参考答案.

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何》(A)试卷(14-15年度第1学期)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 所有答案请直接答在试卷上;

3. 考试形式：闭卷;

4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

座位号________ 线 专业________ 学院________ (密封线内不答题) 封 学号________ 密 姓名________

一、(15分) 填空题.

1. 设A为n阶矩阵, 且$|A|=2$, 则$||A|A^{-1}|=$ $\underline{2^{n-1}}$.

2. 已知向量组$\alpha_1=(2,1,3,-1)$, $\alpha_2=(3,-1,2,0)$, $\alpha_3=(1,3,4,-2)$, $\alpha_4=(4,-3,1,1)$, 则向量组的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$ $\underline{2}$.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, 则$A$ 的特征值为 $\underline{-1,1,1}$.

4. 若矩阵A 相似于$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则$|A^{-1}|^3=$ $\underline{-\frac{1}{8}}$.

5. 已知直线的普通方程为$\begin{cases}2x-3y-z+4=0,\\4x-6y+5z-1=0.\end{cases}$ 则该直线的点向式方程为

$\frac{x}{-21}=\frac{y-\frac{19}{21}}{-14}=\frac{z-\frac{9}{7}}{0}$. 或 $\frac{x}{3}=\frac{y-\frac{19}{21}}{2}=\frac{z-\frac{9}{7}}{0}$ (注：点(x_0,y_0,z_0)取法不唯一，答案不唯一)

二、(15分) 选择题:

1. 设A,B是n阶方阵, 则必有(B).

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $|AB|=|BA|$

(C) $AB=BA$ (D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

2. 矩阵A的秩$\geq r$,则(C).

(A) A有一个$r+1$级子式不为零

(B) A的所有$r+1$级子式不为零

(C) A有一个r级子式不为零

(D) A有一个r级子式不为零, 所有$r+1$级子式全为零

3. 设A,B为n阶矩阵, A^*,B^*分别是A,B的伴随矩阵,分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 则$C$的伴随矩阵$C^*=$(D).

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

4. 设5阶实对称矩阵A 的特征值为0, 1, 2, 3, 4, 则A的秩$r(A)=$(C).

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5

5. 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_1x_3$是正定的, 则$t$的取值范围是(A).

(A) $-2<t<2$ (B) $0<t<2$ (C) $-2<t<0$ (D) t为任何实数

三、 (8分)计算行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & a+b_1 \end{vmatrix}.$$

$$= aD_{n-1} + b_n$$

$$= a^2 D_{n-2} + ab_{n-1} + b_n$$

$$= \cdots$$

$$= a^n + a^{n-1}b_1 + a^{n-2}b_2 + \cdots + a_1 b_{n-1} + b_n$$

四、 (16分)实数λ 取何值时，线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+(\lambda^2+1)x_2+2x_3=\lambda, \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2\lambda+1)x_3=0, \\ x_1+(2\lambda+1)x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多个解? 若有唯一解求出解; 有无穷多个解时求出通解.

解：$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda^2+1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda+1 & 0 \\ 1 & 2\lambda+1 & 2 & 2 \end{array}\right)$， $D=|A|=\lambda(\lambda-2)$ $\begin{cases} D_1=2-\lambda \\ D_2=\lambda-2 \\ D_3=0 \end{cases}$

1) 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq2$时，有唯一解 6， $\begin{cases} x_1=\frac{-(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)}=-\frac{1}{\lambda}, \\ x_2=\frac{(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)}=+\frac{1}{\lambda}, \\ x_3=0/\lambda(\lambda-2)=0. \end{cases}$ $(-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda},0)$

2) 当$\lambda=0$时 5

$\because \tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\therefore r(A)=2\neq3=r(\tilde{A})$，无解.

3) 当$\lambda=2$时 5 ~~$r(A)=r(\tilde{A})=2$~~

$\because \tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore r(A)=r(\tilde{A})$,

方程组有无穷多个解，通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}，k任意$$

$(-11, 1, 4)$

$\begin{cases} x_3=8x_2-4 \\ x_1=-21x_2+10 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=8x_2 \\ x_1=-21x_2 \end{cases}$

$k(-\frac{21}{8},\frac{1}{8},1)$

$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ +

$(10,0,-4)$

五、(15 分) 设向量组$\alpha_1=(1,0,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$, $\alpha_3=(1,3,5)^T$不能由向量组$\beta_1=(1,1,1)^T$, $\beta_2=(1,2,3)^T$, $\beta_3=(3,4,a)^T$线性表出.

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组;

(2) 求a的值;

(3) 将β_1,β_2,β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示出来.

解: 1) 令 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$\because |A|=1\neq 0 \Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组.

2) 由于4个3维~~向量~~ $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_i\ (i=1,2,3)$ 线性相关.

若β_1,β_2,β_3线性无关, 则α_i可由β_1,β_2,β_3线性表出, 与题设矛盾.

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关.

故 $|(\beta_1,\beta_2,\beta_3)|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0 \Rightarrow a=5$

3) 令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3\\ \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2\\ \beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3\end{cases}$

六、(10分)求解矩阵方程: $2X = AX + B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解: $(2E-A)X = B$

$|2E-A| = 3 \neq 0$ ∴ $2E-A$ 可逆

$\therefore X = (2E-A)^{-1}B$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

七、(15 分) 设3阶实矩阵$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$有3个线性无关的特征向量.

(1) 求矩阵A的特征值以及x的值;

(2) 求出矩阵A的特征向量;

(3) 求满秩矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角形.

解: 1) $|\lambda E-A| = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$.

因为A有3个无关的特征向量, 所以对应二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$,

A有两个线性无关的特征向量.

$\therefore r(E-A) = 1$

$$E-A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-x&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&x+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

(2) 当 $\lambda=1$ 时，由 $E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=-2$ 时. $2E-A=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&-3&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 $\lambda_3=-2$ 对应特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

(3) 令 $P=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$.

八、(6 分) 设n阶实方阵A为可逆矩阵，将A 的第i行与第j行互换后得到的矩阵记为B, 证明为B可逆矩阵，并求AB^{-1}.

证：设将单位矩阵E的i,j行互换得到的初等矩阵记为$P(i,j)$.

则 $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$，故

$$B=P(i,j)A$$

$$\because |B|=|P(i,j)||A|=-|A|\neq 0$$

$\therefore B$可逆

且 $AB^{-1}=A\left(P(i,j)A\right)^{-1}$

$$=A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot P(i,j)^{-1}=P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$

或表示为：

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}&&&(i)&&(j)&\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\\\(i)\\\\(j)\\\\\\\end{array}\end{array}$$