore plus particulier : tandis que les autres accrochages laissent le cœur de la résonance indemne, l'accrochage  $1/2$  scinde la résonance en deux. Le point centre du cœur se transforme en un point col tandis que deux nouveaux

points centres apparaissent de part et d'autre comme on peut le voir sur la figure 25.

## 11.3 Disparition d'une résonance par doublement de période

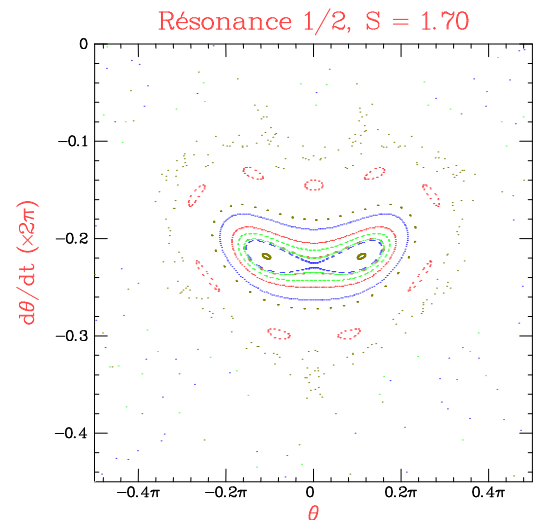


FIGURE 25 – Coupe de POINCARÉ de la boussole à  $S = 1.70$ . Accrochage  $1/2$ . Remarquer comment cet accrochage scinde la résonance en deux. Les neuf petits îlots qui décorent les deux résonances centrales correspondent à l'accrochage  $4/9$ .

Le scénario que nous venons de décrire se reproduit pour ces résonances secondaires. Au cœur de la résonance, les deux fréquences sont commensurables ; il y a donc accrochage de fréquences entre les mouvements d'oscillation et ceux induits par la perturbation. L'existence d'un accrochage traduit la sensibilité de ces deux mouvements à leur phase relative. Comme celle-ci est différente de la phase au point centre de la résonance, elle va osciller autour cette valeur. Le chapelet d'îlots manifeste cette oscillation.

Quand ces îlots sont très petits, l'oscillation de la différence de phase relative est très lente et le rapport de cette fréquence à celle associée à  $p/q$  nous fournit un nouveau nombre de rotation  $\sigma_1$ . Suivant les valeurs de  $\sigma_1$ , nous observons de nouveaux accrochages ou des trajectoires régulières. Lorsque  $S$  augmente,  $\sigma_1$  augmente aussi et la résonance secondaire se scinde en deux pour  $\sigma_1 \approx 1/2$ . Les nouvelles résonances issues de la résonance secondaire vont se comporter de la même façon, et l'on assiste à une cascade de division de résonance par deux.

Nous voyons ainsi que la structure des résonances est hiérarchique : une résonance engendre des résonances qui engendrent elles-mêmes des résonances et ainsi de suite. On dit que l'espace des phases a une structure *auto-similaire*.

## 12 Stochasticité à grande échelle

Le scénario que nous venons d'explicitier est valable à toute valeur du paramètre  $S$ . Des successions de résonances secondaires apparaissent, mais la multiplication des résonances ne consiste pas directement le chaos. Pourtant nous avons dit que les trajectoires stochastiques devenaient plus nombreuses quand  $S$  augmente. Par l'accroissement des largeurs relatives des résonance conduit au chaos : l'espace disponible pour les tores de KAM décroît, leurs formes sont de plus en plus torturées et il finissent par se déchirer.

Une façon de quantifier ce résultat consiste à inspecter les résonances aux différents ordres hiérarchiques. Si nous ne considérons que les trajectoires passantes, les deux résonances principales constituent la première génération. Imaginons que nous étudions la trajectoire correspondant au nombre de rotation irrationnel  $\sigma$ , des résonances filles apparaissent de part et d'autre de la trajectoire associée à  $\sigma$ . On peut reprendre ces résonances comme une nouvelle base et réitérer l'opération. Se faisant, l'ampleur des résonances filles que l'on trouve soit croît, soit décroît au fur et à mesure des itérations. Dans le deuxième cas, toutes les trajectoires apparaissent lisses aux petites échelles : elles sont régulières. Dans le premier cas les résonances poussent les trajectoires et les déforment à toutes les échelles. C'est ainsi que les trajectoires associées à des  $\sigma$  irrationnels sont détruites. La valeur seuil que nous avons évoquée pour la stabilité des tores de K.A.M. correspond précisément à ce changement de comportement.

### 12.1 Allure de l'espace des phases

L'étude locale de l'espace des phases que nous venons de décrire permet d'entrevoir son allure : une structure imbriquée de résonances, des trajectoires régulières près de leurs cœurs et des trajectoires chaotiques près des séparatrices. Le mécanisme d'amplification des résonances et de destruction des tores de K.A.M. conduit à l'extension des domaines chaotiques.

Notons enfin que deux trajectoires régulières sont toujours nettement séparées dans l'espace des phases, tandis que deux trajectoires chaotiques s'enchevêtrent et forment une mer stochastique, à la condition de ne pas être séparées par une trajectoire régulière qui constitue alors une barrière étanche.

### 12.2 Disparition du dernier tore de KAM

Ainsi tant qu'il reste un seul tore de K.A.M. entre les deux résonances principales de la boussole, les trajectoires chaotiques qui, très vite, sont apparues près de la séparatrice, ne sont pas reliées entre elles et restent localisées autour de leurs résonances. Quand ce dernier tore lâche, les trajectoires chaotiques explorent les voisinages de chacune des résonances : le chaos qui apparaît est dit à *grande échelle*. L'observation des mouvements de la boussole montre son comportement erratique d'un champ à l'autre. Elle oscille quelque peu autour du champ fixe, accélère puis oscille autour du champ tournant, s'arrête brutalement avant d'osciller à nouveau autour du champ fixe et ainsi de suite.

## 13 Effets des frottements

Les frottements sont à l'origine de la dissipation d'énergie. De ce fait, ils ont pour effet de ramener un système vers son (ou l'un de ses) minimum(s) d'énergie potentielle. Ils sélectionnent de cette façon une (ou un petit nombre de) trajectoire(s) pour l'évolution du système. En comparaison aux systèmes hamiltoniens, pour lesquels une trajectoire unique est déterminée par chaque condition initiale, la dissipation joue un rôle simplificateur : elle permet de ne considérer que les trajectoires correspondant à un minimum d'énergie potentielle.

### 13.1 L'oscillateur amorti

Illustrons ce phénomène sur un système linéaire où nous pouvons tout calculer exactement : l'oscillateur harmonique amorti.

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0.$$

Les solutions sont de la forme :

$$x_0(t) = x_{t=0} \exp\left(\frac{-\gamma t}{2m}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}t + \phi\right)$$

Quand  $4km > \gamma^2$ , la trajectoire spirale l'origine de l'espace des phases. Si  $4km < \gamma^2$ , elle ne tourne plus et converge rapidement vers l'origine (l'amortissement est surcritique).

### 13.2 La contraction des aires

De façon générale, dans tous les systèmes dissipatifs, et en l'absence d'apport d'énergie, tous les points de l'espace des phases aboutissent à l'origine. Tout élément de volume de celui-ci se contracte en un point, au cours de son évolution.

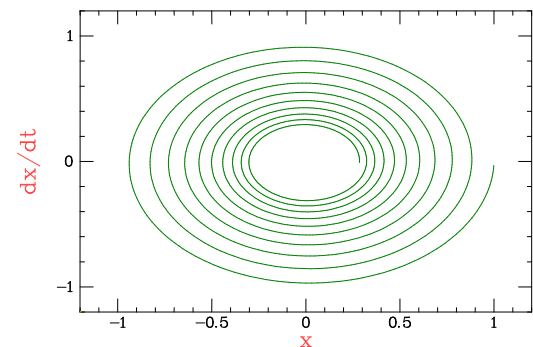


FIGURE 26 – Trajectoires de l'oscillateur amorti. La contraction des aires amène toutes les conditions initiales à l'origine.

### 13.3 Attracteur étrange et dimension fractale

Le chaos déterministe résiste aux frottements une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace des phases que l'on appelle un *attracteur étrange*. Un exemple d'attracteur étrange est donné par la figure ?? . Il s'agit de la coupe de POINCARÉ d'une particule dans un potentiel à deux puits soumise à une excitation périodique.

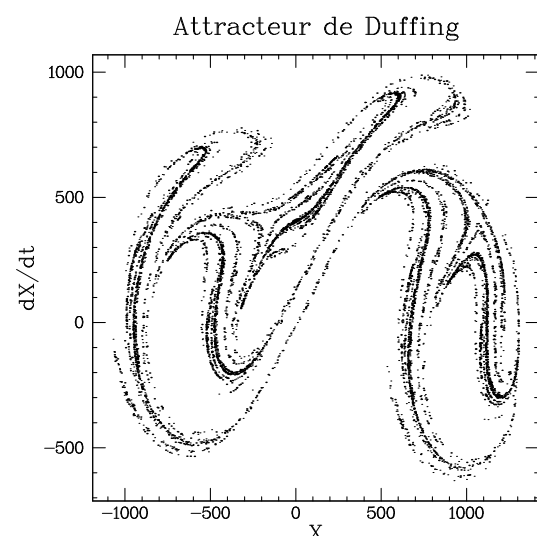


FIGURE 27 – Attracteur étrange obtenu à l'aide d'un circuit électronique représentant une particule dans un potentiel à deux puits soumise à une perturbation sinusoïdale.

Ce nom d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace des phases. En imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange...

## Bibliographie

- [1] L. LANDAU et E. LIFCHITZ *Mécanique* Ed. Mir
- [2] V. ARNOLD *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* Ed. Mir
- [3] V. ARNOLD *Equations Différentielles Ordinaires* Ed. Mir
- [4] A.J. LICHTENBERG and M.A. LIBERMAN, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag (1983)
- [5] P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Ed. Hermann (1984)
- [6] P. MANNEVILLE, *Structures Dissipatives Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay, 91 191 Gif-sur-Yvette Cedex, (1991)
- [7] H.G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos*, VCH, (1989)
- [8] M. BERRY, *Nonlinear Dynamics* Ed. S. JORNA American Institute of Physics. New-York (1978) p. 16
- [9] B.V. CHIRIKOV *Physics Reports* **52** (1979) p. 263