

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELÉTRICA
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

CALLEBE SOARES BARBOSA

**IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO RADIX-2 PARA
CÁLCULO DA FFT EM FPGA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2017

CALLEBE SOARES BARBOSA

IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO RADIX-2 PARA CÁLCULO DA FFT EM FPGA

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Engenharia Elétrica da Coordenação de Engenharia Elétrica - CO-ELT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Câmpus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Luiz Bertotti

PATO BRANCO

2017

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO RADIX-2 PARA CÁLCULO DA FFT EM FPGA** do acadêmico **Callebe Soares Barbosa** foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata da banca examinadora **Nº 123 de 2017.**

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Prof. Dr. Fábio Luiz Bertotti

Prof. Dr. Stephen Hawking

Dr. Brian Greene

Prof. Dr. Michio Kaku

Prof. Richard Feynman

Aqui vai o texto da dedicatória. Aqui vai o texto da dedicatória. Aqui vai o texto da dedicatória.

Acreditar é mais fácil do que pensar. Daí existem muito mais crentes do que pensadores.

Bruce Calvert

AGRADECIMENTOS

Aqui são os agradecimentos.

RESUMO

Escreva aqui o texto de seu resumo... UTFPR_{T_EX}

Palavras-chave: L_AT_EX, FFT, Transformada Rápida de Fourier, Sistemas Digitais, FPGA, Spartan 3E.

ABSTRACT

Write here the English version of your Resumo...

Keywords: L^AT_EX, FFT, Fast Fourier Transform, Digital System, FPGA, Spartan 3E, Digital Signal Process.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Batimento Cardíaco em 3D	15
Figura 2:	Índice BM & FBOVESPA, São Paulo - Brasil	15
Figura 3:	Temperatura de um Volume de Água em um Ebulidor Controlado	16
Figura 4:	Modos Normais de uma Corda Vibrante	17
Figura 5:	Ilustração da Propriedade de Autofunção de Sistemas Lineares	19
Figura 6:	Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por um Termo Senoidal	20
Figura 7:	Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por Soma de 3 Termos Senoidais	21
Figura 8:	Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por Soma de 8 Termos Senoidais	21
Figura 9:	Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por Soma de 8 Termos Senoidais	25
Figura 10:	Butterfly do Fluxo do Sinal	30
Figura 11:	FFT de 8 Pontos	31
Figura 12:	Arquitetura Tipica de uma FPGA	33
Figura 13:	Arquitetura de uma CLB com 4 BLEs	34
Figura 14:	Arquitetura de uma BLE (<i>Basic Logic Element</i>)	35
Figura 15:	ZynqBery - TE0726	36
Figura 16:	ZynqBery - TE0726	37
Figura 17:	Cordic Tradicional com N=4 Fonte: (LIN; WU, 2005)	42
Figura 18:	EEAS com N=2 e S=4 Fonte: (LIN; WU, 2005)	43
Figura 19:	MSR com I=2, J=1 e N=2 Fonte: (LIN; WU, 2005)	43
Figura 20:	Arquitetura Implementada FFT de 16 Pontos	48
Figura 21:	Arquitetura Implementada FFT de 16 Pontos	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Relação entre propriedade do tempo de um sinal e a representação de Fourier adequada	22
Tabela 2: Matriz ϕ para o dado Exemplo	45
Tabela 3: Exemplo de Tabela	50

LISTA DE SÍMBOLOS

ϕ

$\vec{\alpha}$ alpha

$v\omega\psi_{n-1}^{jk}$ Função de teste da lista de símbolos. Está é uma descrição longa para um único símbolo

∇ Gradiente

$v\omega\psi_{n-1}^{jk}$ teste

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 JUSTIFICATIVA	12
2 REVISÃO DE LITERATURA	14
2.1 REPRESENTAÇÃO DE FOURIER PARA SINAIS	16
2.1.1 Resposta do Sistemas LTI a Entrada Senoidal	18
2.1.2 Série de Fourier	23
2.1.3 Espectro de Fourier	24
2.2 SÉRIE DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO	25
2.3 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.....	28
2.4 FPGA.....	32
2.4.1 ZynqBerry TE0726-03M	36
2.4.1.1 Zynq-7000	37
2.5 ALGORITMO CORDIC.....	38
2.5.1 CORDIC Tradicional	38
2.5.2 EEAS-CORDIC	39
2.5.3 MSR-CORDIC	41
2.5.4 Estratégia de Projeto dos Parâmetros CORDIC.....	43
3 IMPLEMENTANDO PROCESSADOR CORDIC	47
4 IMPLEMENTANDO A FFT NO ZYNQBERRY	48
4.0.1 Implementando FFT 32 Pontos	48
4.0.2 Implementando FFT 1024 Pontos.....	48
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS	49
5.0.1 Implementando FFT 32 Pontos	49
5.0.2 Implementando FFT 1024 Pontos.....	49
6 CONCLUSÃO	50
6.0.1 Testes e exemplos de lista de siglas	50

6.0.2	Testes e exemplos de lista de símbolos	50
6.0.3	Exemplos de citação de referências bibliográficas.....	51
7	NÍVEL 1 - TESTES DE CAPITULAÇÃO - PRIMÁRIO	52
7.1	NÍVEL 2 - SECUNDÁRIO	52
7.1.1	Nível 3 - Terciário	52
7.1.1.1	Nível 4 - Quaternário	52
	ANEXO A - STELLAR MYSTERY SOLVED, EINSTEIN SAFE	56
A.1	EXEMPLO DE SEÇÃO ANEXO	57

1 INTRODUÇÃO

A Transformada Discreta de Fourier ou DFT (*Discrete Fourier transform*), segundo Bingham (1990), é um recurso amplamente utilizado em aplicações como processamento de imagens, comunicação rede de área local sem-fio ou WLAN (*Wireless Local Area Network*), multiplexação por divisão de frequências ortogonais ou OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing), e medições de diferentes espectros.

O cálculo da DFT é uma tarefa que exige muitos recursos computacionais e que requer um projeto preciso para uma implementação eficiente (WANG *et al.*, 2010). A DFT tem como base a própria série trigonométrica de Fourier discretizada. Segundo Lathi (2007, p. 719), graças a um algoritmo desenvolvido por Cooley e Tukey o número de cálculos para executar uma DFT foi drasticamente reduzido, possibilitando um tempo de execução aceitável.

Segundo Zhou *et al.* (2009) os dispositivos conhecidos como FPGA (*Field Programmable Gate Array*) são cada vez mais usados em implementação de hardware para telecomunicações, por exemplo, devido a sua capacidade de alcançar um elevado desempenho, aliado a sua flexibilidade de configuração. Desta forma, o uso de FPGA para implementar um hardware específico para o cálculo da DFT torna-se relevante.

1.1 JUSTIFICATIVA

Como afirma He e Guo (2008), o algoritmo da FFT é utilizada em larga escala como componente chave em sistemas de processamentos de sinais. De tal forma que a FFT não é somente usada em aplicações de telecomunicações e processamento de dados audiovisuais (BINGHAM, 1990), mas é o algoritmo numérico mais comum em diversas áreas, como engenharia, medicina, física e matemática (VANMATHI *et al.*, 2014).

No campo da engenharia biomédica, a FFT tem sido empregada na avaliação de parâmetros biológicos, como a bioimpedância (AMARAL *et al.*, 2011). Segundo Martinsen e Grimnes (2011), a análise da bioimpedância já é usada para monitorar atividades bioelétricas cerebrais, diagnosticar câncer de pele, dermatite, hiperidrose, ava-

iliar a composição corporal, avaliar condição nutricional, detectar processo de rejeição de órgãos transplantados e ainda monitorar recém-nascidos através tomografia de impedância elétrica ou EIT (*Electrical Impedance Tomography*). Sendo a EIT a única técnica de obtenção de imagens que não afeta o sistema imunológico de recém-nascidos (TRIANTIS *et al.*, 2011).

Para Ibrahim *et al.* (2016), a FPGA é uma boa escolha para a implementação do algoritmo da FFT devido a grande variedade de recursos de *hardware* sintetizáveis, além de possuir recursos de programação paralela que permite o processamento paralelo de sinais, conferindo assim uma maior rapidez na execução do algoritmo. Portanto implementar a FFT, uma ferramenta tão útil em diversas áreas da ciência, em uma plataforma vantajosa como a FPGA, é o principal motivador deste trabalho.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Nos mais diversos campos da ciência os conceitos de sinais e sistemas possuem um papel importante, sendo utilizados nas aplicações mais variadas como acústica, sismologia, projeto de circuitos, sistemas de geração e distribuição de energia, controle de processos químicos e engenharia biomédica, entre outros. Indiferentemente da natureza física de uma aplicação, os sinais e sistemas que surgem destas possuem duas características básicas; os sinais contém informações sobre a natureza ou comportamento de um fenômeno, e os sistemas respondem a um sinal específico produzindo um comportamento desejado (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010, Prólogo).

Um sinal é um conjunto de dados ou informações, que podem descrever diversos tipos de fenômenos, como o batimento cardíaco (Figura 1), a temperatura de um volume de aguá em um ebulidor controlado (Figura 3), o registro de vendas de uma empresa ou ainda os valores de fechamento de uma bolsa de valores (Figura 2). Já os sistemas são entidades que processam conjuntos de sinais (ditos entrada), e geram outro conjunto de sinais como resposta (ditos saídas). Os sistemas podem ser constituídos de componentes físicos, elétricos, mecânicos, hidráulicos ou apenas lógicos (LATHI, 2007, p. 75). O filtro de áudio, que modifica o sinal de entrada gerando um sinal de áudio com as características desejadas é um exemplo de sistema. Assim como o ebulidor controlado que a partir de um sinal de referência (entrada) gera um sinal de controle para o atuador da resistência de aquecimento, de modo a elevar a temperatura do líquido até a referência.

Segundo Oppenheim e Willsky (2010, p. 1) existe uma linguagem adequada para descrever sinais e um conjunto poderoso de ferramentas para analisá-los, capaz de se aplicar a problemas oriundos de diversos domínios. A série de Fourier e a Transformada Rápida de Fourier são ambas exemplos destas ferramentas, e serão apresentadas nos próximos capítulos.

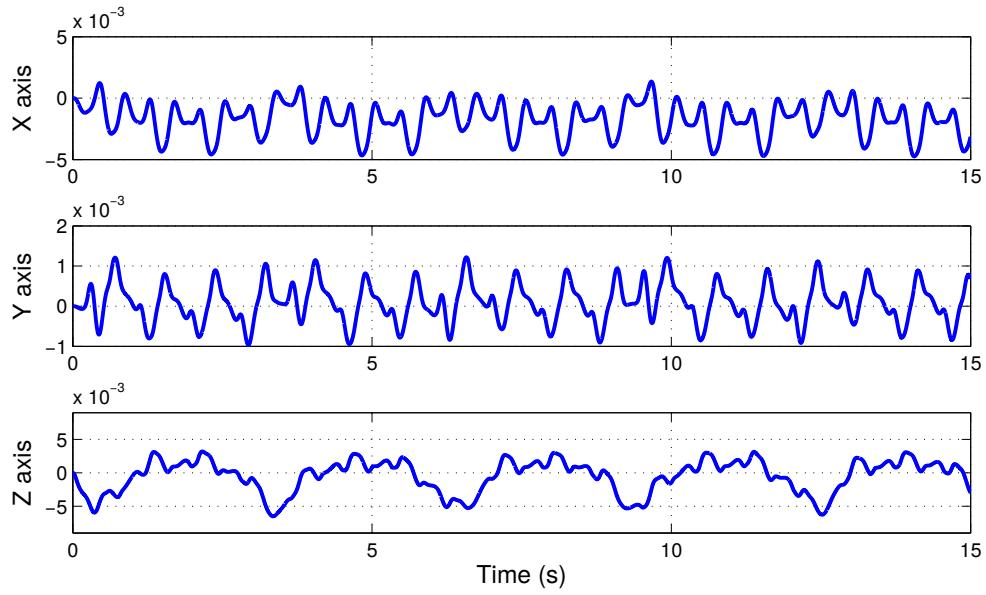


Figura 1: Batimento Cardíaco em 3D

Fonte: Liu *et al.* (2011)



Figura 2: Índice BM & FBOVESPA, São Paulo - Brasil

Fonte: TradingView (2017)

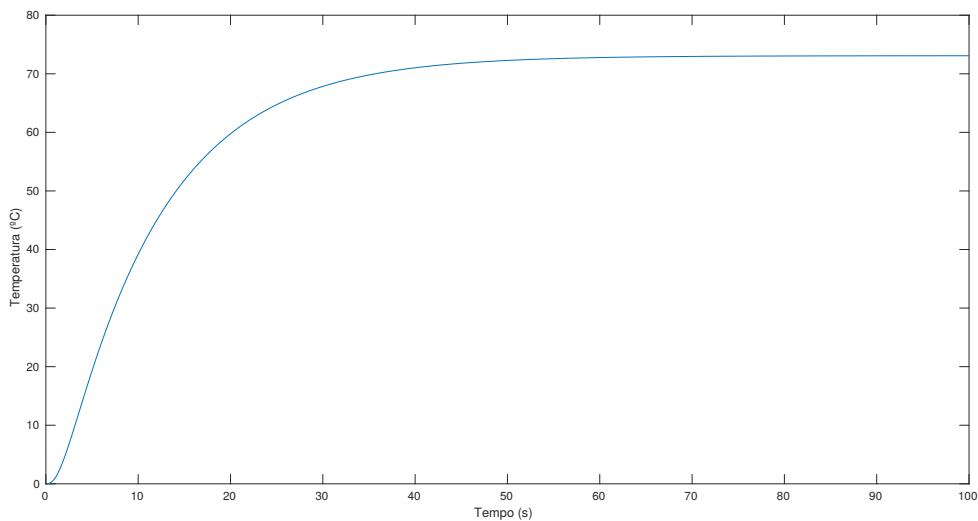


Figura 3: Temperatura de um Volume de Água em um Ebulidior Controlado
Fonte: Autoria Própria

2.1 REPRESENTAÇÃO DE FOURIER PARA SINAIS

A série de Fourier tem como princípio os estudos das somas trigonométricas de senos e cossenos harmonicamente relacionados, com o intuito de descrever fenômenos periódicos. Tal estudo possui uma longa história que data pelo menos da época dos babilônicos, e que envolve o estudo de diferentes fenômenos físicos. Mas o marco moderno neste tema ocorre em 1748 com o matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010, p. 104). Euler em seu estudo sobre ondas estacionárias através de cordas vibrantes observou que se a configuração da posição vertical y_0 de um ponto horizontal x em uma onda estacionaria no tempo t_0 for uma combinação linear dos modos normais da onda, o mesmo acontece com a configuração em qualquer valor de tempo t_s subsequente. Com base nesse estudo Euler demonstrou que é possível calcular diretamente os coeficientes da combinação linear em tempos futuros usando os coeficientes em tempos anteriores. (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010, p. 104).

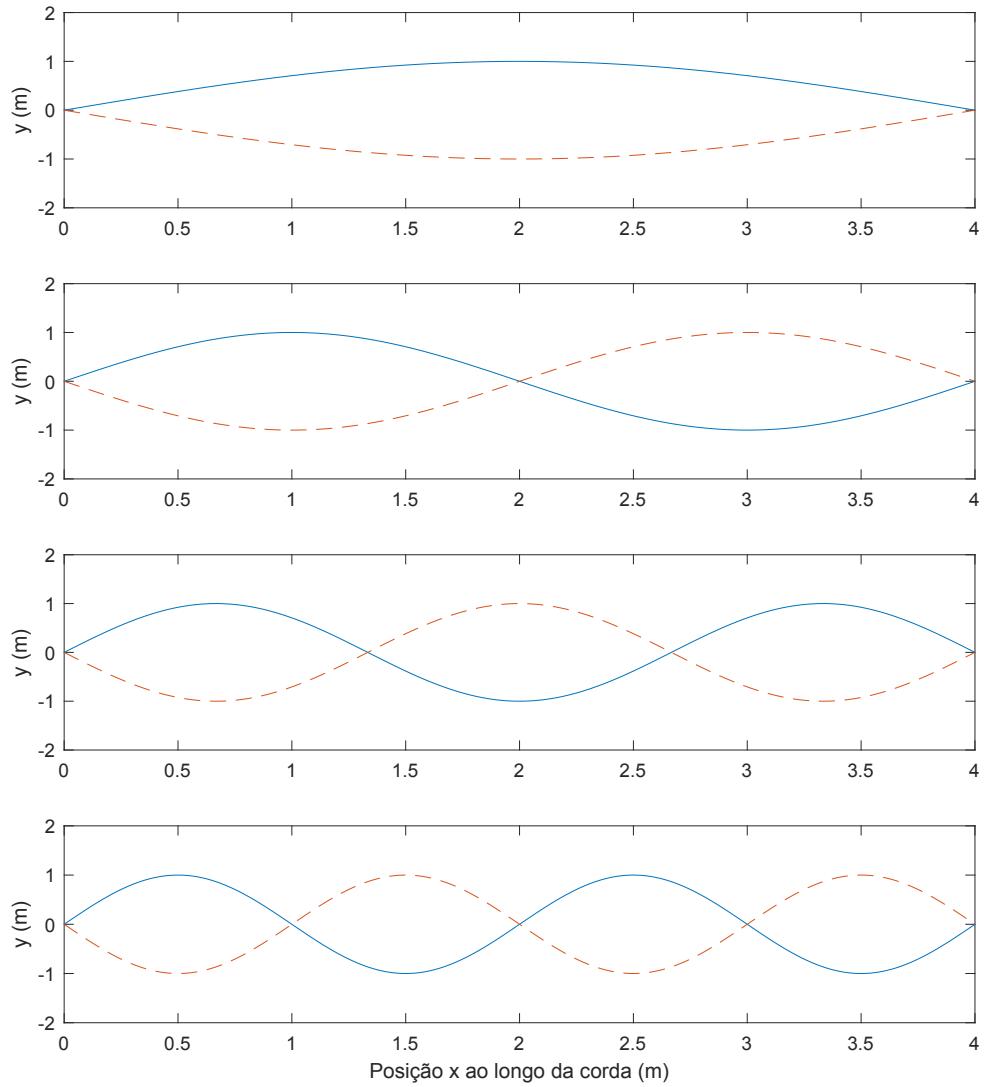


Figura 4: Modos Normais de uma Corda Vibrante
Fonte: Adaptado de Oppenheim e Willsky (2010, p. 105)

O estudo de Euler se tornam ainda mais importantes quando aplicado a sinas e a sistemas LIT. Segundo HAYKIN e Veen (2001, p. 163), se a entrada de um sistema Linear Invariante no Tempo (LIT) for expressa por uma combinação linear ponderada de senóides ou exponenciais complexas, a saída do sistema será expressa como uma combinação linear ponderada da resposta do sistema a cada senóide ou exponencial complexa. Expressar sinais em termo de senoides ou exponenciais complexas não apenas leva a uma expressão alternativa útil para o comportamento da entrada e saída de um sistema LTI, como também fornece uma caracterização muito criteriosa dos sinais e sistemas.

Segundo Oppenheim e Willsky (2010, p. 105), meio século depois da divulgação do trabalho de Euler, o físico e matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768

- 1830), havia se envolvido no estudo sobre séries trigonométricas, com a motivação física de estudar o fenômeno da propagação e difusão de calor. Fourier conclui que séries senoidais harmonicamente relacionadas eram úteis na representação da distribuição de temperatura em um corpo, e que 'qualquer' sinal periódico poderia ser representado por tal série. Fourier ainda apresentou uma representação para sinais aperiódicos, não através de somas ponderadas de senoides harmonicamente relacionadas, mas como integrais ponderadas de senoides que não são necessariamente harmonicamente relacionadas(HAYKIN; VEEN, 2001, p. 163).

Como afirma Oppenheim e Willsky (2010, p. 106), muitas das ideias básicas por trás das contribuições de Fourier já eram conhecidas, e as condições precisas sob as quais a representação de sinais proposta era válida só foram apresentadas por P.L. Dirichlet em 1829. Porém foi Fourier que teve a clara percepção do potencial pra essa representação, e até certo ponto foi o seu trabalho e suas afirmações que estimularam grande parte do trabalho subsequente. Logo em sua homenagem o estudo de sinais e sistemas, usando representações senoidais, é denominado análise de Fourier. E as séries pelo qual é realizada a representação de sinais na forma de somas de senoides complexas é denominada série de Fourier.

2.1.1 RESPOSTA DO SISTEMAS LTI A ENTRADA SENOIDAL

Na análise de Fourier, os sinais de entrada senoidais são comumente usados para caracterizar a resposta de um sistema Linear e Invariante no Tempo, ou LTI (Linear Time-Invariant). A resposta senoidal em estado estacionário de um sistema LTI é obtido pela convolução entre a entrada senoidal e o sinal de impulso(HAYKIN; VEEN, 2001, p. 163).

Ao aplicar um sinal impulso ($\delta(t)$) a entrada de um sistema LTI, é gerado um sinal de saída conhecido como resposta ao impulso $\delta(t)$. Através da resposta ao impulso é possível caracterizar de maneira completa o comportamento de um sistema. A resposta ao impulso também possibilita conhecer a resposta do sistema LTI a qualquer sinal de entrada, através da convolução deste sinal ao impulso (HAYKIN; VEEN, 2001, p. 108).

Assim realizando a convolução do impulso ao sinal senoidal, segundo HAYKIN e Veen (2001, p. 164), a saída de um sistema LTI dado uma entrada senoidal complexa $x(t)$, na forma exponencial $e^{j\omega t}$, é dada por:

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \quad (1)$$

Em que $H(j\omega)$ é a resposta em frequência, definida em termos de resposta ao impulso $\delta(t)$. Assim;

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

Logo a entrada senoidal complexa em um sistema LTI gera uma saída igual a entrada senoidal multiplicada apenas pela resposta em frequência do sistema $H(j\omega)$.

As equações (1) e (2) apenas consideram como entrada um sinal senoidal. Porém é de interesse obter uma expressão para a resposta do sistema LTI a quaisquer sinais arbitrários. Para tal HAYKIN e Veen (2001, p. 164) considera a senoide complexa $\psi = e^{j\omega t}$ como uma autofunção do sistema H associando com o autovalor $\lambda = H(j\omega)$, de modo a satisfazer:

$$H\|\psi\| = \lambda\psi(t) \quad (3)$$

Como pode ser visto na Figura (5), a saída de um sistema dada a entrada de uma autofunção, é o produto da entrada por um número complexo. Se e_k for um autovetor de uma matriz A , e λ_k os autovalores associados a esta matriz, a autorrelação do problema tradicional do autovalor matricial é aplicável, $Ae_k = \lambda_k e_k$ (HAYKIN; VEEN, 2001, p. 164).

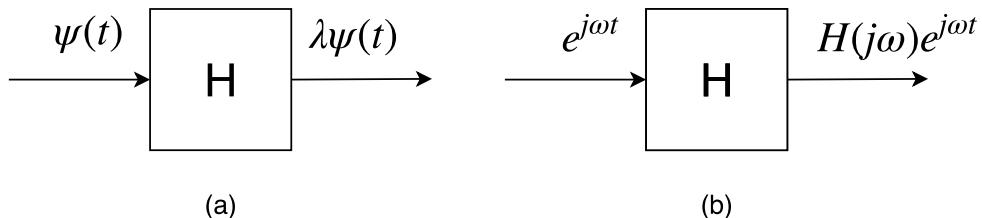


Figura 5: Ilustração da Propriedade de Autofunção de Sistemas Lineares

(a) Autofunção geral $\psi(t)$ e autovalor λ .

(b) Autofunção senoidal complexa $e^{j\omega t}$ e autovalor $H(j\omega)$.

Fonte: Adaptado de HAYKIN e Veen (2001, p. 164)

A ideia principal aqui é utilizar a superposição ponderada de autofunções para representar um único sinal periódico. Para esse efeito HAYKIN e Veen (2001, p. 164) expressa a entrada de um sistema LTI como uma soma de N senoides complexas ponderadas, na forma:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{j\omega_k t} \quad (4)$$

Ou seja na forma de série de Fourier.

Expressar a entrada de um sistema LTI a partir de uma soma ponderada de senoides complexas possui a intenção de realizar uma aproximação coerente do sinal de entrada, utilizando uma composição de funções básicas já bem conhecidas. Por exemplo considere o sinal de onda quadrada presente na Figura (6), o qual deseja-se aproximar utilizando uma soma de senoides complexas. Tomando uma senoide de amplitude 1.286 e uma frequência de $50Hz$ é possível realizar uma aproximação grosseira, porém em fase com este sinal.

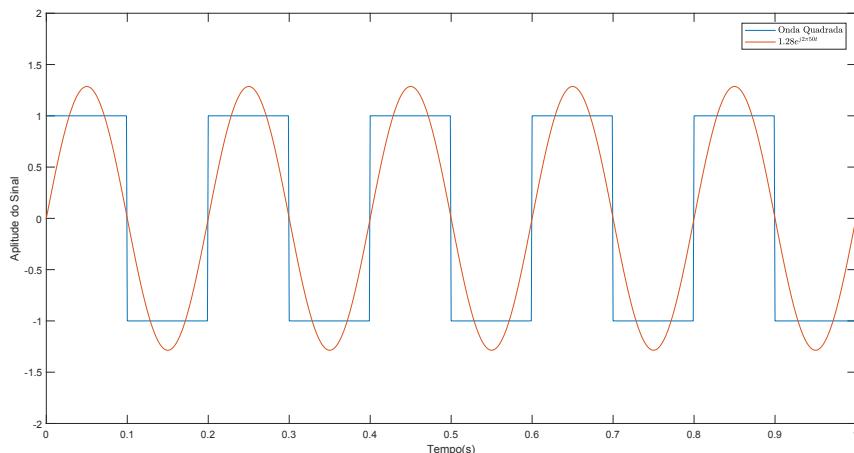


Figura 6: Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por um Termo Senoidal
Fonte: Autoria Própria

Para tornar melhorar a aproximação da representação em relação ao sinal de onda quadrada é possível adicionado mais termos senoidais ao somatório. Como pode ser visto nas Figura (7) e (8) as aproximações ficam mais suaves adicionando mais 2 ou mais 5 termos respectivamente. Quanto maior o número de termos senoidais complexas ponderados presentes no somatório da representação maior é a aproximação, sendo no limite perfeita.

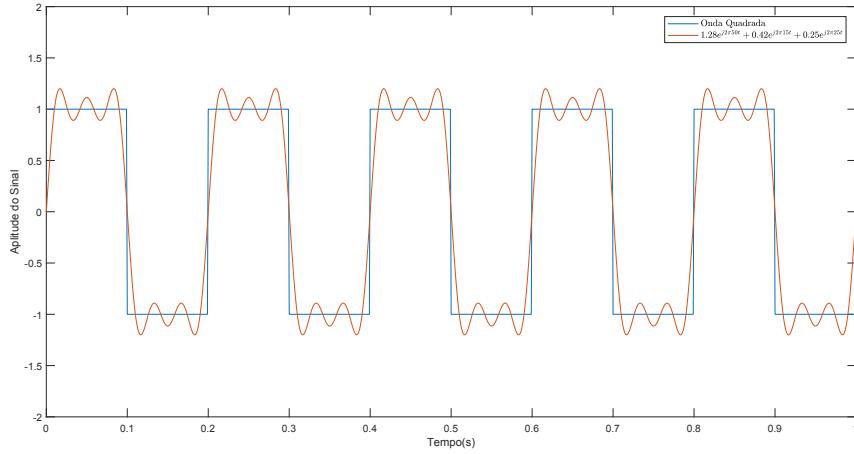


Figura 7: Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por Soma de 3 Termos Senoidais
Fonte: Autoria Própria

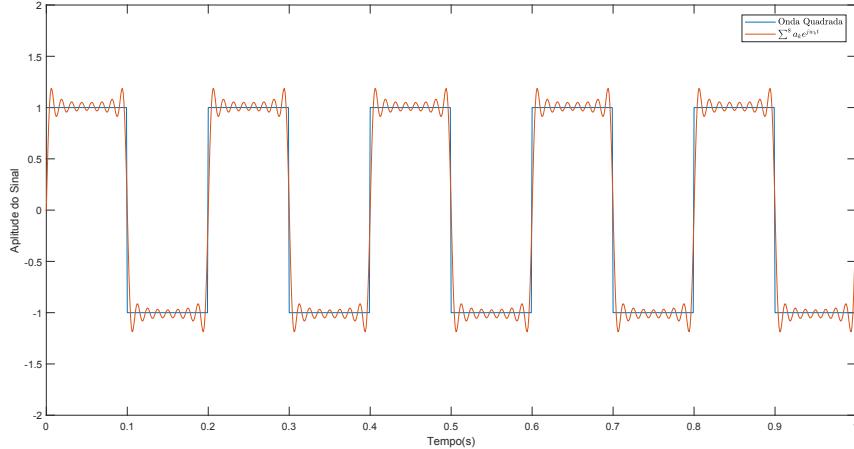


Figura 8: Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por Soma de 8 Termos Senoidais
Fonte: Autoria Própria

Logo utilizando-se $e^{j\omega_k t}$ for uma autofunção e $H(j\omega_k)$ for o autovalor do sistema, aplicando-se a autorrelação apresentada anteriormente, o sinal de saída do sistema é dado por:

$$y(t) = \sum_{k=1}^N a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t} \quad (5)$$

A saída, portanto nada mais é do que a soma ponderada das senoides complexas da entrada, sendo os pesos a_k ponderados pela resposta em frequência $H(j\omega_k)$. Por meio destes resultados é possível transformar a operação de convolução em uma operação de multiplicação dos termos $a_k H(j\omega_k)$. Segundo Oppenheim e Willsky (2010, p. 164) o fato da saída de um sistema LTI dada uma entrada represen-

tada como combinação linear de senoides complexas, ser também uma combinação linear dos mesmos sinais, foi uma descoberta de Euler, que motivou Fourier e os outros matemáticos após ele no estudo da extensão de classes de sinais que poderiam ser representados nesta forma de somatórios de exponenciais complexas ponderadas.

Além de tornar mais prático o cálculo da convolução de sinais, a representação em somais senoidais complexas ponderadas fornece uma interpretação alternativas para sinais e sistemas HAYKIN e Veen (2001, p. 166). Através da análise dos pesos a_k ponderados é possível descrever um sinal em função da frequência, ao invés do tempo.

A representação de sinais por séries de Fourier pode ser aplicada para diferentes tipos de sinais, com diferentes características. Há quatro classes de representações de Fourier, divididas de acordo com a sua periodicidade e sua continuidade, como pode ser visto na Tabela 1.

Para sinais periódicos a representação é feita como séries de Fourier, sendo que para sinais de tempo contínuo é aplicado a Série de Fourier (FS - *Fourier Series*), e para sinais de tempo discreto é usada as séries de Fourier de tempo discreto (DFS - *Discrete Fourier Serie*). Quando os sinais não são periódicos a representação é denominada como transformada, para o caso do sinal ser contínuo a representação é feita pela transformada de Fourier (FT - *Fourier Transform*), e no caso discreto é a transformada de Fourier de tempo discreto (DFT - *Discrete Fourier Trasform*).

Propriedade do Tempo	Periódico	Não Periodico
Continuo	Série de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
Discreto	Série de Fourier de Tempo Discreto (DFS)	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DFT)

Tabela 1: Relação entre propriedade do tempo de um sinal e a representação de Fourier adequada

Fonte: Oppenheim e Willsky (2010, p. 166)

A representação de Fourier utilizada no desenvolvimento deste trabalho é a DFT, e portanto a mais importante a ser apresentada. As próximas seções deste trabalho passaram pela apresentação da FS depois pela DFS para em fim chegar na DFT.

2.1.2 SÉRIE DE FOURIER

Segundo Lathi (2007, p. 530) "Um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 pode ser descrito como a soma de senoides de frequência f_0 e todas as suas harmônicas", conforme apresentado na Equação (6). Esta é a chamada série de Fourier para sinais periódicos, ou apenas série de Fourier. Na expressão da Equação (6) a série de Fourier está na forma trigonométrica. Onde ω_0 é a frequência fundamental de $x(t)$, e a_0 , a_n e b_n são os coeficientes de amplitude das harmônicas que compõe $x(t)$, sendo a_0 a harmônica zero (nível CC).

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (6)$$

Os coeficientes a_0 , a_n e b_n da Equação (6) são determinados pelas seguintes equações:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (7)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (8)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (9)$$

em que T_0 representa o período relativo a frequência fundamental f_0 .

À série de Fourier, além da forma trigonométrica, também pode ser apresentada na forma exponencial, em termos de $e^{j\omega_0 t}$, como apresentado na seção anterior. A forma exponencial, segundo Lathi (2007, p. 533), é dada através da Equação (10), em que o coeficiente C_n é análogo aos coeficientes a_n e b_n da série trigonométrica, sendo obtido por (11).

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (10)$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt \quad (11)$$

Tanto a forma trigonométrica quanto a exponencial da série de Fourier consideram $x(t)$ como sendo uma função qualquer, real ou complexa. Porém na maioria

das aplicações $x(t)$ é real, como é o caso dos sinais neste trabalho. Segundo segundo Lathi (2007, p. 533), se o sinal de entrada do sistema LTI $x(t)$ é real, isso significa que a_n e b_n também são reais para todos os valores de n , sendo portanto a série de Fourier representada na forma compacta:

$$x(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (12)$$

Sendo:

$$D_0 = a_0 \quad (13)$$

$$D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (14)$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n} \quad (15)$$

Utilizar \cos

2.1.3 ESPECTRO DE FOURIER

Por meio da série de Fourier na forma compacta, apresentada na Equação 12, conclui-se que um sinal real periódico $x(t)$ pode ser descrito como uma soma de senoides de frequências $n\omega_0$ e amplitudes D_n e fases θ_n . Segundo Lathi (2007, p. 533), o espectro exponencial de Fourier é traçado a partir de D_n e θ_n em função das frequências $n\omega_0$. Logo são traçados dois gráficos para o espectro exponencial de Fourier, um que relaciona C_n com $n\omega_0$, chamado espectro de magnitude. E outro que relaciona θ_n com $n\omega_0$, chamado de espectro de fase.

Tomando como exemplo um sinal $x(t) = \sin(2\pi 15t) + \sin(2\pi 40t)$, expresso em um período igual a 1 segundo, como mostrado na Figura 9. Para este sinal é expresso o espectro de Fourier na mesma Figura (9), com o espectro de magnitude e fase.

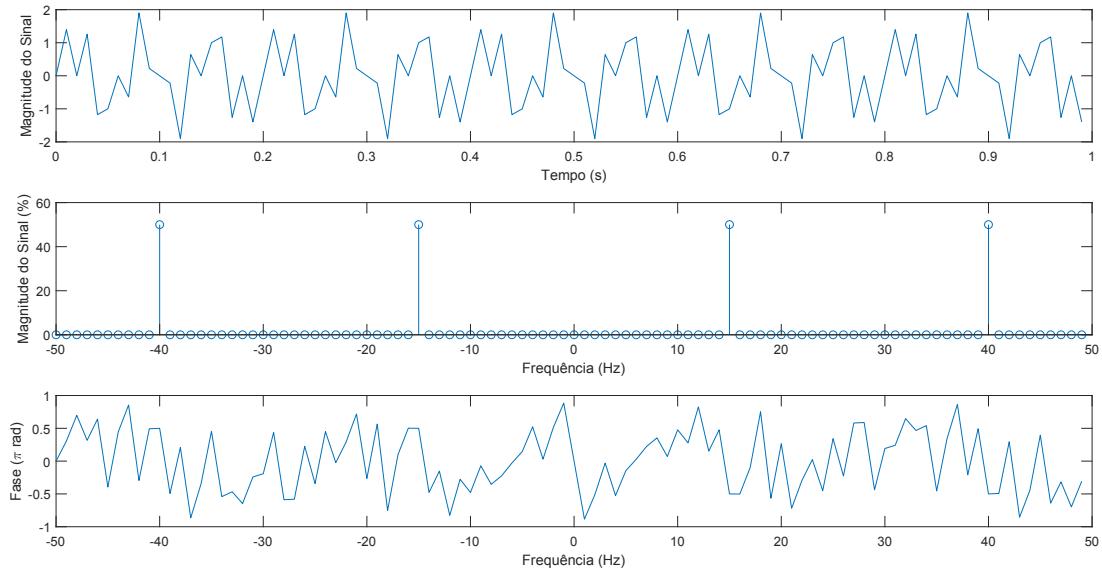


Figura 9: Aproximação do Sinal de Onda Quadrada por Soma de 8 Termos Senoidais
Fonte: Autoria Própria

Nota-se que o espectro da Figura (9) aparecem frequências negativas, as quais dividem a magnitude com suas frequências simétricas. Isso ocorre devido a simetria do angulo $n\omega_0 t$ possuir no calculo dos coeficientes da série de Fourier. Para resolver este problema basta considerar apenas a parte positiva do espectro e multiplicar por 2 a magnitude das frequências no espectro de magnitude.

Para Lathi (2007, p. 533) os dois gráficos de magnitude e fase juntos formam o espectro de frequência, o qual revela os conteúdos de frequência do sinal $x(t)$, com suas amplitudes e fase. Conhecendo-se este espectro não só é possível analisar o sinal $x(t)$ dentro do domínio da frequência, como também reconstruí-lo de forma fácil

2.2 SÉRIE DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO

Ate aqui foi apresentada a forma continua da série de Fourier, porém para ser útil em uma aplicação computacional é necessário encontrar sua forma discreta, ou DFT (*Discrete Fourier Transform*). Segundo HAYKIN e Veen (2001, p. 314) a DFT é a única representação de Fourier que pode ser calculada por um computador, sendo amplamente usada para manipular sinais.

O primeiro passo para se obter uma DFT é considerar o teorema da Amos-tragem. Tal teorema afirma que um sinal real $x(t)$, cujo o espectro é limitado em ϕ Hz, pode ser reconstruído a partir de suas amostras tomadas uniformemente a uma taxa

$f_s > 2\phi$ (LATHI, 2007, p. 679). Em seguida, a amostragem de $x(t)$, feita a uma frequência f_s , pode ser obtida pela multiplicação de $x(t)$ por um trem de impulsos $\delta(t)$. Sendo tais impulsos unitários e periódicos, repetidos a cada $T = 1/f_s$ segundos, por um numero total de amostras N_0 , a amostragem pode ser definida por:

$$\bar{x}(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT)\delta(t - nT) \quad (16)$$

Por conveniência, deseja-se obter um espectro do sinal amostrado $x(t)$ em função de ω ou expresso em termos de frequência. Para tal, segundo Lathi (2007, p. 681), o trem de impulsos $\delta(t)$ é um sinal periódico que pode ser descrito pela série trigonométrica de Fourier da seguinte forma:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}[1 + 2\cos(\omega_s t) + 2\cos(2\omega_s t) + 2\cos(3\omega_s t) + \dots] \quad (17)$$

Logo, multiplicando $x(t)$ por $\delta_T(t)$, obtém-se:

$$\bar{x}(t) = x(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T}[x(t) + 2x(t)\cos(\omega_s t) + 2x(t)\cos(2\omega_s t) + 2x(t)\cos(3\omega_s t) + \dots] \quad (18)$$

Segundo Oppenheim e Willsky (2010, p. 125), a transformada de Fourier do primeiro termo $x(t)$, em (18), é $X(\omega)$. Já a transformada de Fourier do segundo termo $2x(t)\cos(\omega_s t)$ é $X(\omega - \omega_s) + X(\omega + \omega_s)$, e do terceiro termo $2x(t)\cos(2\omega_s t)$ é $X(\omega - 2\omega_s) + X(\omega + 2\omega_s)$. E assim, semelhantemente a transformada de Fourier dos demais termos da serie que descreve (18), representam o espectro $X(\omega)$ deslocado em $n\omega_s$ e $-\omega_s$. Assim,

$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \quad (19)$$

Desde que a frequência de amostragem f_s garanta o critério do teorema da Amostragem, o sinal \bar{X} será constituído de repetições não sobrepostas de $x(\omega_0)$, a um intervalo de tempo $T = 1/f_s$. Logo tanto $\bar{X}(\omega)$, quanto $\bar{x}(t)$ são periódicas e equivalentes, porém com representações distintas do aspecto amostrado. Sendo assim, através da propriedade de deslocamento no tempo da transformada de Fourier (20) e da (16), obtém-se (21) Oppenheim e Willsky (2010, p. 125):

$$\delta(t - nT) \longleftrightarrow e^{-jn\omega T} \quad (20)$$

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT)e^{-jn\omega T} \quad (21)$$

Segundo Lathi (2007, p. 705), a transformada de $\bar{x}(t)$ pode ser aproximada, considerando um certo *aliasing* negligenciável, para $X(\omega)/T$. Portanto:

$$X(\omega) = T \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT)e^{jn\omega T} \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (22)$$

Analizando a propriedade periódica de $x(t)$ e $X(\omega)$, e considerando $x(nT)$ e $X(r\omega_0)$ a n-ésima e r-ésima amostra de $x(t)$ e $X(\omega)$, respectivamente, são definidas as seguintes variáveis:

$$x_n = Tx(nT) \quad (23)$$

$$x_n = \frac{T_0}{N_0}x(nT) \quad (24)$$

$$X_r = X(\omega) \quad (25)$$

$$\omega = r\omega_0 \quad (26)$$

$$X_r = X(r\omega_0) \quad (27)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (28)$$

Assim, substituindo (27) e (24) em (22), e fazendo $\omega_0 T = \Omega_0 = 2\pi i/N_0$, se obtém a seguinte expressão para a transformada discreta de Fourier (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010, p. 125):

$$X_r = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{j\omega_0 nr} \quad (29)$$

Onde:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (30)$$

Para compactar a expressão de (29) se faz a substituição da expressão exponencial pela variável W , de modo que $W_{N_0} = e^{j2\pi/N_0} = e^{-j\Omega_0}$. Logo a expressão para DFT é dada por (31) (MEYER-BAESE, 2007, p. 344):

$$X_r = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{j\omega_0 n r} \quad (31)$$

Onde:

$$0 \leq k \leq N_0 - 1 \quad (32)$$

2.3 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Para se calcular uma DFT de N_0 valores usando apenas (31), é necessário realizar um total de N_0^2 multiplicações e $N_0(N_0 - 1)$ somas utilizando números complexos. Deste modo, quando N_0 assume um valor elevado, muitos recursos computacionais são necessários, até chegar ao ponto de que esse algoritmo se torna impraticável.

Para que se possa reduzir o numero de operações matemáticas necessárias para calcular a DFT é que surgiu o algoritmo criado por J.W. Cooley e John Tukey, conhecido como Transformada Rápida de Fourier ou FFT (*Fast Fourier Transform*) Lathi (2007, p. 719). Para reduzir o numero de cálculos, a FFT se utiliza da propriedade linear da transformada de Fourier. Já que, segundo Oppenheim e Willsky (2010, p. 119), a transformada de Fourier de um sinal pode ser dada pela combinação linear da transformada de Fourier de segmentos menores do mesmo sinal. Logo, é possível aplicar a DFT o paradigma da Divisão e Conquista, o qual é um recurso muito utilizado em algoritmos de ordenação.

Segundo Cormen *et al.* (2002, p. 21) um algoritmo de Divisão e Conquista realiza o desmembramento de um problema em vários subproblemas que são idênticos ao original, porém menores em sua faixa de ação, o que os torna mais simples de resolver. Em seguida, resolvem-se os subproblemas recursivamente e combinam-se essas soluções de modo a obter a solução para o problema original.

De modo muito semelhante o algoritmo da FFT prevê uma divisão recursiva

da DFT em dois blocos: bloco par e o bloco ímpar, como mostrado em (33) (CHU; GEORGE, 1999, p. 35). Nesta mesma equação os limites dos somatórios de ambas as parcelas ímpar e par foram redefinidas para englobar apenas metade dos N_0 pontos, bem como os expoentes de W foram ajustados.

$$X_r = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x_{2n} W_{N_0}^{2nr}}_{\text{Parcela Par}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x_{2n+1} W_{N_0}^{(2n+1)r}}_{\text{Parcela Ímpar}} \quad (33)$$

Utilizando algumas das propriedades geométricas de W , já que o mesmo representa um numero complexo, pode-se realizar simplificações importantes em 34. Primeiro nota-se que $W_{N_0/2} = W_{N_0}^2$, logo:

$$X_r = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x_{2n} W_{N_0}^{2nr}}_{G_r} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x_{2n+1} W_{N_0}^{(2n+1)r}}_{H_r} \quad (34)$$

Como G_r e H_r são DFTs com $N_0/2$ pontos cada, então ambos possuem um período de $N_0/2$. Com base na propriedade periódica destas DFTs pode-se utilizar as simplificações (35) e (36) para reduzir o número de cálculos na DFT (LATHI, 2007, p. 721).

$$G_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r \quad (35)$$

$$H_{r+\frac{N_0}{2}} = H_r \quad (36)$$

$$W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} = W_{N_0}^{\frac{N_0}{2}} = e^{-j\pi} W_{N_0} = -W_{N_0}^r \quad (37)$$

Alem disso, a expressão em (37) pode ser assumida para se reduzir o numero de cálculos da FFT. Portanto, usando (38) e (39) se obtém, respectivamente, os primeiros $N_0/2$ pontos e os últimos $N_0/2$ pontos da FFT.

$$W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} = W_{N_0}^{\frac{N_0}{2}} = e^{-j\pi} W_{N_0} = -W_{N_0}^r \quad (38)$$

$$W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} = W_{N_0}^{\frac{N_0}{2}} = e^{-j\pi} W_{N_0} = -W_{N_0}^r \quad (39)$$

Portanto, uma DFT pode ser calculada combinando duas DFTs de $N_0/2$, tal como mostrado em (38) e (39). É comum na literatura representar este processo de cálculo de DFT feito pelo algoritmo da FFT pelo diagrama da Figura (10). Este diagrama é conhecido como *Butterfly* de Fluxo do Sinal (CHU; GEORGE, 1999, p. 36).

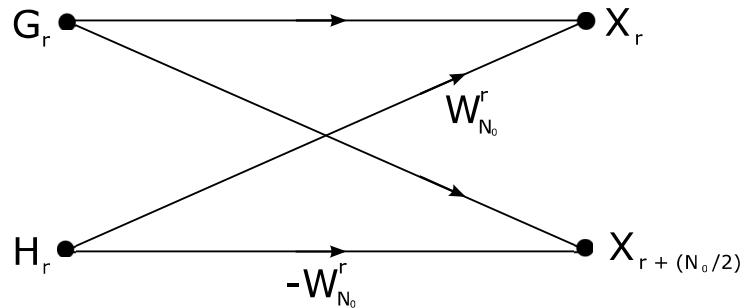


Figura 10: Butterfly do Fluxo do Sinal

Fonte: Lathi (2007, p. 721)

Aliando o conceito de divisão em conquista ao método de cálculo da DFT usando o diagrama *Butterfly*, a representação do algoritmo da FFT pode ser facilmente representado pelo diagrama da Figura (11) (LATHI, 2007, p. 722). Nesta figura, a FFT é feita para apenas 8 amostras de sinal X .

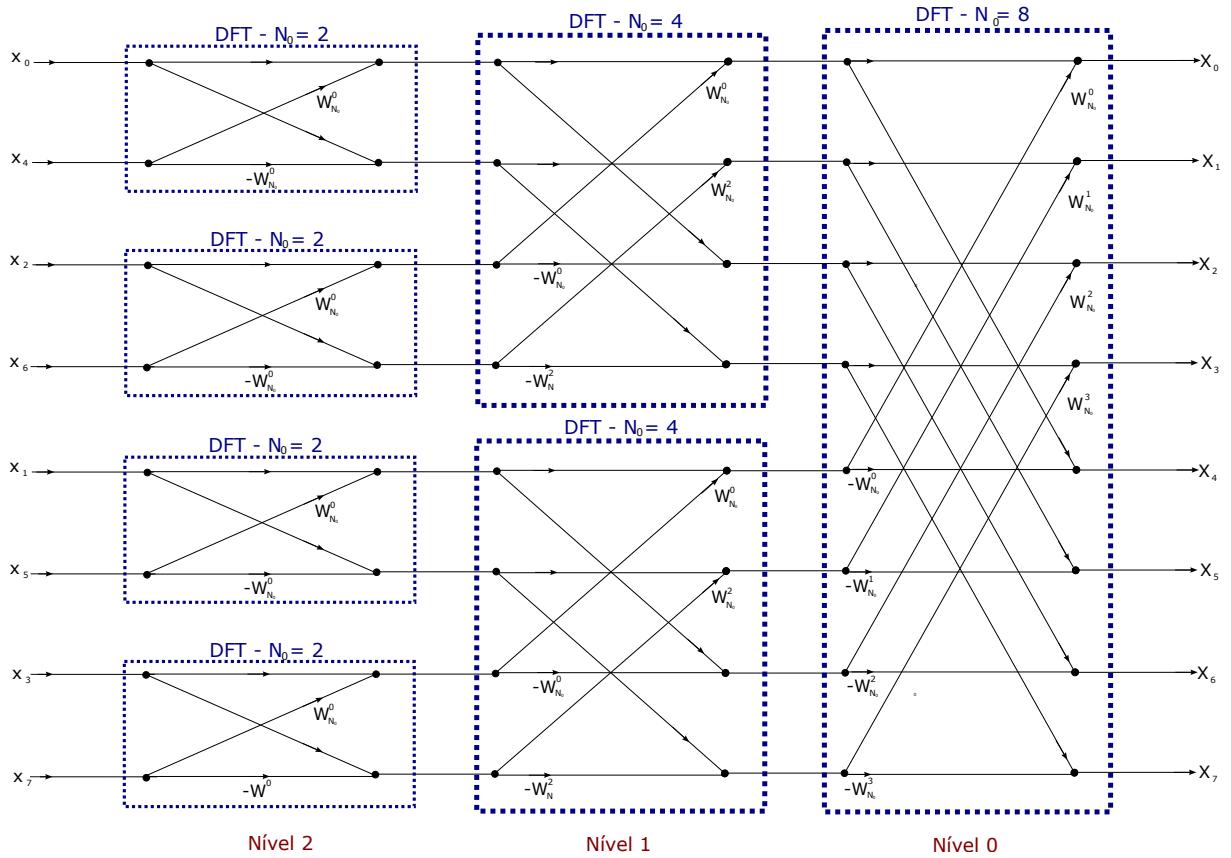


Figura 11: FFT de 8 Pontos
Fonte: Lathi (2007, p. 722)

Apos se dividir uma DFT de tamanho N_0 em duas DTFs de tamanho $N_0/2$, e subdividindo cada uma das DFTs de tamanho $N_0/2$ em duas $N_0/4$ (LATHI, 2007, p. 721). E assim o procedimento continua ate que se atinja um nível em que as DFTs tenham tamanho $N_0/2^n = 2$, ou seja quando se atinge DFTs que possuem um custo de cálculo mínimo.

Um fato importante sobre o algoritmo da FFT é que o valor N_0 pode ser escolhido segundo a relação $N_0 = r^n$, onde n é o numero de níveis necessários para calcular a FFT, e r é o mínimo tamanho DFT. Os algoritmos de FFT mais usados possuem a base r igual a 2 ou a 4. Consequentemente, estes algoritmos são conhecidos respectivamente como Radix-2 e Radix-4 (MEYER-BAESE, 2007, p. 365). Neste trabalho o foco sera o algoritmo com a base r igual a 2, ou seja o Radix-2.

Na Figura 2 as DFTs estão agrupadas por níveis, onde cada nível abrange as DFTs de mesmo tamanho N_0/n , e no ultimo nível a esquerda há quatro DFTs de tamanho 2. O numero de níveis necessários em uma FFT de N_0 pontos é $\log_2 N_0$. Os valores de X a direita estão ordenados de forma crescente, por ? em os valores de x a esquerda estão ordenados de forma diferente. Esta ordenação é conhecida como

Bit-Reverse (CHU; GEORGE, 1999, p. 51).

Segundo Chu e George (1999, p. 51), quando se divide o processo de cálculo de uma DFT em duas, sendo uma responsável pelos valores pares e a outra pelo valores ímpares, conforme as conexões entre os níveis vão ocorrendo há, permutações entre os sinais. O processo de *Bit-Reverse* prevê estas permutações, e através dele é possível saber qual a ordem adequada dos sinais na entrada da FFT. Para aplicar o conceito de *Bit-Reverse*, basta considerar um elemento x_k de ordem n e escreve-lo na base binária com $\log_2 N_0$ bits. Em seguida, para determinar onde x_k será ocupado, basta converter novamente para base decimal o número binário obtido lendo esse na ordem inversa dos bits.

Ao final de todo o processo de simplificação do cálculo da DFT, o algoritmo da FFT necessita apenas realizar $(N_0/2) \log_2 N_0$ multiplicações e $N_0 \log_2 N_0$ somas complexas (LATHI, 2007, p. 720). Desta forma, reduz-se assim a complexabilidade do algoritmo, tornando a DFT praticável até para valores elevados de N_0 .

2.4 FPGA

Moore (2007, p. 4) define a FPGA como um dispositivo semicondutor capaz de ser totalmente redefinido após sua fabricação, permitindo ao programador reconfigurar produtos e funções já implementadas, adaptando o *hardware* a novas funções. De forma prática, a FPGA permite uma flexibilidade em um projeto, podendo mudar a forma como ele é implementado, sem a necessidade de se construir um *hardware* novo.

Para Moore (2007, p. 4), comparado com as outras formas de construir um hardware, a FPGA oferece duas grandes vantagens em uma aplicação. Primeiro, para uma aplicação ao invés de se utilizar um circuito integrado padrão comercial, que geralmente é super ou subdimensionado, ou ainda desenvolver um novo projeto de circuito integrado específico, consumindo tempo e recursos, a FPGA possibilita desenvolver um *hardware* exatamente dentro das especificações, personalizado e otimizado para a função destinada. Em segundo, porém tão importante quanto, é que essa capacidade de personalização de *hardware* possibilita a realização de operações de modo mais simplificado, rápido e energeticamente eficiente se comparado a um microprocessador.

As FPGAs são baseadas em unidades lógicas elementares básicas, ou BLEs (*Basic Logic Elements*), dentro de uma hierarquia de interconexões reconfi-

guráveis que permitem que os LEs sejam fisicamente conectados uns aos outros de diferentes formas criando uma enorme variedade de componentes digitais. A arquitetura das FPGAs modernas são constituídas basicamente por conjunto de memórias de armazenamento em massa SRAM (*Static Random Access Memory*), Portas de Entrada/Saída, blocos lógicos configuráveis CLB (*Configurable Logic Blocks*) e sistema de roteamento, como pode ser visto na Figura (12) (MOORE, 2007, p. 5).

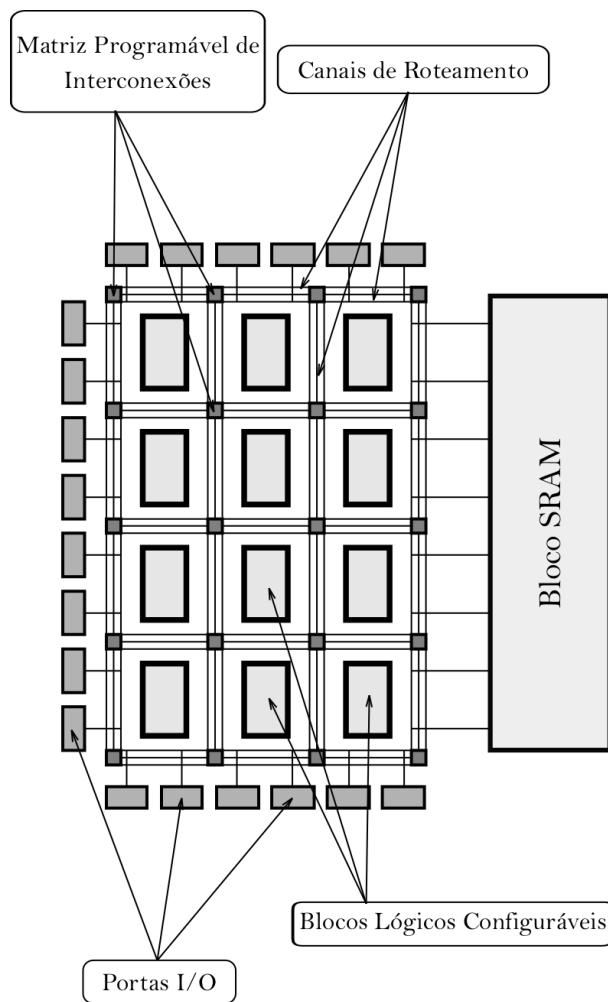


Figura 12: Arquitetura Típica de uma FPGA
Fonte: Adaptado Meyer-Baese (2007, p. 6)

Os CLB são blocos que realizam operações lógicas básicas e armazenam pequenos volumes de dados. Comumente, as operações complexas, necessárias para o processamento de uma aplicação, são divididas em processos mais simples para cada uma das CLBs selecionadas, de modo que a soma das tarefas de cada CLB seja equivalente a operação complexa, em uma estratégia de divisão e conquista. Para realizar operações lógicas básicas e ainda armazenar pequenos volumes de dados os

CLBs tecnicamente poderiam ser apenas um pequeno circuito de transistores (granularidade fina), ou até mesmo um processador completo (granularidade grosseira). Se os CLBs fossem granularidade fina, para realizar tarefas complexas seria necessário um grande número de CLBs e um sistema de roteamento complexo para interconectá-los, o que resultaria em uma FPGA de baixa performance e um elevado consumo energético. Por outro lado de as CLBs forem de uma granularidade mais grosseira seria um desperdício de recurso utilizá-los em operações mais simples (FAROOQ *et al.*, 2012, p. 11). Assim a escolha do nível de complexabilidade, ou granulação, das CLBs de uma FPGA é um compromisso de otimização de recursos.

Ainda segundo Farooq *et al.* (2012, p. 11) dentro da grama de granulação das CLBs, algumas arquiteturas incluem o uso de portas NAND, interconexão de multiplexadores e tabelas de busca LUT (*Lookup Table*). Em especial fabricantes como a Xilinx utilizam CLBs baseadas em LUTs, já que CLBs baseadas em LUT oferecem uma boa relação de granulação, otimizando os recursos da FPGA para aplicações simples até as mais complexas. Este tipo de CLB pode incluir uma único elemento lógico básico BLE (*Basic Logic Element*), ou mesmo um *cluster* de BLEs interconectados, como mostrado na Figura (13).

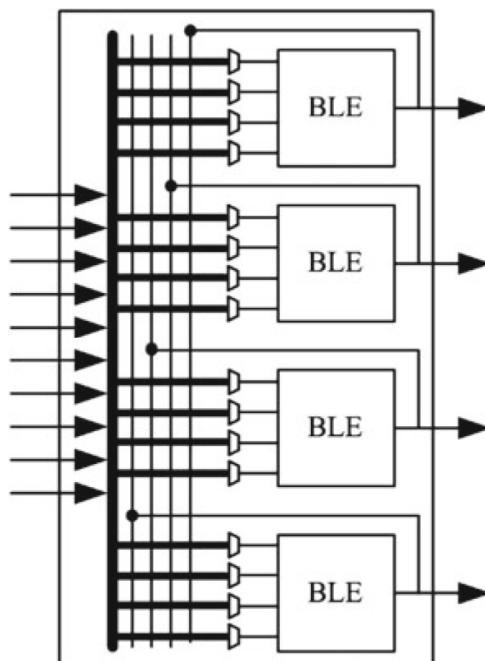


Figura 13: Arquitetura de uma CLB com 4 BLEs

Fonte: Adaptado Farooq *et al.* (2012, p. 13)

Segundo Farooq *et al.* (2012, p. 11), um BLE mais simples consiste basicamente de um LUT e um *Flip-Flop* tipo D, como pode ser visto na Figura (14). Um LUT com k entradas pode implementar k funções booleanas utilizando os espaços de memória SRAM dentro da LUT. O exemplo apresentado na Figura (14) utiliza 16 bits de memória SRAM, os quais são conectadas a entrada do multiplexador que possui 4 bits de seleção, e cuja saída é ligada ao *flip-flop*. Esta configuração permite que a LUT tenha 2^k combinações das k operações booleanas.

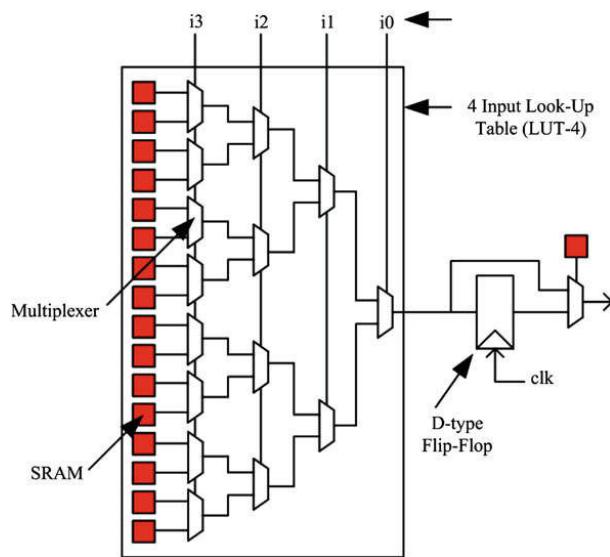


Figura 14: Arquitetura de uma BLE (Basic Logic Element)

Fonte: Adaptado Farooq *et al.* (2012, p. 13)

Um único BLE é capaz de realizar algumas operações booleanas básicas, porém em clusters as combinações de operações aumentam. FPGAs modernas tipicamente contém de 4 a 10 BLEs em um único cluster. Porém estas FPGAs não possuem apenas BLEs idênticas, na verdade há uma grande heterogeneia de blocos, sendo muitos deles desenvolvidos para propósitos específicos. Entre estes blocos de propósito específico estão multiplicadores, somadores, memórias e DSPs (*Digital Signal Processor*), entre outros. Estes blocos são desenvolvidos para otimizar o espaço, processamento, roteamento e demais recursos de hardware que seriam necessários para implementar as mesmas funções em BLEs comuns, sendo essenciais em certas aplicações.

Para (??), a FPGA é uma boa escolha para a implementação do algoritmo da FFT devido a grande variedade de recursos de hardware sintetizáveis, além de possuir recursos de programação paralela que permite o processamento paralelo de

sinais, conferindo assim uma maior rapidez na execução do algoritmo. Como afirma Meyer-Baese (2007, Prefácio), muitos algoritmos de processamento de sinais, como FFT (*Fast Fourier Transform*) e os filtros FIR ou IIR, implementados anteriormente em Circuitos Integrados de Aplicação Específica ou ASIC (*Application Specific Integrated Circuits*), agora estão sendo implementados em FPGAs.

2.4.1 ZYNQBERRY TE0726-03M

O dispositivo escolhido para a implementação do algoritmo Radix-2 é o *ZynqBerry - TE0726* da fabricante *Trenz Eletronic®*, apresentado na figura (15). Este dispositivo é baseado no SoC (*System On Chip*) Raspberry Pi modelo 2, vem equipado com uma FPGA SoM (*System on Module*) XC7Z010-1CLG225C-REV3, da família Zynq-700 fabricado pela *Xilinx®* (ELETRONIC, 2018).

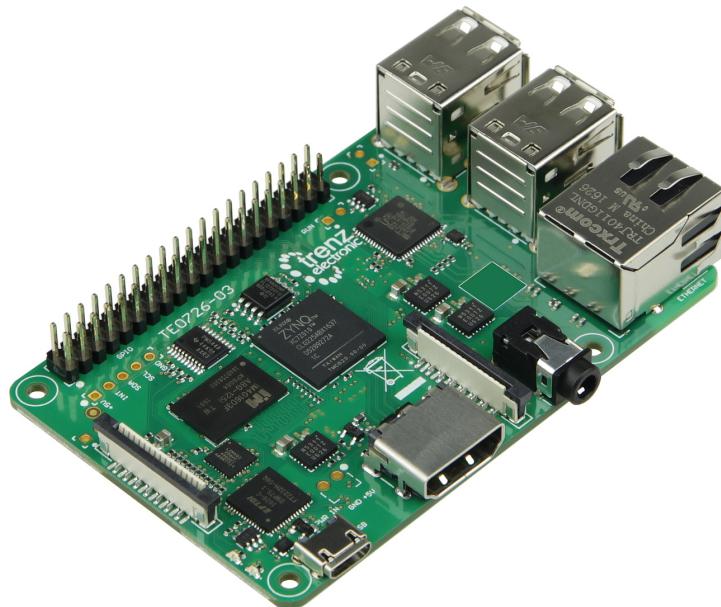


Figura 15: ZynqBerry - TE0726
Fonte: Eletronic (2018)

A FPGA XC7Z010-1CLG225C tem a mesma arquitetura dos modelos da família Artix-7, da mesma fabricante, contendo recursos como: 28.000 células lógicas, 17.600 LUTs, 2.1 Mb de memória RAM divididos em blocos de 26Kb e um total de 36.200 *flip-flops*. Cada CLB, nesta FPGA, para implementar diferentes operações lógicas utiliza 16 *flip-flops*, 2 somadores de 4bits cascateáveis e ainda 8 LUTs. Sendo possível configurar a memoria RAM das LUTs para 64x1 ou 32x2 bits, ou ainda como um *shift register (SRL)*. Além disso esta FPGA possuir 80 blocos DSP, cada um equi-

pado com um multiplicador 18x25 simples, e um somador/acumulador de 48 bits. Todas estes recursos fazem do XC7Z010 um *hardware* competente para as mais diversas aplicações de processamento de sinais, como o calculo da FFT.

2.4.1.1 ZYNQ-7000

Segundo a Xilinx (2018), Zynq-7000 é uma família de SoCs que integram a programabilidade em *software* de um processador ARM Cortex-A9, com a programabilidade em *hardware* de uma FPGA, possibilitando a integração entre CPU, DSPs e FPGA, agregando diversas funcionalidades em um único dispositivo. Zynq-7000 representa uma solução completa em processamento de sinais em um único equipamento, com um ótima relação performance/consumo energético.

Para Crockett *et al.* (2014, Introdução) A principal característica do Zynq-7000 é a forma com que ele combina um sistema de processamento, neste caso um processador Cortex-A9 dual-core, com um sistema de lógico programável como a FPGA. Ainda segundo Crockett *et al.* (2014, Introdução) processadores dedicados já tem sido utilizados em conjunto com FPGAs em diferentes aplicações, porém não da mesma forma como é feita na familia Zynq-7000.

O processador dual-core ARM Cortex-A9 de até 1GHz é competente na execução eficiente de sistemas operacionais completos como o sistemas baseados em kernel Linux, que podem incluem interface gráfica sofistica

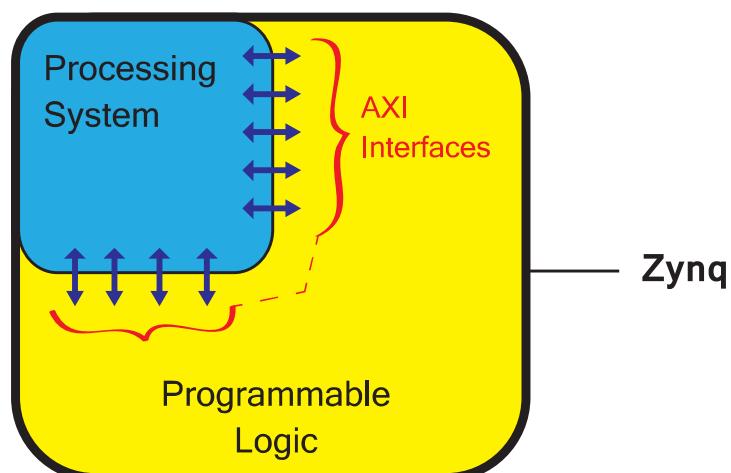


Figura 16: ZynqBery - TE0726
Fonte: Crockett *et al.* (2014)

2.5 ALGORITMO CORDIC

Na equação (38) nota-se que o calculo a FFT depende essencialmente de um multiplicação complexa entre $W_{N_0}^r$ e H_r , o que de fato nada mais é do que a operação trigonométrica de rotacionar o vetor H_r pelo ângulo de $2\pi r/N_0$. Esta tarefa pode ser realizada através da representação dos vetores na forma retangular, e utilização de 4 multiplicadores e 2 somadores(DESPAIN, 1974, p. 1). Porém em termos de complexidade hardware, multiplicadores são mais elaborados e em muitos dispositivos FPGA possuem apenas algumas dezenas. Logo com o objetivo de oferecer uma solução para funções trigonométricas mais simples Jack E. Volder(VOLDER, 1959) desenvolveu a técnica de computação trigonométrica CORDIC (*COordinate Rotation Digital Computer*).

2.5.1 CORDIC TRADICIONAL

O algoritmo CORDIC tem como base as micro-rotações do vetor alvo, de tal modo que cada micro-rotação possa ser feita por somas e deslocamentos de bits. Para tal considere o vetor $H = x + iy$, e a matriz de rotação A em função do angulo θ . A rotação do vetor é dada pela equação (40)(GARRIDO *et al.*, 2016).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (40)$$

Isolando o termo $\cos(\theta)$ da equação (40), é obtido o sistema (41), o qual é a base da técnica CORDIC convencional (EL-MOTAZ *et al.*, 2014).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\theta) \\ \tan(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (41)$$

Segundo (VOLDER, 1959), ao invés de rotacionar o vetor H pelo angulo θ , o algoritmo CORDIC rotaciona H por ângulos muito menores, de tal forma que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \theta_n \simeq \mu\theta \quad (42)$$

e ainda,

$$\theta_n = \tan^{-1}(2^{-n}) \quad (43)$$

Logo aproximando $\tan(\theta_n)$ para θ_n , modifica-se a equação (41) e se obtêm:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \prod_{n=0}^{N-1} K_c \begin{bmatrix} 1 & -\mu 2^{-n} \\ \mu 2^{-n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$k_c = \cos(\tan^{-1}(2^{-n})) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{-2n}}} \quad (45)$$

onde

$$\mu \in \{-1, 1\} \quad (46)$$

K_c é calculado a cada micro-rotação n , assim seu valor total é dado pelo produto de todos os N ganhos. O número total de micro-rotações (N) é escolhido de acordo com o SQNR (*Signal-to-Quantization-Noise Ratio*) admissível a cada rotação. Segundo (VOLDER, 1959), considerando $N \rightarrow \infty$, K_c é aproximadamente igual a 0,6073, e seu inverso 1,647 é conhecido como "Ganho CORDIC". Tal ganho é aproximadamente o mesmo para todas as rotações e em muitos sistemas ele não precisa ser compensado.

Portanto o Algoritmo CORDIC se resume a operações de deslocamento de *bit* e somas. A direção das micro-rotações é determinada por μ , que depende diretamente sinal do ângulo θ_n a se rotacionar. Em aplicações onde o ângulo a se rotacionar é previamente conhecido, que é o caso da FFT, as sequências de rotações μ podem ser armazenado em uma ROM (EL-MOTAZ *et al.*, 2014). Tornando as micro-rotações como interações n , e armazenando em z os ângulos rotacionados a cada interação θ_n , o algoritmo CORDIC é dado por:

$$x(n+1) = x(n) - [\mu 2^{-n}]y(n) \quad (47)$$

$$y(n+1) = y(n) - [\mu 2^{-n}]x(n) \quad (48)$$

$$z(n+1) = z(n) - \tan^{-1}[\mu 2^{-n}] \quad (49)$$

2.5.2 EEAS-CORDIC

No algoritmo CORDIC cada ângulo de rotação θ_n é necessariamente determinado de maneira sequencial, após cada interação n . Em aplicações onde os ângulos de rotação são conhecidos é possível contornar está restrição através de

métodos *Angle Recording* (AR) (WU; WU, 2001).

Os AR tem como objetivo reduzir o numero de interações CORDIC através substituição dos ângulos de rotação pela combinação lineares de um conjunto elemental de micro-rotações. Com foco na redução do erro ϵ oriundo da aproximação (42), o método *Elementary-Angle-Set* (EASR) é um AR que expande o conjunto de combinações lineares adicionando zero ao conjunto de μ , obtendo uma melhor aproximação para certos valores de θ e uma redução de até 50% no número de interações (MEHER *et al.*, 2009). Deste modo o erro de aproximação é expresso por:

$$\epsilon = \left| \theta - \sum_{n=0}^N \mu \theta_n \right| = \left| \theta - \sum_{n=0}^N \mu \tan^{-1}(2^{-n}) \right| \quad (50)$$

Onde:

$$\mu \in \{-1, 0, 1\} \quad (51)$$

Por outro lado o *Extended Elementary-Angle-Set Recoding* (EEASR) apresenta um método baseado no EASR que estende o conjunto de ângulos elementares (*Elementary-Angle-Set*, EAS), para aumentar a possibilidades de decomposição do ângulo de rotação(WU *et al.*, 2003). Para perceber a modificação que o EEASR propõem nota-se primeiramente que o conjunto de ângulos elementares no CORDIC tradicional é definido como:

$$S_1 = \{\tan^{-1}(\mu 2^{-s})\} \quad (52)$$

$$: \mu \in \{-1, 0, 1\}, s \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (53)$$

Como é possível notar em (53) os ângulos elementares dependem de apenas um termo potência de dois, ou *Signed Power of Two* (SPT). Segundo (WU *et al.*, 2003) para aumentar a precisão dos ângulos elementares e consequentemente reduzir o numero de interações pode-se adicionar mais um termo SPT em (53). Assim,

$$S_2 = \{\tan^{-1}(\mu_0 2^{-s_0} + \mu_1 2^{-s_1})\} \quad (54)$$

$$: \mu_0, \mu_1 \in \{-1, 0, 1\}, s_0, s_1 \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (55)$$

Portanto alterando a equação (44) com base em (55) é obtido seguinte

expressão:

$$x(n+1) = x(n) - [\mu_0 2^{-s_0(n)} + \mu_1 2^{-s_1(n)}]y(n) \quad (56)$$

$$y(n+1) = y(n) - [\mu_0 2^{-s_0(n)} + \mu_1 2^{-s_1(n)}]x(n) \quad (57)$$

$$z(n+1) = z(n) - \tan^{-1}[\mu_0 2^{-s_0(n)} + \mu_1 2^{-s_1(n)}] \quad (58)$$

Ao adicionar mais termos tanto a μ e a S_1 cada operação de rotação do algoritmo CORDIC não tem mais o ganho constante K_c , e passa a ter um ganho na forma:

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{1 + [\mu_0 2^{-s_0(n)} + \mu_1 2^{-s_1(n)}]^2}} \quad (59)$$

$$K_c = \prod_{n=0}^{N-1} K(n)_c \quad (60)$$

2.5.3 MSR-CORDIC

O ganho CORDIC K_c apresentado anteriormente sempre se estabelece acima de 1 em qualquer das variações do algoritmo CORDIC apresentados. Com um valor maior que a unidade K_c demanda uma redução de escala no resultado do algoritmo, esta redução provoca uma degradação no valor de SQNR. Logo para evitar esta degradação é necessário manter o modulo do vetor de entrada o mais perto da unidade a cada interação (LIN; WU, 2005). Assim em (LIN; WU, 2005) foi reformulada a expressão (58) da seguinte forma:

$$x(n+1) = \left[\sum_{j=1}^J \mu_j 2^{-s_j(n)} \right] x(n) - \left[\sum_{i=1}^I \mu_i 2^{-s_i(n)} \right] y(n) \quad (61)$$

$$y(n+1) = \left[\sum_{i=1}^I \mu_i 2^{-s_i(n)} \right] x(n) + \left[\sum_{j=1}^J \mu_j 2^{-s_j(n)} \right] y(n) \quad (62)$$

$$z(n+1) = z(n) - \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^I \mu_i 2^{-s_i(n)}}{\sum_{j=1}^J \mu_j 2^{-s_j(n)}} \right] \quad (63)$$

Onde

$$N = I + J \quad (64)$$

O *Mixed Scaling Rotation* (MSR) busca realizar em uma única interação a operação de redução de escala e de micro-rotação. Para tal ele adiciona mais graus de liberdade através da inserção de termos SPT em $x(n)$ da parcela $x(n+1)$, e em $y(n)$ da parcela $y(n+1)$. Consequentemente ao inserir tais termos na função tanto θ_n quanto K_c precisam ser corrigidos (KUO *et al.*, 2003). Portanto K_c passa a ser:

$$K(n)_c = \frac{1}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^I 2^{-s_i(n)}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^J 2^{-s_j(n)}\right)^2}} \quad (65)$$

$$K_c = \prod_{n=0}^{N-1} K(n)_c \quad (66)$$

Como pode ser percebido em (65) e (63), através da escolha adequada dos conjuntos de termos S_i e S_j , e dos valores de I e J é possível aproximar K_c da unidade e ao mesmo tempo reduzir o erro ϵ . Com mais graus de liberdade o MSR possui uma densidade combinacional dentro do círculo unitário maior do que o CORDIC tradicional e o EEAS-CORDIC (KUO *et al.*, 2003), como pode ser visto nas Figuras (17), (18) e (19).

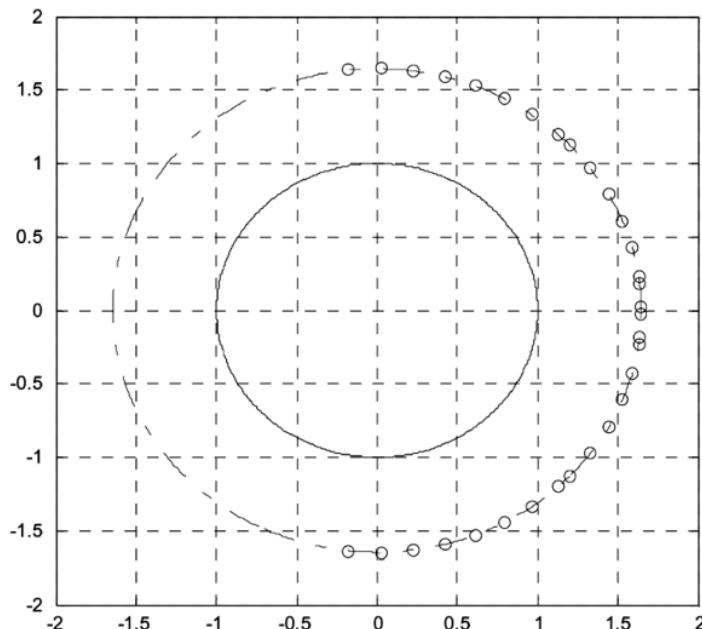


Figura 17: CORDIC Tradicional com N=4
Fonte: (LIN; WU, 2005)

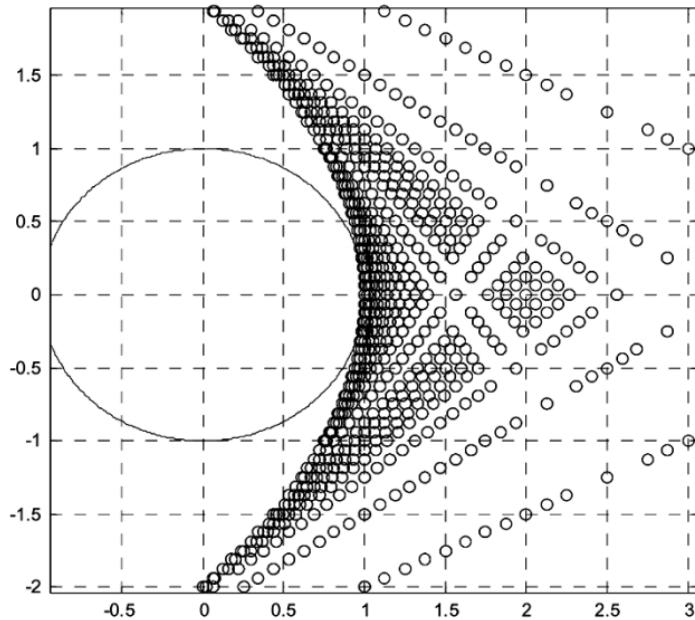


Figura 18: EEAS com N=2 e S=4
Fonte: (LIN; WU, 2005)

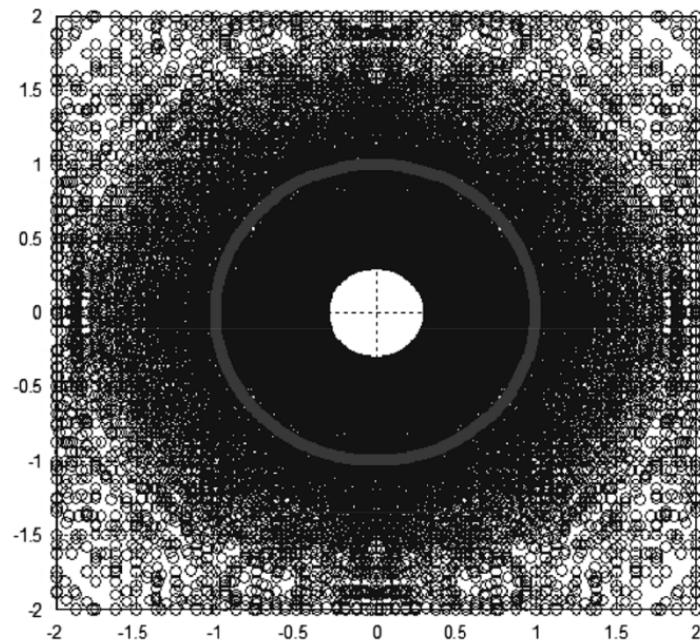


Figura 19: MSR com I=2, J=1 e N=2
Fonte: (LIN; WU, 2005)

2.5.4 ESTRATÉGIA DE PROJETO DOS PARÂMETROS CORDIC

Como apresentado anteriormente tanto o algoritmo EEAS-CORDIC quanto o MSR-CORDIC possuem parâmetros de projeto a serem selecionados para que o

processo de rotação seja realizado minimizando interações e maximizando a precisão. Em (WU *et al.*, 2003) o autor propõe um método de otimização para parâmetros EEAS chamado *Trellis-Based Search*(TBS). A partir do numero máximo de interações N , do ângulo de rotação θ e de W , que representa numero de bits de θ , o TBS emprega um método de otimização para encontrar os melhores parâmetros $S^0(n)$, $S^1(n)$, μ_0 e μ_1 (WU *et al.*, 2003). A função de otimização usado em *TBS* é dada pela minimização do erro ϵ , o qual está descrita em (50), e as restrições são dadas pelos conjuntos de ângulos elementares S_2 apresentados em (55).

TBS é baseado no efeito que os diferentes arranjos dos ângulos elementares possíveis tem sobre ϵ . Em (WU *et al.*, 2003) o autor utiliza um exemplo base para explicar o algoritmo, o qual também será usado aqui.

Considerando um ângulos de rotação $\theta = \pi/3$, o máximo de interações $N = 4$ e a resolução de θ com $W = 8$ bits. O algoritmo segue o seguintes passos:

1. *Inicialização*: Inicialmente é definido $z(S_2)$ como sendo o numero de elementos no conjunto de ângulos elementares, $r(k)$ representando cada elemento de S_2 individualmente, $1 \leq k \leq z(S_2)$ e S_2 sendo o conjunto dos ângulos elementares não redundantes. $\phi(n, k)$ representa a estrutura de acumulação do algoritmo, e será usada para se alcançar o resultado. Defini-se $z(S_2) = 15$ combinações e $\phi(1, k) = r(k)$.
2. *Acumulação*: A cada elemento do vetor $\phi(i + 1, k)$ é atribuído o valor de $\phi(1 : z(S_2), i)$ que corresponde ao mínimo de $\|\phi(1 : z(S_2), i) + r(k) - \theta\|$. O índice i varia $1 \leq i \leq R_m - 1$, e k varia de $1 \leq k \leq Z(S_2)$.
3. *Determinação do Ótimo Global*: Ao final do processo de acumulação os elemento da coluna R_m de ϕ apresentam os resultados globais. Logo dentro desta coluna é determinado o valor que mais se aproxima de θ , defini-se este como θ_{TBS} .
4. *Determinação do Caminho Solução*: A partir do elemento θ_{TBS} da coluna R_m de ϕ é traçado o caminho reverso até a coluna 1 de ϕ . A começar por ($k' = \theta_{TBS}$) e ($i = R_m$) é escolhido o valor da coluna ($i - 1$) que minimiza $\|\phi(1 : z(S_2), i - 1) + r(k') - \theta\|$, em seguida se atribui a k' a posição k do valor minimizante. Os valores k' são armazenados em um vetor e representam as combinações de ângulos elementares que minimizam o erro ϵ .

A tabela (2) apresenta os valores encontrados para ϕ na execução do exemplo apresentado. Em destaque estão os valores considerados o conjunto minimizante solução S_2 .

	i=1	i=2	i=3	i=4
k=1	-0,7854	0,3218	0,3556	0,3218
k=2	-0,4636	0,6435	0,6774	0,6435
k=3	-0,245	0,8622	0,8961	0,8622
k=4	-0,6435	0,4636	0,4975	0,4636
k=5	0	1,1071	1,0304	1,0304
k=6	0,4636	1,1071	1,1071	0,9612
k=7	0,245	1,0304	1,1071	1,141
k=8	0,7854	1,0304	0,9965	1,0304
k=9	-0,9828	0,1244	0,1582	0,1244
k=10	-0,8961	0,2111	0,245	0,2111
k=11	-1,1071	0	0,0339	0
k=12	0,9828	0,9828	1,1071	1,0167
k=13	0,8961	1,141	1,0204	1,0543
k=14	0,6435	1,1071	1,1071	0,9991
k=15	1,1071	1,1071	1,1071	1,141

Tabela 2: Matriz ϕ para o dado Exemplo
Fonte: Autoria Própria

Para o algoritmo MSR-CORDIC porém é mais complicado determinar todos os parâmetros S_j , S_i , μ_i , μ_j , I e J . Primeiramente nota-se que o conjunto dos ângulos fundamentais deixa de ser representado por (55) e passa a ser (LIN; WU, 2005):

$$S_{NSPT} = \frac{\sum_{i=1}^I \mu_i 2^{-s_i(n)}}{\sum_{j=1}^J \mu_j 2^{-s_j(n)}} \quad (67)$$

$$\therefore \mu_i, j \in \{-1, 0, 1\}, \quad (68)$$

$$s_i, s_j \in \{0, 1, \dots, N - 1\} \quad (69)$$

Portanto o conjunto de soluções ótimas de ângulos elementares para a redução do erro ϵ expande, o que em primeiro plano possibilita uma maior oportunidade de conjuntos que otimizam o função do erro ϵ . Entretanto como é desejado manter o ganho K_c perto da unidade, não há apenas uma função objetivo a ser considerada, existe ainda a função do erro entre K_c e a unidade, o qual pode ser expressa como:

$$\epsilon_{Kc} = \left\| 1 - \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^I 2^{-s_i(n)}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^J 2^{-s_j(n)}\right)^2}} \right\| \quad (70)$$

Como ambos os erros ϵ e ϵ_{Kc} tem impactos distintos no erro total de cálculo de uma unidade CORDIC, sendo que o primeiro impacta no ângulo do vetor de saída e o segundo impacta no módulo deste ângulo. Assim neste artigo será usado uma adaptação do algoritmo TBS já apresentado.

Na modificação proposta aqui várias instâncias do algoritmo TBS são calculados para diferentes combinações de I e J , sempre respeitando a restrição $N = I + J$. Cada combinação I e J gera diferentes combinações de $S_{N_{SPT}}$. Assim cada instância TBS gera um valor de erro ϵ e ϵ_{Kc} , então é selecionada a instância que possui o menor valor de $\epsilon + \epsilon_{Kc}$ como a melhor solução global.

3 IMPLEMENTANDO PROCESSADOR CORDIC

4 IMPLEMENTANDO A FFT NO ZYNQBERRY

4.0.1 IMPLEMENTANDO FFT 32 PONTOS

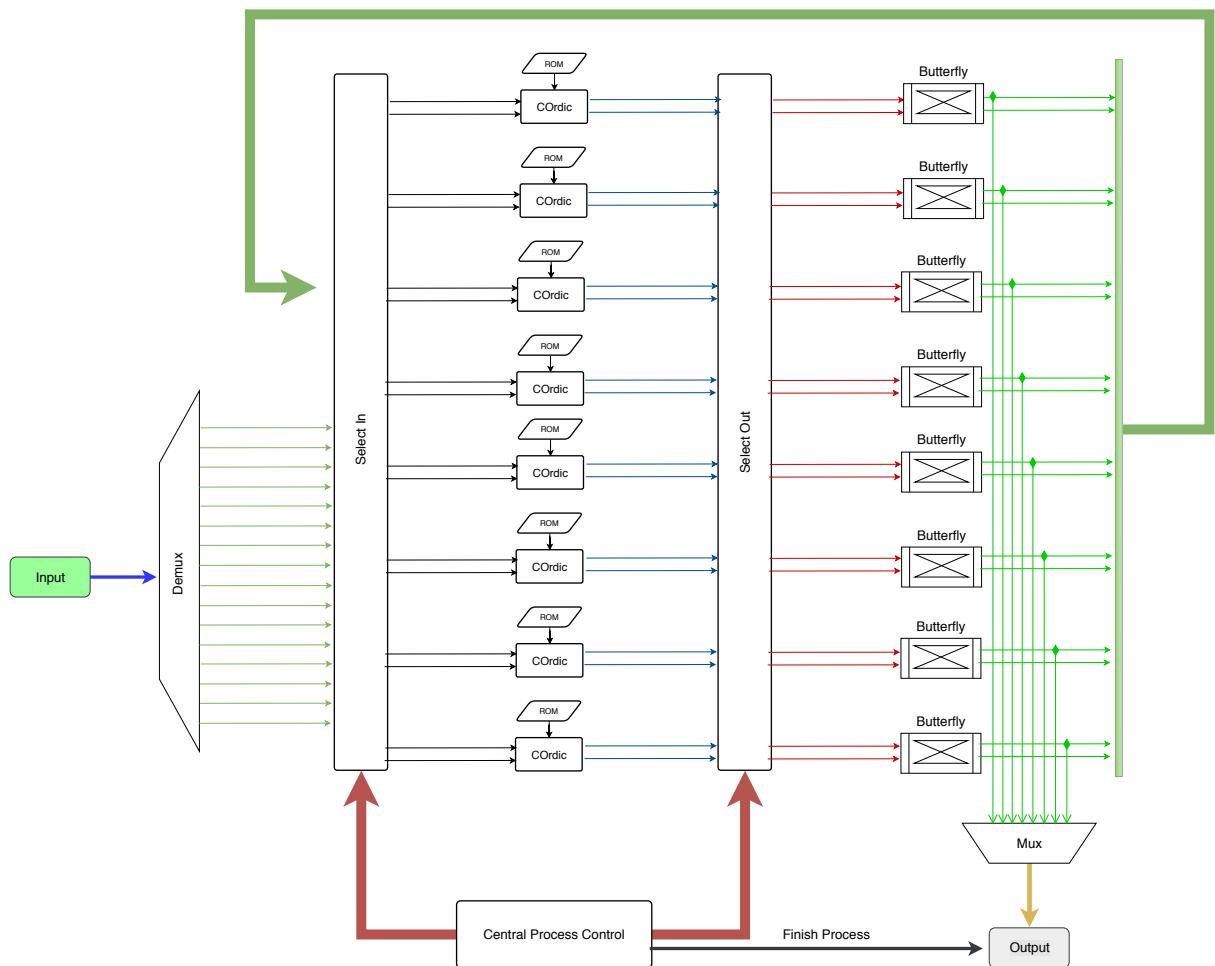


Figura 20: Arquitetura Implementada FFT de 16 Pontos
Fonte: Autoria Própria

4.0.2 IMPLEMENTANDO FFT 1024 PONTOS

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.0.1 IMPLEMENTANDO FFT 32 PONTOS

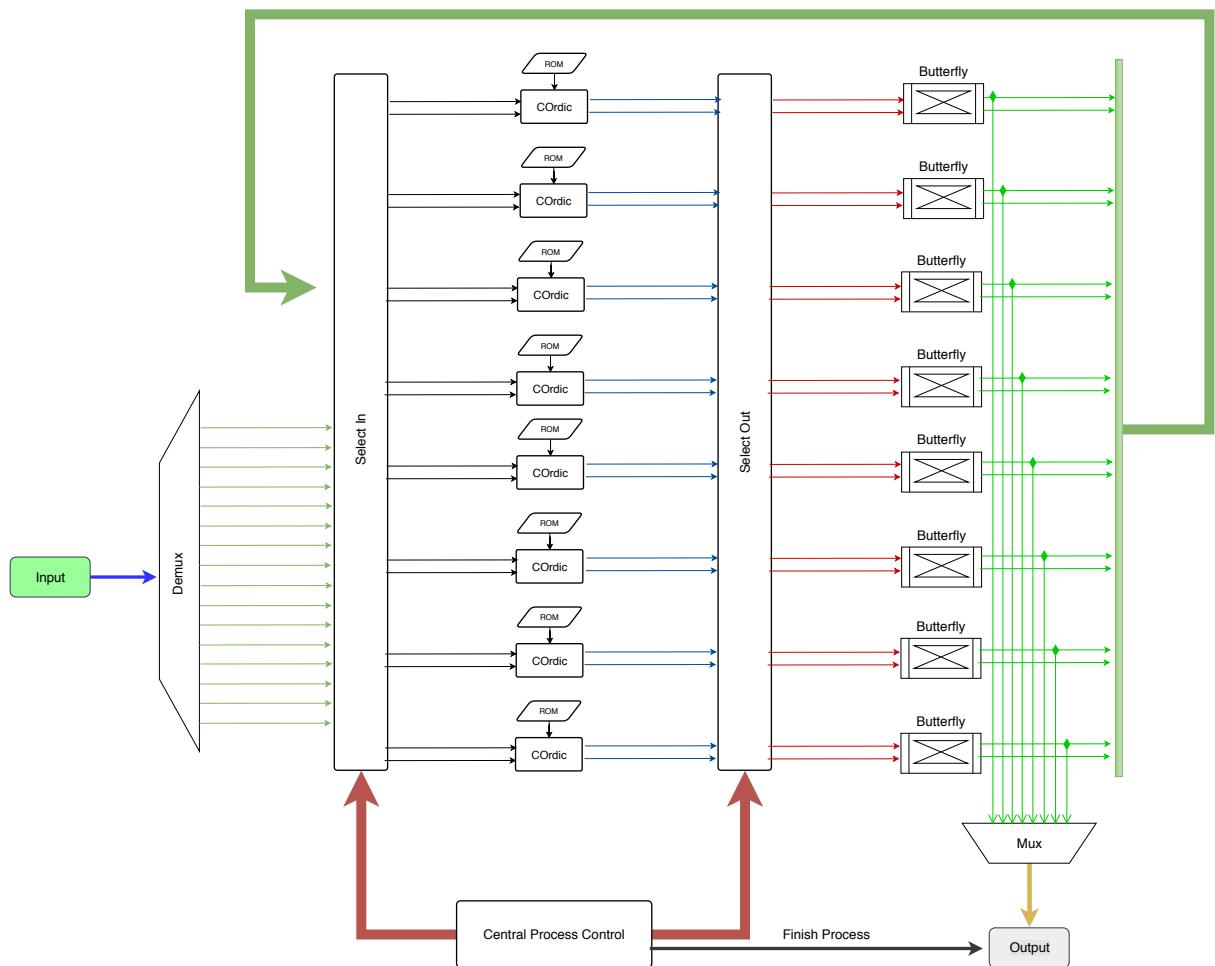


Figura 21: Arquitetura Implementada FFT de 16 Pontos
Fonte: Autoria Própria

5.0.2 IMPLEMENTANDO FFT 1024 PONTOS

6 CONCLUSÃO

Tabela 3: Exemplo de Tabela

Posição	Município	População
1	São Paulo	11.376.685
2	Rio de Janeiro	6.690.290
3	Salvador	2.710.968
4	Brasília	2.648.532
5	Fortaleza	2.500.194

Fonte: (??)

6.0.1 TESTES E EXEMPLOS DE LISTA DE SIGLAS

Testes da lista de siglas:

(TDLS1).

(EASREFER).

(ER).

Esta é uma sigla em que os parênteses não aparecem: SQPNA.

(DMA).

É preciso rodar duas vezes o Latex para que a lista de siglas seja atualizada.

6.0.2 TESTES E EXEMPLOS DE LISTA DE SÍMBOLOS

$$\phi = \vec{\alpha} \otimes v\omega\psi_{n-1}^{jk} \quad (71)$$

Onde:

ϕ : Angulo phi.

$\vec{\alpha}$: Alfa.

$v\omega\psi_{n-1}^{jk}$: Um simbolo grande.

Este símbolo (∇) foi inserido no texto, fora do ambiente *equation*.

$$\nu\omega\psi_{n-1}^{jk}$$

6.0.3 EXEMPLOS DE CITAÇÃO DE REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(??)

(????)

Conforme ??) a metodologia proposta é, bla bla bla...

(??)

7 NÍVEL 1 - TESTES DE CAPITULAÇÃO - PRIMÁRIO

7.1 NÍVEL 2 - SECUNDÁRIO

7.1.1 NÍVEL 3 - TERCIÁRIO

7.1.1.1 NÍVEL 4 - QUATERNÁRIO

7.1.1.1.1 NÍVEL 5 - QUINÁRIO

REFERÊNCIAS

- AMARAL, Carlos Eduardo Ferrante do; LOPES, Heitor S; ARRUDA, Lúcia V; HARA, Marcos S; GONÇALVES, Antonio J; DIAS, Adilson A. Design of a complex bioimpedance spectrometer using dft and undersampling for neural networks diagnostics. **Medical engineering & physics**, Elsevier, v. 33, n. 3, p. 356–361, 2011.
- BINGHAM, J. A. C. Multicarrier modulation for data transmission: an idea whose time has come. **IEEE Communications Magazine**, v. 28, n. 5, p. 5–14, May 1990. ISSN 0163-6804.
- CHU, Eleanor; GEORGE, Alan. **Inside the FFT black box: serial and parallel fast Fourier transform algorithms**. 1. ed. [S.I.]: CRC Press, 1999.
- CORMEN, Thomas H; LEISERSON, Charles E; RIVEST, Ronald L; STEIN, Clifford. **Algoritmos: teoria e prática**. 2. ed. [S.I.]: Editora Campus, 2002.
- CROCKETT, Louise H; ELLIOT, Ross A; ENDERWITZ, Martin A; STEWART, Robert W. The zynq book. **Strathclyde Academic Media**, 2014.
- DESPAIN, Alvin M. Fourier transform computers using cordic iterations. **IEEE Transactions on Computers**, IEEE, v. 100, n. 10, p. 993–1001, 1974.
- EL-MOTAZ, M. A.; NASR, O. A.; OSAMA, K. A cordic-friendly fft architecture. In: **2014 International Wireless Communications and Mobile Computing Conference (IWCMC)**. [S.I.: s.n.], 2014. p. 1087–1092. ISSN 2376-6492.
- ELETRONIC, Inc Trenz. **TE0726 - ZynqBery**. San Jose, EUA, Julho 2018. V2.1.
- FAROOQ, Umer; MARRAKCHI, Zied; MEHREZ, Habib. **Tree-based Heterogeneous FPGA Architectures: Application Specific Exploration and Optimization**. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- GARRIDO, M.; KÄLLSTRÖM, P.; KUMM, M.; GUSTAFSSON, O. Cordic ii: A new improved cordic algorithm. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, v. 63, n. 2, p. 186–190, Feb 2016. ISSN 1549-7747.
- HAYKIN, SIMON S; VEEN, Barry Van. **Sinais e sistemas**. [S.I.]: Bookman, 2001.
- HE, Hongjiang; GUO, Hui. The realization of fft algorithm based on fpga co-processor. In: **IEEE. Intelligent Information Technology Application, 2008. IITA'08. Second International Symposium on**. [S.I.], 2008. v. 3, p. 239–243.
- IBRAHIM, Muhammad; KAMAL, Mohsin; KHAN, Omar; ULLAH, Khalil. Analysis of radix-2 decimation in time algorithm for fpga co-processors. Computing, Electronic and Electrical Engineering (ICE Cube), 2016 International Conference on, 2016.

- KUO, Jen-Chih; WEN, Ching-Hua; LIN, Chih-Hsiu; WU, An-Yeu (Andy). Vlsi design of a variable-length fft/ifft processor for ofdm-based communication systems. **EURASIP Journal on Advances in Signal Processing**, v. 2003, n. 13, p. 439360, Dec 2003. ISSN 1687-6180. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S1110865703309060>>.
- LATHI, Bhagwandas Pannalal. **Sinais e Sistemas Lineares**. 2. ed. [S.I.]: Brasil: Bookman, 2007.
- LIN, Chih-Hsiu; WU, An-Yeu. Mixed-scaling-rotation cordic (msr-cordic) algorithm and architecture for high-performance vector rotational dsp applications. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 52, n. 11, p. 2385–2396, Nov 2005. ISSN 1549-8328.
- LIU, C.; MOREIRA, P.; ZEMITI, N.; POIGNET, P. 3d force control for robotic-assisted beating heart surgery based on viscoelastic tissue model. In: **2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society**. [S.I.]: s.n., 2011. p. 7054–7058. ISSN 1094-687X.
- MARTINSEN, Orjan G; GRIMNES, Sverre. **Bioimpedance and bioelectricity basics**. [S.I.]: Academic press, 2011.
- MEHER, P. K.; VALLS, J.; JUANG, T. B.; SRIDHARAN, K.; MAHARATNA, K. 50 years of cordic: Algorithms, architectures, and applications. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 56, n. 9, p. 1893–1907, Sept 2009. ISSN 1549-8328.
- MEYER-BAESE, Uwe. **Digital signal processing with field programmable gate arrays**. 3. ed. [S.I.]: Springer, 2007.
- MOORE, Andrew. **FPGAs for Dummies Altera Special Edition**. [S.I.]: Wiley Brand, 2007.
- OPPENHEIM, Alan V; WILLSKY, Alan S. **Sinais e Sistemas**. 2. ed. [S.I.]: Brasil:Pearson, 2010.
- TRADINGVIEW. **Índice BM & FBOVESPA**. 2017. <https://www.tradingview.com/symbols/BMFBOVESPA-IBOV/>. Acessado em 14 de Agosto de 2017.
- TRIANTIS, Iasonas F; DEMOSTHENOUS, Andreas; RAHAL, Mohamad; HONG, Hongwei; BAYFORD, Richard. A multi-frequency bioimpedance measurement asic for electrical impedance tomography. In: IEEE. **ESSCIRC (ESSCIRC), 2011 Proceedings of the**. [S.I.], 2011. p. 331–334.
- VANMATHI, K; SEKAR, K; RAMACHANDRAN, Remya. Fpga implementation of fast fourier transform. In: IEEE. **Green Computing Communication and Electrical Engineering (ICGCCEE), 2014 International Conference on**. [S.I.], 2014. p. 1–5.
- VOLDER, J. E. The cordic trigonometric computing technique. **IRE Transactions on Electronic Computers**, EC-8, n. 3, p. 330–334, Sept 1959. ISSN 0367-9950.
- WANG, B.; ZHANG, Q.; AO, T.; HUANG, M. **Design of Pipelined FFT Processor Based on FPGA**. Jan 2010. 432-435 p.

- WU, Cheng-Shing; WU, An-Yeu. A novel trellis-based searching scheme for e eas-based cordic algorithm. In: **2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No.01CH37221)**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 2, p. 1229–1232 vol.2. ISSN 1520-6149.
- WU, Cheng-Shing; WU, An-Yeu; LIN, Chih-Hsiu. A high-performance/low-latency vector rotational cordic architecture based on extended elementary angle set and trellis-based searching schemes. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing**, v. 50, n. 9, p. 589–601, Sept 2003.
- XILINX. **Zynq-7000 SoC Product Advantages**. 2018. <https://www.xilinx.com/products/silicon-devices/soc/zynq-7000.html>. Acessado em 12 de Agosto de 2017.
- ZHOU, Bin; PENG, Yingning; HWANG, David. Pipeline fft architectures optimized for fpgas. **International Journal of Reconfigurable Computing**, Hindawi Publishing Corp., v. 2009, p. 1, 2009.

ANEXO A - STELLAR MYSTERY SOLVED, EINSTEIN SAFE

For more than 30 years, Villanova University astronomer Ed Guinan has been plagued, puzzled, and perplexed by DI Herculis. On the surface, this binary star seems pretty much like any other binary star, with two stars going 'round and 'round each other in a predictable, orderly fashion. But there remained a nagging problem that as much as Guinan wanted, he couldn't just sweep under the rug: DI Her was not behaving in accordance with Einstein's general theory of relativity.

Every year, Guinan and his colleagues would observe the 8.5 - magnitude star. The two stars orbit each other in a plane lined up perfectly with Earth's line of sight, and they eclipse each other every 10.55 days. Thanks to these eclipses, which have been recorded since 1900, Guinan could make exceedingly precise measurements of the stars' masses, sizes, luminosities, and orbital characteristics.

Almost every known aspect of the system was hunky-dory. The stars are exactly as massive, large, and bright as theory predicts. But in a series of published papers, Guinan and his Villanova colleague Frank Maloney kept pointing out that the orbit was not behaving in accordance with general relativity, the cornerstone for modern science's understanding of gravity.

For years, Guinan looked for a third star in the system, or some other factor that could be throwing the orbit out of whack, but to no avail. The point in the orbit at which the two stars come closest continues to advance (precess) each orbital cycle at a rate only one-fourth the amount theory predicts. Guinan continually receives mail from armchair theorists who attempt to explain DI Her's anomalous precession with alternative theories of gravity.

Finally, after decades of frustration, a group led by Simon Albrecht (MIT) has solved the problem, and Einstein's theory has survived unscathed. "The monkey has been lifted off my back," jokes Guinan.

After being informed about DI Her by Guinan, Albrecht and his colleagues took detailed spectra in 2008 using a 1.93-meter telescope in France. These measurements, unlike earlier ones made by Guinan and others, were obtained with a high-resolution spectrograph. With more modern equipment, computers, and techniques, Albrecht revealed that the rotation axes of the two stars are tipped over on their sides with respect to the orbital plane (similar to Uranus's orientation with respect to the Sun), which makes DI Her an oddity among closely separated binary stars.

In this unusual arrangement, gravitational forces created by the misaligned

equatorial bulges of the stars give them an extra "kick" when they are closest in their elliptical (oval-shaped) orbits. This kick reduces the orbital precession to the observed rate, eliminating any discrepancies with Einstein's theory. "We consider the mystery of the anomalous orbital precession of DI Herculis to be solved," says Albrecht, whose paper will appear in tomorrow's *Nature*.

Guinan concurs, but he adds, "I'm relieved that the general relativity problem is solved. But it's been replaced with a new mystery."

DI Her's two members, both hot, massive, B-type stars, should have formed from a common disk of gas and dust. By feeding from the same disk, the spin axes of the two stars should be nearly perpendicular to the orbital plane, an arrangement seen in the large majority of binary stars, especially those like DI Her that have small separations.

"My guess is that there was a third-body interaction that perturbed the system, or the two stars formed separately and formed a binary through a capture process," says Guinan. "Another possibility is that our ideas of how binaries form may be off."

Together with MIT colleague Joshua Winn, Albrecht is observing other binary systems that display similar anomalies. "We want to understand if DI Her is a unique system or if misalignment is more common among close systems," says Albrecht. "We also want to understand what might cause this misalignment. Clearly, there is more going on than we guessed so far."

Even if Einstein's theory remains safe and sound, astronomers and physicists continue to subject it to more stringent tests. Given general relativity's incompatibility with quantum mechanics (the theory that describes the microworld of atoms and light with extraordinary accuracy), scientists expect that Einstein will not have the last word on gravity. Ultimately, it will be replaced by an even deeper "theory of everything."

A.1 EXEMPLO DE SEÇÃO ANEXO

Esta é uma seção, dentro dos anexos.