

# Elektronika i elektrotechnika

## Układy elektroniczne

### Podział układów:

- układy (obwody, sieci) o stałych skupionych (analogowe i cyfrowe)
- układy o stałych rozłożonych, układy mikrofalowe.

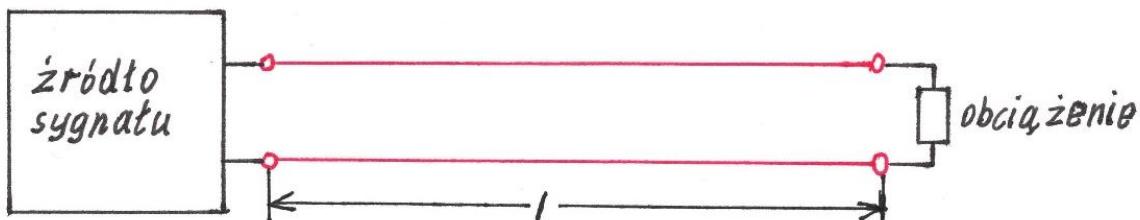
**Def.** Pole elektromagnetyczne jest quasi-stacjonarne w danym obszarze, jeśli w tym obszarze można pominąć wszelkie efekty opóźnienia, wynikające ze skończonej prędkości rozchodzenia się fali elektromagnetycznej.

$$\lambda = \frac{v}{f}, \quad l_{max} - maksymalny \text{ wymiar geometryczny}$$

Jeśli  $l_{max} \leq \frac{\lambda}{100}$ , to układ o stałych skupionych

Jeśli  $l_{max} \geq \frac{\lambda}{4}$ , to założenie o Q-S nie może być przyjęte

### Przykład:



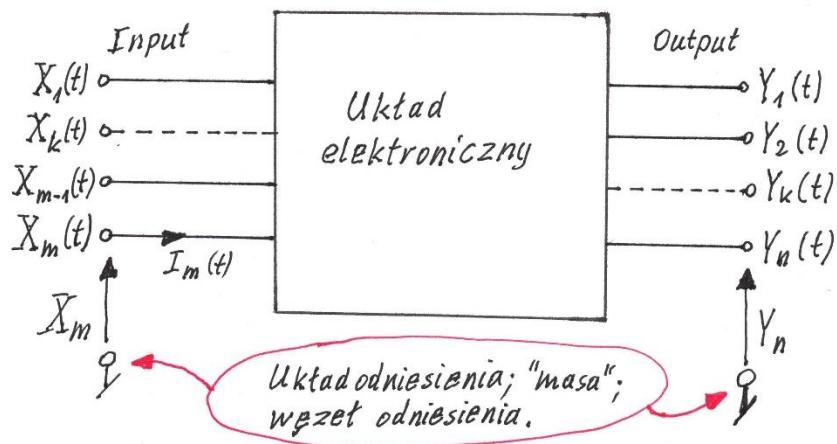
1°  $[f = 1 \text{ GHz}] \wedge [l = 1 \text{ cm}] \Rightarrow [\text{układ o stałych rozłożonych}]$

2°  $[f = 1 \text{ GHz}] \wedge [l \approx 3 \text{ mm}] \Rightarrow [\text{układ o stałych skupionych}].$

### Zakres przedmiotu:

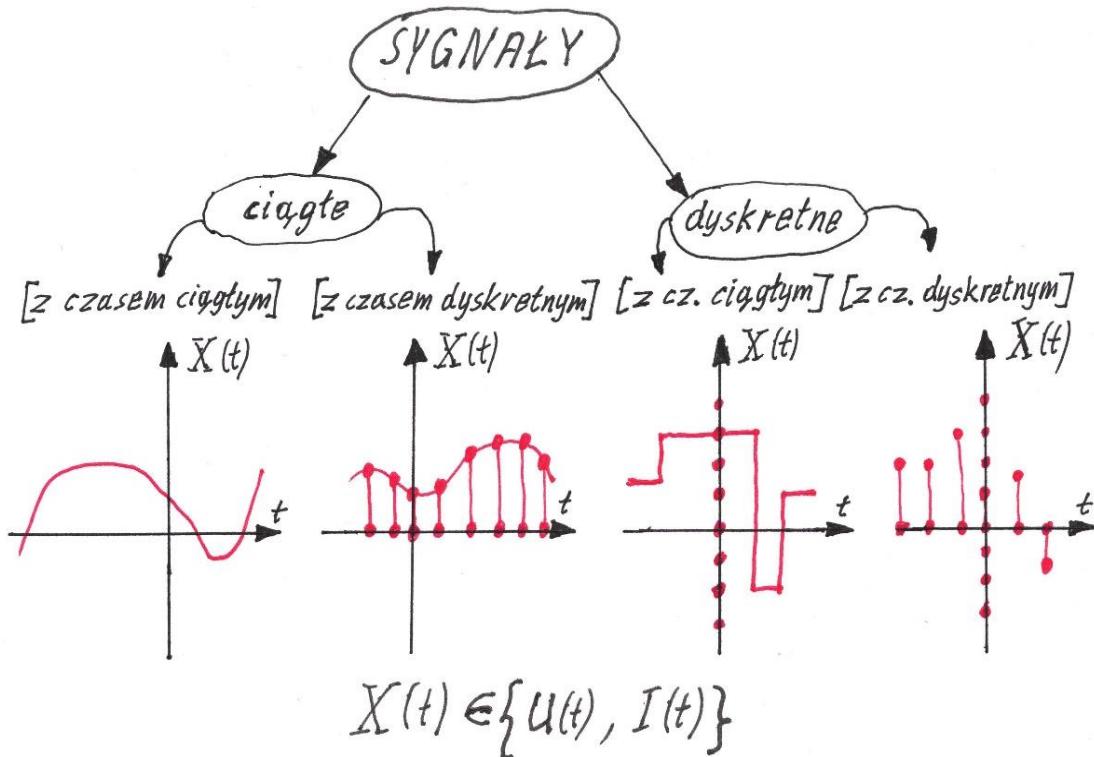
- właściwości i rodzaje skupionych elementów biernych;
- metody opisu i analizy liniowych obwodów elektrycznych;
- wybrane zagadnienia z teorii przyrządów półprzewodnikowych;
- wybrane zagadnienia z układów elektronicznych.

## Reprezentacja blokowa układów:

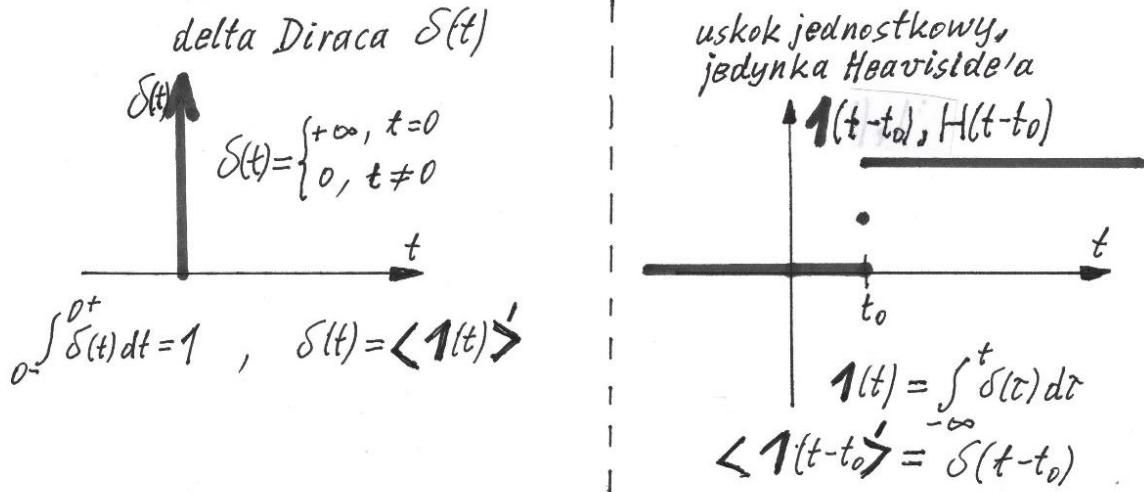


## Klasyfikacja sygnałów elektrycznych:

Df. Sygnal elektryczny → funkcja opisująca przebieg w czasie napięcia lub prądu:  $u(t)$ ,  $I(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $i(t)$ ,  $V_{DS}(t)$ ,  $V_{GS}(t)$ ,  $u_0 + u(t)$ ,  $I_D + i_d(t)$ , etc.



### Sygnały specjalne (dystrybucyjne):



### Sygnały okresowe

$$x(t+nT) = x(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad T - \text{okres podstawowy}$$

- szczególny przypadek: sygnał harmoniczny

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi); \quad \omega = 2\pi/T - \text{pulsacja kątowa}$$

$$\omega = 2\pi f, \quad f - \text{częstotliwość}$$

$$X - \text{amplituda sygnału}$$

$$\varphi - \text{faza początkowa}$$

### Sygnały zespolone $X_c(t)$ , $\hat{X}(j\omega t)$ (okresowe)

Reprezentacja zespolona  $X_c(t)$ ,  $\hat{X}(j\omega t)$  sygn. rzeczywistego  $x(t)$ :

- algebraiczna

$$X_c(t) = \operatorname{Re} X_c(t) + j \operatorname{Im} X_c(t),$$

np:  $x(t) = \operatorname{Re} \hat{X}_c(t)$  lub  $x(t) = \operatorname{Im} \hat{X}_c(t)$

- wykładnicza

$$\hat{X}(j\omega t) = \hat{X} e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\hat{X}}_{X_c} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \hat{X}_c e^{j\omega t} =$$

$$= \hat{X} [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

$\hat{X}_c \rightarrow$  amplituda zespolona (wskaz, ang. phasor), niesie informację o amplitudzie i fazie sygnału harmonicznego.

## Reprezentacja sygnałów za pomocą uogólnionych szeregów Fouriera

Wykorzystujemy zbiory zupełne funkcji ortogonalnych:

- funkcje harmoniczne,
- wielomiany Legendre'a,
- wielomiany Czebyszewa,
- funkcje Walsh'a, etc.

### Przykłady:

Rozwinięcie sygnału okresowego  $x(t)$  w trygonometryczny szereg Fouriera w przedziale  $[t_0, t_0+T]$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

gdzie:  $\omega_0 = 2\pi/T$ ,  $a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

lub w następującej postaci:

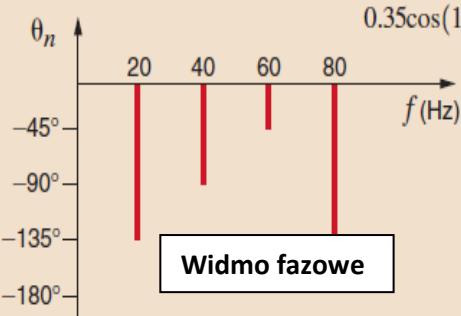
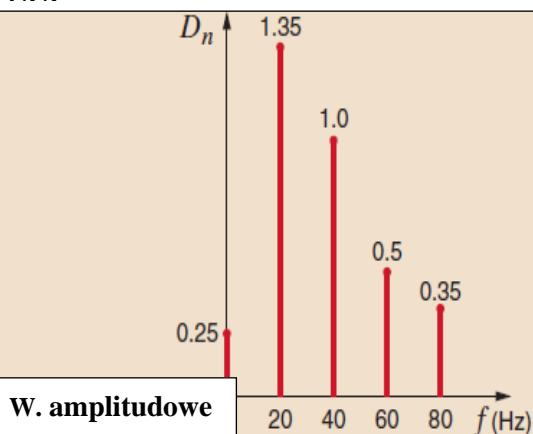
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

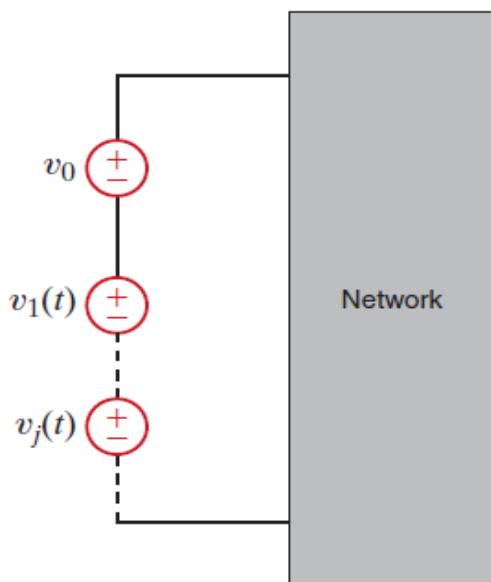
### Widmo prążkowe (dyskretnie) – przykład:

Rysunki przedstawiają amplitudowe i fazowe widma prążkowe okresowej funkcji  $f(t)$ . Określ  $f(t)$ .

Odp.:

$$f(t) = 0.25 + 1.35 \cos(40\pi t - 135^\circ) + \cos(80\pi t - 90^\circ) + 0.5 \cos(120\pi t - 45^\circ) + 0.35 \cos(160\pi t - 90^\circ).$$

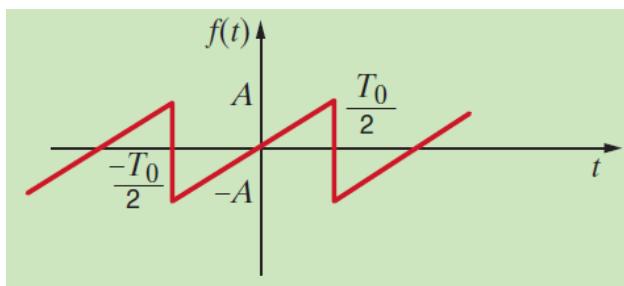




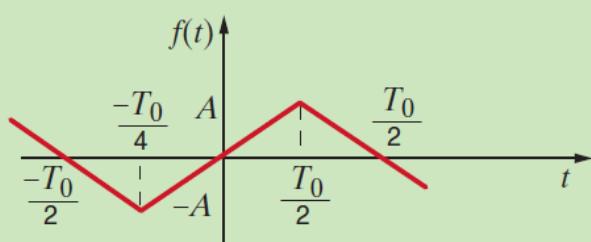
Jeśli układ jest pobudzany napięciem periodycznym o dowolnym kształcie, którego rozwinięcie w szereg Fouriera jest następujące:

$$v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

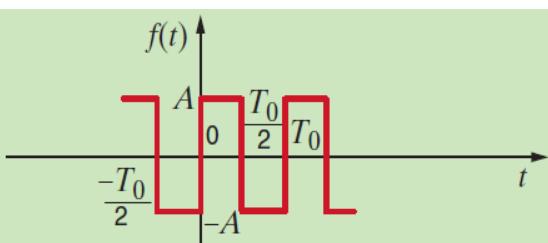
to możemy w równoważny sposób badać odpowiedź układu na tzw. składową stałą i harmoniki rozwinięcia Fouriera.



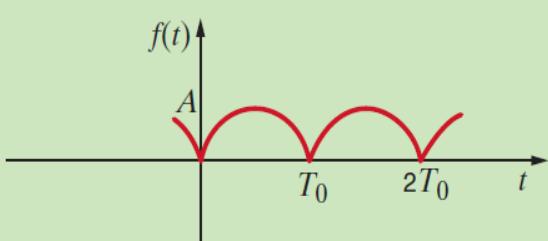
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2A}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$



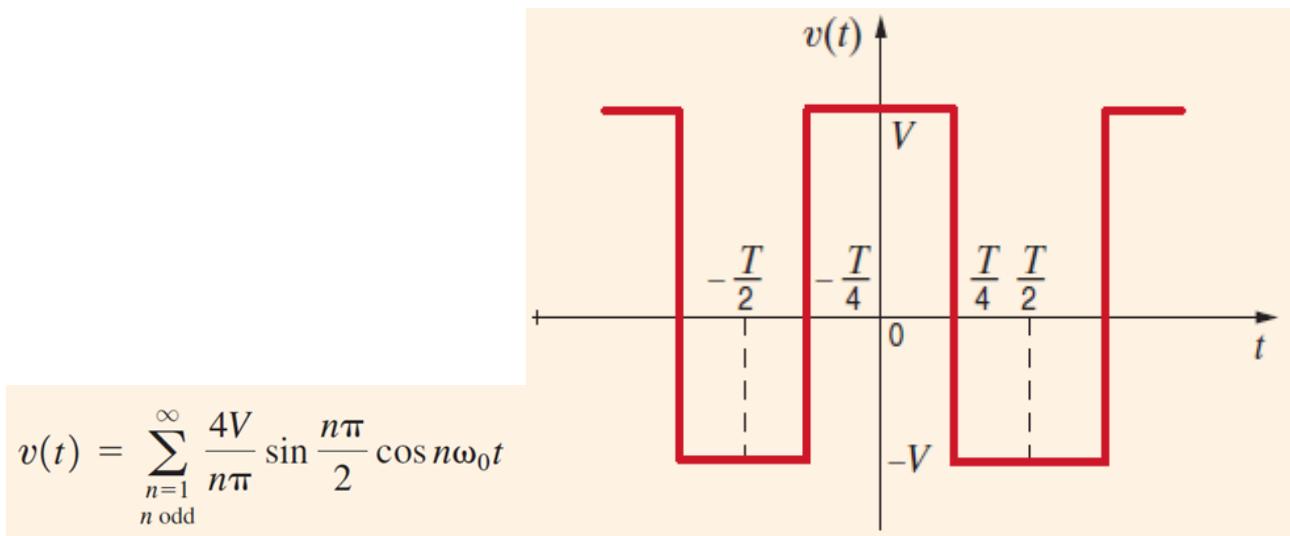
$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{\infty} \frac{8A}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t$$



$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$



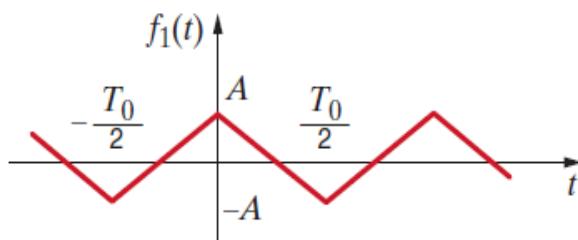
$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(1 - 4n^2)} \cos n\omega_0 t$$



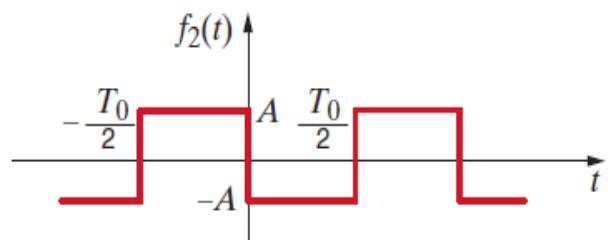
**‘Amplituda’ harmonik konkretnego sygnału periodycznego nie zależy od skali czasu**

**Przykład:**

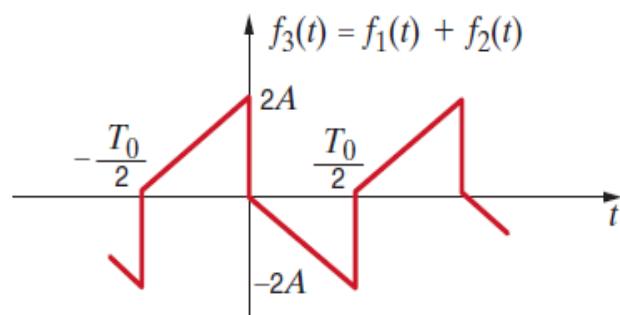
Poniżej przedstawiono przykład, który ilustruje jak z dwóch sygnałów periodycznych można wygenerować trzeci sygnał poprzez operację sumowania



(a)



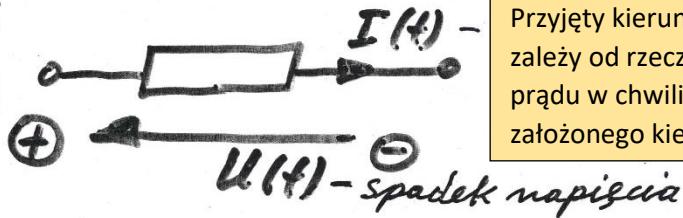
(b)



(c)

## Skupione elementy bierne – dwójniki

Zasada  
"strzałkowania"  
prądów i napięć



Przyjęty kierunek prądu  $I(t)$  nie zależy od rzeczywistego kierunku prądu w chwili  $t$ , ale zależy od założonego kierunku napięcia  $U(t)$ .

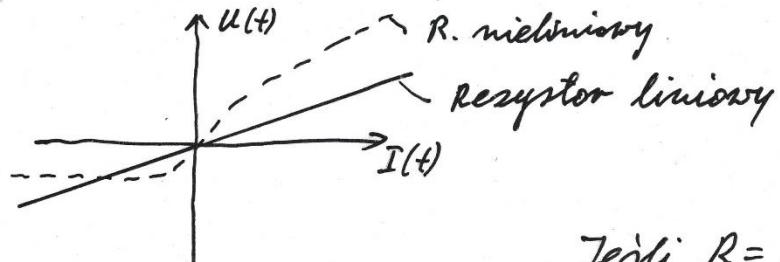
### Rezystor idealny, $R$ :

$I(t)$  -  $R$  -  $U(t)$

$R$  -  $I(t)$  -  $U(t)$

$G = \frac{1}{R}$

$U(t) = R \cdot I(t)$  lub  $I(t) = G \cdot U(t)$ ,  $R, G \in \mathbb{R}^+$

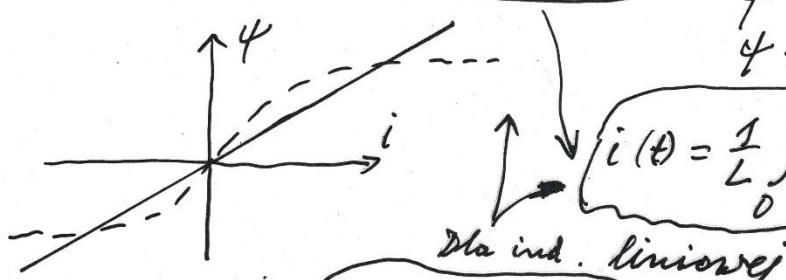


Jeśli  $R = R(t)$ , to rezystor parametryczny

### Indukcyjność idealna, $L$ :

$I(t)$  -  $L$  -  $U(t)$

$U(t) = L \frac{di}{dt}$



$\phi = L \cdot i$  ← ind. liniowa

$\phi = L(i) \cdot i$  ← ind. nieliniowa

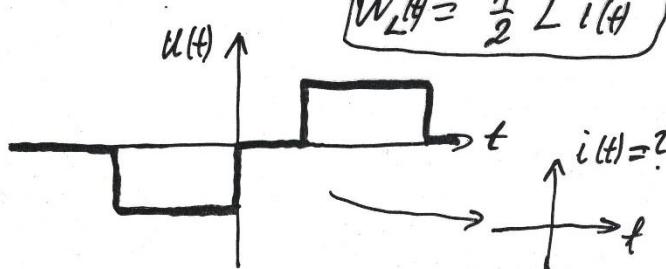
$\phi = L(t) \cdot i$  ← ind. parametryczna

$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(t') dt' + i(0)$

$i(0) = i_0$

$i(t)$

$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$

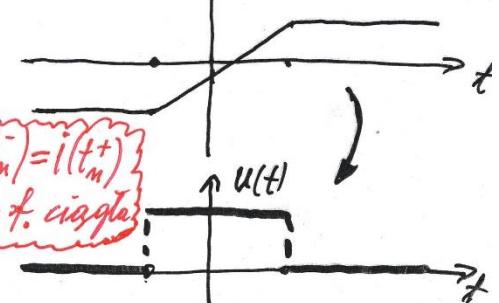


$i(t_m^-) = i(t_m^+)$

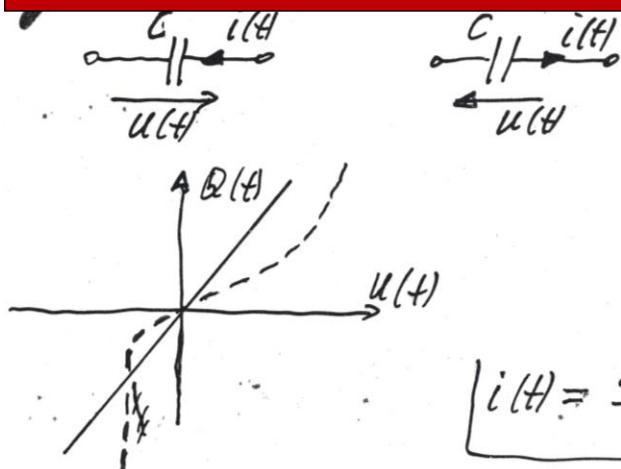
$i(t) - f. ciągła$

$i(t_m^-) = i(t_m^+)$

$i(t) - f. ciągła$



## Pojemność idealna, C:



$$Q(t) = C \cdot U(t) - \text{prz. liniowa}$$

$$Q(t) = C(U(t)) \cdot U(t) - \text{prz. nieliniowa}$$

$$Q(t) = C(t) \cdot U(t) - \text{prz. paramet.}$$

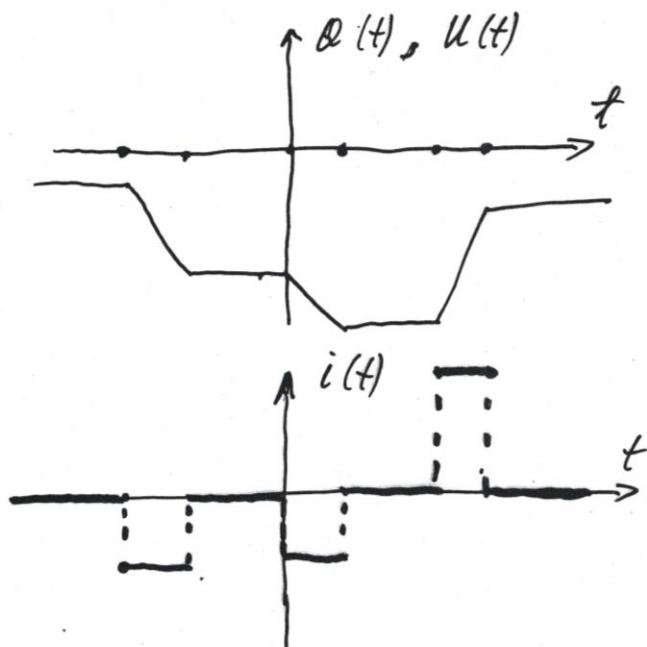
$$\left[ i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \right]$$

Dla prz. nieliniowej:  $i(t) = \frac{dC}{dU} \cdot \frac{dU}{dt} \cdot U(t) + C \cdot \frac{dU}{dt}$

Dla prz. liniowej:  $\left[ i(t) = C \frac{dU}{dt} \right]$

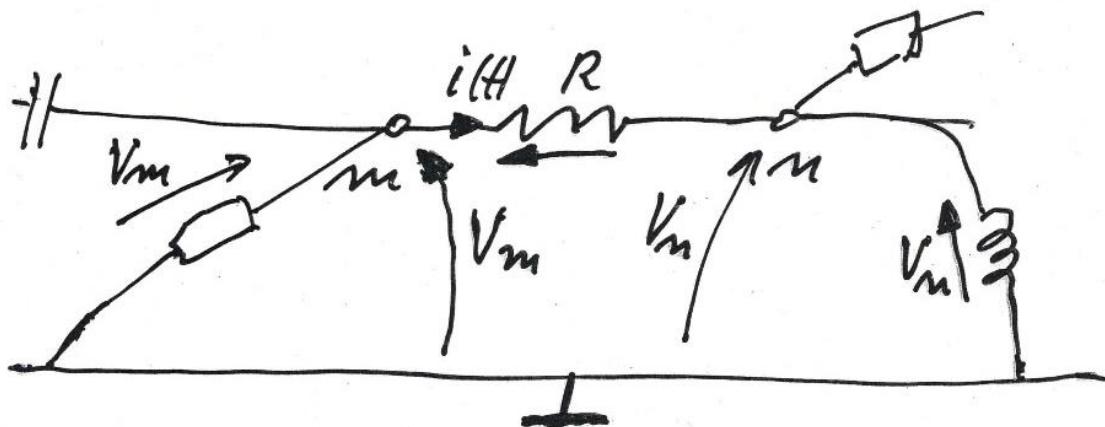
$$\boxed{U(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) \cdot dt + U(t_0)}, \quad U(t_0) = U_0$$

$$\boxed{W_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot U^2(t)}$$



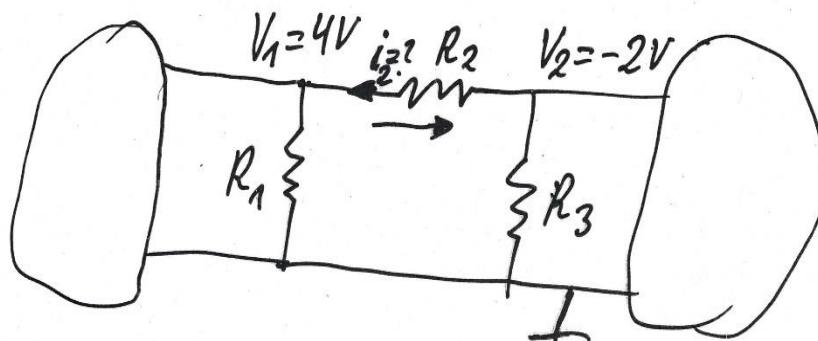
$U(t^-_n) = U(t^+_n)$   
Napięcie na kondensatorze jest ciągła funkcja t.

**Prawo Ohma dla rezystora nieuziemionego (ang. floating):**



$$i = \frac{V_m - V_n}{R}$$

**Przykład:**

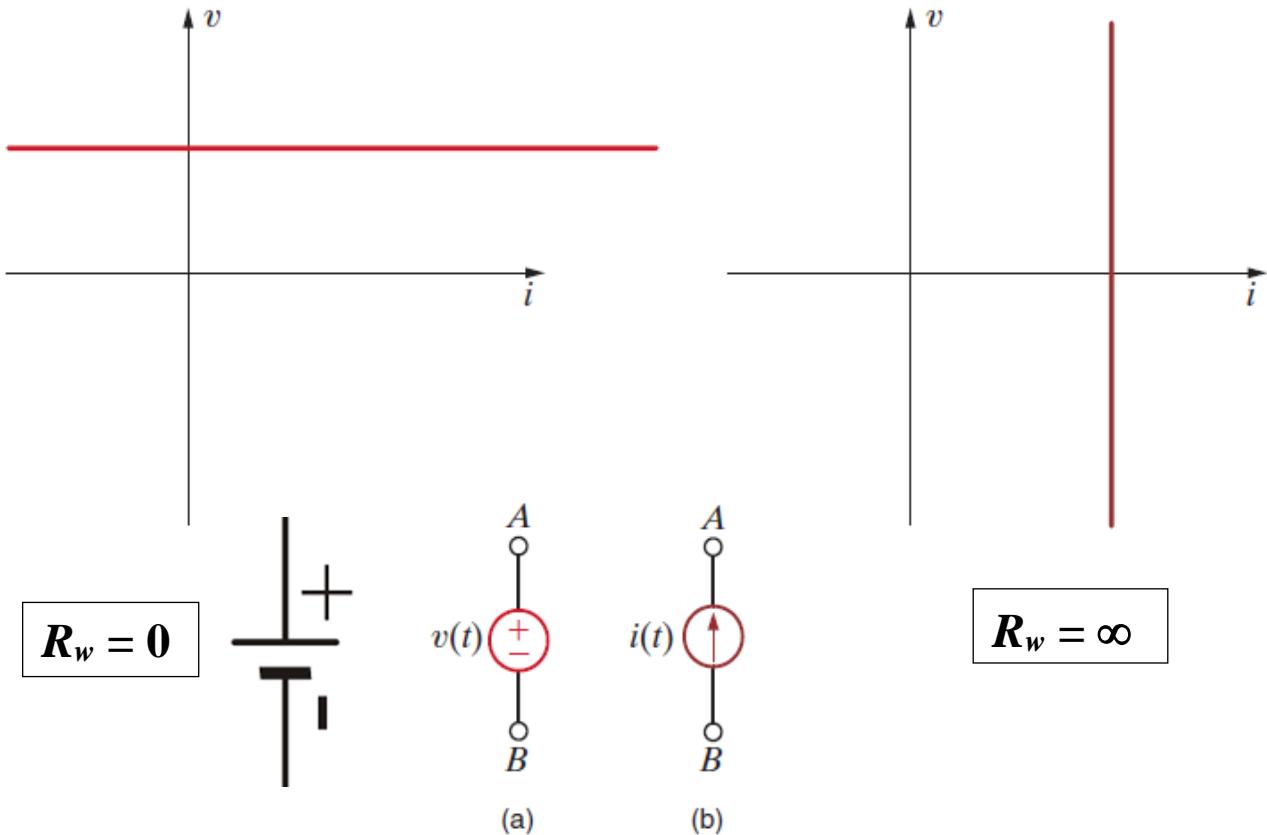


$$i_2 = \frac{V_2 - V_1}{R_2} = \frac{-2V - 4V}{R_2} = -\frac{6V}{R_2} < 0$$

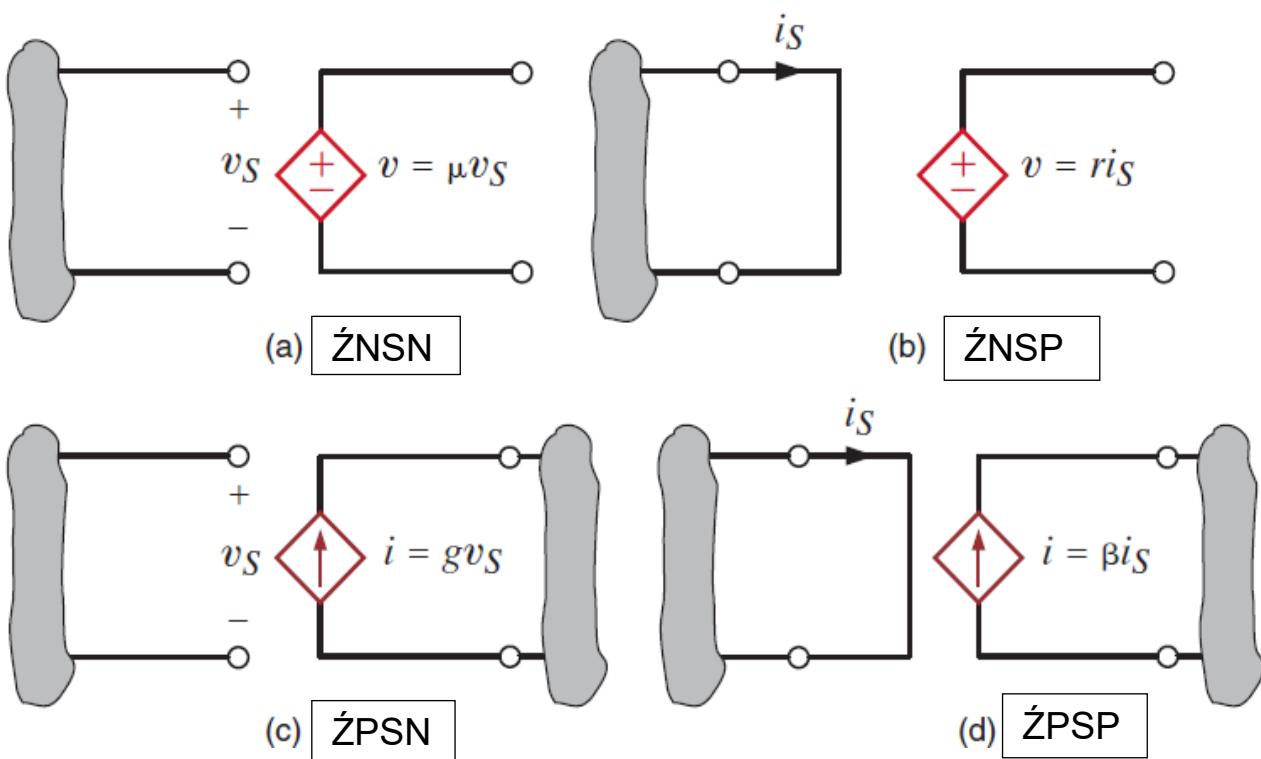
W rzeczywistości prąd płynie w kierunku przeciwnym do zaznaczonego (założonego) na rysunku, a 'strzałka' napięcia ma zwrot przeciwny.

## Rodzaje źródeł

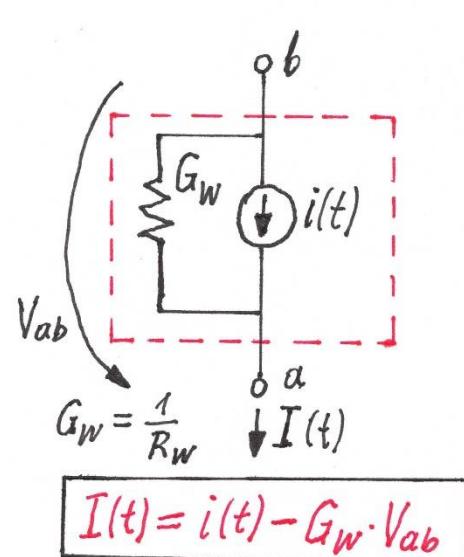
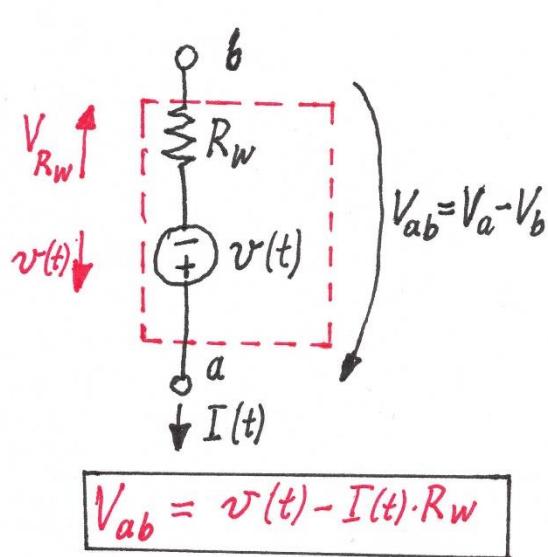
(Idealne) źródła niezależne (autonomiczne, niesterowane):



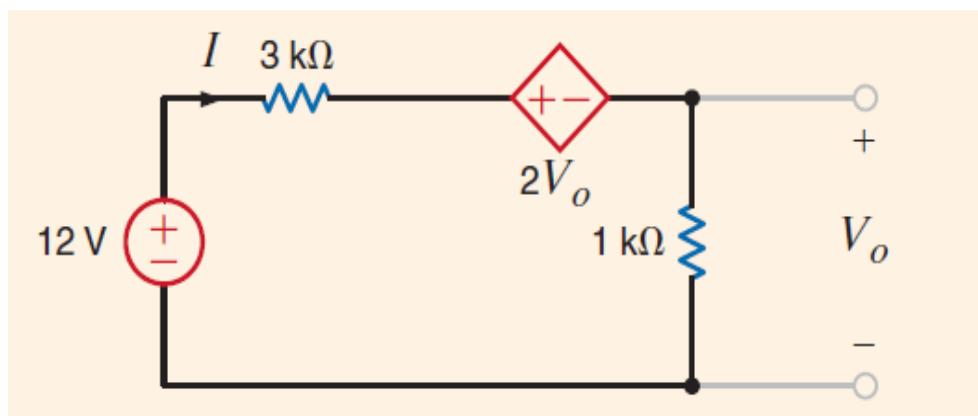
(Idealne) źródła zależne (nieautonomiczne, sterowane):



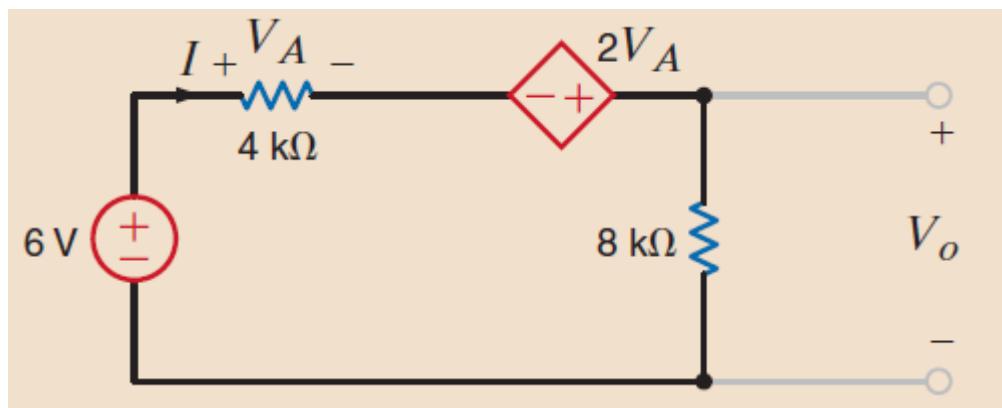
## Rzeczywiste źródła – napięciowe i prądowe:



**Zadanie:** Oblicz  $V_o$  w obwodzie pokazanym na rysunku. {Odp.:  $V_o = 2V$ }

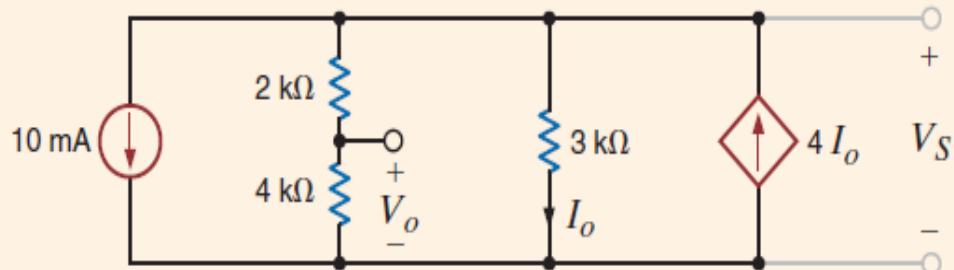


**Zadanie:** Oblicz  $V_o$  w obwodzie pokazanym na rysunku. {Odp.:  $V_o = 12V$ }



### Przykład:

Given the circuit in Fig.  containing a current-controlled current source, let us find the voltage  $V_o$ .



Applying KCL at the top node, we obtain

$$10 \times 10^{-3} + \frac{V_s}{2k + 4k} + \frac{V_s}{3k} - 4I_o = 0$$

where

$$I_o = \frac{V_s}{3k}$$

Substituting this expression for the controlled source into the KCL equation yields

$$10^{-2} + \frac{V_s}{6k} + \frac{V_s}{3k} - \frac{4V_s}{3k} = 0$$

Solving this equation for  $V_s$ , we obtain

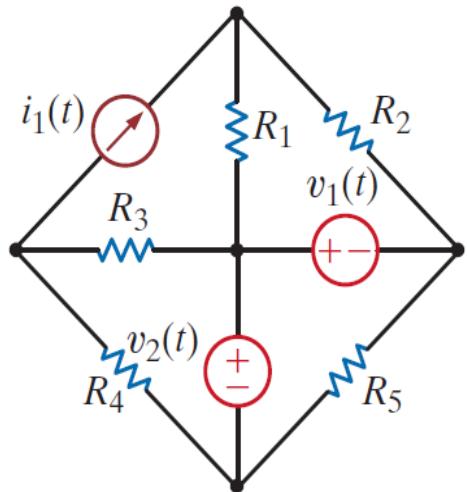
$$V_s = 12 \text{ V}$$

The voltage  $V_o$  can now be obtained using a simple voltage divider; that is,

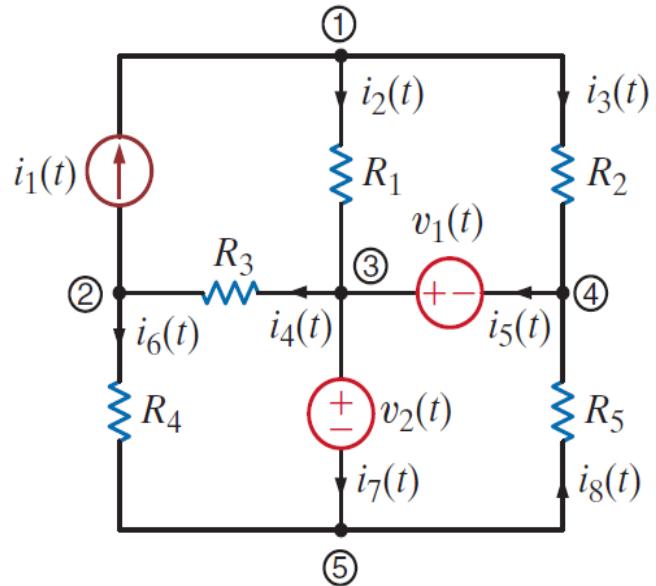
$$\begin{aligned} V_o &= \left[ \frac{4k}{2k + 4k} \right] V_s \\ &= 8 \text{ V} \end{aligned}$$

## Prądowe prawo Kirchhoffa (PPK),

ang. Kirchhoff's current law (KCL)



(a)

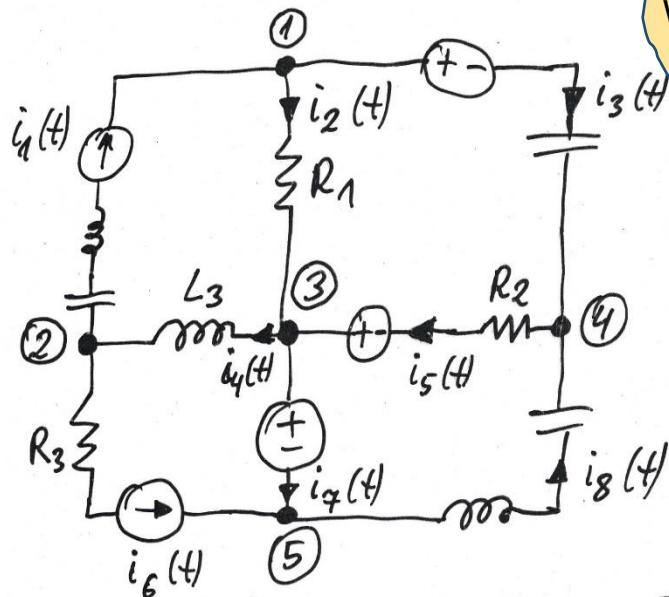


(b)

$$\begin{aligned}
 -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0 \\
 i_1(t) - i_4(t) + i_6(t) &= 0 \\
 -i_2(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_7(t) &= 0 \\
 -i_3(t) + i_5(t) - i_8(t) &= 0 \\
 -i_6(t) - i_7(t) + i_8(t) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0$$

## Prądowe prawo Kirchhoffa (PPK) – przykłady:



W dowolnej chwili  $t$ , w dowolnym węźle, spełnione jest równanie

$$\sum_{k=1}^N i_k(t) = 0$$

$i(t) \geq 0$ , gdy wypływa;  
 $i(t) < 0$ , gdy wpływa.

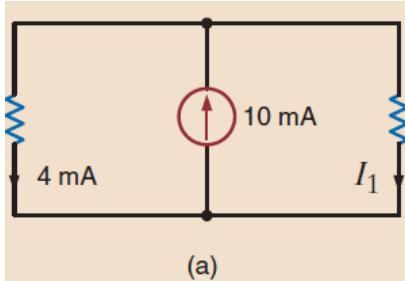
Zastosowanie KCL do węzłów ① do ⑤

$$\begin{aligned} -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0 \\ i_1(t) - i_4(t) + i_6(t) &= 0 \\ -i_2(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_7(t) &= 0 \\ -i_3(t) + i_5(t) - i_8(t) &= 0 \\ -i_6(t) - i_7(t) + i_8(t) &= 0 \end{aligned}$$

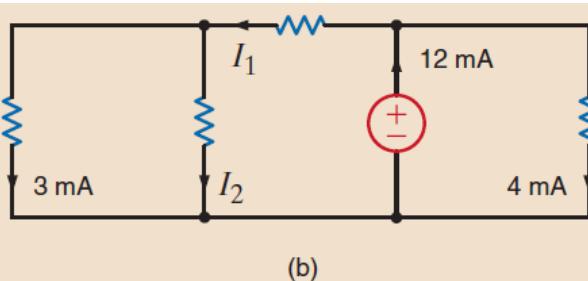
Zauważmy, że dodanie stronami pierwszych czterech równań daje w wyniku równanie piąte!

Tylko cztery równania (dowolnie wybrane) są **niezależne**!

**Zadanie:** Oblicz  $I_1$ .oraz  $I_2$ . {Odp.: (a)  $I_1 = 6 \text{ mA}$ ; (b)  $I_1 = 8 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 5 \text{ mA}$ }

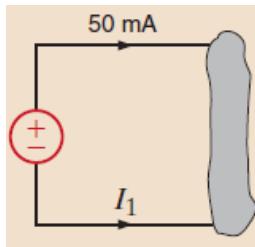


(a)

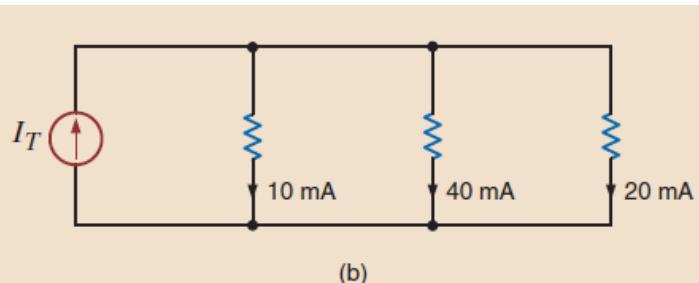


(b)

**Zadanie:** Oblicz  $I_1$ .oraz  $I_T$ . {Odp.: (a)  $I_1 = -50 \text{ mA}$ ; (b)  $I_T = 70 \text{ mA}$ }

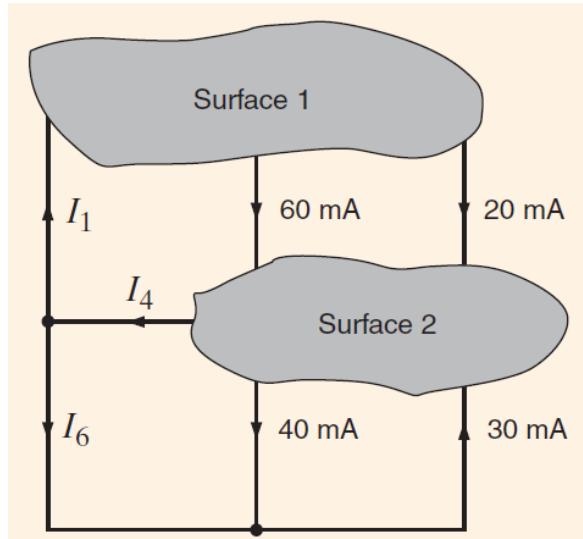


(a)



(b)

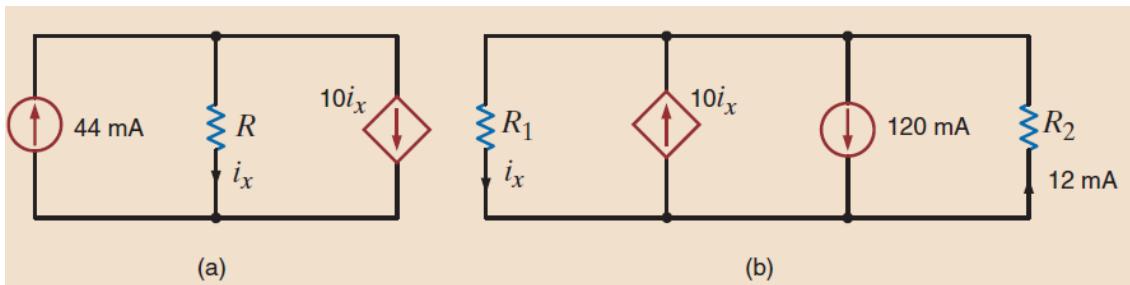
**Przykład:** Skorzystaj z PPK dla superwęzła i oblicz  $I_1$ ,  $I_4$  oraz  $I_6$ :



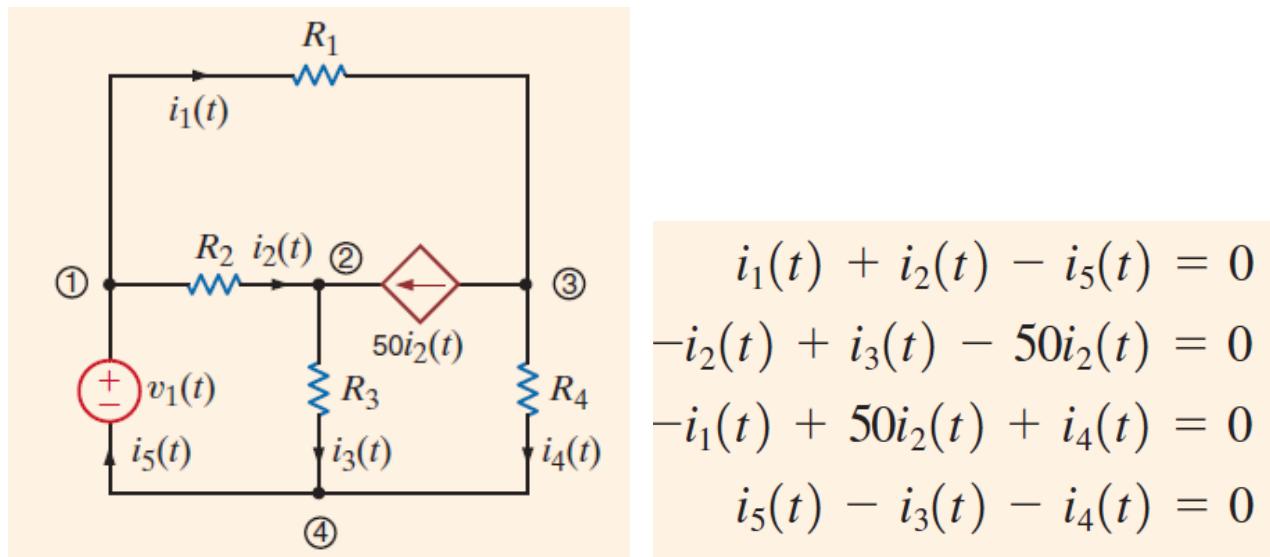
$$I_4 - 0.06 - 0.02 - 0.03 + 0.04 = 0$$

$$I_4 = 70 \text{ mA}$$

**Zadanie:** Skorzystaj z PPK i oblicz  $i_x$ . {Odp.: (a)  $i_x = 4 \text{ mA}$ ; (b)  $i_x = 12 \text{ mA}$ }

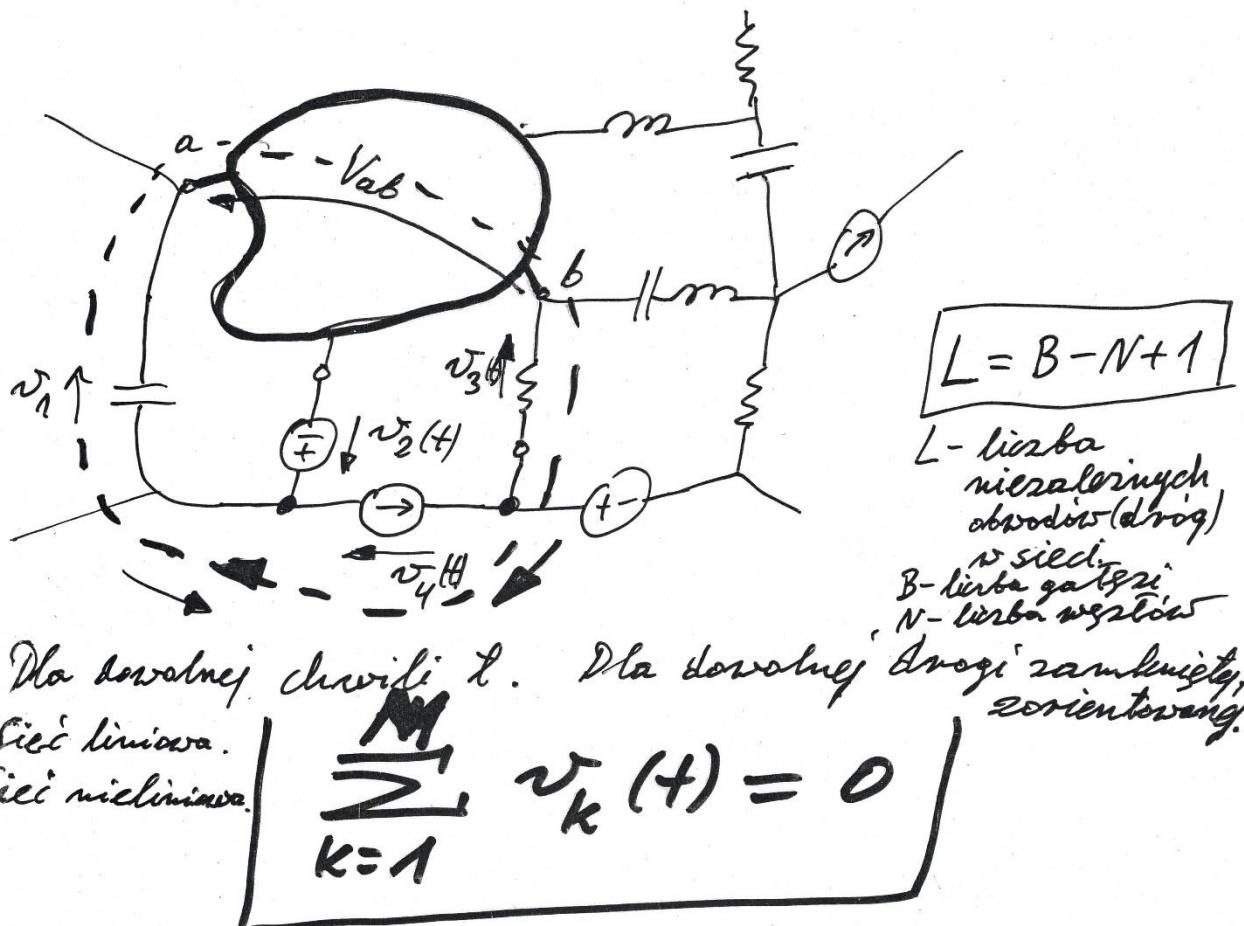


**Zadanie / przykład:** Napisz PPK dla obwodu pokazanego na rysunku:



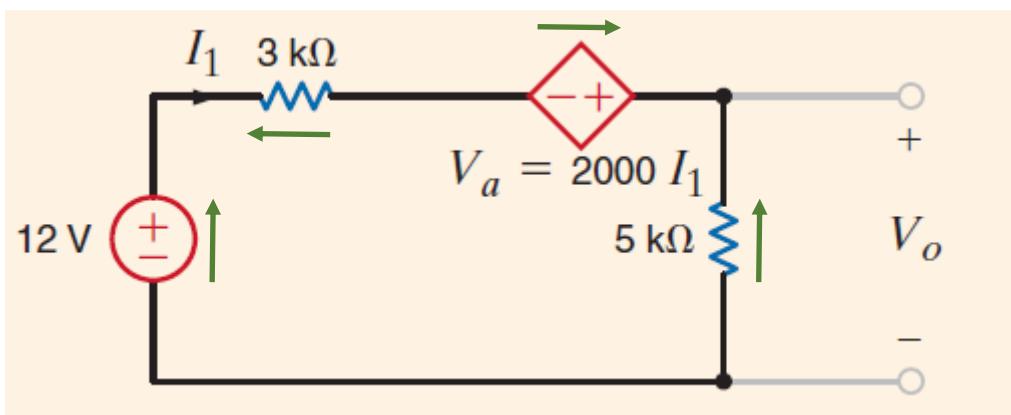
## Napięciowe prawo Kirchhoffa (NPK),

ang. Kirchhoff's voltage law (KVL)



$$v_{AB}(t) - V_{ab}(t) - v_3(t) + v_4(t) = 0$$

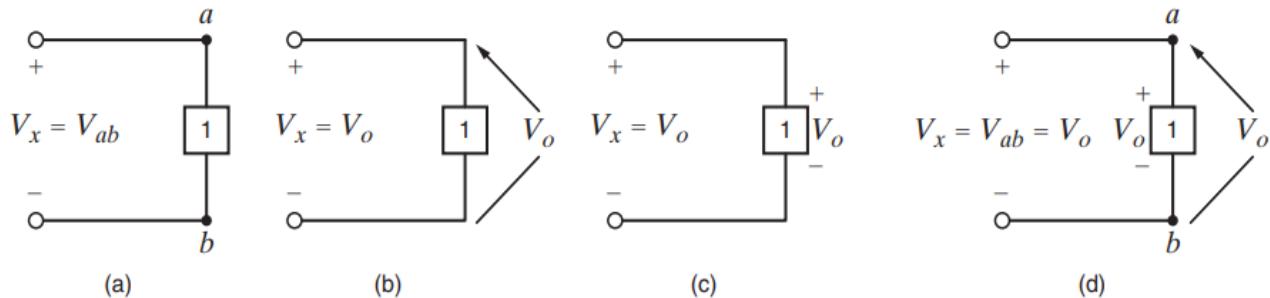
**Przykład:** Skorzystaj z NPK i oblicz  $V_o$ .



$$-12 + (3k)I_1 - V_a + (5k)I_1 = 0, \text{ gdzie } V_a = 2000I_1$$

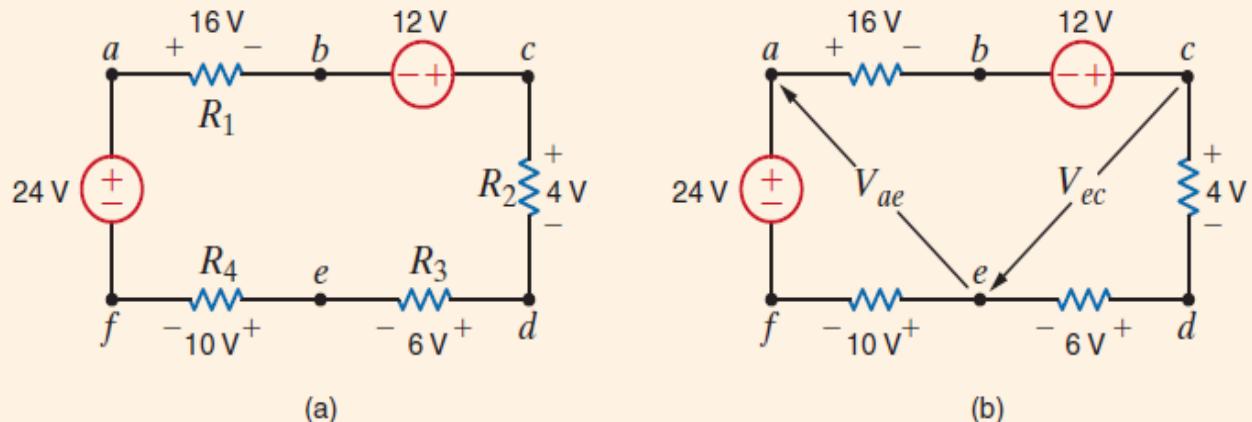
Rozwiążanie tych równań daje:  $I_1 = 2 \text{ mA}$ , stąd:  $V_o = (5k)I_1 = 10 \text{ V}$ .

## Równoważne sposoby oznaczania (etykietowania) napięcia



### Przykład: Obliczanie napięcia pomiędzy dwoma punktami obwodu

Consider the network in Fig. □a. Let us apply KVL to determine the voltage between two points. Specifically, in terms of the double-subscript notation, let us find  $V_{ae}$  and  $V_{ec}$ .



The circuit is redrawn in Fig. □b. Since points  $a$  and  $e$  as well as  $e$  and  $c$  are not physically close, the arrow notation is very useful. Our approach to determining the unknown voltage is to apply KVL with the unknown voltage in the closed path. Therefore, to determine  $V_{ae}$  we can use the path  $aefaa$  or  $abcdea$ . The equations for the two paths in which  $V_{ae}$  is the only unknown are

$$V_{ae} + 10 - 24 = 0$$

and

$$16 - 12 + 4 + 6 - V_{ae} = 0$$

Note that both equations yield  $V_{ae} = 14$  V. Even before calculating  $V_{ae}$ , we could calculate  $V_{ec}$  using the path  $cdec$  or  $cefabc$ . However, since  $V_{ae}$  is now known, we can also use the path  $ceabc$ . KVL for each of these paths is

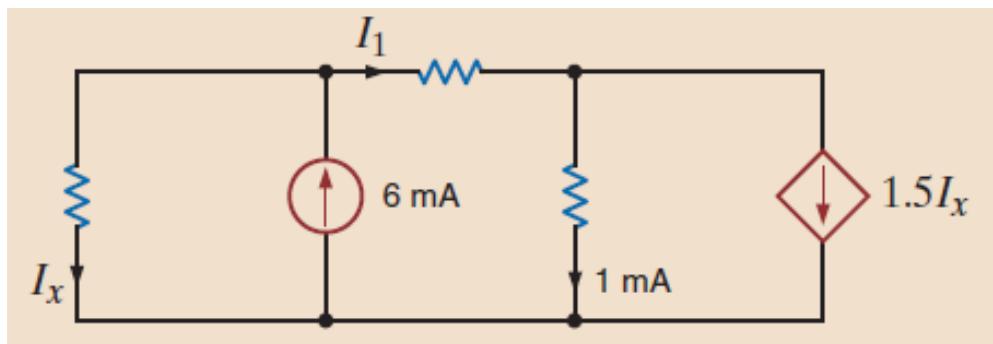
$$\begin{aligned} 4 + 6 + V_{ec} &= 0 \\ -V_{ec} + 10 - 24 + 16 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

and

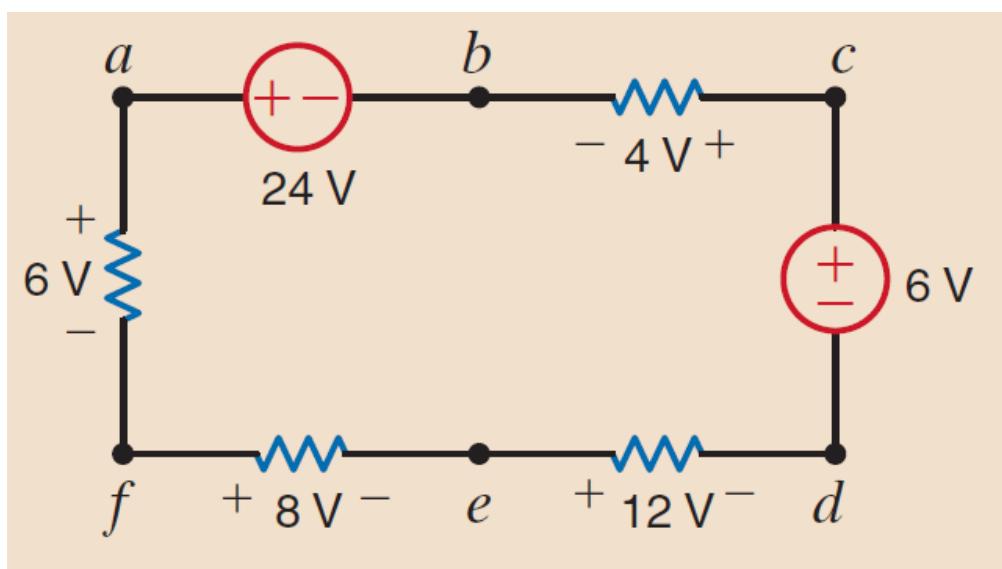
$$-V_{ec} - V_{ae} + 16 - 12 = 0$$

Each of these equations yields  $V_{ec} = -10$  V.

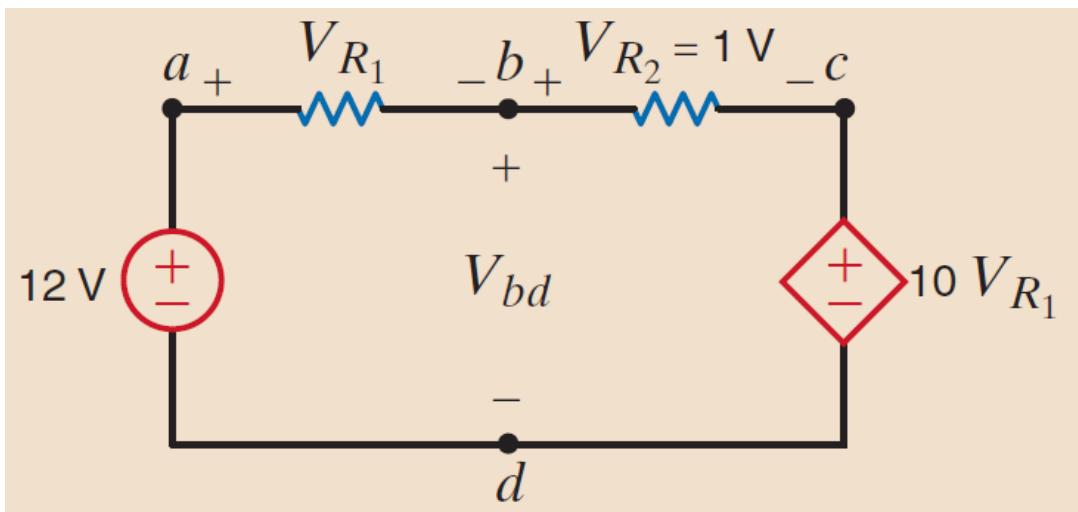
**Zadanie:** Oblicz  $I_x$  oraz  $I_1$ . {Odp.:  $I_x = 2 \text{ mA}$ ,  $I_1 = 4 \text{ mA}$ }



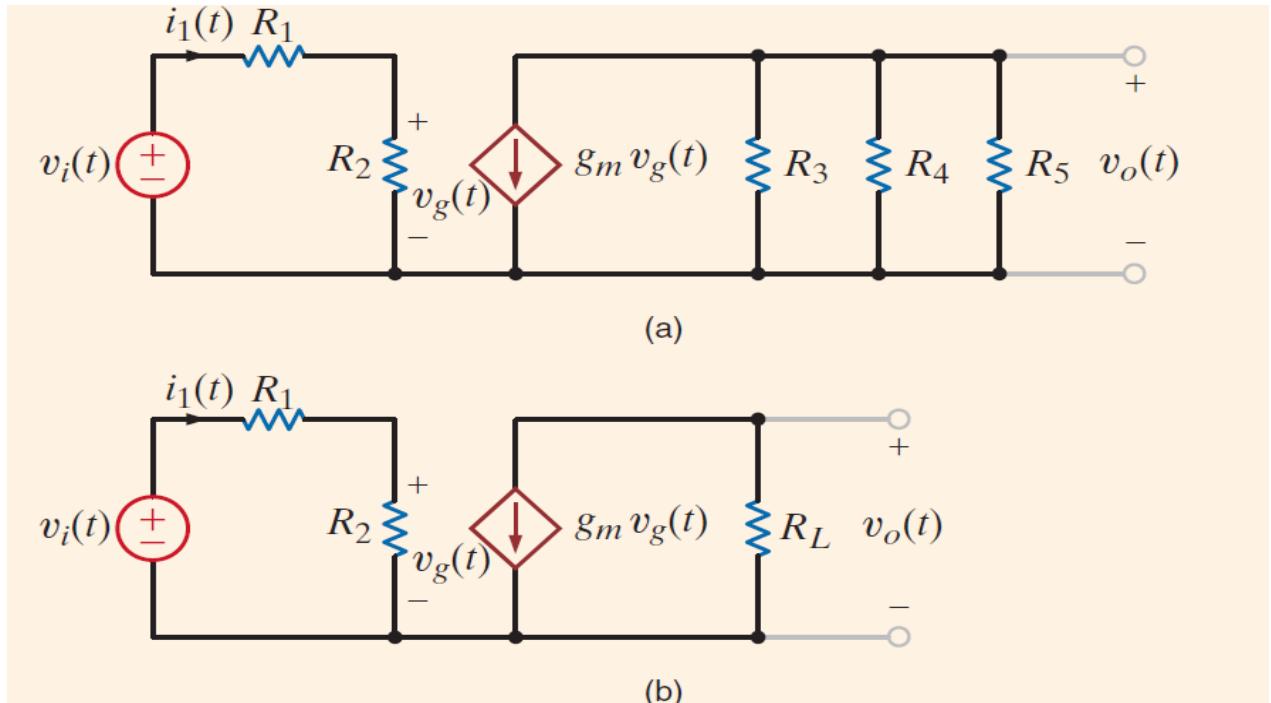
**Zadanie:** Znajdź napięcia  $V_{ad}$  i  $V_{eb}$  {Odp.:  $V_{ad} = 26 \text{ V}$ ,  $V_{eb} = 10 \text{ V}$ }



**Zadanie:** Znajdź napięcie  $V_{bd}$ . {Odp.:  $V_{bd} = 11 \text{ V}$ }



**Przykład:** Obliczanie wzmacnienia (małosygnalowego w tzw. środku pasma wzmacnienia) jednostopniowego wzmacniacza zrealizowanego z wykorzystaniem tranzystora bipolarnego (ang. BJT) pracującego w konfiguracji wspólny emiter.



$$A_V(t) \stackrel{df}{=} \frac{v_o(t)}{v_i(t)}$$

- Przekształcamy układ :

$$R_L \triangleq (R_3 \parallel R_4 \parallel R_5)$$

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

$$v_o(t) = -g_m v_g(t) R_L \quad \left\{ \begin{array}{l} g_m - \text{transkonduktancja} \end{array} \right\}$$

$$v_g(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

$$v_o(t) = \frac{-g_m R_L R_2}{R_1 + R_2} v_i(t) \quad /: v_i(t) \neq 0$$

$$\frac{v_o(t)}{v_i(t)} = - \frac{g_m R_L R_2}{R_1 + R_2}$$

Przykład c. d.:

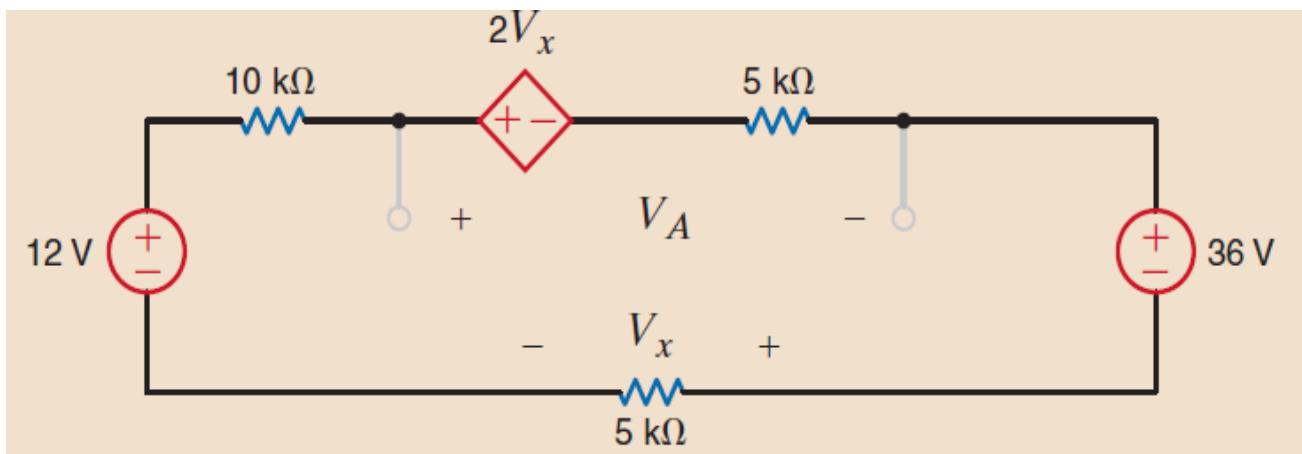
Realistyczne dane:  $R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 1k\Omega$ ,  
 $g_m = 40 mS = 0,04 S$ ,  $R_3 = 50 k\Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 10 k\Omega$ .

Po podstawieniu:

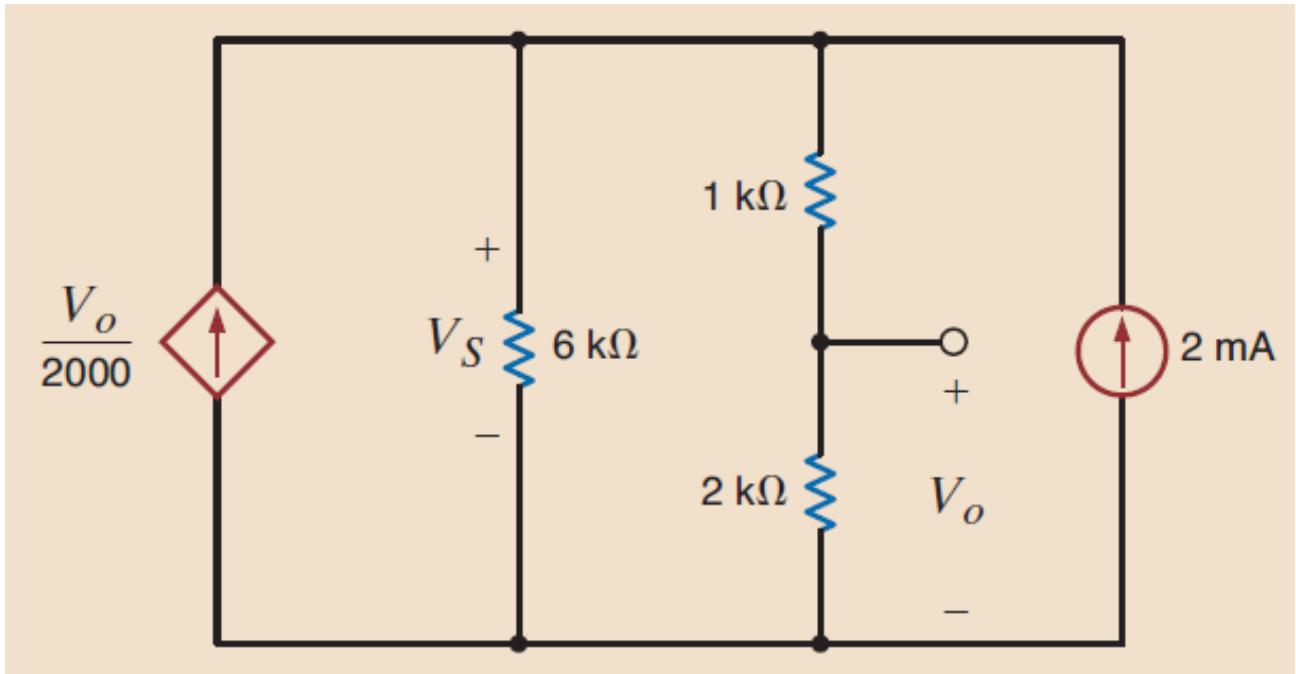
$$A_V(t) = \frac{V_o(t)}{V_i(t)} = \frac{-(0,04)(4.545 \times 10^3)(1 \times 10^3)}{1,48 \times 10^3} = -165,29 \left[ \frac{mV}{mV} \right]$$

Zadanie: Oblicz  $V_A$  w obwodzie pokazanym na rysunku.

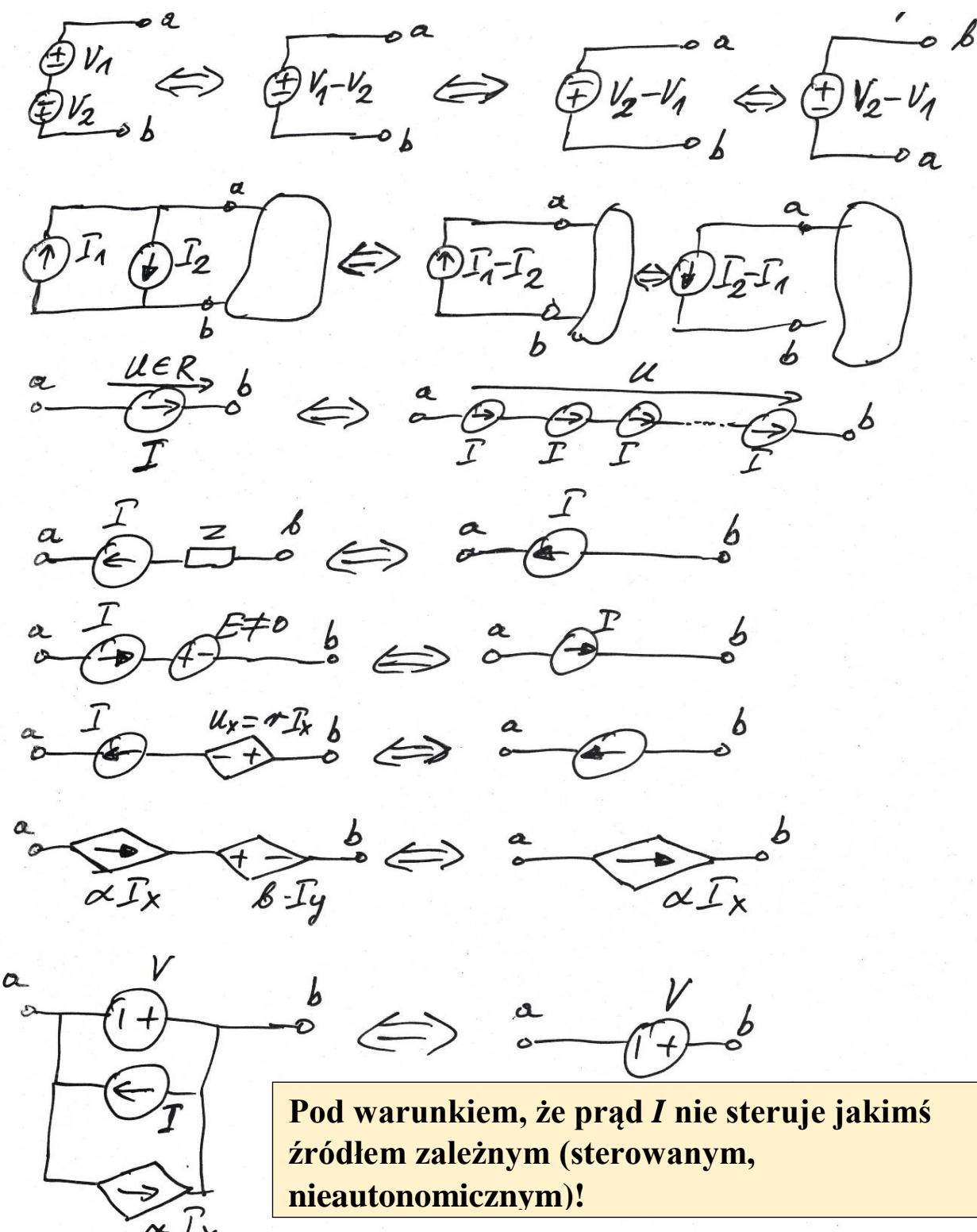
{Odp.:  $V_A = -12V$ }



Zadanie: Oblicz  $V_o$  w obwodzie pokazanym na rysunku. {Odp.:  $V_o = 8V$ }



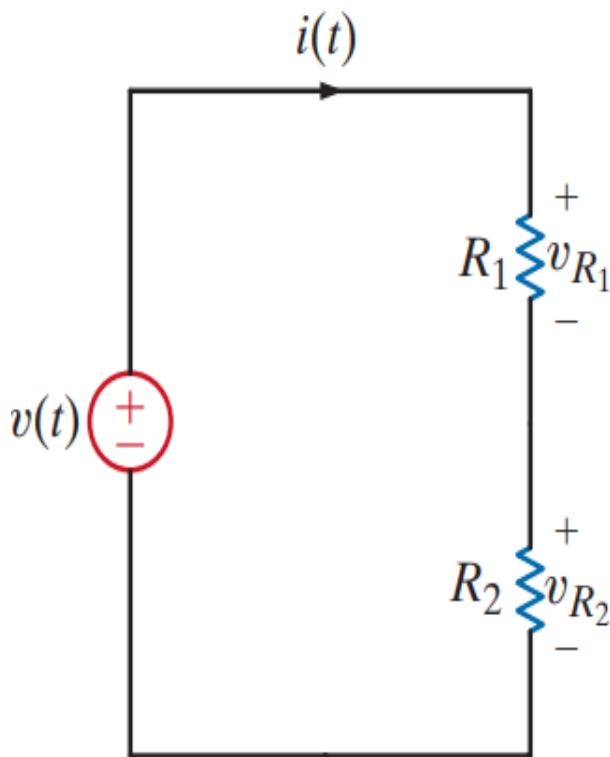
## Przykłady równoważnych obwodów względem zacisków a–b:



Pod warunkiem, że prąd  $I$  nie steruje jakimś źródłem zależnym (sterowanym, nieautonomicznym)!



## Dzielnik napięcia - szczegółowo



Korzystamy z NPK:

$$-v(t) + v_{R_1} + v_{R_2} = 0$$

$$v(t) = v_{R_1} + v_{R_2}$$

$$v_{R_1} = R_1 i(t)$$

$$v_{R_2} = R_2 i(t)$$

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2}$$

$$v_{R_1} = R_1 i(t)$$

$$= R_1 \left[ \frac{v(t)}{R_1 + R_2} \right]$$

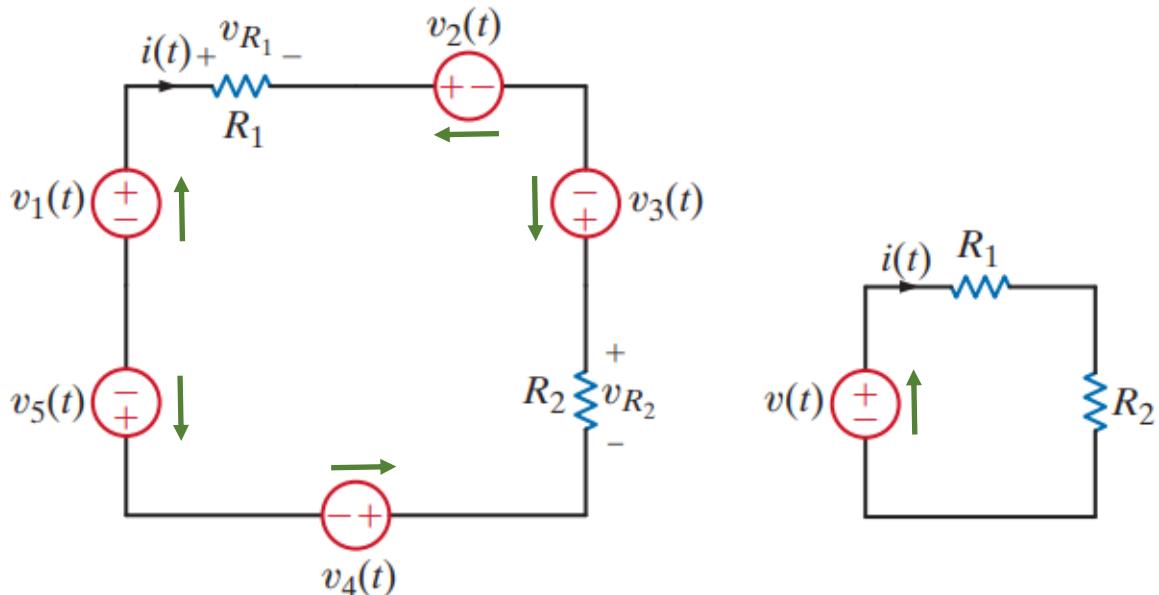
$$= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t)$$

$$v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t)$$

Widzimy, że napięcie źródła  $v(t)$  dzieli się pomiędzy spadki napięć na rezystorach  $R_1$  i  $R_2$  proporcjonalnie do ich rezystancji.

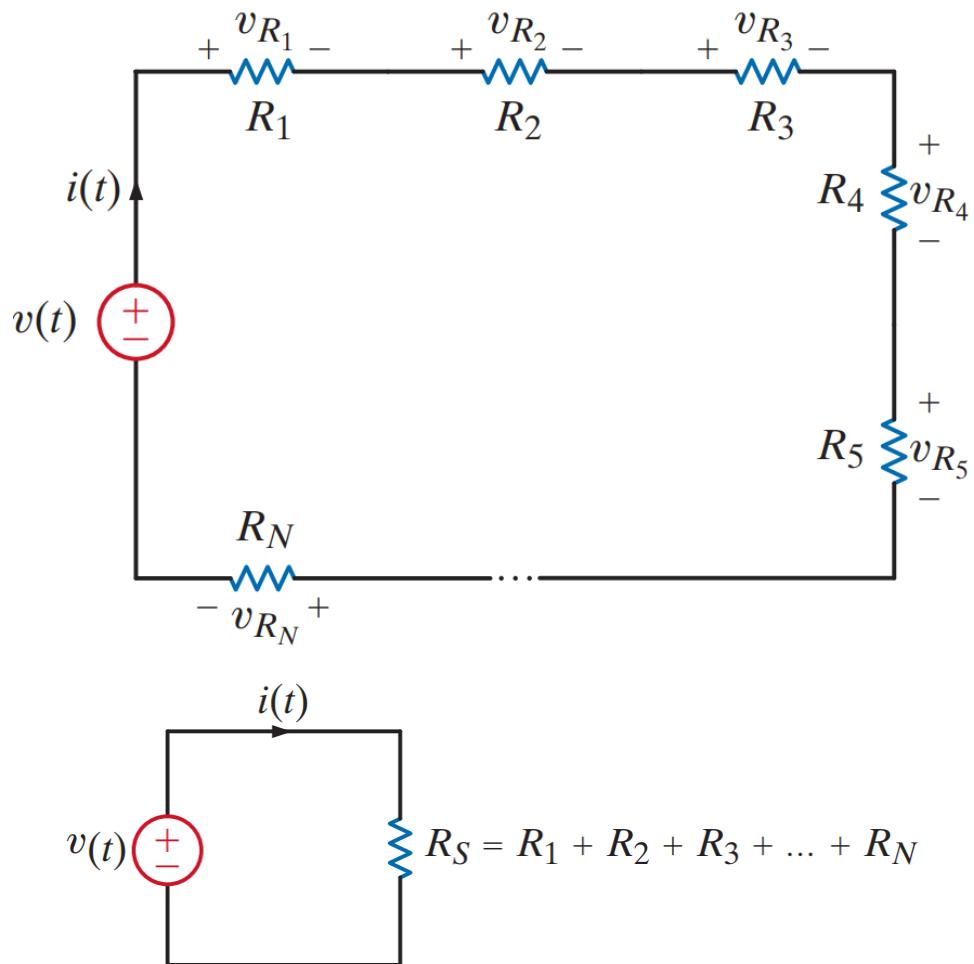
Zauważmy, że wstawiając wyrażenia na spadki napięć na rezystorach  $R_1$  i  $R_2$  do NPK otrzymujemy tożsamość – prawo Kircchoffa jest spełnione.

**Przykład:** Redukcja wielu źródeł napięciowych połączonych szeregowo

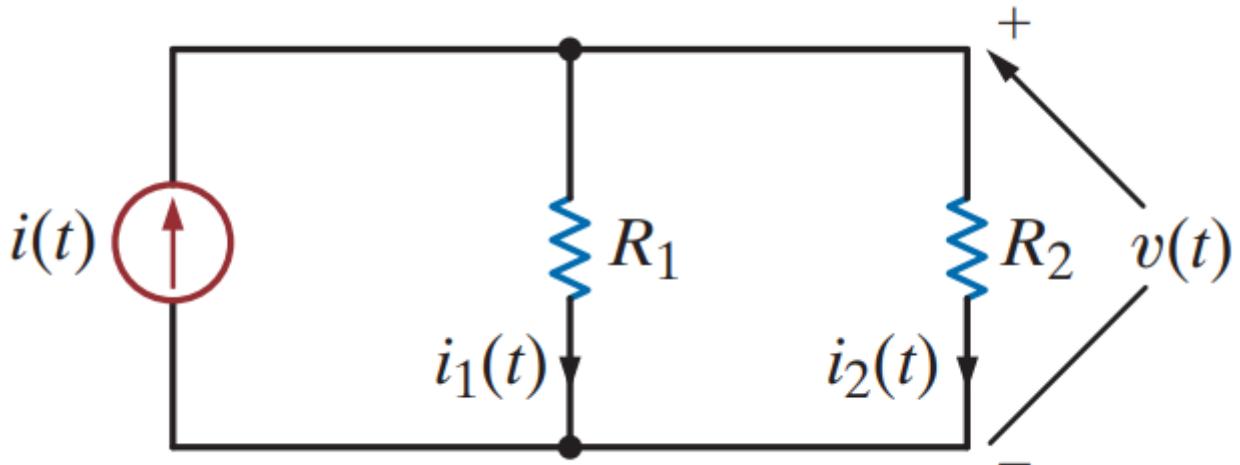


$$v(t) = v_1(t) + v_3(t) - [v_2(t) + v_4(t) + v_5(t)]$$

**Przykład:** Redukcja wielu rezystorów połączonych szeregowo



## Dzielnik prądowy



Korzystamy z PPK:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} \\ &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t) \\ &= \frac{v(t)}{R_p} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= R_p i(t) \\ &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned}$$

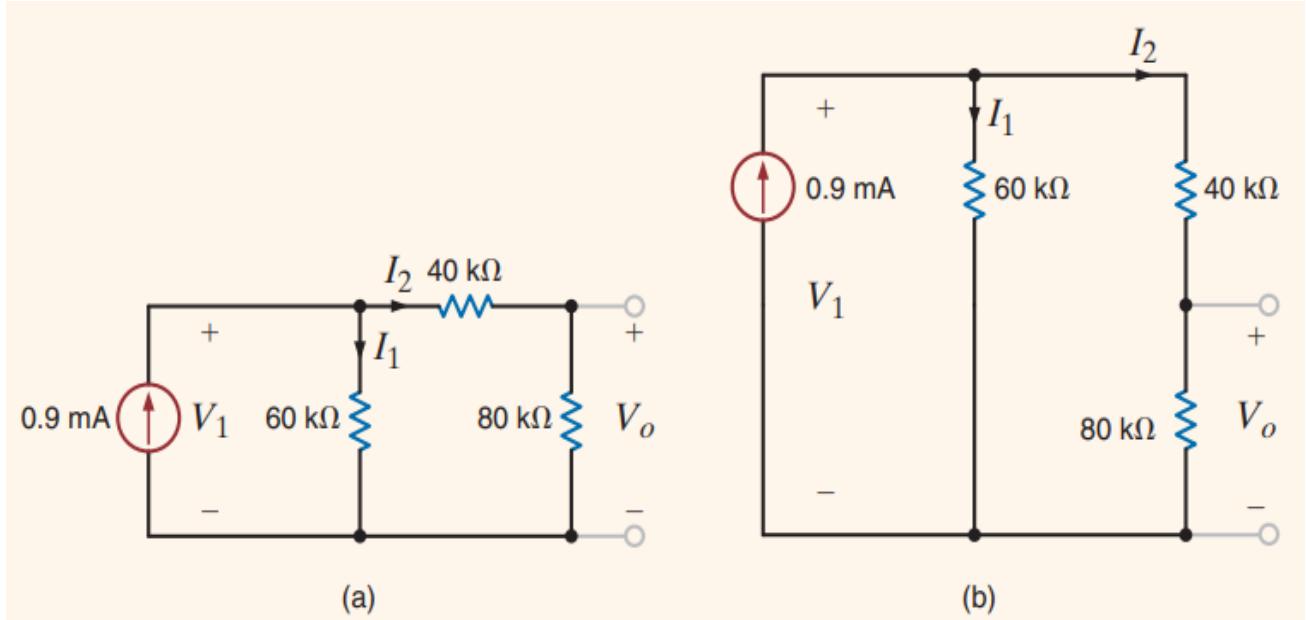
$$i_1(t) = \frac{v(t)}{R_1}$$

$$i_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t)$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{v(t)}{R_2} \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned}$$

Widzimy, że prąd źródła  $i(t)$  dzieli się pomiędzy prądy płynące przez rezystory  $R_1$  i  $R_2$  odwrotnie proporcjonalnie do ich rezystancji.

**Przykład:** Wykorzystanie wzoru na podział prądu do obliczenia  $V_o$



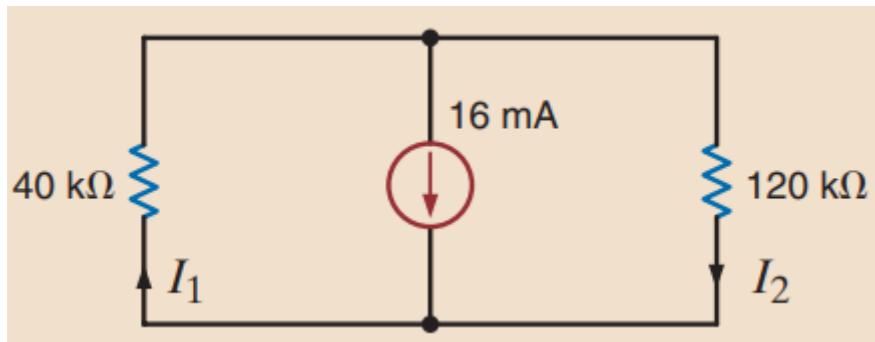
$$I_1 = \left[ \frac{40k + 80k}{60k + (40k + 80k)} \right] (0.9 \times 10^{-3}) \\ = 0.6 \text{ mA}$$

$$I_2 = \left[ \frac{60k}{60k + (40k + 80k)} \right] (0.9 \times 10^{-3}) \\ = 0.3 \text{ mA}$$

$$I_1 + I_2 = 0.9 \text{ mA}$$

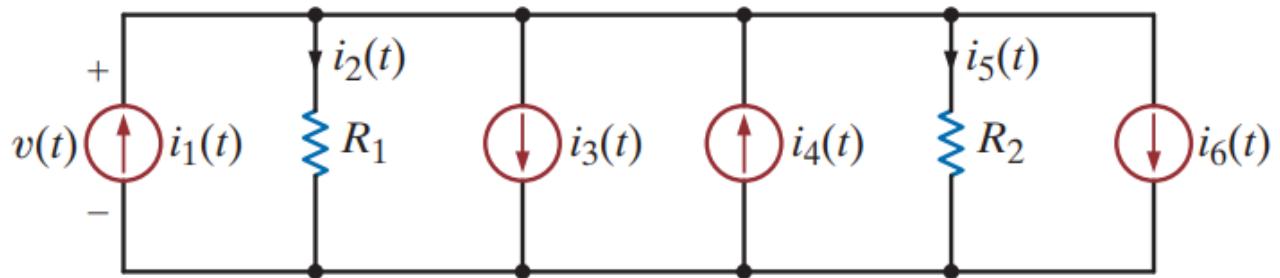
$$V_o = 80kI_2 \\ = 24 \text{ V}$$

**Zadanie:** Oblicz prądy  $I_1$  i  $I_2$  oraz moc absorbowaną przez rezystor  $40 \text{ k}\Omega$ .

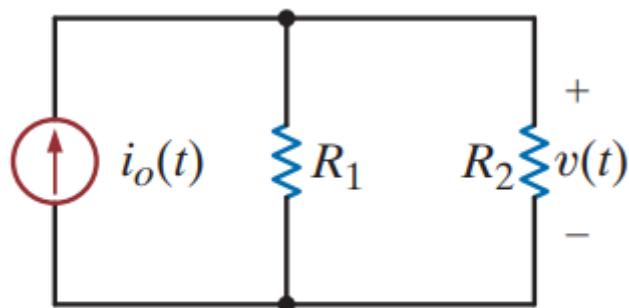


**ANSWER:**  $I_1 = 12 \text{ mA}$ ,  
 $I_2 = -4 \text{ mA}$ , and  
 $P_{40 \text{ k}\Omega} = 5.76 \text{ W}$ .

**Przykład:** Redukcja wielu źródeł prądowych połączonych równolegle



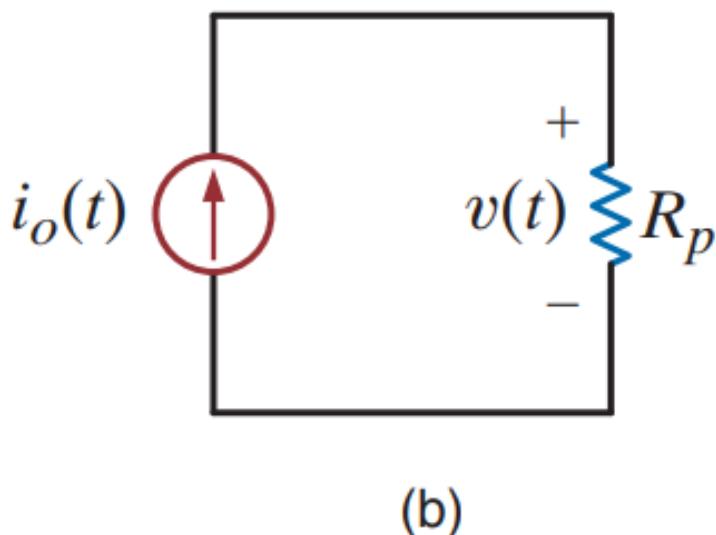
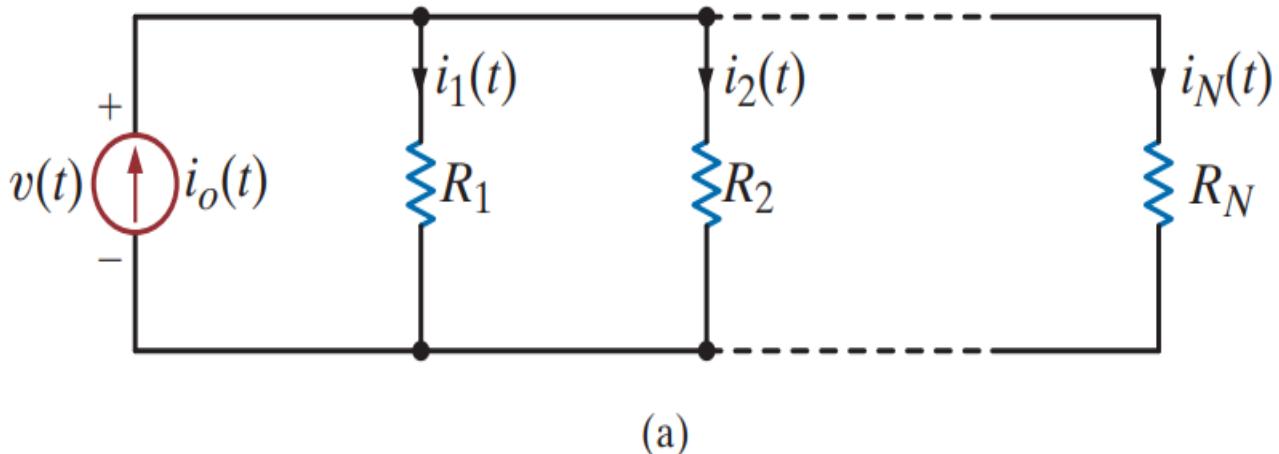
(a)



(b)

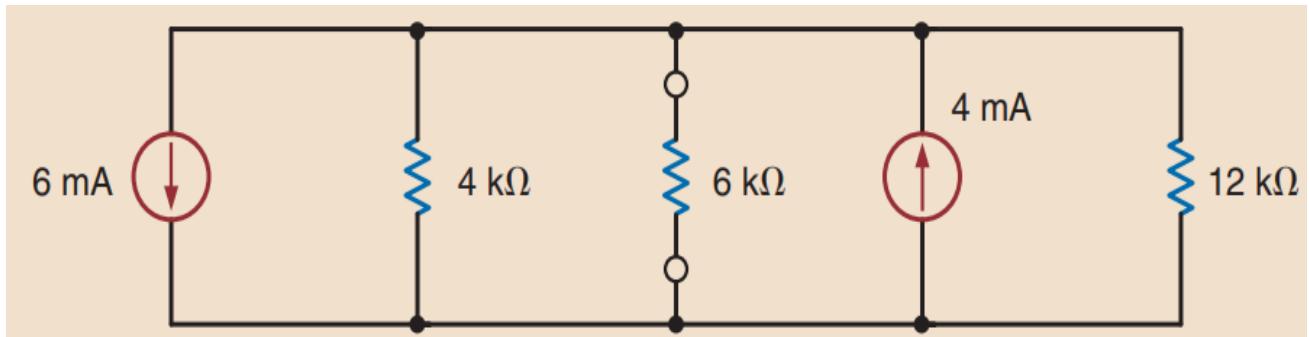
$$i_o(t) = i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t)$$

**Przykład:** Redukcja wielu rezystorów połączonych równolegle



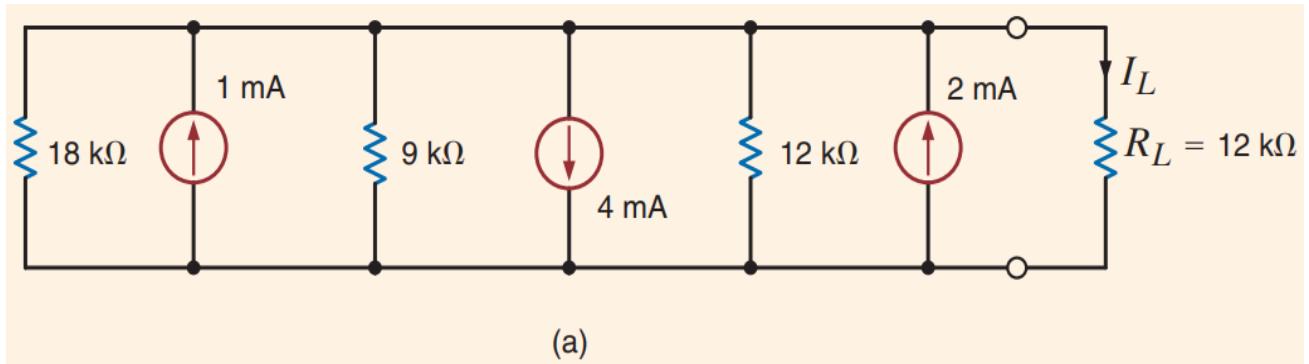
$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

**Zadanie:** Oblicz moc absorbowaną przez rezistor  $6\text{ k}\Omega$ .

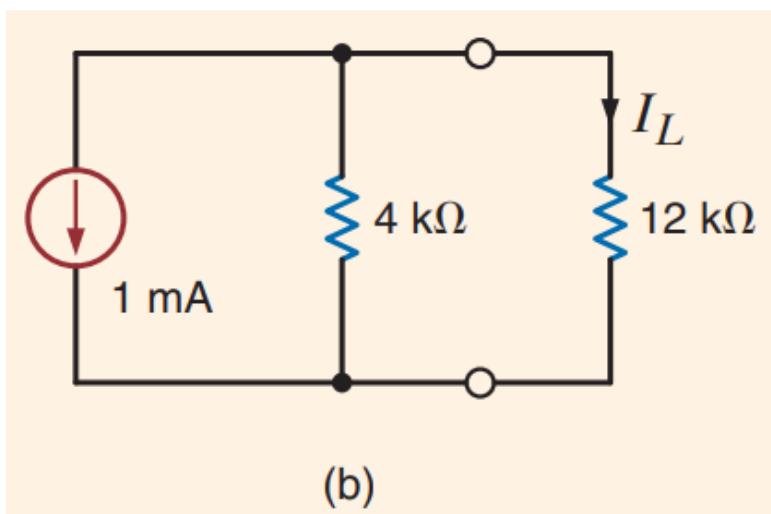


**ANSWER:**  $P = 2.67\text{ mW}$ .

**Przykład:** Oblicz prąd  $I_L$  w układzie z rysunku a.



(a)



(b)

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{18\text{k}} + \frac{1}{9\text{k}} + \frac{1}{12\text{k}}$$

$$R_p = 4\text{ k}\Omega$$

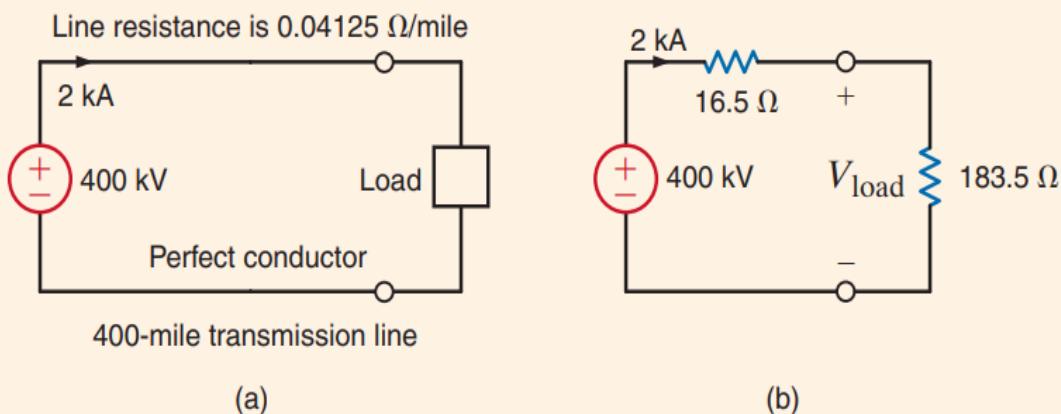
Skrócony zapis wzoru na  $R_p$ :  $R_p = (18\text{k})\parallel(9\text{k})\parallel(12\text{k})$

$$I_L = -\left[ \frac{4\text{k}}{4\text{k} + 12\text{k}} \right] (1 \times 10^{-3})$$

$$= -0.25\text{ mA}$$

## **Przykład:** Dzielnik napięcia – praktyczne konsekwencje

Consider the circuit in Fig.  a, which is an approximation of a high-voltage dc transmission facility. We have assumed that the bottom portion of the transmission line is a perfect conductor and will justify this assumption in the next chapter. The load can be represented by a resistor of value  $183.5 \Omega$ . Therefore, the equivalent circuit of this network is shown in Fig.  b.



Let us determine both the power delivered to the load and the power losses in the line.

Using voltage division, the load voltage is

$$\begin{aligned} V_{load} &= \left[ \frac{183.5}{183.5 + 16.5} \right] 400k \\ &= 367 \text{ kV} \end{aligned}$$

The input power is 800 MW and the power transmitted to the load is

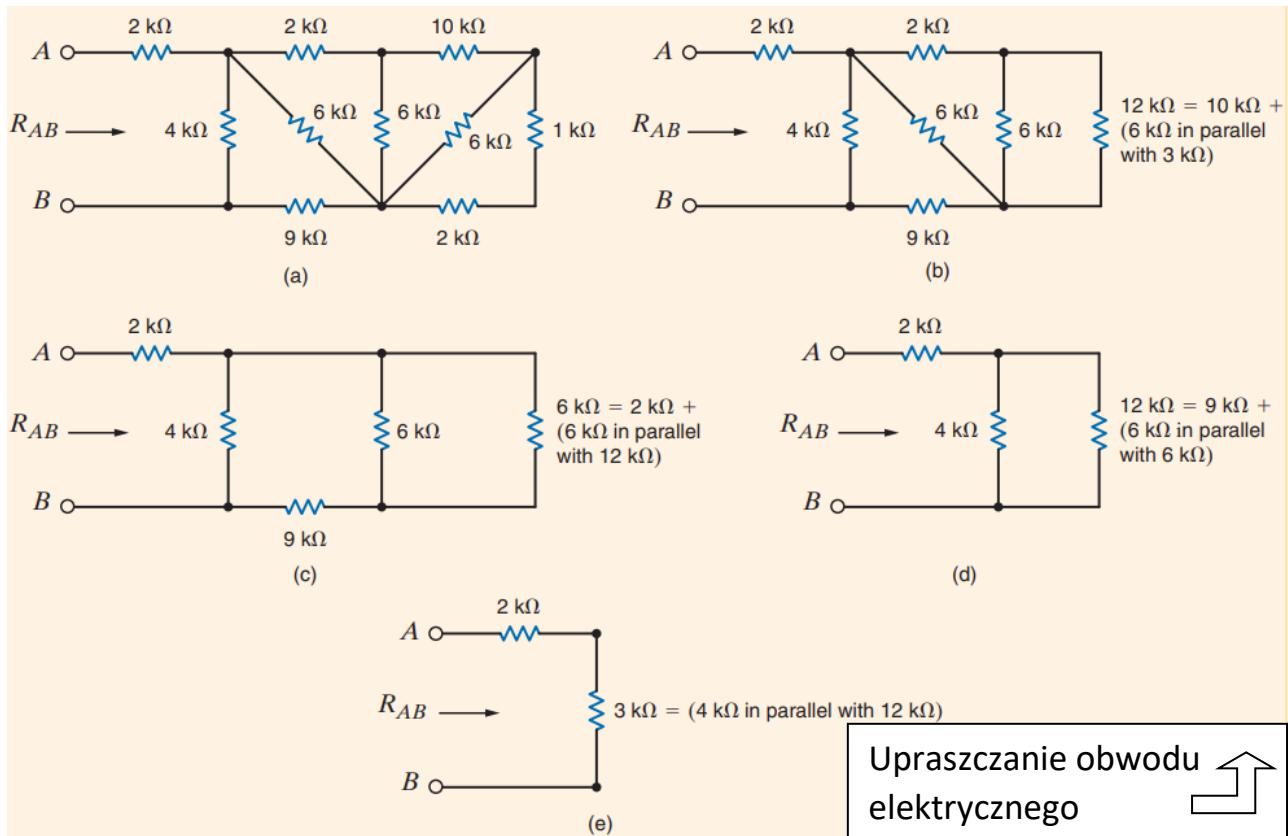
$$\begin{aligned} P_{load} &= I^2 R_{load} \\ &= 734 \text{ MW} \end{aligned}$$

Therefore, the power loss in the transmission line is

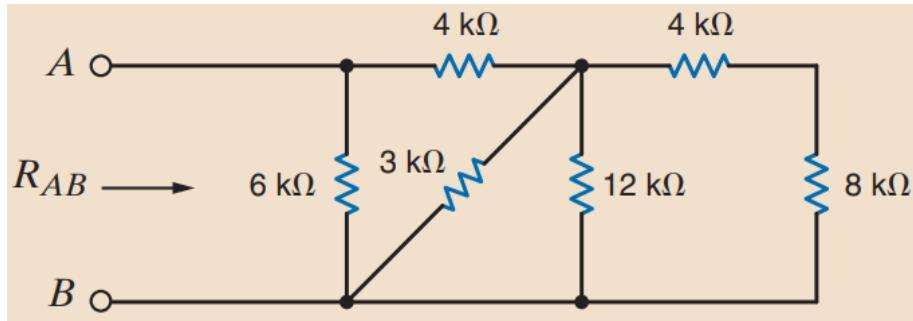
$$\begin{aligned} P_{line} &= P_{in} - P_{load} = I^2 R_{line} \\ &= 66 \text{ MW} \end{aligned}$$

Since  $P = VI$ , suppose now that the utility company supplied power at 200 kV and 4 kA. What effect would this have on our transmission network? Without making a single calculation, we know that because power is proportional to the square of the current, there would be a large increase in the power loss in the line and, therefore, the efficiency of the facility would decrease substantially. That is why, in general, we transmit power at high voltage and low current.

**Przykład:** Upraszczanie obwodu elektrycznego – kombinacja szeregowo i równolegle połączonych oporników

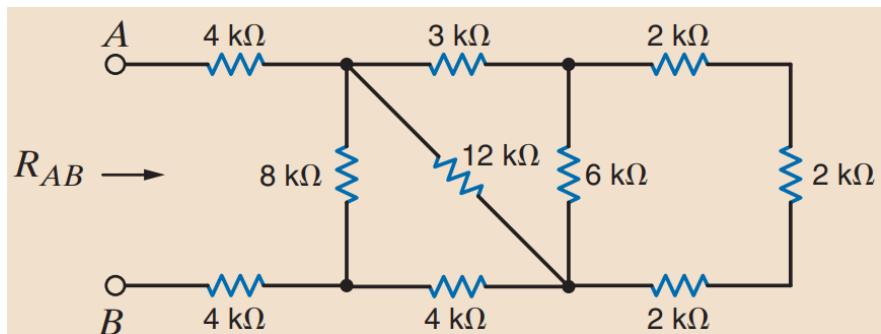


**Zadanie:** Oblicz rezystancję  $R_{AB}$ .



**ANSWER:**  $R_{AB} = 3 \text{ k}\Omega$ .

**Zadanie:** Oblicz rezystancję  $R_{AB}$ .

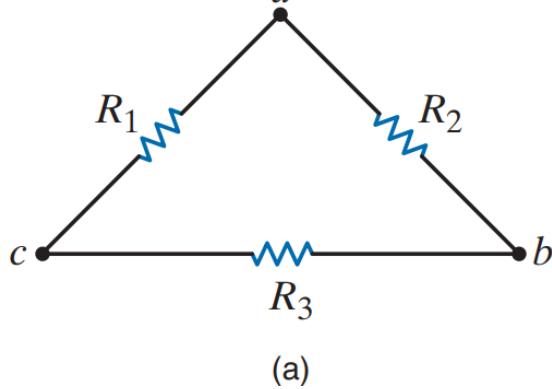
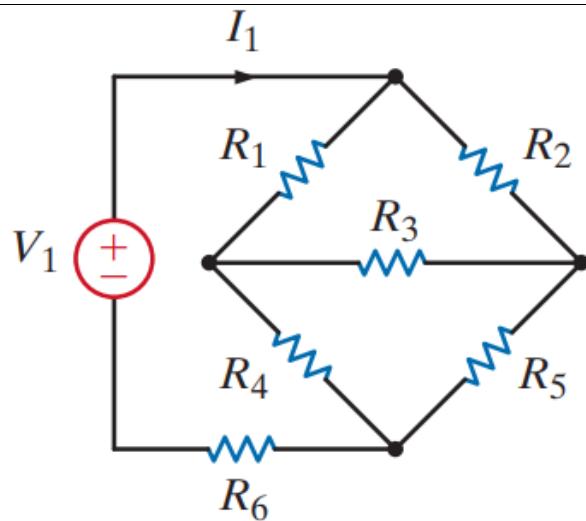


**ANSWER:**  $R_{AB} = 12 \text{ k}\Omega$ .

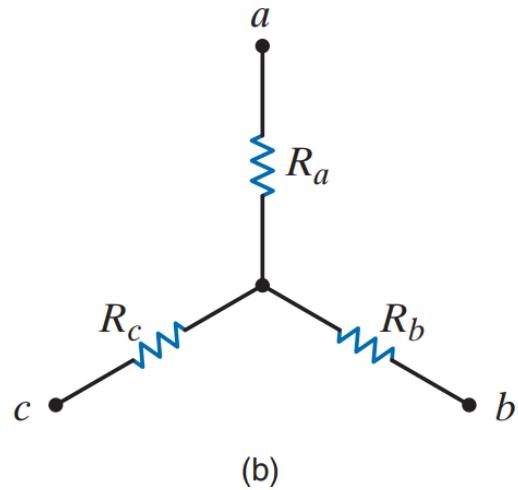
# Transformacja (transfiguracja) gwiazda $\leftrightarrow$ trójkąt

(ang. wye $\leftrightarrow$ delta transformation, Y- $\Delta$ )

Zauważmy, że w układzie mostkowym (obok) nie ma żadnego rezystora, który byłby połączony szeregowo bądź równolegle z innym tego typu elementem. W tym przypadku korzystamy z transformacji gwiazda-trójkąt, aby uprościć analizę



(a)



(b)

Układy pokazane na rysunkach a) i b) są równoważne elektrycznie, jeśli spełniony jest następujący układ równań:

$$R_{ab} = R_a + R_b = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3}$$

$$R_{bc} = R_b + R_c = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2}$$

$$R_{ca} = R_c + R_a = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Rozwiążanie tego układu równań względem rezystorów  $R_a$ ,  $R_b$  i  $R_c$  daje w wyniku:

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

natomiast rozwiązujeć ten układ względem  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ , otrzymujemy:

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_a}$$

Dla tzw. przypadku zrównoważonego, gdy:

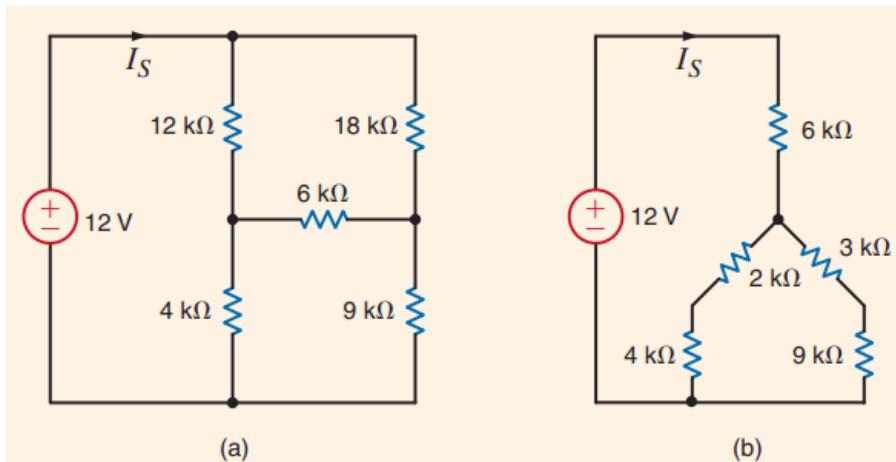
$$R_a = R_b = R_c \quad \text{i} \quad R_1 = R_2 = R_3$$

otrzymujemy:

$$R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta$$

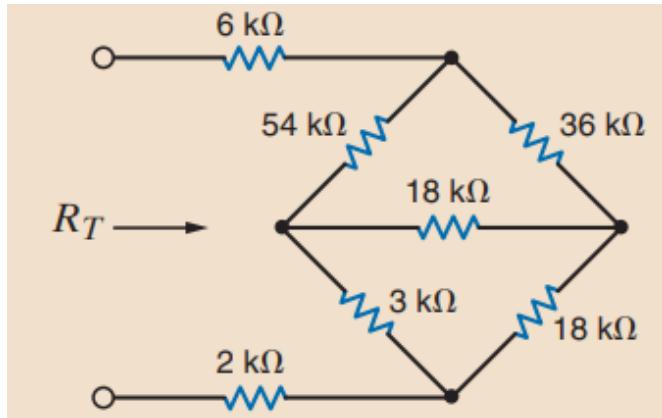
$$R_\Delta = 3R_Y$$

**Przykład:** Oblicz prąd  $I_S$ .



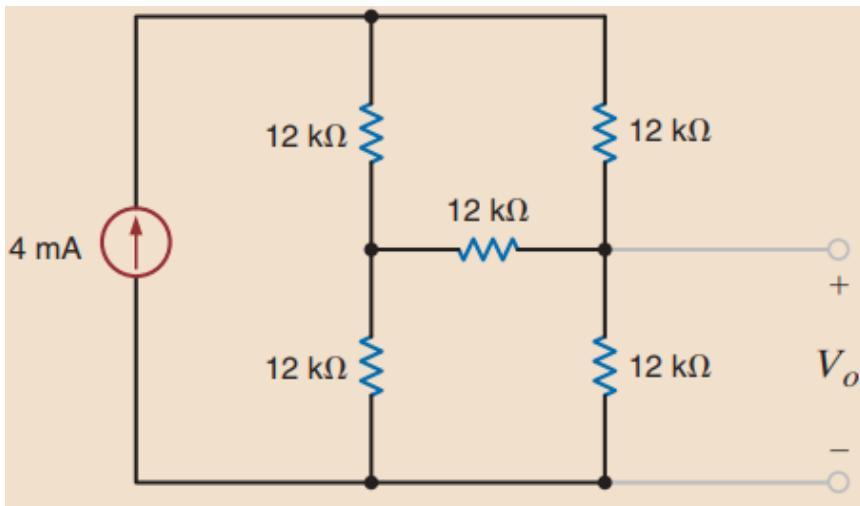
$$\begin{aligned} I_S &= 12 / (6k + 4k) \\ &= 1.2 \text{ mA} \end{aligned}$$

**Zadanie:** Zastosuj transformację gwiazda-trójkąt i oblicz rezystancję  $R_T$ .



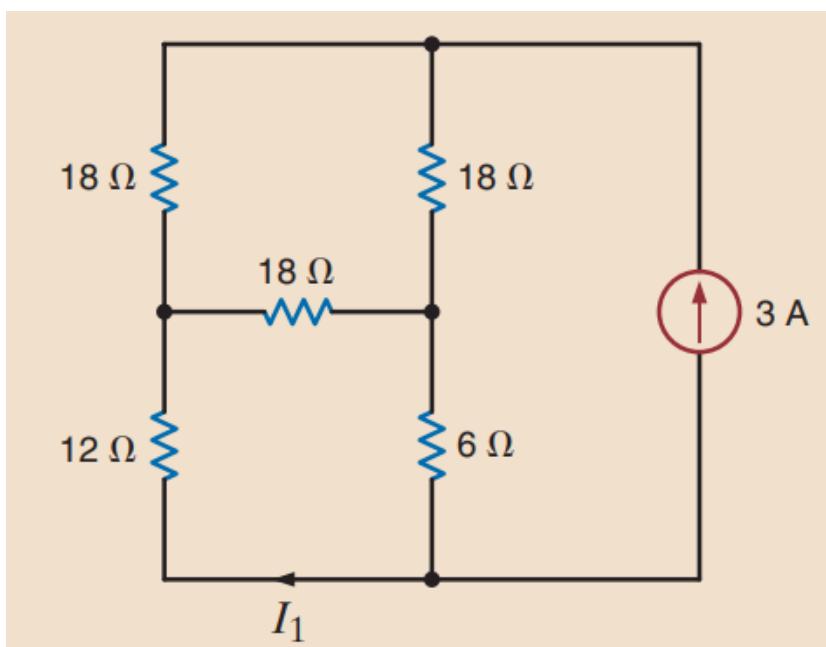
**ANSWER:**  $R_T = 34 \text{ k}\Omega$ .

**Zadanie:** Zastosuj transformację gwiazda-trójkąt i oblicz napięcie  $V_o$ .



**ANSWER:**  $V_o = 24 \text{ V}$ .

**Zadanie:** Zastosuj transformację gwiazda-trójkąt i oblicz prąd  $I_L$ .



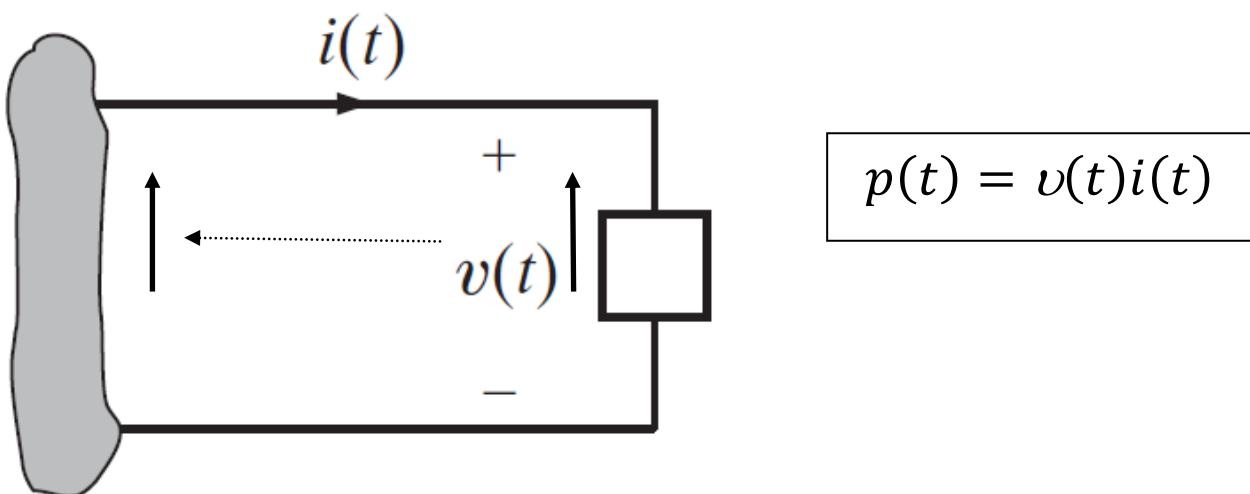
## Twierdzenie Tellegena\*

(o bilansie mocy elektrycznej)

Z zasady zachowania energii i praw Kirchhoffa wynika, że w każdej chwili  $t$  algebraiczna suma mocy zaabsorbowanej przez wszystkie elementy układu elektrycznego równa się zeru.

Inaczej: w każdej chwili  $t$  suma mocy dostarczonej do układu elektrycznego równa się sumie mocy zaabsorbowanej przez ten układ.

**Umowa dotycząca znaku (+ czy -) we wzorze na moc:**



Jeśli strzałka obrazująca napięcie na rozważanym elemencie jest przeciwne skierowana do strzałki obrazującej prąd przepływający przez ten element, to we wzorze na moc absorbowaną przez dany element występuje znak plus (+):  $p(t) = v(t) i(t)$ ; moc jest wówczas dodatnia [ $p(t) > 0$ ] pod warunkiem, że  $v(t)$  i  $i(t)$  są jednocześnie dodatnimi albo ujemnymi funkcjami czasu.

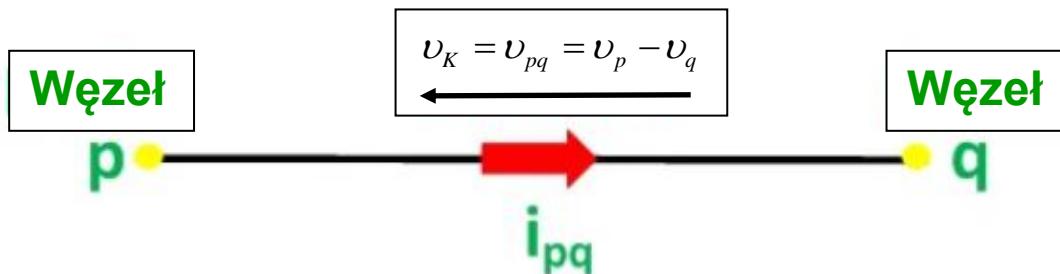
Jeśli natomiast strzałki napięcia i prądu skierowane są zgodnie, to we wzorze na moc absorbowaną przez dany element występuje znak minus (-):  $p(t) = - v(t) i(t)$ ; moc jest wówczas ujemna [ $p(t) < 0$ ] pod warunkiem, że  $v(t)$  i  $i(t)$  są jednocześnie dodatnimi albo ujemnymi funkcjami czasu.

Jeśli tak obliczona moc jest dodatnia,  $p(t) > 0$ , to mówimy, że dany element układu elektrycznego **absorbuje moc**, jeśli natomiast obliczona moc jest ujemna,  $p(t) < 0$ , to dany element **dostarcza moc** do układu.

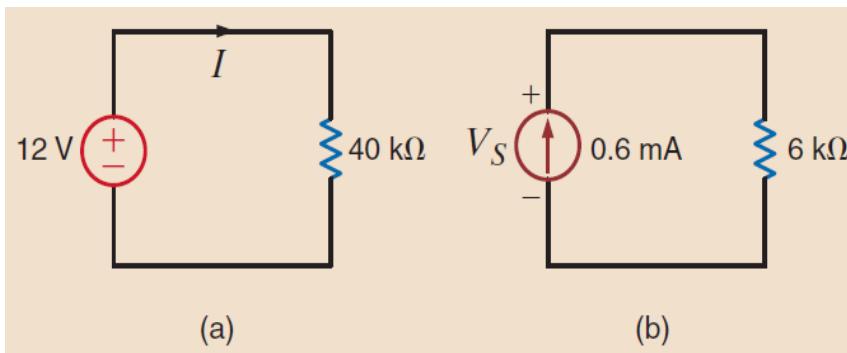
## Tw. Tellegena - ogólnie:

w dowolnej sieci liniowej, nieliniowej, pasywnej, aktywnej, zależnej od czasu lub niezmiennej w czasie, algebraiczna suma mocy zaabsorbowanej we wszystkich gałęziach w dowolnym momencie wynosi zero:

$$\sum_{K=1}^n v_K i_K = 0, \quad \text{gdzie } v_K = v_{pq} = v_p - v_q, \quad i_K = i_{pq}$$

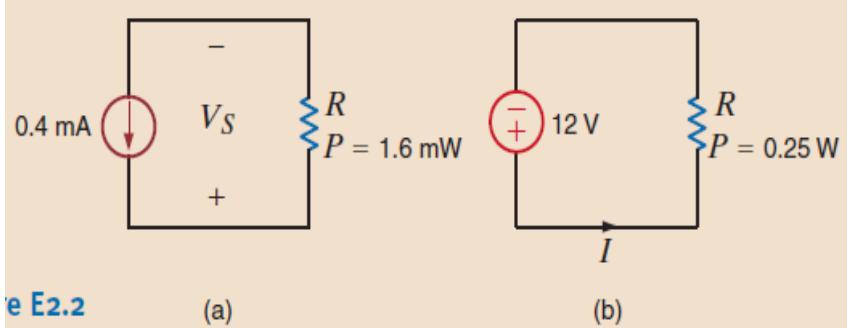


**Zadanie:** Oblicz a) prąd  $I$  i moc  $P$  absorbowaną przez rezystor oraz b) wydajność napięciową (sem) źródła  $V_S$  i moc dostarczaną przez to źródło  $P$ .



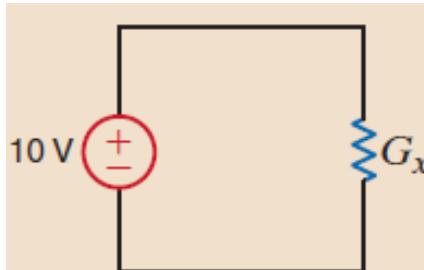
**ANSWER:** (a)  $I = 0.3 \text{ mA}$ ,  
 $P = 3.6 \text{ mW}$ ;  
(b)  $V_S = 3.6 \text{ V}$ ,  
 $P = 2.16 \text{ mW}$ .

**Zadanie:** Oblicz a) rezystancję  $R$  i napięcie  $V_S$  oraz b) prąd  $I$  i rezystancję  $R$ .



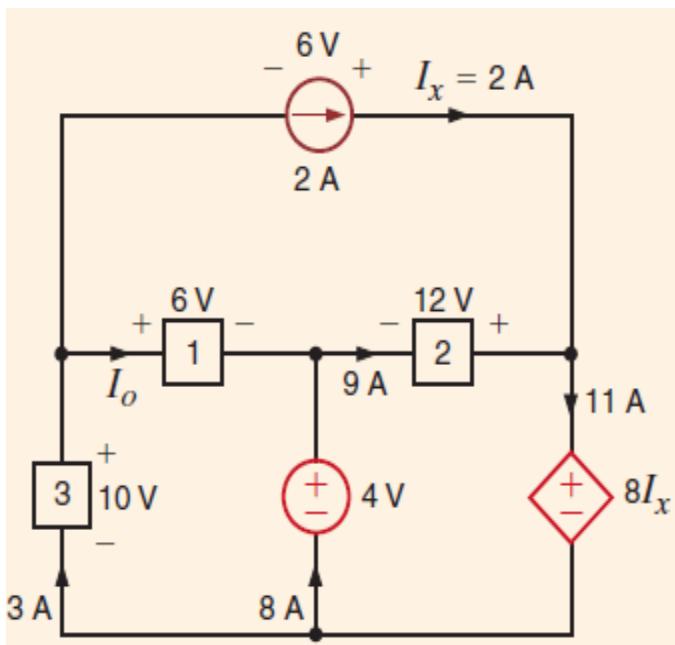
**ANSWER:** (a)  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  
 $V_S = 4 \text{ V}$ ;  
(b)  $I = 20.8 \text{ mA}$ ,  
 $R = 576 \Omega$ .

**Zadanie:** Moc absorbowana przez rezystor o konduktancji  $G_x$  wynosi 50 mW. Oblicz  $G_x$ .



**ANSWER:**  $G_x = 500 \mu\text{S}$ .

**Przykład:** Skorzystaj z tw. Tellegena i oblicz prąd  $I_o$ .



$$\begin{aligned}
 P_{2A} &= (6)(-2) = -12 \text{ W} \\
 P_1 &= (6)(I_o) = 6I_o \text{ W} \\
 P_2 &= (12)(-9) = -108 \text{ W} \\
 P_3 &= (10)(-3) = -30 \text{ W} \\
 P_{4V} &= (4)(-8) = -32 \text{ W} \\
 P_{DS} &= (8I_x)(11) = (16)(11) = 176 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Applying Tellegen's theorem yields

$$-12 + 6I_o - 108 - 30 - 32 + 176 = 0$$

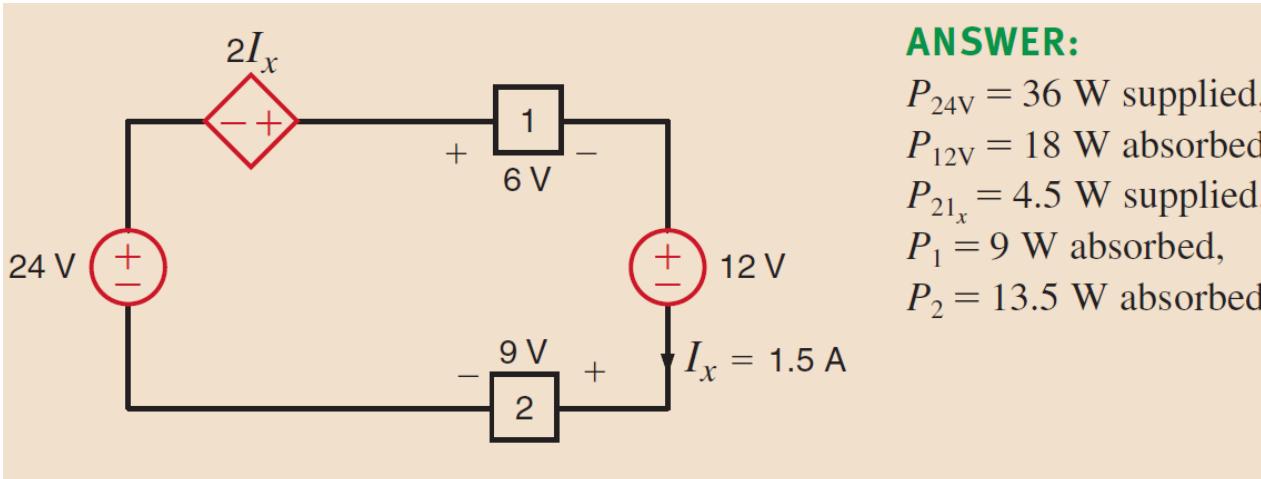
or

$$6I_o + 176 = 12 + 108 + 30 + 32$$

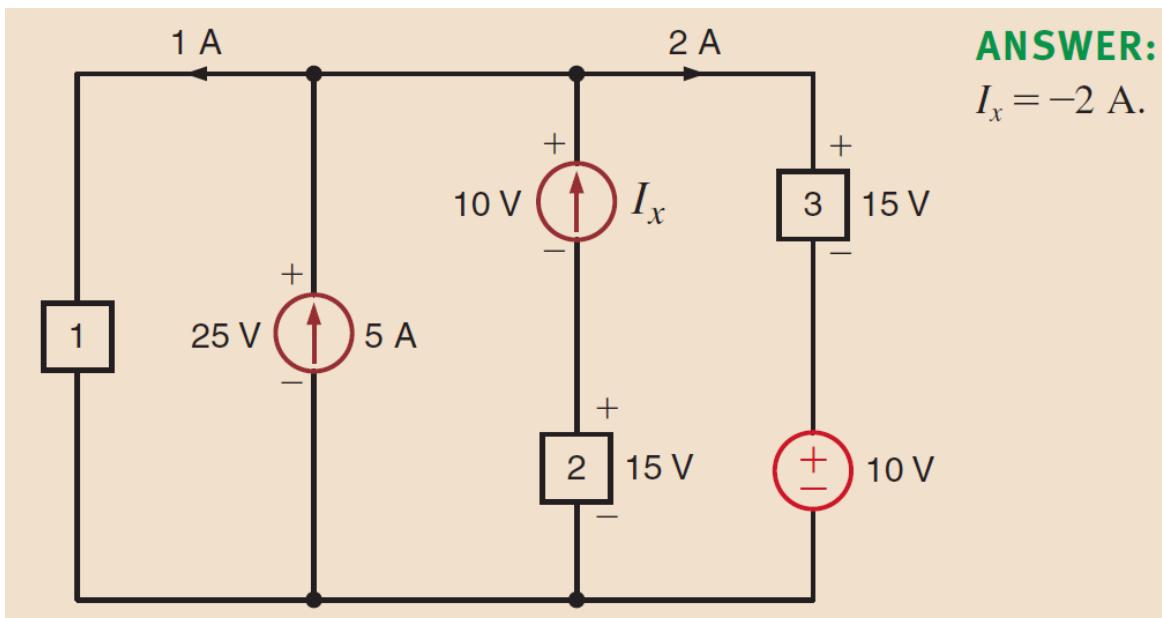
Hence,

$$I_o = 1 \text{ A}$$

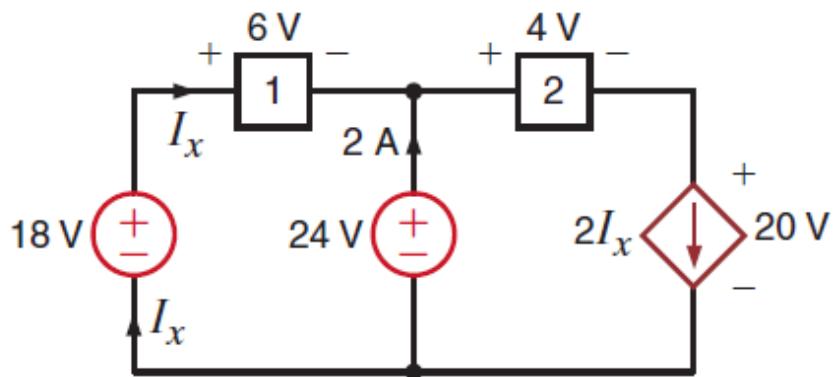
**Zadanie:** Oblicz moc absorbowaną (power absorbed) lub dostarczoną (power supplied) przez elementy układu.



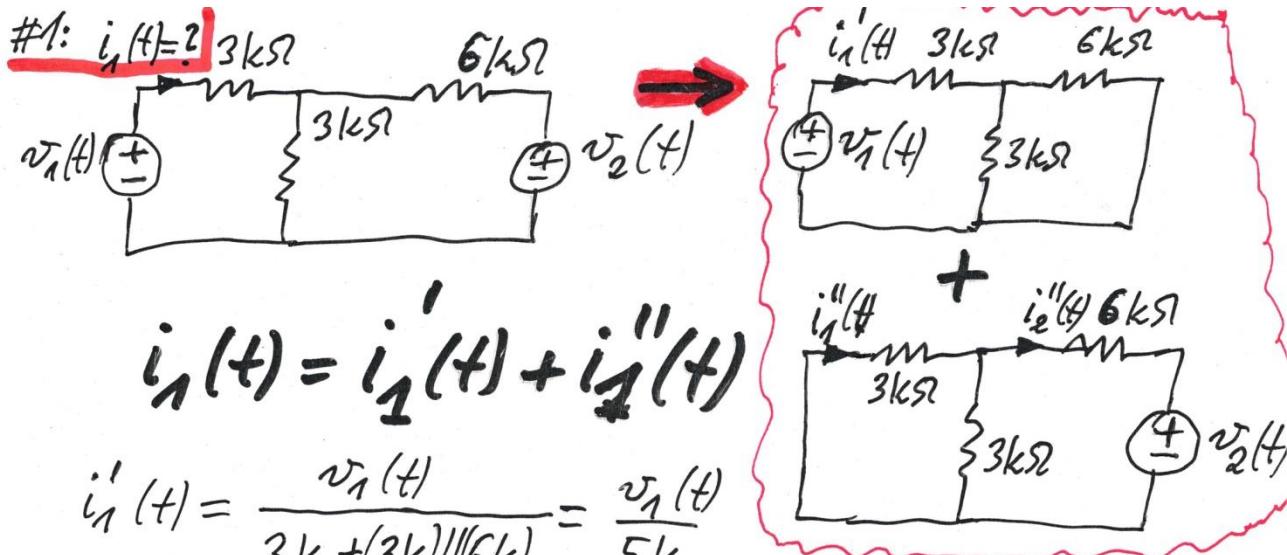
**Zadanie:** Oblicz  $I_x$ , stosując tw.Tellegena.



**Zadanie:** Oblicz moc, którą element 1 absorbuje lub dostarcza do układu.

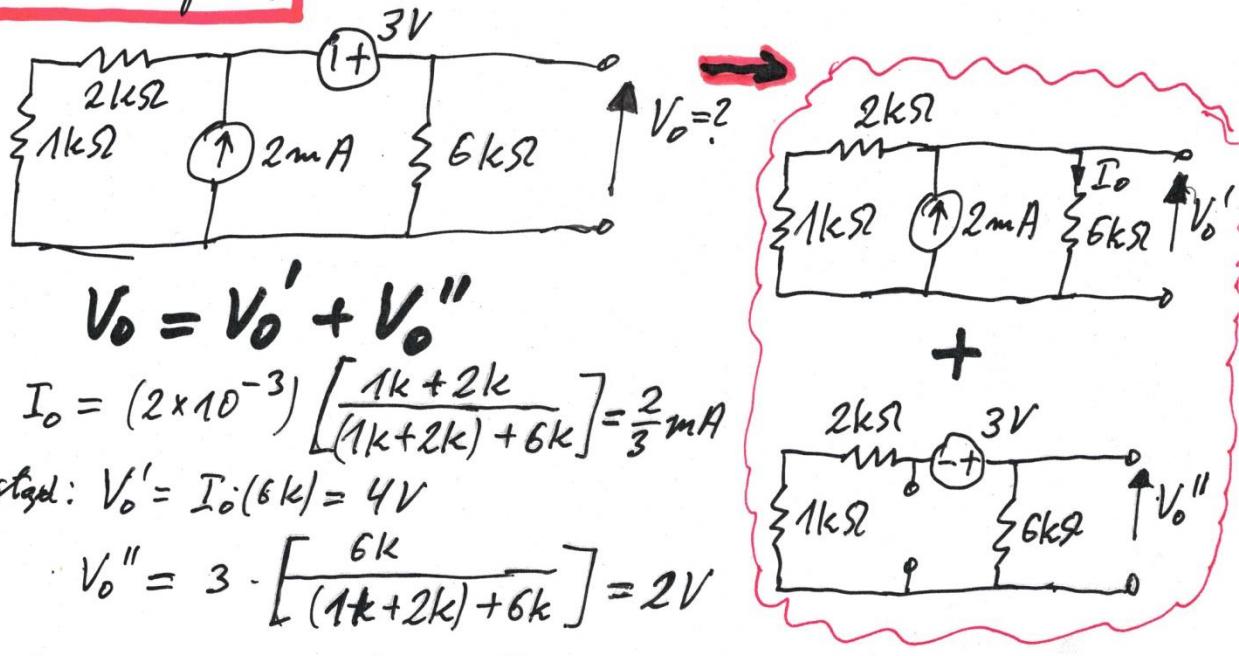


## Zasada superpozycji (tylko sieci liniowe!)



Zatem:  $i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t) = \underbrace{\frac{v_1(t)}{5k}}_{\text{from } i_1'} - \underbrace{\frac{v_2(t)}{15k}}_{\text{from } i_1''}$ .

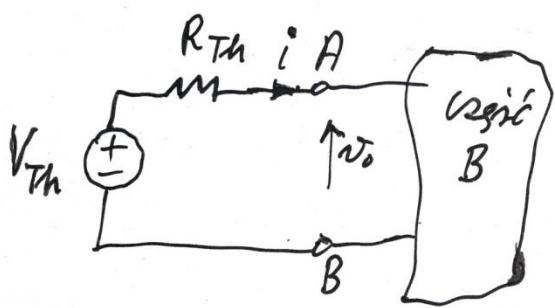
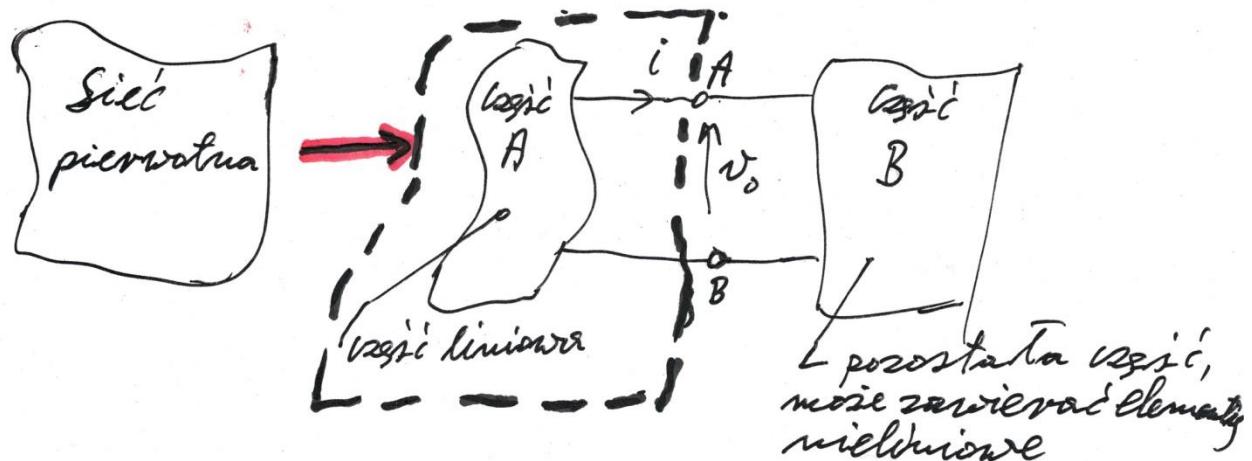
#2: Obliczyć  $V_o$



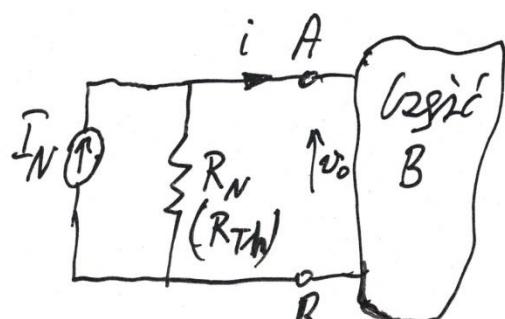
czyli:  $V_o = V_o' + V_o'' = \underline{\underline{6V}}$ .

## Tw. Thevenina i tw. Norton'a (tylko sieci liniowe!)

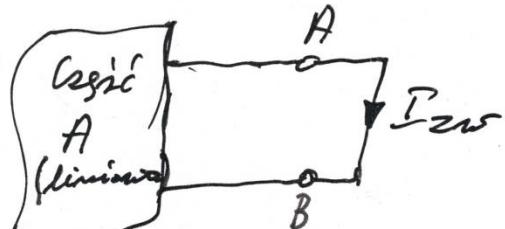
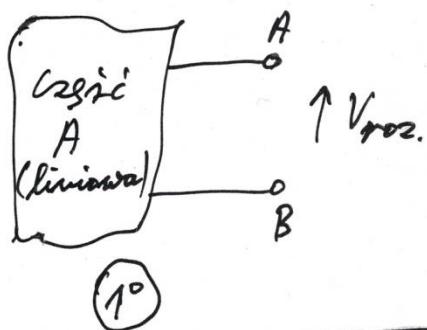
(Twierdzenia o równoważnych generatorach zastępczych – napięciowym i prądowym)



Tw. Thevenin'a



Tw. Norton'a

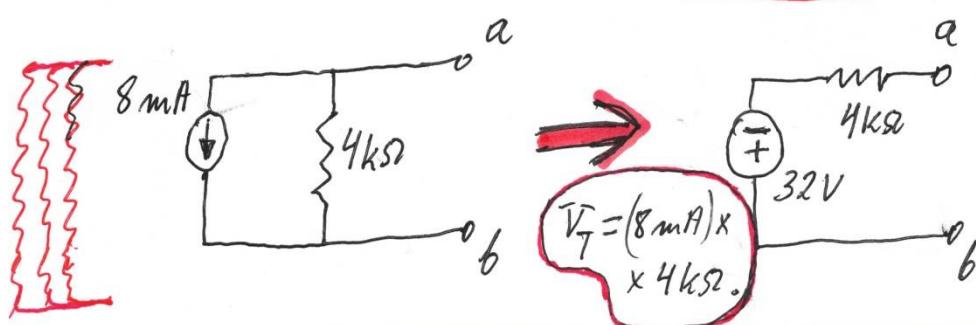
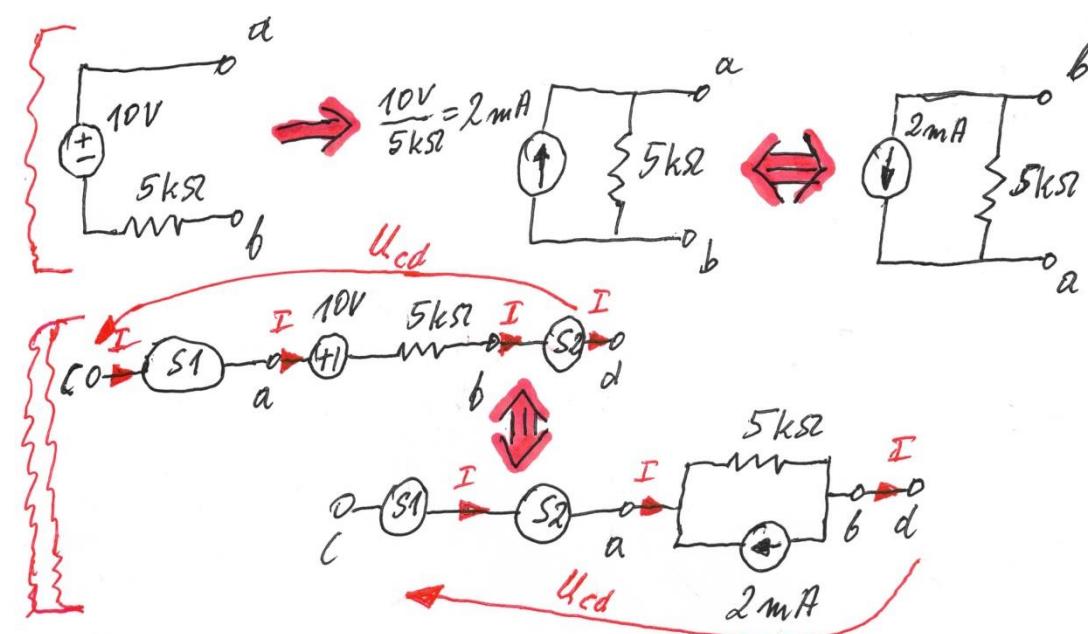
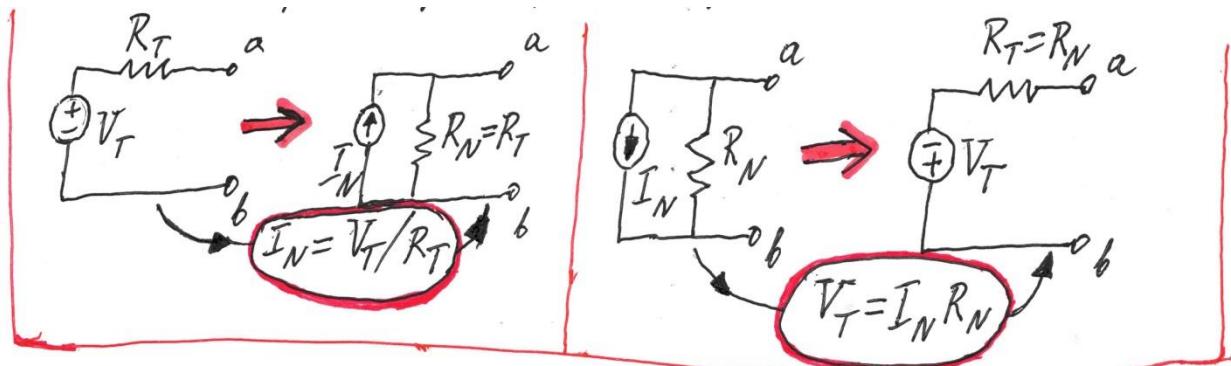


$$V_{Th} = V_{noz.}, \quad R_{Th} = \frac{V_{noz.}}{I_{ZW.}}$$

$$I_N = I_{ZW.} \quad R_N = R_{Th} = \frac{V_{noz.}}{I_{ZW.}}$$

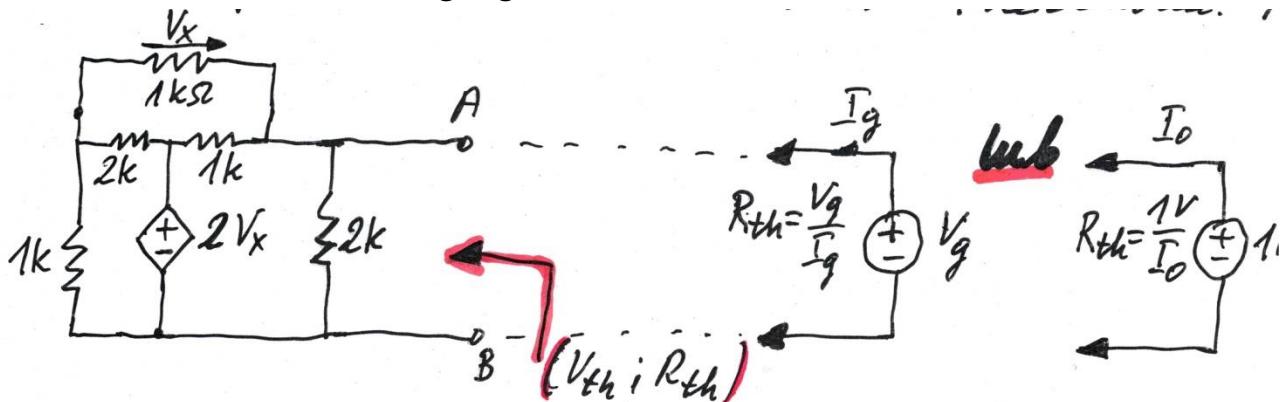
## Zastosowania twierdzeń Thevenina i Norton

Transformacje pomiędzy generatorami napięciowymi i prądowymi

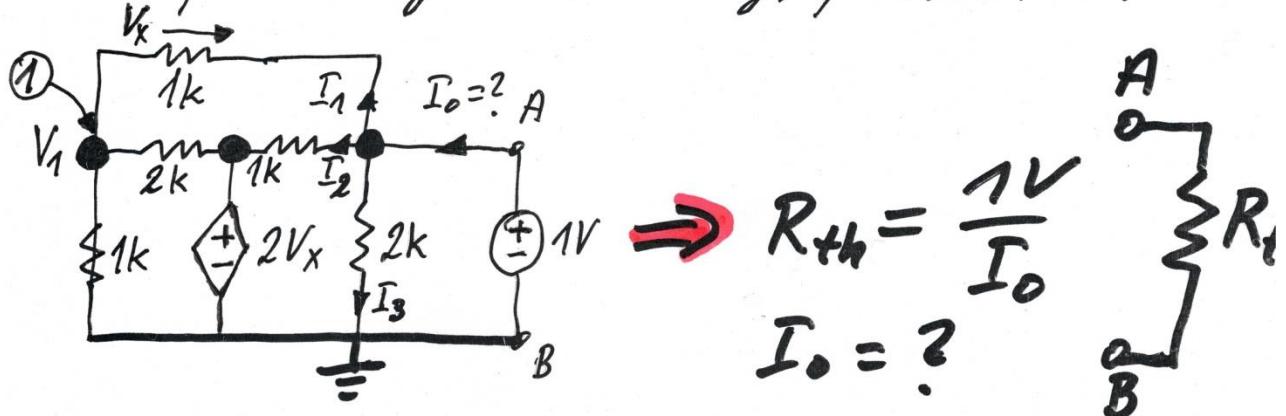


Uwaga! Twierdzenia Thevenina i Nortonu można zastosować w analizie tylko sieci liniowych (zawierających tylko elementy liniowe) pobudzonych dovolnym (w funkcji czasu, t) sygnałem (sygnatorem).

**Przykład:** — konieczność stosowania generatora testującego do określenia równoważnego generatora



- 1° Nie ma źródeł autonomicznych (nieszaliniowych), przeto  $V_{th} = 0$   
 2° Musimy stosować generator testujący - skutek 1°.



$$KVL: V_1 + V_x = 1$$

$$KCL w \textcircled{1}: \frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - 2V_x}{2k} + \frac{V_1 - 1}{1k} = 0 \Rightarrow V_x = \frac{3}{7} V$$

Obliczamy  $I_1, I_2, I_3$ , aby obliczyć  $I_0$ .

$$I_1 = \frac{V_x}{1k} = \frac{1 - V_1}{1k} = \frac{3}{7} \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{1 - 2V_x}{1k} = \frac{1}{7} \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \text{ mA}$$

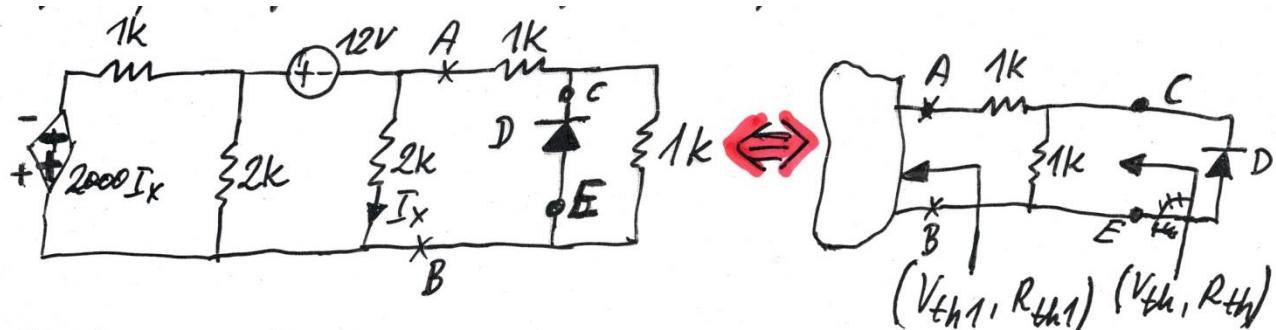
Zatem,

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{15}{14} \text{ mA}$$

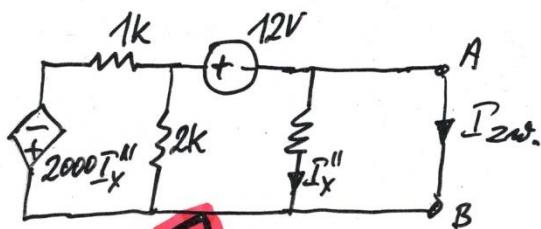
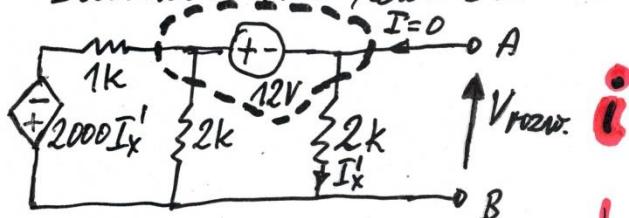
$$\text{A więc: } R_{th} = \frac{1V}{I_0} = \frac{14}{15} \text{ k}\Omega$$

Przykład\*: — sieć liniowa + element nieliniowy

Należy maksymalnie zredukować podsieć liniową, aby możliwie najłatwiej można było dokonać analizy warunków pracy diody: określić prąd  $I_D$  oraz napięcie  $U_D$  na diodzie.



1<sup>o</sup> Najpierw określamy równowagę generatorem Thévenina dla zacisków A-B, lewa strona:

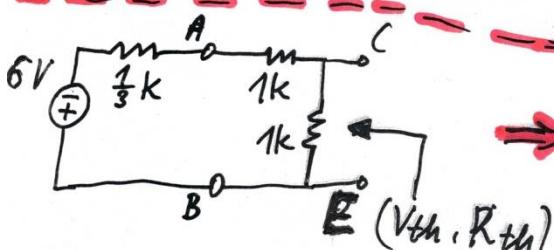


KCL dla superwzosta obejmującego źródło napięcia 12V:

$$\frac{V_{rozr.} + 12}{1k} + \frac{V_{rozr.} + 12}{2k} + \frac{V_{rozr.} - 0}{2k} = 0$$

$$\text{gdzie: } I_x' = \frac{V_{rozr.}}{2k}$$

$$\text{stąd: } V_{rozr.} = -6V = V_{th1}$$



bo  $I_x'' = 0$ , gdyż A zwarła z B,

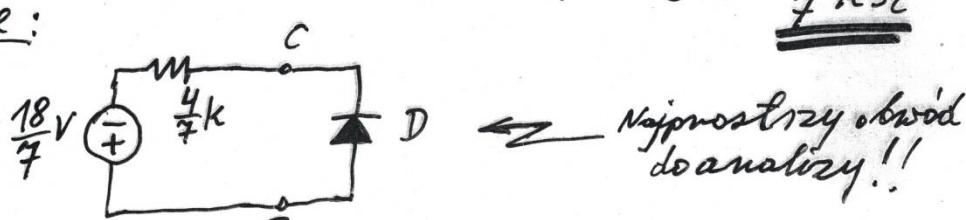
$$\text{czyli: } I_{zw.} = \frac{-12}{(1k)(2k)} = \frac{-12}{2k} = -18mA$$

$$R_{th1} = \frac{V_{rozr., A-B}}{I_{zw., A-B}} = \frac{-6}{-18mA} = \frac{1}{3}k\Omega$$

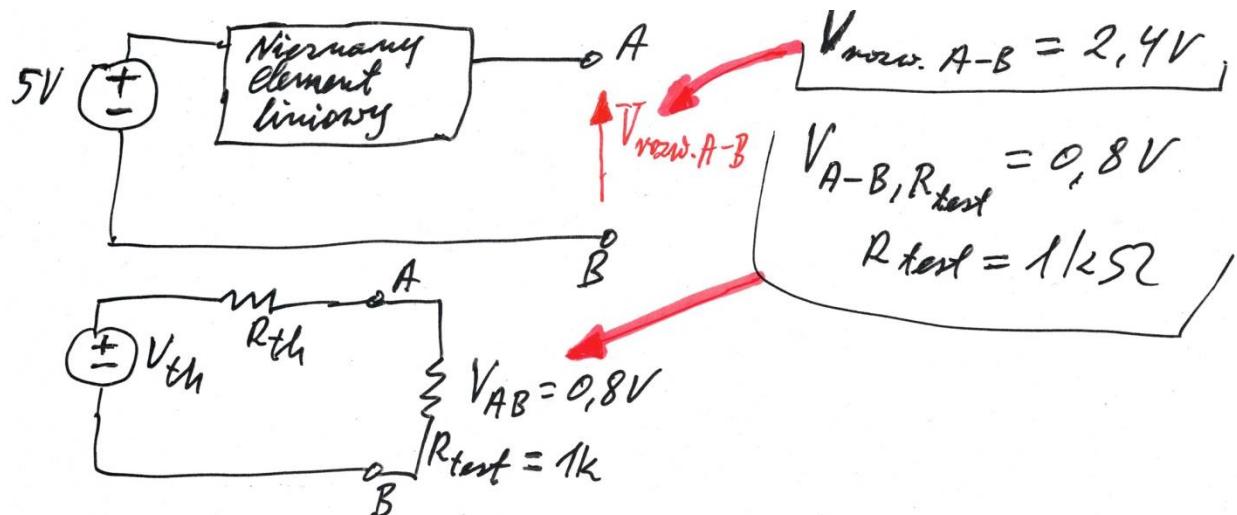
$$V_{th} = V_{rozr.}, GE = (-6) \left[ \frac{1k}{1k + 1k + \frac{1}{3}k} \right] = -\frac{18}{7}V$$

$$R_{th} = (1k) \parallel (1k + \frac{1}{3}k) = \frac{4}{7}k\Omega$$

Ostatecznie:



Przykład: — Nie zwierając zacisków A-B określić równoważny generator Thevenina. Dostępne: woltomierz + rezistor  $1\text{k}\Omega$ .

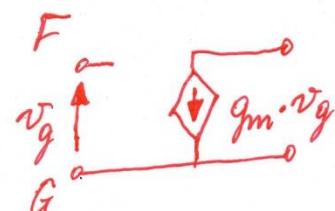


$$1^{\circ} V_{th} = V_{AB} = \underline{2.4V}$$

2<sup>o</sup> Z dzielnika napięciowego:

$$0.8 = V_{th} \left( \frac{1k}{1k + R_{th}} \right) \rightarrow R_{th} = 2k \Omega$$

Przykład. Określić równowaznik Thevenina.



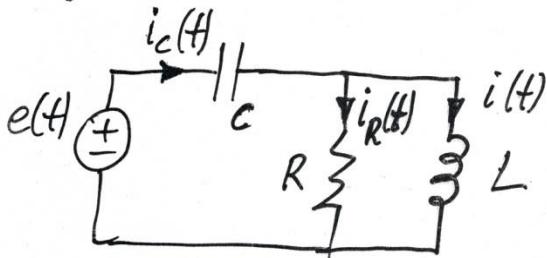
$$1^{\circ} V_{th} = 0, \text{ bo nie ma źródła niesależnego (autonomiczne)}$$

2<sup>o</sup> Przykładaemy do zacisków F-G generatorem testującym  $V_x$



$$R_{th} = \frac{V_x}{I_x} = \frac{v_g}{g_m \cdot v_g} = \frac{1}{g_m}$$

## Stan ustalony w sieciach z wymuszeniami harmonicznymi (okresowymi)



Dane:  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$   
 $R, L, C$

Szukamy ustalonej wartości prądu płynącego przez indukcyność,  $i(t) = ?$

Z KVL:  $\begin{cases} e(t) - \frac{1}{C} \int i_C(t) dt - R \cdot i_R(t) = 0 \\ R \cdot i_R(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \end{cases}$  /  $\frac{d}{dt}$

KCL:  $-i_C(t) + i_R(t) + i(t) = 0$  /  $\frac{d}{dt}$

Układ równań różniczkowo-ciągowych.

- Po obustronnym zróżniczowaniu dwóch pierwszych równań i wyeliminowaniu  $i_C(t)$  oraz  $i_R(t)$  otrzymujemy

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{C} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d e(t)}{dt} = \omega E_m \cos(\omega t + \alpha)$$

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$  – szukamy rozwiązania o niskiej częstotliwości, w takiej postaci,

$CORN = CORI + CSRN$

$CSRN$

- Nie mogą się pojawić harmoniczne o innej pulsacji krotowej niż  $\omega$  ( $\omega = 2\pi f$ )
- Interesuje nas zatem i amplituda  $I_m$ , i faza prądu  $\varphi$

Wniosek: Złożone obliczenia, duża uciążliwość analizy!

## Wskazy (ang. Phasors)

Wymuszenia sinusoidalne i zespolone (zespolone funkcje wymuszeń) •  
 Reprezentacja wskazowa wymuszeń harmonicznych • Analiza zespolona  
 sieci liniowych (analiza symboliczna)

- Ogólna postać funkcji sinusoidalnie zmieniającej:

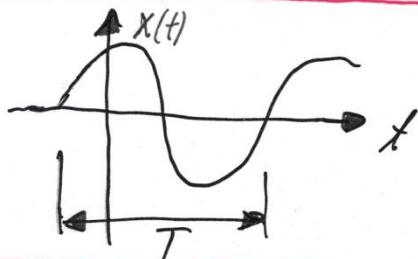
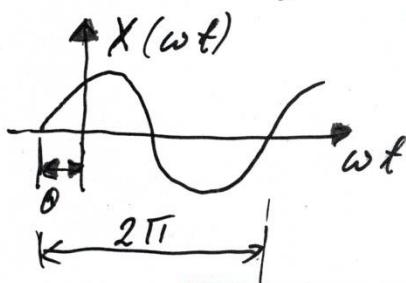
$$X(t) = \bar{X}_m \sin(\omega t + \vartheta)$$

$\bar{X}_m$  - amplituda

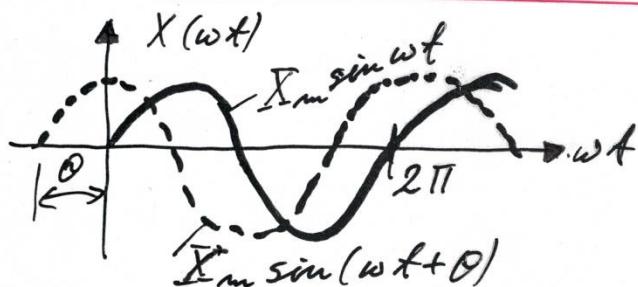
$\omega t$  - argument

$\vartheta$  - kąt fazowy, po prostu faza

$\omega$  - wzrostliwość kątowa (radialna), pulsacja



$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



1°  $X_{m_1} \sin(wt + \vartheta)$  wyprowadza  $X_{m_2} \sin wt$  o kąt  $\vartheta$  [ad.]

2°  $X_{m_2} \sin wt$  pojmuje się względem  $X_{m_1} \sin(wt + \vartheta)$

3° Niech:  $\bar{X}_1(t) = \bar{X}_{m_1} \sin(wt + \vartheta)$

$$\bar{X}_2(t) = \bar{X}_{m_2} \sin(wt + \varphi)$$

Mówimy  $\bar{X}_1(t)$  wyprowadza  $\bar{X}_2(t)$  o  $(\vartheta - \varphi)$  [ad.]

Jeśli  $\vartheta = \varphi$ , to sygnały są zgodne w fazie

Określając najmniejszą fazę dawnej funkcji sinusoidalnych o tej samej pulsacji w napisy obie funkcje sprowadzić albo do sin(.), albo do cos(.), zawsze z dodatnią amplitudą.

## Wskazy c. d.

### Reprezentacja Eulera liczb zespolonych

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Niech  $v(t) = \hat{V}_m e^{j\omega t} = V_m e^{j(\omega t + \theta)} = \underbrace{V_m e^{j\theta}}_{V_m} \cdot e^{j\omega t}$

oznacza  $|V_m| = V_m$ , bo  $|e^{j(\cdot)}| = 1$

Inaczej:  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) + j V_m \sin(\omega t + \theta)$

Rzeczywista i urojona część tego sygnału są realizowane (wykonalne); możemy je przedstawić jako sumę dwóch sygnałów. Jeśli obwód (sieć) jest liniowy, to spełnia zasadę superpozycji. Mnożenie przez liczbę dowolną  $\neq 0$  funkcji  $v(t)$ , operacje różniczkowania  $\frac{d}{dt}(\cdot)$  oraz całkowania  $\int v(t) dt$  nie zmieniają pulsacji  $\omega$ :

$$\frac{d v(t)}{dt} = j\omega V_m e^{j\omega t} = j\omega v(t) = j\omega v(j\omega t)$$

$$\int v(t) dt = \frac{1}{j\omega} V_m e^{j\omega t} = \frac{v(t)}{j\omega} = \frac{v(j\omega t)}{j\omega}$$

\*  $v(t) = v(j\omega t)$  jest funkcją zespoloną zm. rzeczywistej

Uwzględniając powyższe: Dla odpowiedzi prądu w dowolnej sieci liniowej będzie postaci:

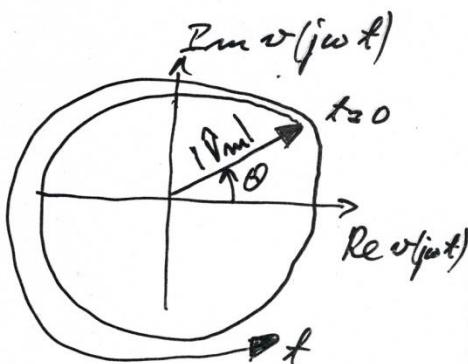
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) + j I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = i(j\omega t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{I}_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\hat{I}_m = I_m e^{j\varphi}$$

{Amplituda zespolona  
symboliczna

$$I_m = |\hat{I}_m| - \text{amplituda rzeczywista}$$



## Wskazy c. d.

Faza amplitudy zespolonej, ozy to napisia, by przed  
 $(\theta, \varphi)$  ukladamionna jest z argumentem głównym (Argz)  
 # liczby zespolonej z:

$$\underline{\theta = \operatorname{Arg} \tilde{V}_m}, \quad \underline{\varphi = \operatorname{Arg} \tilde{I}_m}, \quad \text{czyli:}$$

$$\underline{-\pi < \theta \leq \pi}, \quad \underline{-\pi < \varphi \leq \pi}$$

Przypomnienie:

Sumę dowolnej ilości  $\sin(\omega t + \varphi_1) + \dots + \cos(\omega t + \varphi_k) + \dots$   
 można zawsze sprowadzić (zredukować) na postać do

$$x(t) = \tilde{X}_m \sin(\omega t + \theta),$$

wkorzystując równania:

$$\tilde{X}_m \sin(\omega t + \theta) = \tilde{X}_m (\sin \omega t \cdot \cos \theta + \cos \omega t \cdot \sin \theta) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\text{gdzie: } A = \tilde{X}_m \cos \theta, \quad B = \tilde{X}_m \sin \theta.$$

Inaczej:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \theta); \quad \theta = \arctg \frac{B}{A}$$

$$\tilde{X}_m = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Warunek: wszystkie  $\sin(\cdot)$  i  $\cos(\cdot)$  mają tę samą pulsację.

Ponadto zawsze możemy przejść do f.  $\cos(\cdot)$ :

$$\tilde{X}_m \sin(\omega t \pm \theta) = \tilde{X}_m \cos(\omega t \pm \theta - 90^\circ)$$

Uwaga: Kat fazowy bedziemy odnosić do funkcji  $\cos(\cdot)$

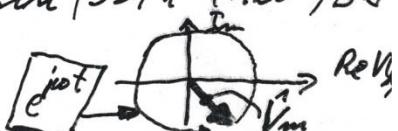
Jeśli wymuszenia wyrażają się przez  $\sin(\cdot)$  i  $\cos(\cdot)$ , to  $\sin(\cdot)$  redukujemy do  $\cos(\cdot)$ .

Przykłady: Działając konwersją funkcji czasu na rokazy (wartości symboliczne).

$$v(t) = 24 \cos(337t - 45^\circ) [V], \quad i(t) = 12 \sin(337t + 120^\circ) [A]$$

$$\omega = 337 [\text{rad/s}]$$

$$\tilde{V}_m = 24 e^{-j45^\circ} = 24 \angle -45^\circ; \quad V(j\omega) = \tilde{V}_m e^{j\omega t} = \tilde{V}_m e^{j\omega t} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix}$$

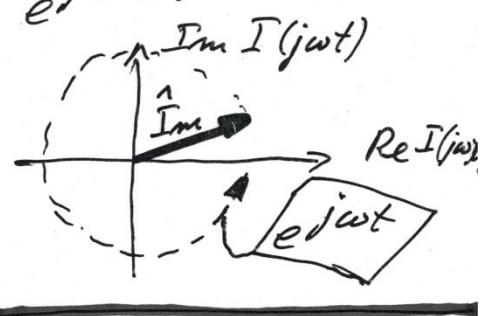


## Wskazy c. d.

### Przykłady:

$$\hat{I}_m = 12 e^{j(120^\circ - 90^\circ)} = 12 e^{j30^\circ} = 12 \angle 30^\circ, \text{ bo} \\ i(t) = 12 \sin(337t + 120^\circ) = 12 \cos(337t + 120^\circ - 90^\circ).$$

$$I(j\omega) = I(j\omega t) = \hat{I}_m e^{j\omega t} = \hat{I}_m e^{j337t}$$



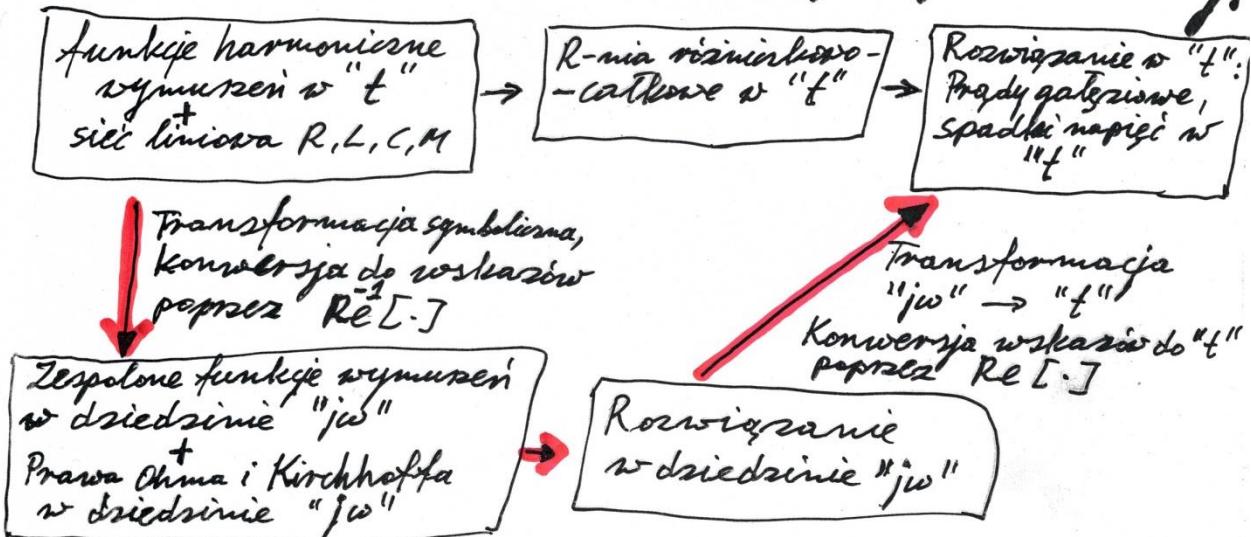
**2#:** Dokonaj konwersji wskazów z dziedziny częstotliwości urojonych do dziedziny czasu.  
 $f=1\text{kHz}$

$$\boxed{\hat{V} = 16 \angle 20^\circ} \Rightarrow \hat{V} = 16 e^{j20^\circ} \\ \Rightarrow \hat{V}(j\omega) = \hat{V} e^{j\omega t} \Rightarrow v(t) = \text{Re}[16 e^{j20^\circ} e^{j\omega t}] =$$

$$\boxed{\hat{I} = 10 \angle -75^\circ} \\ \hat{I} = 10 e^{j(-75^\circ)}, \quad \hat{I}(j\omega) = 10 e^{-j75^\circ} e^{j\omega t} \\ = 16 \cos(\omega t + 20^\circ) [A] = \left\{ \begin{array}{l} f=1\text{kHz} \\ = 16 \cos(2000\pi t + 20^\circ) \end{array} \right.$$

$$i(t) = \text{Re}[\hat{I}(j\omega)] = \text{Re}[10 e^{-j75^\circ} e^{j\omega t}] = 10 \cos(\omega t - 75^\circ) = \\ = \left\{ \begin{array}{l} f=1\text{kHz} \\ = 10 \cos(2000\pi t - 75^\circ) \end{array} \right.$$

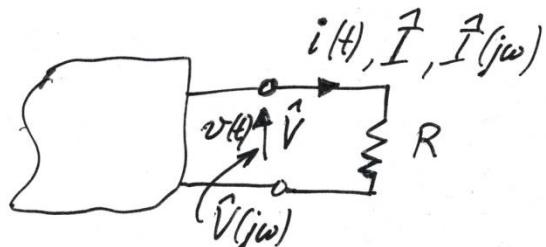
### Metodologia obliczeń z zastosowaniem wskazów, transformacji symbolicznej



## Prawo Ohma w "jω"

Dla rezystancji, R:

$$(*) i(t) = \frac{v(t)}{R}$$



Dynamiki:  $v(t) \rightarrow \hat{V}(j\omega t) = V_m e^{j\theta_v} e^{j\omega t}$

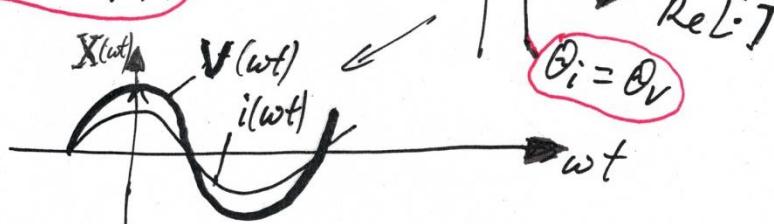
Skelekt:  $\hat{I}(j\omega t) = \hat{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j\theta_i} e^{j\omega t}$

Podstawiając do (\*):

$$I_m e^{j\theta_i} e^{j\omega t} = \frac{V_m e^{j\theta_v} e^{j\omega t}}{R} \quad /: e^{j\omega t} (\neq 0)$$

$$I_m = \frac{V_m}{R} \quad \wedge \quad \theta_i = \theta_v$$

$$\boxed{\hat{I}_m = \hat{V}_m / R} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{I}_{\text{--}}(j\omega t) = \frac{\hat{V}(j\omega t)}{R}$$



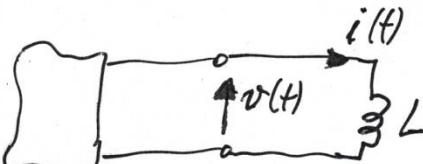
Dla indukcyjności, L:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) \rightarrow \hat{I}(j\omega t) = \hat{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j\theta_i} e^{j\omega t}$$

$$\hat{V}_m e^{j\omega t} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j\theta_i} e^{j\omega t})$$

$$\hat{V}_m e^{j\omega t} = j\omega L \underbrace{I_m e^{j\theta_i}}_{\hat{I}_m} e^{j\omega t} \quad /: e^{j\omega t}$$



## Prawo Ohma w " $j\omega$ " — c.d.

$$\boxed{\hat{V}_m = j\omega L \cdot \hat{I}_m} \quad \equiv \quad \boxed{\hat{V} = j\omega L \cdot \hat{I}} \quad \boxed{\hat{I} = \frac{\hat{V}}{j\omega L}}$$

$\rightarrow$

$$Z_L = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = j\omega L \quad - \text{impedancia cewki ind.}$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = j\left(\frac{-1}{\omega L}\right) \quad - \text{admitancia cewki ind.}$$

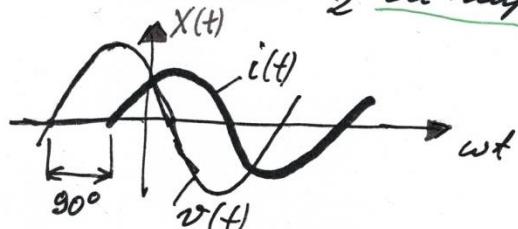
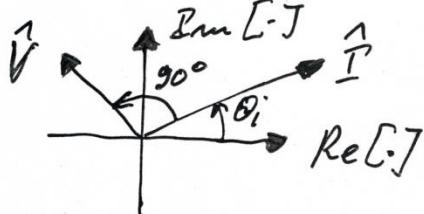
Przesunięcie fazy pomiędzy wskażeniem prądu i napięcia

$$\hat{V}_m e^{j\omega t} = j\omega L \hat{I}_m e^{j\omega t}, \quad j = e^{j90^\circ}$$

$$\hat{V}_m e^{j\omega t} = \omega L \hat{I}_m e^{j90^\circ} e^{j\omega t}, \quad \hat{V}_m = |\hat{V}_m| e^{j\theta_V}$$

czyli:  $\boxed{\theta_V = \theta_i + 90^\circ}$

- na indukcyjności napięcie wyprzedza przed o  $\frac{\pi}{2}$  lub,
- –11—11— przed oponia się  $\frac{\pi}{2}$  za napięciem



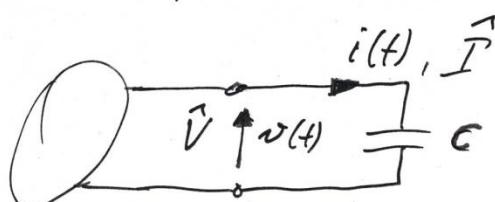
Przykład: Znajdź przed płynący przez indukcyjność, jeśli  $v(t) = 12 \cos(377t + 20^\circ)$  [V] i  $L = 20 \text{ mH}$ .

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{j\omega L} = \frac{12 e^{j20^\circ}}{e^{j90^\circ} \cdot \omega L} = \frac{12}{377 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} e^{j(20^\circ - 90^\circ)} = 1,59 e^{-j70^\circ}$$

$$\underline{i(t) = 1,59 \cos(377t - 70^\circ)}$$

Dla pojemności, C:

$$\boxed{i(t) = C \frac{d v(t)}{dt}}$$



## Prawo Ohma w "jω" — c.d.

$$v(t) \rightarrow \hat{V}(j\omega t) = \hat{V}_m e^{j\omega t} = \underbrace{|\hat{V}_m| e^{j\theta_V}}_{\hat{V}_m} e^{j\omega t}$$

Skutek:  $\hat{I}(j\omega t) = \hat{I}_m e^{j\omega t} = \underbrace{|\hat{I}_m| e^{j\theta_i}}_{\hat{I}_m} e^{j\omega t}$

$$\hat{I}_m e^{j\omega t} = C \frac{d}{dt} (\hat{V}_m e^{j\theta_V} e^{j\omega t})$$

$$\hat{I}_m e^{j\omega t} = j\omega C \underbrace{\hat{V}_m e^{j\theta_V}}_{\hat{V}_m} e^{j\omega t} \quad / : e^{j\omega t}$$

$$\hat{I}_m = j\omega C \hat{V}_m \quad (\hat{I} = j\omega C \hat{V})$$

Czyli:

$$\hat{I} = j\omega C \hat{V}$$

$$\hat{V} = \frac{\hat{I}}{j\omega C}$$

$$\begin{aligned} Z_C &\triangleq \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{1}{j\omega C} = j\left(\frac{-1}{\omega C}\right) \\ Y_C &= \frac{1}{Z_C} = j\omega C \end{aligned}$$

Kąt fazowy pomiędzy wzrostem prądu i napięcia

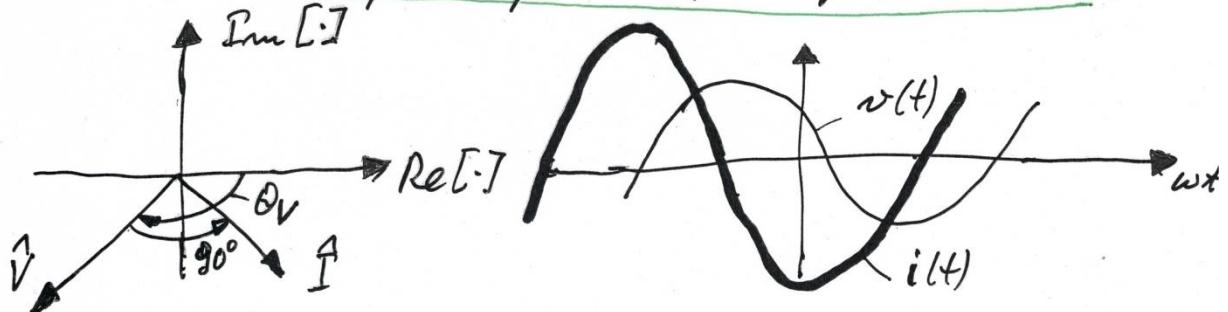
$$\hat{I}_m e^{j\omega t} = j\omega C \hat{V}_m e^{j\omega t}, \quad j = e^{j90^\circ}$$

$$\hat{V}_m = |\hat{V}_m| e^{j\theta_V}, \quad \hat{I}_m = |\hat{I}_m| e^{j\theta_i}$$

$$\hat{I}_m = \omega C \hat{V}_m e^{j90^\circ}$$

$$\theta_i = \theta_V + 90^\circ \quad \wedge \quad |\hat{I}_m| = \omega C |\hat{V}_m|$$

- na pojemności prąd wprzedra napisie o  $90^\circ$  lub:
- II - II - napisie opisującą się za prądem o  $90^\circ$ :



## Prawo Ohma w "jω" — c.d.

$$v(t) \rightarrow \hat{V}(j\omega t) = \hat{V}_m e^{j\omega t} = \underbrace{|\hat{V}_m| e^{j\theta_V}}_{\hat{V}_m} e^{j\omega t}$$

Skutek:  $\hat{I}(j\omega t) = \hat{I}_m e^{j\omega t} = \underbrace{|\hat{I}_m| e^{j\theta_i}}_{\hat{I}_m} e^{j\omega t}$

$$\hat{I}_m e^{j\omega t} = C \frac{d}{dt} (\hat{V}_m e^{j\theta_V} e^{j\omega t})$$

$$\hat{I}_m e^{j\omega t} = j\omega C \underbrace{\hat{V}_m e^{j\theta_V}}_{\hat{V}_m} e^{j\omega t} \quad / : e^{j\omega t}$$

$$\hat{I}_m = j\omega C \hat{V}_m \quad (\hat{I} = j\omega C \hat{V})$$

Czyli:

$$\boxed{\hat{I} = j\omega C \hat{V}}$$

$$\boxed{\hat{V} = \frac{\hat{I}}{j\omega C}}$$

$$\begin{aligned} Z_C &\triangleq \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{1}{j\omega C} = j\left(\frac{-1}{\omega C}\right) \\ Y_C &= \frac{1}{Z_C} = j\omega C \end{aligned}$$

Kąt fazowy pomiędzy wektorem prądu i napięcia

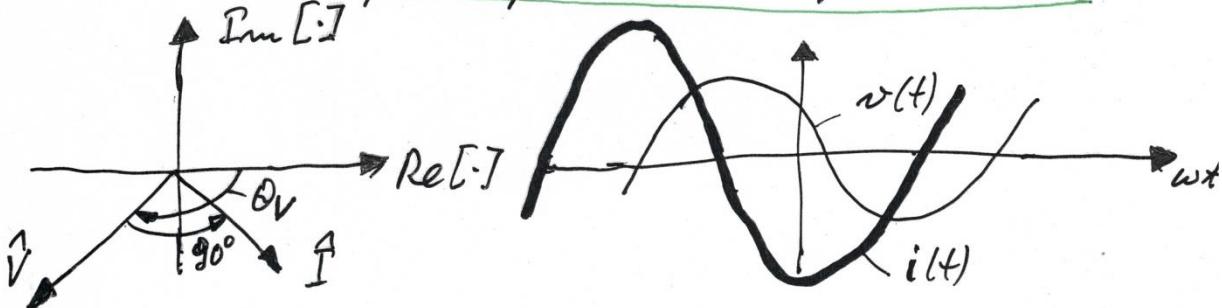
$$\hat{I}_m e^{j\omega t} = j\omega C \hat{V}_m e^{j\omega t}, \quad j = e^{j90^\circ}$$

$$\hat{V}_m = |\hat{V}_m| e^{j\theta_V}, \quad \hat{I}_m = |\hat{I}_m| e^{j\theta_i}$$

$$\hat{I}_m = \omega C \hat{V}_m e^{j90^\circ}$$

$$\boxed{\theta_i = \theta_V + 90^\circ} \quad \wedge \quad \boxed{|\hat{I}_m| = \omega C |\hat{V}_m|}$$

- na pojemnością przed wypniedra napięcie o  $90^\circ$  lub:
- napięcie opóźnia się za prądem o  $90^\circ$ .



## Prawo Ohma w "jω" — c.d.

Przykład: Znajdź prąd płynący przez pojemność  $i(t)$ , jeśli:  $v(t) = 100 \cos(314t + 15^\circ)$  [V],  $C = 100 \mu F$ .

$$\begin{aligned} \hat{V} &= 100 e^{j15^\circ}, \quad \hat{I} = j\omega C \cdot \hat{V} = \omega C \hat{V} e^{j90^\circ} = \\ &= 314 \cdot (100 \cdot 10^{-6}) \cdot 100 e^{j15^\circ} \cdot e^{j90^\circ} = 3,14 e^{j105^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

Stąd:  $i(t) = 3,14 \cos(314t + 105^\circ)$

Uwaga nt wartości skutecnej sygnałów okresowych, niewyłogicznych harmonicznych

Moc średnia sygnałów okresowych:  $X(t)$  — sygnał okresowy

$$\bar{P}_x = \langle X^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X^2(t) dt$$

Wartość skuteczna (ang. rms)

$$\text{rms}(X(t)) = \sqrt{\bar{P}_x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X^2(t) dt}$$

Dla sygnałów harmonicznych, np.:

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{rms}(X(t)) = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$$

Mierząc napięcia lub prądu harmonicznie zmiennego mierzą najpierw wartość skuteczną sygnału, to jest:  $\frac{\text{amplituda}}{\sqrt{2}}$  ≈ 0,778 [amplituda]; nie mierzą różnicy faz!

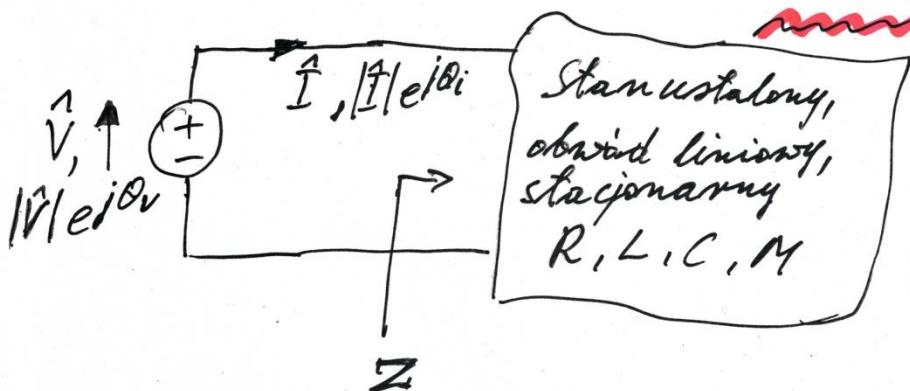
Fazę sygnału można mierzyć bez mierzeniem wielokrotnym (np. woltomierz wielokrotny) lub za pomocą oscyloskopu.

## Impedancia i admitancja

**Impedancia, Z:**

$$\boxed{Z \triangleq \frac{\vec{V}}{\vec{I}}} , Z = \frac{|V| e^{j\theta_v}}{|I| e^{j\theta_i}} = \frac{|V|}{|I|} e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

$$\boxed{|Z| = |Z| e^{j\theta_z}} , \text{czyli } |Z| = \frac{|V|}{|I|} \wedge \theta_z = \theta_v - \theta_i$$



W ogólnym przypadku:

$$\boxed{Z = Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)}$$

$R(\omega)$  - rezystancja; część rzeczywista  $Z$ ,  $\underline{R(\omega) = Re Z}$

$X(\omega)$  - reaktywność; część urojona  $Z$ ,  $\underline{X(\omega) = Im Z}$

$\theta_z$  - kąt impedancji

$|Z|$  - moduł impedancji

$$Z = R + jX = |Z| e^{j\theta_z}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \theta_z = \arctg \frac{X}{R}$$

$$R = Re Z = |Z| \cos \theta_z, \quad X = Im Z = |Z| \sin \theta_z$$

Impedancia jest funkcją częstotliwości sygnału elektrycznego!

Impedancia zastępuje szeregowo połączonych impedancji  $Z_k$

$$\boxed{Z_{zastępuje} = \sum_k Z_k} \quad (*)$$

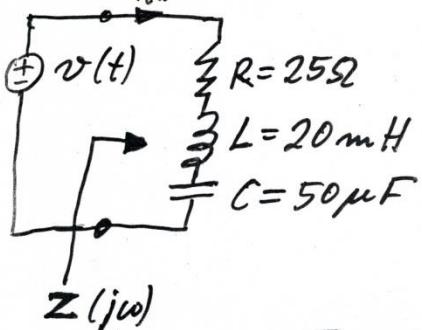
## Impedancia – c. d.:

Impedancia zastępcza równolegle połączonych impedancji  $Z_R$ :

$$\frac{1}{Z_{zastepoz}} = \sum_{R=1}^n \frac{1}{Z_R}$$

27.

Przykład:  $f = 60\text{Hz}$ ,  $v(t) = 50 \cos(\omega t + 30^\circ)$ , oblicz  $i(t) = ?$   
Następnie oblicz  $Z(j\omega)$  dla  $f = 400\text{Hz}$ .



1°: Dla  $f = 60\text{Hz}$  mamy:

$$Z_R = 25\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j(2\pi 60)(20 \cdot 10^{-3}) = j 7,54\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(2\pi 60)(50 \cdot 10^{-6})} = -j 53,05\Omega$$

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = 25 - j 45,51 = [25 + j(-45,51)]\Omega$$

$$R(\omega) = 25, \quad \bar{X}(\omega) = -45,51 < 0,$$

reaktancja ma charakter pojemnościowy,  
bo  $\bar{X}(\omega) < 0$ .

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{50 e^{j30^\circ}}{25 - j 45,51} = \frac{50 e^{j30^\circ}}{51,92 e^{-j61,22^\circ}} = 0,96 e^{j91,22^\circ}$$

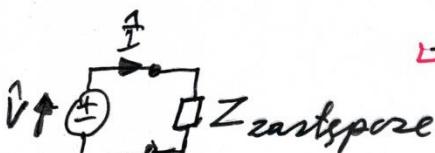
Pred wypredza napisie o  $(91,22^\circ - 30^\circ) = 61,22^\circ$   
W dziedzinie czasu, t:  $i(t) = 0,96 \cos(377t + 91,22^\circ)$

Jeli  $f = 400\text{Hz}$ , to:

$$Z_R = 25\Omega, Z_L = j\omega L = j 50,27\Omega, Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j 7,96\Omega$$

$$Z_{zast} = 25 + j 42,31 = 49,14 e^{j59,42^\circ}$$

$X = 42,31 > 0$ , oryli reaktancja ma charakter indukcyjny



Kondensator, cewka indukcyjna i elementy magnetyczne sprzężone tworzące się ELEMENTAMI REAKTANCYJNYMI.

## Admitancja, Y:

$$Y \triangleq \frac{I}{V}$$

$$Y = IV / e^{j\theta_Y} = \frac{|I|}{|V|} e^{j(\theta_i - \theta_V)}$$

$$Y = G + jB$$

konduktancja

susceptancia

$$Y = \frac{1}{Z}$$

$$\rightarrow G + jB = \frac{1}{R + jX}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

lub:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

w ogólnym przypadku:

$$X \neq \frac{1}{B}, \quad R \neq \frac{1}{G}$$

Równoległe łączenie admitancji:

$$Y_{zast.} = \sum_k Y_k$$

Szeregowe łączenie admitancji:

$$\frac{1}{Y_{zast.}} = \sum_k \frac{1}{Y_k}$$

Prawa Kirchhoffa dla pr. harmonicz.

KCL:  $\sum_k \hat{I}_k = 0$ , dla węzła i superwęzła

KVL:  $\sum_k \hat{V}_k = 0$ , dla dowolnej drogi zamkniętej

Równania dla listk szpalonnych. Dla każdej wartości w

## Prawa Kircchoffa dla wskazów – c. d.:

c.d.

Np.:

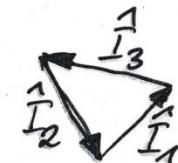
$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 0,$$

$$\text{ale } |\hat{I}_1| + |\hat{I}_2| + |\hat{I}_3| \neq 0$$

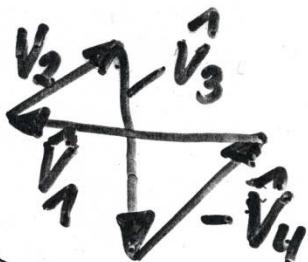
$$\hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3 - \hat{V}_4, \text{ ale:}$$

$$|\hat{V}_1| + |\hat{V}_2| + |\hat{V}_3| - |\hat{V}_4| \neq 0$$

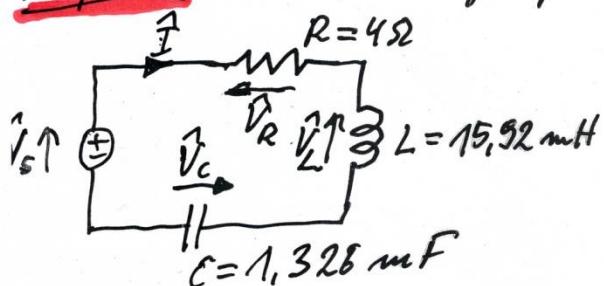
23.



Przypomnienie := mierzący moduły (amplitudy)  
lub wartości stereoskopowe  
prądów i napięć



Przykład. (Obwód szeregowy R, L, C).



$$\begin{aligned} \text{KVL: } & \hat{V}_S - \hat{V}_R - \hat{V}_L - \hat{V}_C = 0 \\ & \hat{V}_S = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C = \\ & = R\hat{I} + j\omega L\hat{I} + \frac{\hat{I}}{j\omega C} = \\ & = R\hat{I} + \omega L\hat{I} e^{j90^\circ} + \frac{\hat{I} e^{-j90^\circ}}{\omega C}. \end{aligned}$$

Jeśli, np.  $V_S(4) = 12\sqrt{2} \cos(377t + 90^\circ)$  [V], to:

$$\omega L = 6, \quad \frac{1}{\omega C} = 2,$$

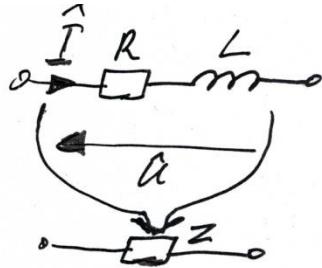
$$\hat{I}(j\omega t) = 3e^{j45^\circ} e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{\hat{V}_S}{Z} = \frac{12\sqrt{2} e^{j90^\circ}}{4 + j6 - j2} = \frac{12\sqrt{2} e^{j90^\circ}}{4\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = \\ &= 3 e^{j45^\circ} \end{aligned}$$

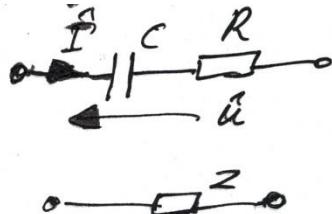


Dla obwodów liniowych (n) i stacjonarnych  
stosuje się: Tw. Thewonina,  
Tw. Norton'a, zasada superpozycji  
i wtarcia liniowego.

## Immitancje dwójników



$$\hat{u} = Z \cdot \hat{I}$$



$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{(-\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$G(\omega)$

$B(\omega)$

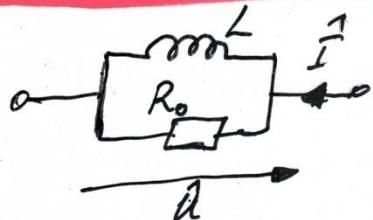
$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \frac{1}{\omega C}$$

$$Y = \frac{1}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{R + j \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega^2 R C^2 + j \omega C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$Y = \frac{\omega^2 R C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{\omega C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

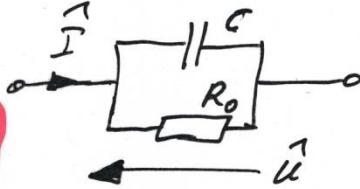
$G(\omega)$

$B(\omega)$



$$\hat{u} = Z \hat{I}$$

$$\hat{I} = Y \hat{u}$$



$$Y = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R_0} - j \frac{1}{\omega L}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} - j \frac{1}{\omega L}} = \frac{R_0}{1 - j \frac{R_0}{\omega L}}$$

$$Z = \frac{R_0 (1 + j \frac{R_0}{\omega L})}{1 + \frac{R_0^2}{\omega^2 L^2}}$$

$$Z = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0^2}{\omega^2 L^2}} + j \frac{\frac{R_0}{\omega L}}{1 + \frac{R_0^2}{\omega^2 L^2}}$$

$R(\omega)$

$X(\omega)$

$$Y = \frac{1}{R_0} + j\omega C$$

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + j\omega C} = \frac{R_0}{1 + j\omega R_0 C} = \frac{R_0 (1 - j\omega R_0 C)}{1 + \omega^2 R_0^2 C^2}$$

$$Z = \frac{R_0}{1 + \omega^2 R_0^2 C^2} + j \frac{(-\omega R_0^2 C)}{1 + \omega^2 R_0^2 C^2}$$

$R(\omega)$

$X(\omega)$

$G, B, R, X$  - są funkcjami  $\omega$

## Obwody rezonansowe

1<sup>o</sup> Szeregowy obw. rezonansowy. Stan ustalony, wymuszenie harmoniczne.

$$e = E_m \cos \omega t = u(t)$$

$$\hat{e} = E_m e^{j0^\circ} = E_m$$

$$\hat{e}(j\omega t) = E_m e^{j\omega t}$$

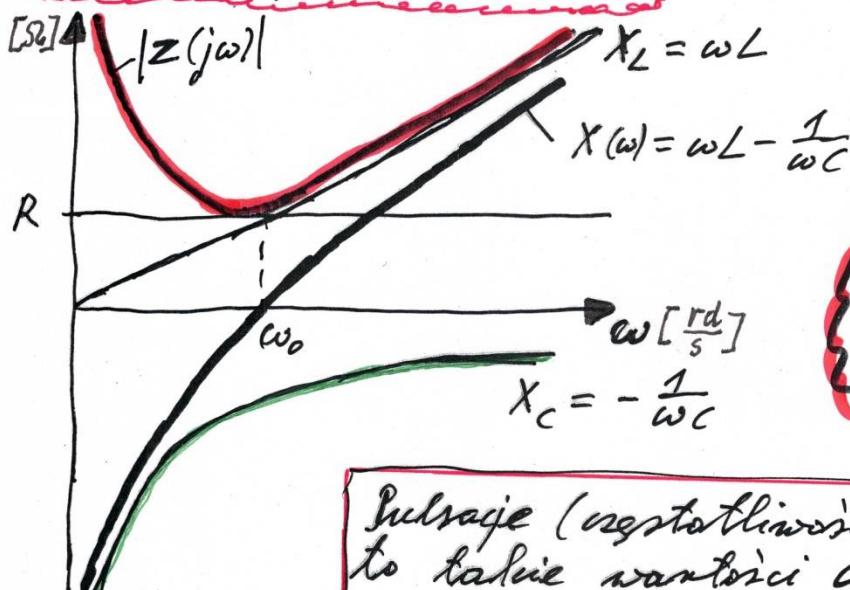


$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$R(\omega) = R = \text{const}$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pulsacje (częstotliwości) rezonansowe to takie wartości  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ , dla których albo reaktywność obwodu  $X(\omega) = 0$ , albo suscepencja  $B(\omega) = 0$

$$\hat{I} = \frac{\hat{e}}{Z(j\omega)} = \hat{e} Y(j\omega) = \frac{E_m}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} =$$

$$= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \quad \text{lub } \omega "t"$$

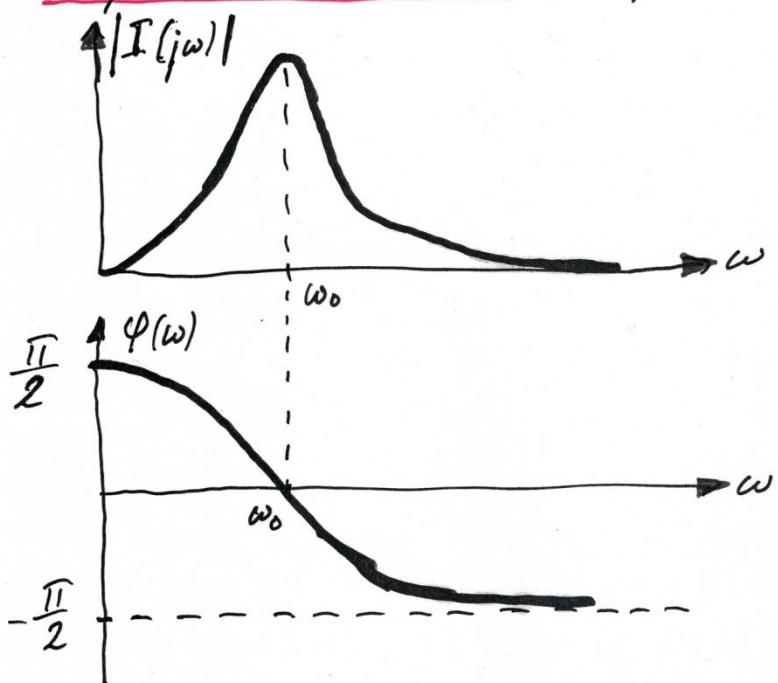
## Obwody rezonansowe — c.d.:

$$\hat{I} \rightarrow i(t) = \hat{I}_m (\omega) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$$

$\omega$  rezonansie ( $\omega = \omega_0$ ):

$$\hat{I}_r = \frac{E_m}{R}, \quad i_r(t) = \frac{E_m}{R} \cos \omega_0 t$$

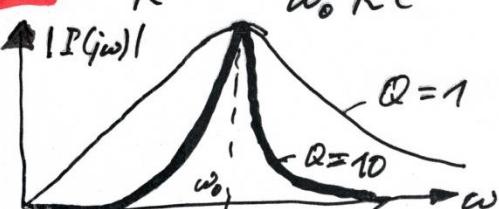
Krzywe rezonansowe: amplitudowa i fazowa.



Definicja energetyczna dобрoci Q

$$Q \triangleq 2\pi \frac{\text{max. całkowita energia gromadzona w obw.}}{\text{energia tracona w obw. w jednym okresie}} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{s}{R}; \quad s = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

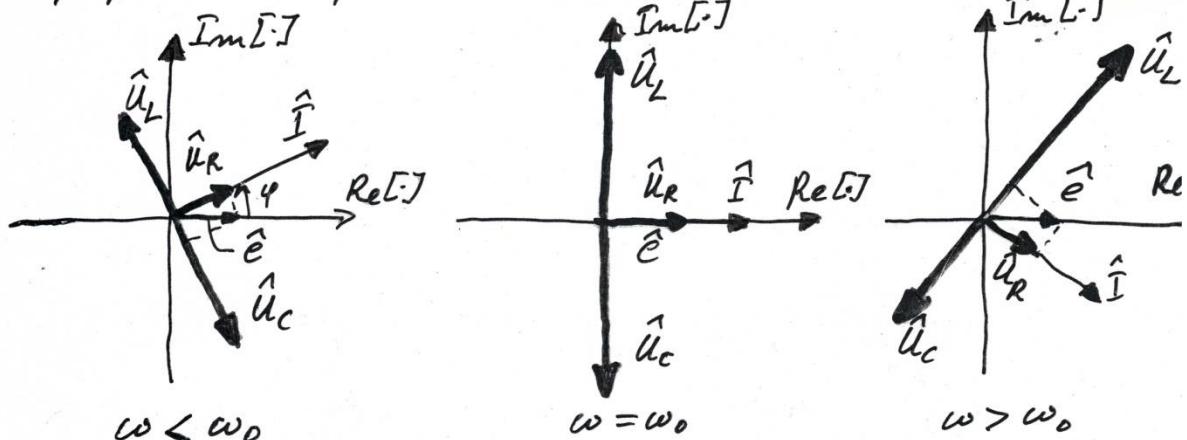


↑ charakterystyka  
obwodu rez.

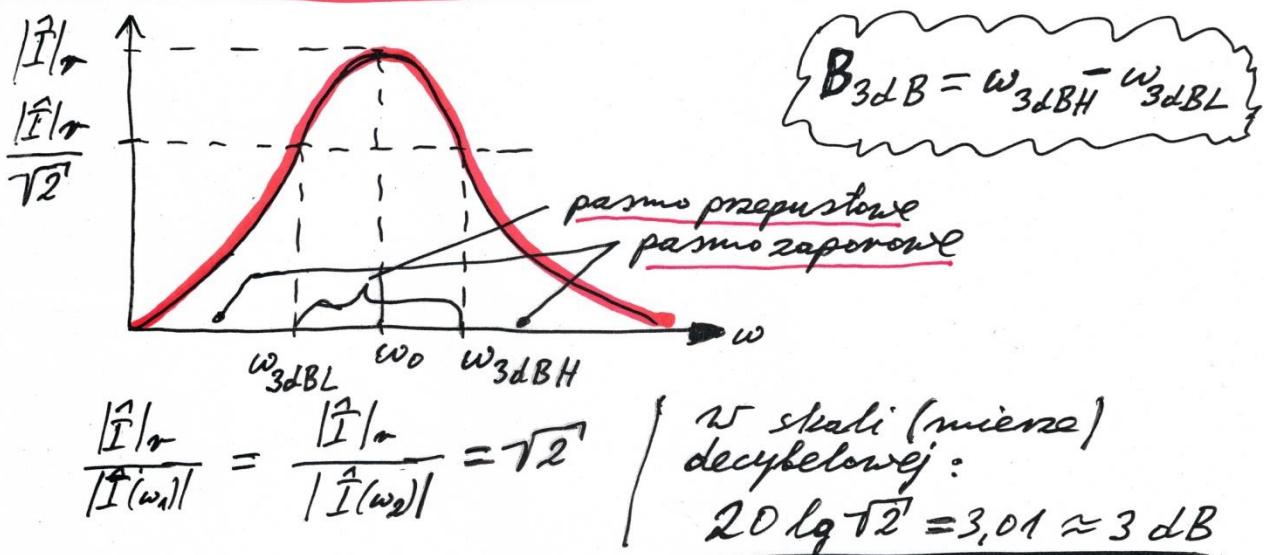
## Obwody rezonansowe — c.d.:

Wskazy spadków napięć na elementach obw. rez.

33

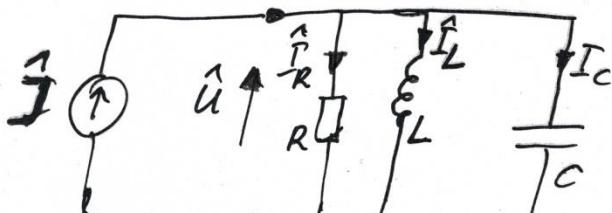


Pasmo przepustowe obw. rez.



Równoległy trójkątny obwód rezonansowy

Względnie unioski, zalożono  
są identyczne jak dla obw.  
rezonansowego szeregowego,  
pod warunkiem  
następujących odpowiedniości:  
(DOKALIZM!)

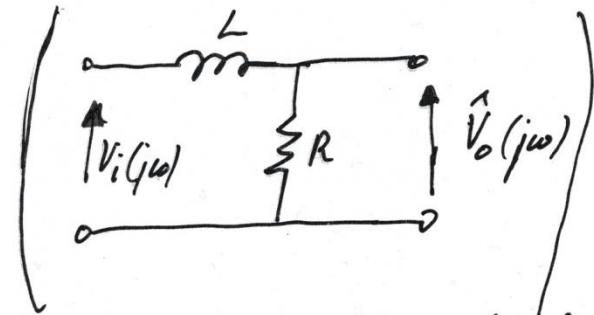
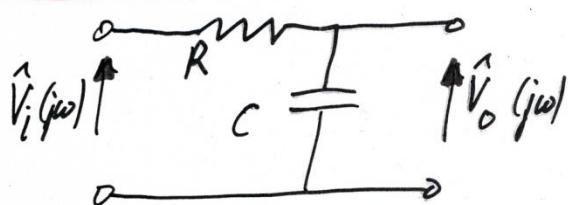


$$\hat{\epsilon}_{(s2)} \rightarrow \hat{I}_M, \quad \hat{U}_R \xrightarrow{(s2)} \hat{I}_R, \quad \hat{U}_L \xrightarrow{(s2)} \hat{I}_L, \quad \hat{U}_C \xrightarrow{(s2)} \hat{I}_C, \quad Z(j\omega) \rightarrow Y_{(s2)}$$

$$\omega_Q = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q_{row.} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 C R = \frac{R}{g} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

## Filtry dolno- i górnoprzepustowe (układy I-rzędu)

### 1<sup>o</sup> Układ dolnoprzepustowy



Bardzo zadziwiające się funkcji przenoszenia (transfer func.) w funkcji  $\omega$ .

$$T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Interesuje nas moduł i faza  $T(j\omega)$ .

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

gdzie  $\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$

- pulsacja charakterystyczna  
- "normalizacyjna"

Wzmocnienia napięciowe, prądowe i mocy b. ogólnie wyrażamy w skali decybelowej, dB

Def.:

$$A_{V(dB)} = 20 \lg |A_V| = 20 \lg \left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right| \text{ [dB]}$$

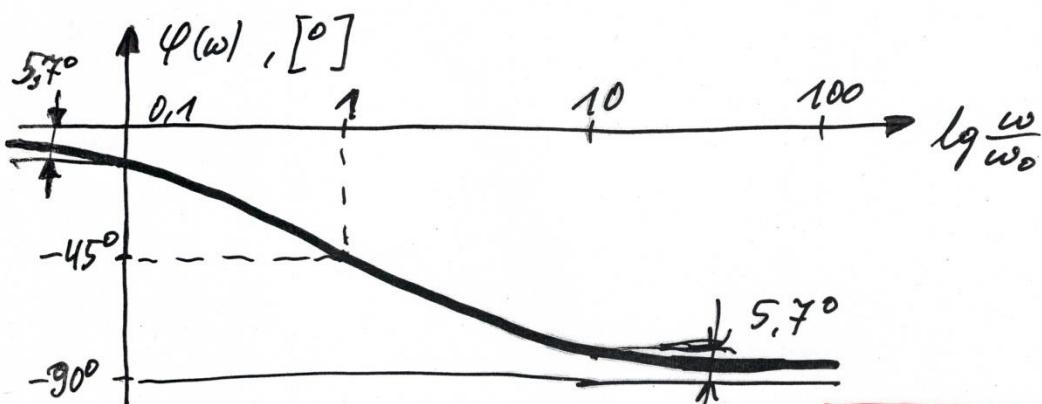
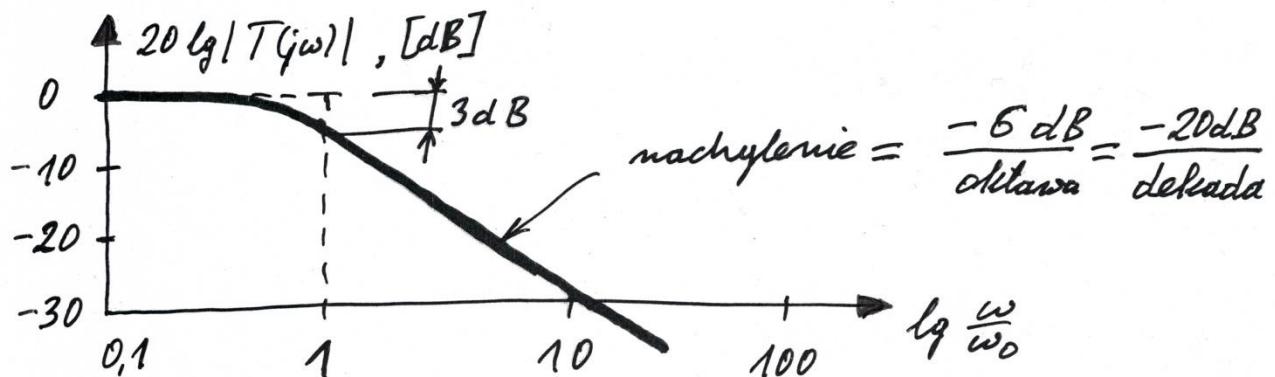
$$A_{I(dB)} = 20 \lg |A_I(j\omega)| = 20 \lg \left| \frac{I_o(j\omega)}{I_i(j\omega)} \right| \text{ [dB]}$$

$$A_P(dB) = 10 \lg \left| \frac{P_o}{P_i} \right| \text{ [dB]}$$

## Filtry dolno- i górnoprzepustowe c.d.:

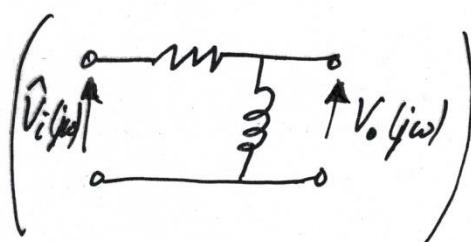
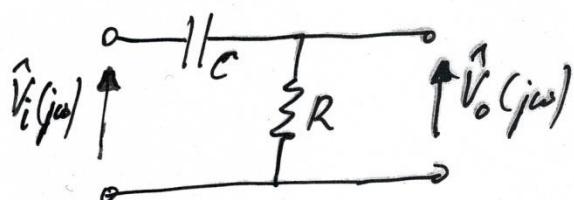
$$\underline{\omega \ll \omega_0} \quad (\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1) \Rightarrow |T(j\omega)| \approx 1 \rightarrow [0 \text{ dB}]$$

$$\underline{\omega \gg \omega_0} \quad (\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1) \Rightarrow |T(j\omega)| \approx \frac{\omega_0}{\omega}$$



$$\boxed{\omega_{3dB} = \omega_0}$$

## 2° Właściwość górnoprzepustowej



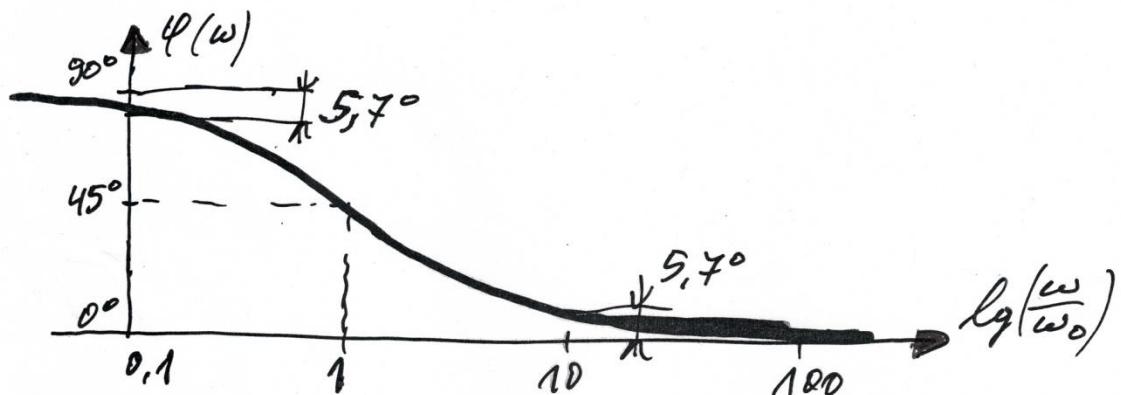
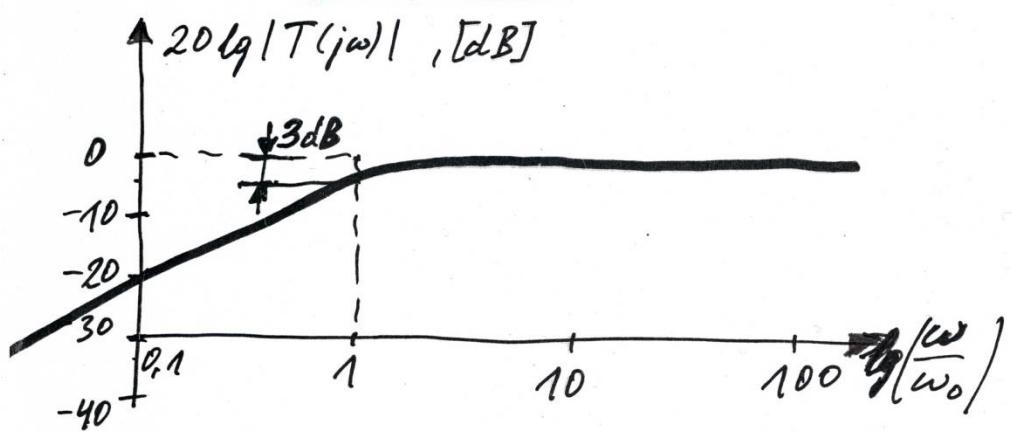
$$T(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 - j\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Filtry dolno- i górnoprzepustowe c.d.:

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0}{\omega})^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

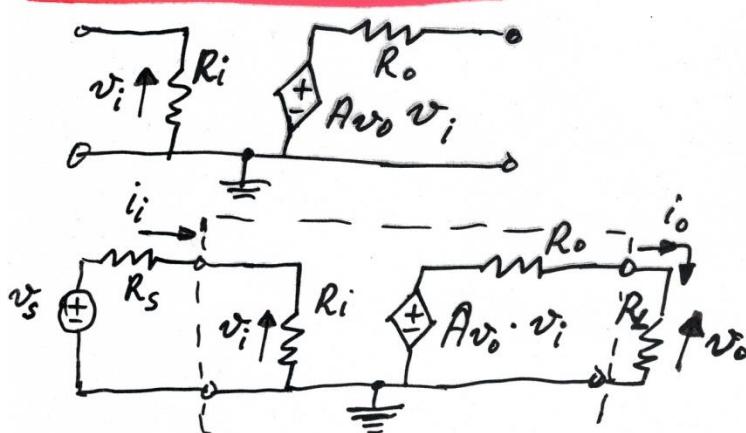
36



## WZMACNIACZE

Najprostsze model (reprezentacje) wzmacniaczy.

1° Wzm. napięciowy



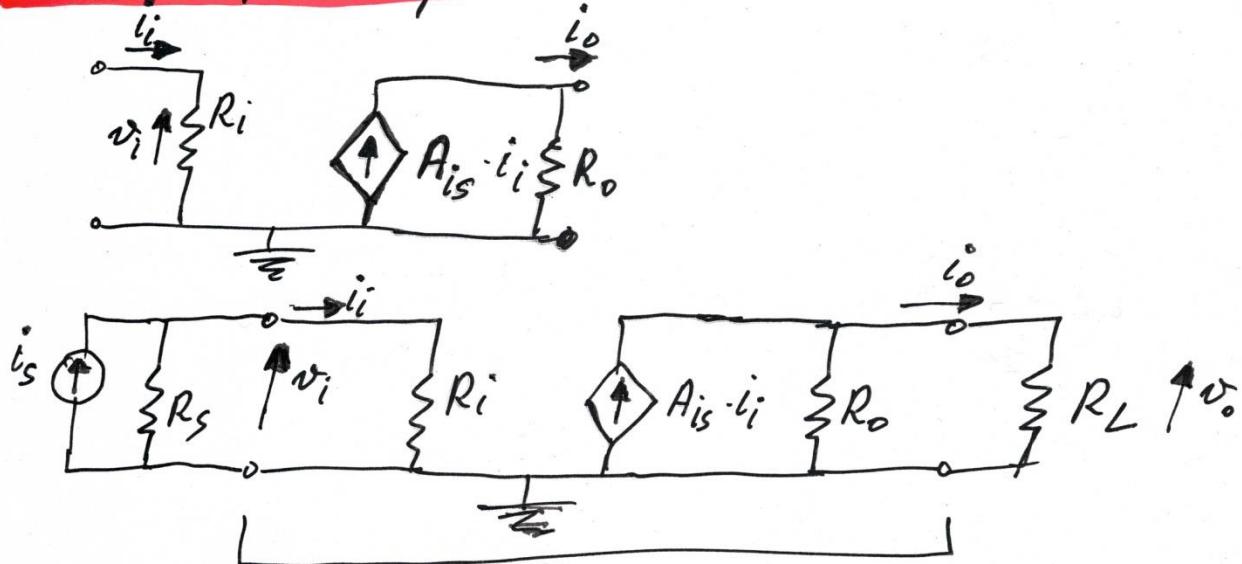
$$v_o = A_{vo} \cdot v_i \cdot \frac{R_L}{R_L + R_o}$$

$$A_{vo} \triangleq \frac{v_o}{v_i} = \frac{A_{vo} \cdot R_L}{R_L + R_o}$$

$$v_i = v_s \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s}$$

## Wzmacniacze c. d.:

### 2<sup>o</sup> Wzm. prądowy



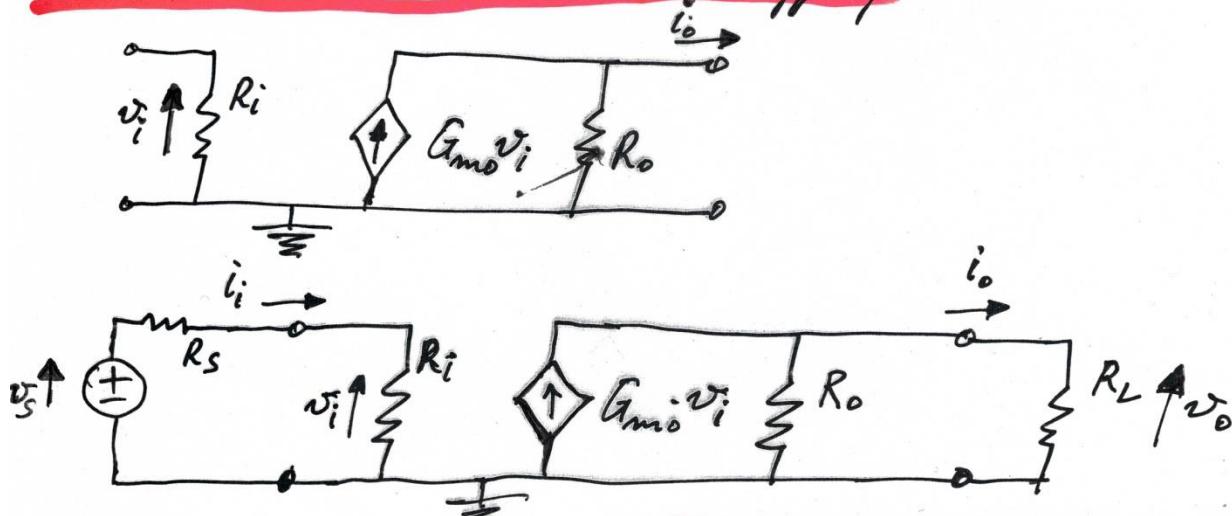
$$i_o = A_{is} \cdot i_i \frac{R_o}{R_o + R_L}$$

$$A_i \triangleq \frac{i_o}{i_i} = A_{is} \frac{R_o}{R_o + R_L}$$

$A_{is}$  - zwarcie wzmocnienie prądowe

$$i_i = i_s \frac{R_s}{R_s + R_i}$$

### 3<sup>o</sup> Wzm. transkonduktancjiowy



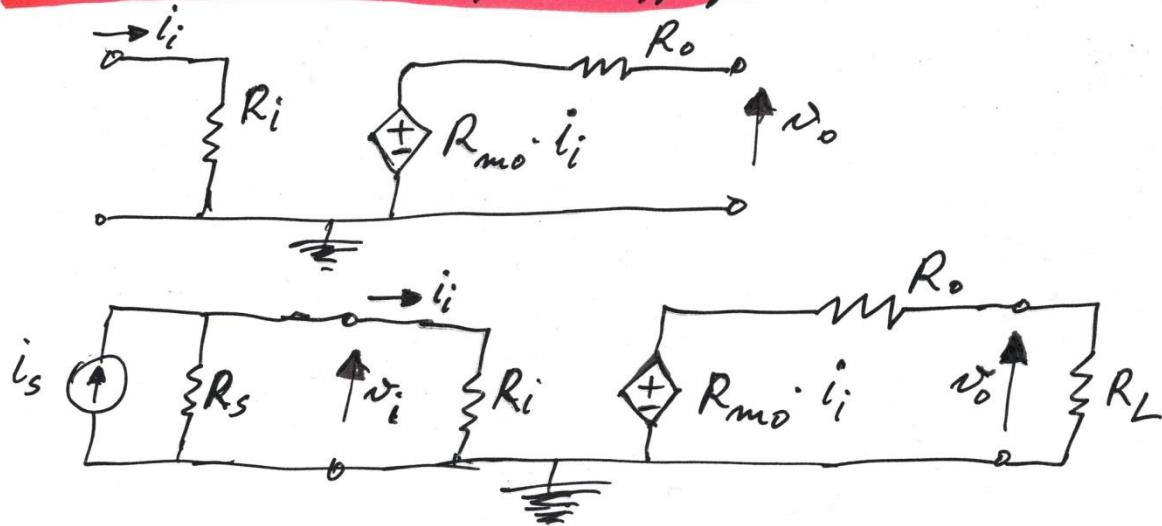
$$\frac{i_o}{v_s} = G_{m0} \frac{R_o}{R_o + R_L} \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s}$$

$$\frac{v_o}{v_s} = G_{m0} \cdot R_L \frac{R_o}{R_o + R_L} \frac{R_i}{R_i + R_s}$$

## Wzmacniacze c. d.:

### 4° Wzm. transresystancjny.

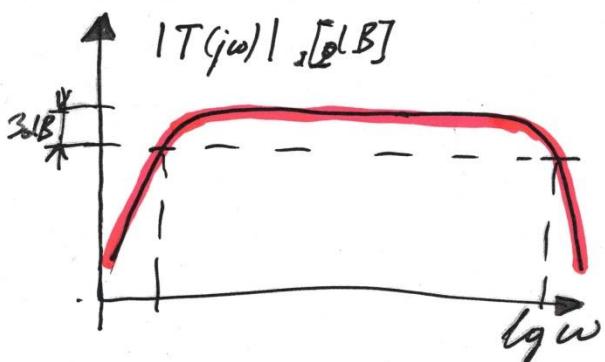
38.



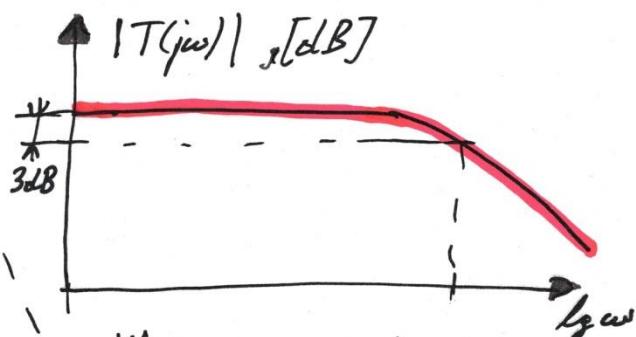
$$\frac{v_o}{i_i} = R_m \frac{R_L}{R_o + R_L}$$

$$\boxed{\frac{v_o}{i_s} = R_m \frac{R_L}{R_o + R_L} \frac{R_s}{R_s + R_i}}$$

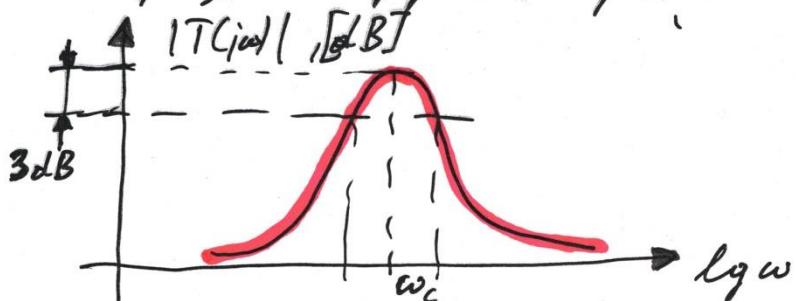
### Klasyfikacja wzm. ze względu na ch-kę wzbudzającą



Wzm. o spłaszczeniu pojemnościowym



Wzm. o spłaszczeniu bezpośrednim



Wzm. pasmowo-przepustowy; wzm. rezonansowy;  
wzm. selektywny.

## Charakterystyki częstotliwościowe wzmacniaczy w dziedzinie częstotliwości "s = jω"

$$A_V(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)}, \quad A_I = \frac{I_o(s)}{I_s(s)}$$

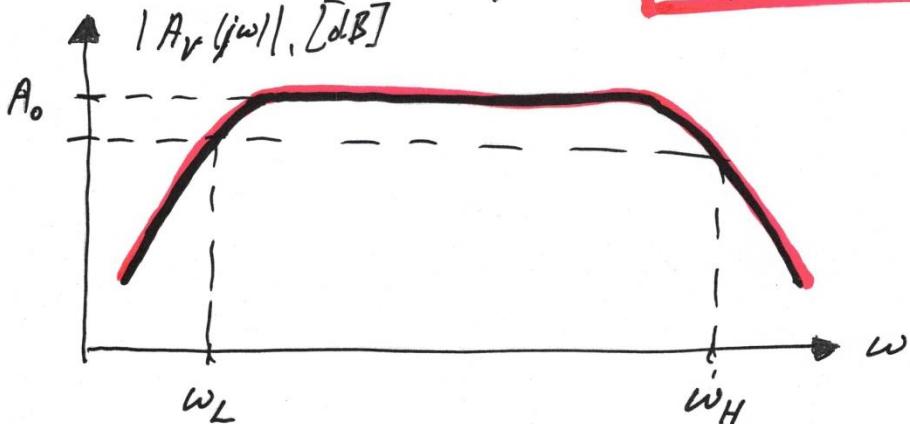
$$A_V = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0} \quad m \leq n$$

$$A_V(s) = K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

$\{z_1, z_2, z_3, \dots, z_m\}$  ← zera funkcji przenoszenia

$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  ← biegunki f. przenoszenia  
 $(z_i, p_k)$  w ogólnosci liczy zespolon

$$A_V(s) = A_V(j\omega) = |A_V(j\omega)| e^{j \operatorname{Arg} A_V(j\omega)}$$



Prawo:  $BW = \omega_H - \omega_L \approx \omega_H$  [ogolno]

Pole wzmacnienia:  $GB = A_0 \cdot (BW)$

$\omega_L$  - dolna częstotliwość 3-decybelowa

$\omega_H$  - górna częstotliwość 3-decybelowa.

Za przebieg ch-lui częstotliwościowej odpowiedzialne są pojemności sprzągające i formujące oraz pojemności i inercja nośników w tranzystorze.

