Université Libre de Bruxelles

INFO-F302
Informatique Fondamentale

Synthèse

Étudiants :
Hugo Callens

Enseignants :
E. Filiot

11 octobre 2023

Contents

1 Logique propositionnelle

1.1 Construction de formules

Le vocabulaire du langage de la logique propositionnelle est composé de :

1. de propositions x, y, z, ... ; ou X, Y, Z, ... ;
2. de deux constantes vrai ($\top$ ou 1) et faux ($\perp$ ou 0) ;
3. d'un ensemble de connecteurs logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
4. de paranthèses ( ).

1.2 Sémantique

Définition 1.1. Sémantique

La sémantique d'une formule est la valeur de vérité de cette formule. La valeur de vérité d'une formule Φ formée àpd propositions d'un ensemble X, évaluée avec la fonction d'interprétation V, est notée $[\![\Phi]\!]_V$. La fonction $[\![\Phi]\!]_V$ est définie par induction sur la syntaxe de Φ de la façon suivante :

- $[\![\top]\!]_V = 1$; $[\![\perp]\!]_V = 0$; $[\![x]\!]_V = V(x)$
- $[\![\neg\Phi]\!]_V = 1 - [\![\Phi]\!]_V$
- $[\![\Phi_1 \vee \Phi_2]\!]_V = \max([\![\Phi_1]\!]_V, [\![\Phi_2]\!]_V)$
- $[\![\Phi_1 \wedge \Phi_2]\!]_V = \min([\![\Phi_1]\!]_V, [\![\Phi_2]\!]_V)$
- $[\![\Phi_1 \leftarrow \Phi_2]\!]_V = \max(1 - [\![\Phi_1]\!]_V, [\![\Phi_2]\!]_V)$
- $[\![\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2]\!]_V = \min([\![\Phi_1 \rightarrow \Phi_2]\!]_V, [\![\Phi_2 \rightarrow \Phi_1]\!]_V)$

Nous notons $V \vDash \Phi \Leftrightarrow [\![\Phi]\!]_V = 1$ soit "V satisfait Φ."

L'information contenue dans la définition est souvent représentée sous forme de table de verité :

Φ_1	Φ_2	$\Phi_1 \vee \Phi_2$	$\Phi_1 \wedge \Phi_2$	$\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$	$\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Dans l'implication suivante : $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$, la cas où Φ_1 est faux ne nous intéresse pas. Dans ce cas, l'implication est toujours vraie.

1.3 Validité et Stabilité

1.3.1 Définitions

Définition 1.2. Formule propositionnelle satisfaisable

Une formule propositionnelle Φ est **satisfaisable** $\Leftrightarrow$ il existe une fonction d'interprétation V pour les propositions de Φ, telle que $V \vDash \Phi$.

Définition 1.3. Formule propositionnelle valide

Une formule propositionnelle Φ est **valide** $\Leftrightarrow$ pour toute fonction d'interprétation V pour les propositions de Φ, $V \vDash \Phi$.

1.3.2 Conséquence logique

Définition 1.4. Conséquence Logique

Soit $\Phi_1, ..., \Phi_n, \Phi$ des formules. On dira que Φ est une **conséquence logique** de $\Phi_1, ..., \Phi_n$, noté $\Phi_1, ..., \Phi_n \vDash \Phi$, si $(\Phi_1 \wedge ... \wedge \Phi_n) \to \Phi$ est valide.

1.3.3 Equivalence

Définition 1.5. Formules équivalentes

Deux formules, Φ et Ψ, sont **équivalentes** si la formule $\Phi \leftrightarrow \Psi$ est valide. On notera $\Phi \equiv \Psi$.

Pour toutes formules Φ_1, Φ_2, Φ_3 :

- $\neg\neg\Phi_1 \equiv \Phi_1$
- $\neg(\Phi_1 \wedge \Phi_2) \equiv (\neg\Phi_1 \vee \neg\Phi_2)$
- $\neg(\Phi_1 \vee \Phi_2) \equiv (\neg\Phi_1 \wedge \neg\Phi_2)$
- $\Phi_1 \wedge (\Phi_2 \vee \Phi_3) \equiv (\Phi_1 \wedge \Phi_2) \vee (\Phi_1 \wedge \Phi_3)$
- $\Phi_1 \vee (\Phi_2 \wedge \Phi_3) \equiv (\Phi_1 \vee \Phi_2) \wedge (\Phi_1 \vee \Phi_3)$
- $\Phi_1 \to \Phi_2 \equiv (\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$

1.3.4 Lien entre satisfaisabilité et validité

Théorème 1.1. Lien entre satisfaisabilité et validité

Une formule Φ est valide $\Leftrightarrow$ $\neg\Phi$ est insatisfaisable.

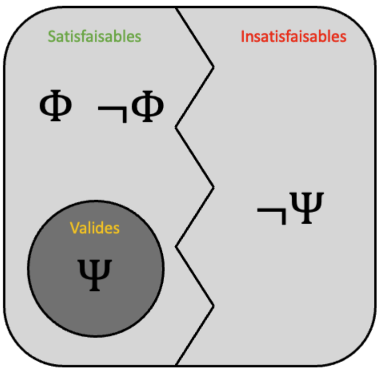

FIGURE 1.1 – Lien entre satisfaisabilité et validité

1.3.5 Tableaux sémantiques

Définition 1.6. Littéral

Un littéral est une proposition x ou la négation d'une proposition $\neg x$.

La méthode des tableaux sémantiques est un algorithme pour tester la satisfaisabilité d'une formule. Elle consiste à construire un arbre dont les noeuds sont des formules et les feuilles sont des littéraux. On construit l'arbre de la façon suivante :

- On place la formule à tester à la racine de l'arbre.
- On applique les règles suivantes jusqu'à ce que l'arbre soit complet :
  - Si la formule à tester est une constante, on arrête.
  - Si la formule à tester est une conjonction, on ajoute les deux conjoncteurs comme fils de la formule à tester.
  - Si la formule à tester est une disjonction, on ajoute un fils avec le premier disjoncteur et un autre fils avec le deuxième disjoncteur.
  - Si la formule à tester est une implication, on ajoute un fils avec la négation de l'antécédent et un autre fils avec le conséquent.
  - Si la formule à tester est une équivalence, on ajoute un fils avec la négation de la première formule et un autre fils avec la deuxième formule.
  - Si la formule à tester est une négation, on ajoute un fils avec la négation de la formule à tester.

Remarque: algorithme généré par copilot.

2 Déduction naturelle

Définition 2.1. Déduction naturelle

La déduction naturelle est un système de preuve pour la logique propositionnelle. Il est composé de règles d'inférence qui permettent de déduire de nouvelles formules à partir de formules existantes. Une preuve est un arbre dont les noeuds sont des formules et les feuilles sont des axiomes. Une preuve est correcte si elle respecte les règles d'inférence. Une preuve est complète si elle contient toutes les formules qui sont des conséquences logiques des axiomes.

2.1 Règles pour la conjonction

- Règle d'introduction :

$$\frac{\Phi \quad \Psi}{\Phi \wedge \Psi} \bigwedge i$$

- Règle d'élimination :

$$\frac{\Phi \wedge \Psi}{\Phi} \bigwedge e_1 \quad \frac{\Phi \wedge \Psi}{\Psi} \bigwedge e_2$$

Exemple: La règle d'introduction se lit : si j'ai une preuve de Φ et une preuve de Ψ, alors j'ai une preuve de $\Phi \wedge \Psi$.

2.2 Règles pour la double négation

- Règle d'introduction :

$$\frac{\Phi}{\neg\neg\Phi} \neg\neg i$$

- Règle d'élimination :

$$\frac{\neg\neg\Phi}{\Phi} \neg\neg e$$

2.3 Elimination de l'implication : Modus Ponens

Règle d'élimination :

$$\frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi} \rightarrow_{\text{MP}} (\text{ou} \rightarrow_e)$$

Exemple:

1. Φ : "Il pleut"
2. Ψ : "S'il pleut, "je prends mon parapluie"
3. Alors on en déduit que "je prends mon parapluie"

En contraposition, nous avons le Modus Tollens :

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi \quad \neg\Psi}{\neg\Phi} \rightarrow_{\text{MT}}$$

Exemple:

1. Φ : "s'il pleut, alors la route est mouillée"
2. Ψ : "la route n'est pas mouillée"
3. Alors on en déduit que "il ne pleut pas"

2.4 Règle pour l'introduction de l'implication

$$\cfrac{\begin{array}{l}\Phi \text{hyp.} \\ \ldots \\ \Psi \text{fin hyp.}\end{array}}{\Phi \to \Psi} \to_i$$

Lorsqu'on posera une hypoèse, on indentera l'hypothèse et toutes les lignes de la sous-preuve, jusqu'à la fermeture d'hypothèse.

Exemple: Ici, on va voir un exemple de ce qu'on a vu jusque maintenant :
On veut démontrer : $t \vdash (t \to p) \to (q \to (s \to p))$
Ici le prémisse est "t est vrai", le prémisse sera toujours ce qui se trouve à gauche de la déduction.

1.	t	prémisse.
2.	$t \to p$	hyp_1.
3.	q	hyp_2.
4.	$s \to p$	hyp_3.
5.	p	MP(1,2),fin hyp_3.
6.	$s \to p$	$\to_i$ (4,5),fin hyp_2.
7.	$q \to (s \to p)$	$\to_i$ (3,6),fin hyp_1.
8.	$(t \to p) \to (q \to (s \to p))$	$\to_i$ (2,7).

Nous pouvons également prouver des formules sans prémisse comme suit :

1.	p	hyp
2.	$\neg\neg p$	$\neg\neg_i(1)$, fin hyp.
3.	$p \to \neg\neg p$	$\to_i (1, 2)$.

On a établit que $\vdash p \to \neg\neg p$.

Remarque: Les formules Φ telles que : $\vdash \Phi$ sont appelées des théorèmes.

2.5 Règle pour l'ouverture et la fermeture d'hypothèses

- toute hypothèse introduite doit être fermée.
- on ne peut jamais fermer deux hypothèses en même temps.
- Une fois une hypothèse fermée, on ne peut pas utilsier les formules déduites entre l'ouverture et la fermeture de cette hypothèse.

2.6 Règle pour l'introduction de la disjonction

$$\frac{\Phi}{\Phi \vee \Psi} \vee_{i_2} \qquad \frac{\Psi}{\Phi \vee \Psi} \vee_{i_2}$$

2.7 Elimination de la disjonction

$$\cfrac{\Psi_1 \vee \Psi_2 \quad \begin{array}{l}\Psi_1\text{hyp.}\\ \dots\\ \Phi\text{fin hyp.}\end{array} \quad \begin{array}{l}\Psi_2\text{hyp.}\\ \dots\\ \Phi\text{fin hyp.}\end{array}}{\Phi}\vee_e$$

Exemple: Supposons que les faits suivants soient vrais :

1. si ma note d'examen est excellente, j'irai boire un verre.
2. si ma note d'examen est bonne, j'irai boire un verre.
3. ma note sera excellente ou bonne.

Alors je peux en déduire que j'irai boire un verre.

Ici aussi, on ne peut pas utiliser l'hypothèse temporaire faite pour l'autre cas. (sauf si elle a été établie avant)

2.8 Règle de copie

$$\frac{\Phi}{\Phi}\text{copie}$$

2.9 Règle pour la négation

Les contradictions sont des formules de la forme :

$$\neg\Phi \wedge \Phi \quad \text{ou} \quad \neg\Phi \wedge \neg\Phi$$

Toutes les contradictions sont logiquement équivalentes à la formule $\bot$. (rappel : $\bot$ est une formule qui est toujours fausse)
Le fait que l'on peut tout déduire à partir d'une contradiction est formalisé par la règle suivante :

$$\frac{\bot}{\Phi}\bot_e$$

Le fait que $\bot$ représente une contradiction est formalisé par la règle suivante :

$$\frac{\Phi \quad \neg\Phi}{\bot}\neg_e$$

Afin d'introduire une négation, supposons que l'on fasse une hypothèse et que l'on arrive à déduire une contradiction, dans ce cas, l'hypothèse est fausse. Ceci est formaisé par la règle suivante :

$$\cfrac{\begin{array}{l}\Phi \quad \text{hyp.}\\ \dots\\ \bot\text{fin hyp.}\end{array}}{\neg\Phi}\neg_i$$

2.10 Règles pour l'équivalence

$$\frac{\Phi_1 \to \Phi_2 \quad \Phi_2 \to \Phi_1}{\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2}\leftrightarrow_i$$

$$\frac{\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2}{\Phi_1 \to \Phi_2}\leftrightarrow_{e_1} \qquad \frac{\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2}{\Phi_2 \to \Phi_1}\leftrightarrow_{e_2}$$

2.11 Règles dérivées

Il existe de nombreuses formules dérivées qui peuvent s'obtenir à partir des autres règles vues plus haut. (à voir si beaucoup utilisée au TP, si oui, ajouter : MT,RAA,LEM)

2.12 Théorèmes

Définition 2.2. adéquation

Pour tout $\Psi_1, ..., \Psi_n, \Psi$, si $\Psi_1, ..., \Psi_n \vdash \Psi$ alors $\Psi_1, ..., \Psi_n \vDash \Psi$.

Définition 2.3. complétude

Pour tout $\Psi_1, ..., \Psi_n, \Psi$, si $\Psi_1, ..., \Psi_n \vDash \Psi$ alors $\Psi_1, ..., \Psi_n \vdash \Psi$.

2.13 Démontrer une implication

Il existe deux méthodes pour démontrer une implication $(A \rightarrow B)$:

1. On suppose A et on en déduit B.
2. On suppose non B et on en déduit non A.

2.14 Démontrer une équivalence

Il existe deux méthodes pour démontrer une équivalence $(A \leftrightarrow B)$:

1. On suppose A et on en déduit B et réciproquement on suppose B et on en déduit A.
2. On prouve une chaîne d'équivalences.

2.15 Preuve par cas

Ce type de preuve repose sur une généralisation de la règle $\vee_e$: si on sait qu'on est soit dans le cas A_1 soit dans le cas A_n, et que pout tout $i \in \{1, ..., n\}$, on peut démontrer une propriété P, alors c'est que P est vraie.

2.16 Preuve par contradiction

On veut démontrer une propriété P. On suppose son contraire $\neg P$ et on en déduit une contradiction. On en déduit que P est vraie.

Remarque: Cette partie du cours nécessite de prendre le temps de bien comprendre les exemples donnés dans le cours ainsi que les exercices vus au TP.