

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

## 华南理工大学期末考试

### 《线性代数与解析几何》(A)试卷(16-17年度第1学期)

- 注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;  
2. 所有答案请直接答在试卷上;  
3. 考试形式: 闭卷;  
4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评卷人									

#### 一、(15分) 填空题.

1. 设  $\alpha_1 = (2, -1, 0, 5)$ ,  $\alpha_2 = (-4, -2, 3, 0)$ ,  $\alpha_3 = (-1, 0, 1, k)$ ,  $\alpha_4 = (-1, 0, 2, 1)$ , 则当  $k = -\frac{5}{13}$  时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

2. 设  $A$  为  $m$  阶方阵,  $B$  为  $n$  阶方阵,  $|A| = a$ ,  $|B| = b$ , 分块矩阵  $C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ , 则  $|C| = (-1)^{mn} ab$ .

3. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $n \geq 2$ , 则  $A^n - 2A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此题难, 大多数元素正确时酌情给分

4. 设 4 阶方阵  $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ ,  $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  均为 4 维列向量, 且  $|A| = 4$ ,  $|B| = 1$ , 则  $|A + B| = 40$ .

5. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + (1 - k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$ , 则二次型  $f$  为 正定时  $k$  的取值范围是  $-1 < k < 0$ . 只算出  $-1 < k$  或  $k < 0$  酌情给分

#### 二、(15分) 选择题:

1. 设  $A$  是 2 阶可逆方阵, 若  $|\lambda A| = 4|A|$ , 则必有 ( D ).

$$(A) \lambda = \pm 1, \quad (B) \lambda = 4, \quad (C) \lambda = \pm \sqrt{2}, \quad (D) \lambda = \pm 2$$

2. 矩阵  $A$  一个  $r$  级子式不为零, 且有一个  $r + 1$  级子式等于零, 则  $r(A)$  一定 ( A ).

$$(A) \geq r, \quad (B) < r, \quad (C) = r, \quad (D) = r + 1.$$

3. 设 $A$ 为 $n$ 可逆方阵,  $\lambda$ 为 $A$ 的一个特征值, 则 $A^*$ 的特征值之一是( B ).

$$(A) \lambda^{-1}|A|^n, \quad (B) \lambda^{-1}|A|, \quad (C) \lambda|A|, \quad (D) \lambda|A|^n.$$

4. 已知 $\beta_1, \beta_2$ 是非齐次方程组 $AX = b$ 的两个不同的解,  $\alpha_1, \alpha_2$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 设 $k_1, k_2$ 为数域 $P$ 中的任意数, 则 $AX = b$ 的通解为( B ).

$$(A) k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \quad (B) k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

$$(C) k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \quad (D) k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}.$$

5.  $m$ 阶可逆方阵 $P$ 和 $n$ 阶可逆方阵 $Q$ , 使得 $A = PBQ$ 是 $A$ 与 $B$  ( C )的充分必要条件.

(A) 相似 (B) 合同 (C) 等价 (D) 正交相似

三、(8分)计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & x_3 + 1 & \cdots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & x_3^2 + x_3 & \cdots & x_n^2 + x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & x_3^{n-1} + x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (+4分)$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \quad (+4分)$$

四、(15分)实数 $\lambda$ 取何值时, 线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2. \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多个解? 若有唯一解求出解; 有无穷多个解时求出通解.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{aligned} \quad (+5\text{分})$$

(1) 当 $D \neq 0$ , 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解。

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1)^2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1)^2 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1)^2, \quad \text{得} \begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{\lambda+2} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{\lambda+2} \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{\lambda+2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{此时的唯一解是: } (x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{-2}{\lambda+2}, \frac{-2}{\lambda+2}, \frac{-2}{\lambda+2} \right) \quad (+3\text{分})$$

(2) 当 $\lambda = -2$ 时,

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

$r(A) < r(\tilde{A})$ , 此时方程组无解 (+3分)

(3) 当 $\lambda = 1$ 时,

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r(A) = r(\tilde{A}) = 1 < 3$ , 此时方程组有无穷多个解。

$$\text{由 } x_1 + x_2 + x_3 = -2, \quad \text{得} \begin{cases} x_1 = -k_1 - k_2 - 2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \end{cases}$$

$$\text{通解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 是任意常数} \quad (+4\text{分})$$

五、(15 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 求由基 $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, 1, -1)$ ,  $\varepsilon_3 = (1, -1, 1)$ 到基 $\eta_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\eta_2 = (2, 1, 3)$ ,  $\eta_3 = (0, 1, -1)$ 的过渡矩阵, 并求向量 $\xi = (3, 5, 0)$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 下的坐标.

$$(\varepsilon_1^T \quad \varepsilon_2^T \quad \varepsilon_3^T \mid \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \eta_3^T) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{过渡矩阵 } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (8\text{分})$$

$$\text{令 } \xi = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3$$

$$\tilde{A} = (\eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T \mid \xi^T) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad (7\text{分})$$

$$\text{得 } x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3$$

$\xi$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 下的坐标是 $(1, 1, 3)$

此题有不同的计算方法

六、(10分) 求过点 $(1, 0, -1)$ , 且平行于向量 $\alpha = 2i + j + k$ 和 $\beta = i - j$ 的平面方程.

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \quad (+7\text{分})$$

平面的点法式方程:  $(x-1) + (y-0) - 3(z+1) = 0$

$$\text{即: } x + y - 3z - 4 = 0 \quad (+3\text{分})$$

七、(15 分) 设3阶实对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,

(1) 求矩阵  $A$  的特征值、特征向量; (2) 求正交矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT$  为对角形.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 6 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)^2 (\lambda + 2) \stackrel{\text{※}}{=} 0 \quad (+5\text{分})$$

$A$  的特征值:  $\lambda = -2, \lambda = 7$  (2重)

对  $\lambda = -2$ :

$$-2E - A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{得对应 } \lambda = -2 \text{ 的特征向量 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

对  $\lambda = 7$ : (+5分)

$$7E - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{得对应 } \lambda = 7 \text{ 的特征向量 } \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

对特征向量  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$  作施密特正交化:

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{18}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (+3\text{分})$$

$$\text{对 } \alpha_1, \eta_2, \eta_3 \text{ 单位化: } \gamma_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\eta_2\|} \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\|\eta_3\|} \eta_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{得到正交矩阵 } T = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{正交矩阵 } T \text{ 的答案有无穷多种, 改卷时要注意}$$

$$\text{使得} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (+2\text{分})$$

八、(7 分) 证明: 与齐次线性方程组  $AX = 0$  的基础解系等价的线性无关的向量组仍然是该齐次线性方程组的基础解系.

证: 设  $AX = 0$  的基础解系为  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ , 其中  $r = r(A)$ .

又设线性无关向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  等价.

由于两个向量组均线性无关, 所以  $s = n - r$ .

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  可由基础解系  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  线性表示, 因此  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  每个向量都是  $AX = 0$  的解.

对于  $AX = 0$  的任一解  $\eta$ ,  $\eta$  可由  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  线性表示, 而  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  线性表示, 则  $\eta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  线性表示, 而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  线性无关, 所以由基础解系的定义知,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  也是基础解系.