Cálculo a uma variável – revisão

INF1604 – Análise Numérica

Prof. Hélio Lopes
lopes@inf.puc-rio.br
sala 408 RDC

Cálculo a uma variável – revisão

- Elementos da linguagem e da lógica matemática
- Números reais
- Seqüências de números reais
- Funções reais
- Continuidade e limites
- Derivada
- Aplicações de derivada

Elementos da linguagem e da lógica matemática

Se A, então B

é uma das formas de expressarmos proposições matemáticas. As letras A e B estão representando condições ou propriedades. Nesta proposição, a condição A, isto é, aquela que vem imediatamente após o *Se,* é chamada de *hipótese* e a condição B, que aparece imediatamente após o *então,* é chamada de *tese* da proposição.

Uma outra forma de expressarmos a proposição *Se A, então B* é por meio da notação

$$A \Longrightarrow B$$

que se lê *A implica B*. Daí esse tipo de proposição ser chamada uma *implicação.*

Elementos da linguagem e da lógica matemática

L1 *Uma proposição matemática só pode possuir um dentre os atributos* **verdadeira** *e* **falsa**

L2 *Se, ao admitirmos que uma proposição possui um determinado atributo* (**verdadeira** *ou* **falsa**) *chegarmos à contradição da regra* **L1**, *devemos concluir que o atributo correto é o outro* (**falsa** *ou* **verdadeira**).

Elementos da linguagem e da lógica matemática

um exemplo para uma proposição do tipo **Se** A, **então** B *é um objeto matemático que satisfaz a hipótese e a tese da proposição.*

um contra-exemplo para uma proposição do tipo **Se** A, **então** B *é um objeto matemático que satisfaz a hipótese e* ***não*** *satisfaz a tese da proposição.*

Elementos da linguagem e da lógica matemática

Uma proposição **Se** A, **então** B *é verdadeira exatamente quando não admite contra-exemplos*

Uma proposição **Se** A, **então** B *com a propriedade de que* **em todas as situações nas quais a hipótese é satisfeita tem-se que a tese também é satisfeita**, *é uma proposição verdadeira.*

Uma proposição **Se A, então B** *é falsa quando admite contra-exemplos.*

Elementos da linguagem e da lógica matemática

- *para provarmos que uma proposição é falsa, basta exibirmos um contra-exemplo,*
- *a apresentação de exemplos (mesmo que muitos) para uma proposição* **não** *é suficiente para provar que a mesma é verdadeira.*

- *para provarmos que uma proposição é verdadeira, devemos mostrar que* **em toda situação em que sua hipótese é satisfeita tem-se que sua tese também é satisfeita**, *ou, equivalentemente, devemos mostrar que a proposição não admite contra-exemplos.*

Elementos da linguagem e da lógica matemática

Em geral, se C e D são condições matemáticas, dizemos que:

um objeto matemático, x, *satisfaz a condição* "C *e* D", se x *satisfaz a condição* C e *também satisfaz a condição* D.

um objeto matemático, x, *satisfaz a condição* "C *ou* D", se x *satisfaz pelo menos uma das condições* C e D.

Elementos da linguagem e da lógica matemática

A recíproca de "*Se* A, *então* B"

A partir de uma proposição

$$P\text{: } Se\ A,\ então\ \ B$$

podemos construir uma nova proposição do mesmo tipo,

$$Q : Se\ B,\ então\ \ A$$

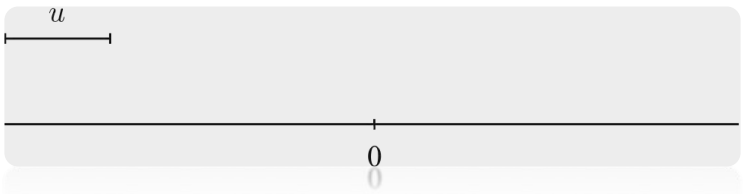
que é chamada a *recíproca* de P. Claramente a recíproca de Q é P, daí dizermos que P e Q são proposições recíprocas.

Uma proposição do tipo A **se, e somente se,** *B é verdadeira quando* **Se** A, **então** B *e sua recíproca,* **Se** B, **então** A, *são ambas verdadeiras.*

Números Reais

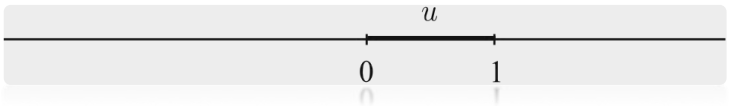
Seguindo então sua origem histórica, uma maneira de pensarmos os números reais positivos é considerá-los como sendo as medidas de comprimento de segmentos de reta. A partir daí, podemos identificar os números reais com os pontos de uma reta, que, com essa identificação, é denominada uma reta real.

Para isso, escolhemos um ponto da reta que associamos ao número real zero, denotado por 0, e um segmento de reta que convencionamos ter uma unidade de medida de comprimento. O ponto associado ao número 0 é chamado *origem da reta real* e o segmento escolhido é chamado de *segmento unitário.*



Números Reais

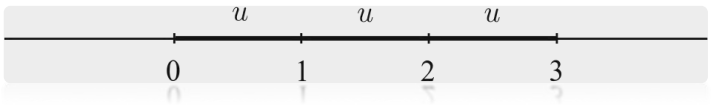
Colocando o segmento unitário, u, sobre a reta real de tal forma que um de seus extremos fique sobre a origem 0, temos que o outro extremo determina um ponto na reta real que identificamos com o número real 1.



Números Reais

A semi-reta cujo extremo é o ponto que representa o 0 e que contém o ponto que representa o 1 será chamada de semi-reta dos números positivos (ou, simplesmente, semi-reta positiva) e os números que são representados por pontos nesta semi-reta são chamados de números (reais) positivos.

Justapondo n cópias do segmento unitário, a partir do 0 na semi-reta positiva, obtemos o ponto que representa o número natural n.



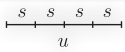
Números Reais

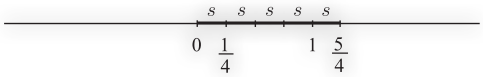
Lembremos que um número racional positivo, r, é um número que pode ser representado por uma razão

$$r = \frac{p}{q},$$

onde p e q são números inteiros positivos. Para determinarmos o ponto na reta real que corresponde ao número r procedemos da seguinte maneira:

- dividimos o segmento unitário em q segmentos de mesmo tamanho, obtendo um segmento s, que dizemos medir $\frac{1}{q}$ unidades de comprimento.
- justapondo, na semi-reta positiva a partir de 0, p cópias do segmento s, determinamos o ponto que corresponde ao número racional $r = \frac{p}{q}$.





Números Reais

Em geral, se P é um ponto da semi-reta positiva, então P corresponde a um número real positivo, a, e dizemos que o segmento de reta cujos pontos extremos são 0 e P tem a unidades de medida de comprimento. Reciprocamente, todo número real positivo a corresponde a um ponto da semi-reta positiva que determina, com a origem, um segmento que mede a unidades de comprimento.

Os demais pontos da reta real, isto é, os pontos da semi-reta que não contém o 1, são identificados com números reais que são chamados números negativos. Convencionando que o número 1 está localizado à direita do 0, temos que os números reais positivos são representados por pontos à direita de 0 e os negativos pelos pontos à sua esquerda.

Convencionamos também que se usarmos um determinado símbolo (por exemplo, x ou y) para denotar um número real associado a um ponto P, usaremos o mesmo símbolo precedido do sinal $-$ (por exemplo, $-x$ ou $-y$) para denotar o número real que está associado ao ponto Q, simétrico a P em relação à origem 0 (isto significa que P e Q não estão na mesma semi-reta e determinam, com a origem 0, dois segmentos de mesmo tamanho).

Números Reais

Em particular, se a denota um número real positivo, então $-a$ denota um número real negativo e, reciprocamente, se a denota um número negativo, então $-a$ denota um número positivo. O número $-a$ é chamado o *simétrico de* a.

Usaremos a expressão $a > 0$ para indicar que a denota um número positivo e a expressão $a < 0$ para indicar que a é um número negativo. Com essa notação podemos enunciar as propriedades acima da seguinte maneira:

Números Reais

Propriedades básicas

O conjunto de números reais admite duas operações, denominadas *soma* $(+)$ e *multiplicação ou produto* $(\cdot)$. As propriedades dessas operações que apresentamos a seguir serão chamadas de propriedades elementares: assumimos que elas são válidas sem demonstração (o que, formalmente, equivale a dizer que estamos falando dos axiomas dos números reais). As demais propriedades algébricas dos números reais são demonstradas a partir dessas propriedades elementares.

Números Reais

Comutatividade:	$a+b=b+a$ e $a\cdot b=b\cdot a$
Associatividade:	$a+(b+c)=(a+b)+c$ e $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributividade:	$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$
Elemento neutro:	$a+0=a$
Elemento identidade:	$1\cdot a=a$
Elemento simétrico:	$a+(-a)=0$
Elemento recíproco:	*Todo número real c, **diferente** de 0, tem um recíproco, isto é, um número real denotado por $\frac{1}{c}$ ou c^{-1} que satisfaz:* $c\cdot c^{-1}=1$
Operações com números positivos:	*Se a e b são números reais positivos, então a soma $a+b$, e o produto, ab, são números positivos.*

Números Reais

Se a, b e c são números reais, então

(1) $ab=0 \Rightarrow a=0$ *ou* $b=0$.
(2) $a+b=0 \Rightarrow b=-a$. *Em particular,* $-(-a)=a$.
(3) $-(a+b)=-a-b$.
(4) $(-a)b=-ab$. *Em particular,* $(-1)a=-a$.
(5) $(-a)(-b)=ab$.
(6) *Se a e b são negativos, então ab é negativo.*
(7) *Se a é positivo e b é negativo, então ab é negativo.*
(8) $a+b=a+c \Rightarrow b=c$.
(9) $ab=1 \Rightarrow b=\frac{1}{a}$.
(10) $ab=ac \Rightarrow a=0$ *ou* $b=c$.

Números Reais

A ordenação dos números reais

A última propriedade elementar, isto é, que a soma e o produto de números positivos resulta em números positivos, permite ordenar os números reais. Isto significa que podemos definir uma relação que permite comparar dois números reais quaisquer. Essa relação é chamada uma *relação de ordem*.

Definição: Dados dois números reais a e b, dizemos que a *é menor do que* b (notação $a < b$) se $b - a > 0$ (isto é, $b - a$ é um número positivo).

Se $a < b$ dizemos também que b *é maior do que* a e podemos usar a expressão $b > a$ (lê-se b maior do que a).

Números Reais

Se $a < b$ *e* $b < c$, *então* $a < c$.

a é menor do que b exatamente quando o número a é identificado com um ponto da reta real que se localiza a esquerda do ponto identificado com o número b.

Números Reais

Se a, b, c e d denotam números reais, então são válidas as propriedades abaixo:

(1) *Se $a < b$ e c é qualquer número real, então $a + c < b + c$.*
(2) *Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.*
(3) *Se $a > 0$, então $\frac{1}{a} > 0$.*
(4) *Se $a < 0$, então $\frac{1}{a} < 0$.*
(5) *Se $a < b$ e $c > 0$* (isto é, c é um número **positivo**), *então $ac < bc$.*
(6) *Se $a < b$ e $c < 0$* (isto é, c é um número **negativo**), *então $ac > bc$.*
(7) *Se $a \neq 0$, então $a^2 = a \cdot a > 0$.*

Números Reais

- Se a e b são números reais tais que $a \leq b$,

- os conjuntos

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}
\end{aligned}
$$

são chamados *intervalos abertos.*

Números Reais

- os conjuntos

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \end{aligned}$$

são chamados *intervalos fechados*.

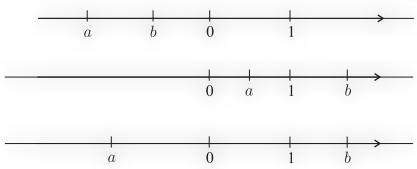
- os conjuntos

$$\begin{aligned} [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}$$

são chamados simplesmente *intervalos* (não são abertos e nem fechados; podem ser chamadas de intervalos *semi-abertos*).

Números Reais

Definição: Se a e b são números reais, dizemos que a *distância* entre a e b é o comprimento do intervalo cujos extremos são os pontos correspondentes da reta real.



a distância entre dois números a *e* b é $(b-a)$ *ou seu simétrico* $-(b-a)$, *dependendo se* $a < b$ *ou* $a > b$.

Números Reais

Definição: O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Números Reais

Propriedades do módulo de um número: *Se x, y e ε são números reais, então*

(1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(2) $|-x| = |x|$,
(3) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$,
(4) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$,
(5) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
(6) Se $\varepsilon \geq 0$, então $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$,
(7) Se $\varepsilon > 0$, então $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$,
(8) Se $\varepsilon \geq 0$, então $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq -\varepsilon$ ou $x \geq \varepsilon$,
(9) Se $\varepsilon \geq 0$, então $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\varepsilon$ ou $x > \varepsilon$.

ε

Números Reais

a distância entre dois números, a e b, é o valor absoluto da diferença $a - b$.

se x e y são números de um intervalo $[a, b]$, então a distância entre x e y é menor ou igual à distância entre a e b, isto é

$$|x - y| \leq |a - b| . \qquad (*)$$

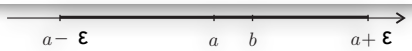
Números Reais

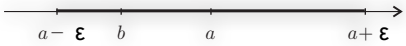
Aproximação de números reais

A noção de distância entre dois números é o que precisamos para introduzir os conceitos de aproximação de números e estimativas para erro de aproximação.

Definição: Seja a um número real. Se ε é um número positivo ($\varepsilon > 0$), dizemos que um número real b é uma *aproximação para a com erro menor do que ε* se a distância entre a e b é menor do que ε, isto é,

$$|a - b| < \varepsilon.$$





Números Reais

Expansão decimal de um número real

$$a = n_0, d_1 d_2 ... d_k ...$$

exatamente quando

$$a \in [n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + ... + \frac{d_k}{10^k}, n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + ... + \frac{d_k + 1}{10^k}),$$

ou, equivalentemente, quando a satisfaz as desigualdades

$$n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + ... + \frac{d_k}{10^k} \leq a < n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + ... + \frac{d_k + 1}{10^k} \qquad (*)$$

Números Reais

o truncamento de a na k-ésima casa decimal é o decimal exato

$$a_k = n_0, d_1 d_2 d_3 ... d_k$$

o truncamento de um número a na k-ésima casa decimal é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-k},

ou seja, se $a = n_0, d_1 d_2 d_3 ... d_k ...$ e $a_k = n_0, d_1 d_2 d_3 ... d_k$, então

$$|a - a_k| < 10^{-k}.$$

Números Reais

1. Se $a = 3,201556...$, então

- $a_1 = 3,2$ é o truncamento de a na primeira casa decimal e, portanto, é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-1}, isto é, $|a - 3,2| < 10^{-1}$.
- $a_2 = 3,20 = 3,2$ é o truncamento de a na segunda casa decimal e, portanto, é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-2}, isto é, $|a - 3,2| < 10^{-2}$ (observe que, nesse exemplo, $a_1 = a_2$).
- $a_4 = 3,2015$ é o truncamento de a na quarta casa decimal e, portanto, é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-4}, isto é, $|a - 3,2015| < 10^{-4}$.

Números Reais

A expansão decimal de um número irracional é infinita e não periódica.

A expansão decimal de um número racional é finita ou periódica.

Seqüências de Números Reais

Definição: Uma *seqüência* de números reais é um lista infinita de números ordenados pelos naturais, isto é, uma seqüência nos dá um número real que é o primeiro termo da seqüência, um número que é o 2° termo da seqüência e assim por diante.

Seqüências de Números Reais

Exemplos

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

é uma seqüência cujo primeiro termo é o número 1, o segundo é $\frac{1}{2}$, o terceiro é $\frac{1}{3}$ e em geral o n-ésimo termo é o número $\frac{1}{n}$.

2. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

é uma seqüência cujo n-ésimo termo é o número n, para $n \geq 1$.

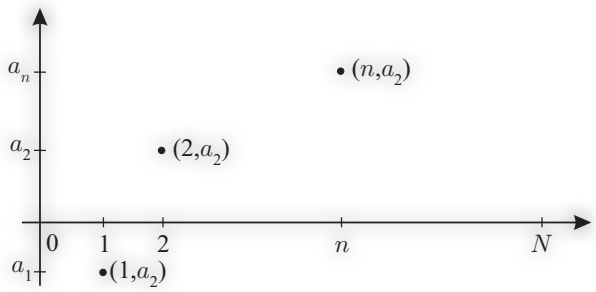
3. $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1, \ldots$

é uma seqüência cujo n-ésimo termo é 1 se n é ímpar, e 0 se n é par.

4. $2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$

é uma seqüência tal que qualquer termo é o número 2.

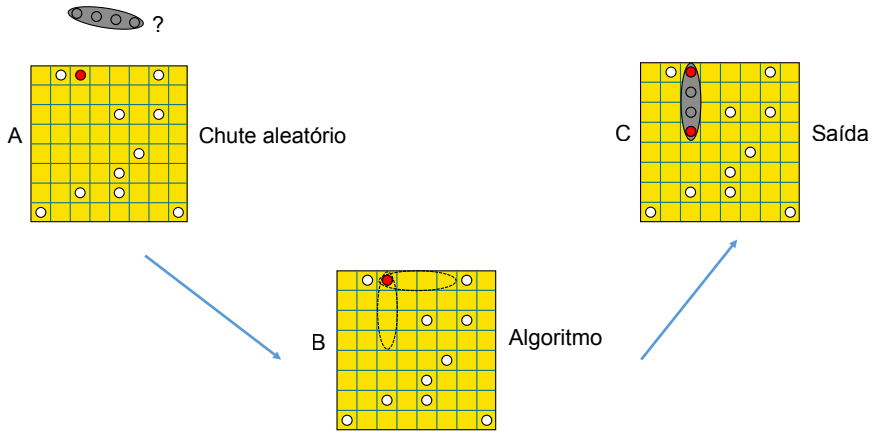
Seqüências de Números Reais



Seqüências de Números Reais

(

Simulação estocástica



Simulação estocástica

- A simulação estocástica visa imitar ou replicar o comportamento de sistemas complexos explorando a sua aleatoriedade para obter cenários das possíveis saídas desses sistemas.
- Devido a aleatoriedade envolvida, os métodos de simulação são também conhecidos como métodos de Monte Carlo.
- O nome "Monte Carlo" é uma referência ao famoso cassino em Mônaco e se tornou popular pelos pesquisadores Stanislaw Ulam, Enrico Fermi, John von Neumann, e Nicholas Metropolis, entre outros.
- A aleatoriedade e a repetição são as principais características dos métodos de Monte Carlo, que são análogas as atividades praticadas num cassino.

Simulação estocástica

- Os métodos de Monte Carlo são úteis para estudar:
  - Sistemas não determinísticos.
  - Sistemas determinísticos que são muito complicados para se modelar analiticamente.
  - Sistemas determinísticos com alta dimensionalidade que fazem com que os métodos de discretização do espaço se tornem impraticáveis computacionalmente (ex., Integração por Monte Carlo).

Simulação estocástica

- Os dois principais requisitos para os métodos de simulação de Monte Carlo são:
  - Possuir o conhecimento das distribuição de probabilidade das variáveis de entrada do sistema.
  - Possuir um gerador de números aleatórios para gerar cenários das variáveis de entrada do sistema.

Lopes, Frery, Vereda, Introdução à simulação estocástica usando R – SPOLM - 2008

Simulação estocástica

- Simulando um grande número de cenários, a distribuição de probabilidade de todas as saídas da simulação podem ser aproximados com precisão.
- Essa precisão aumenta à medida que o número de cenários aumentam.

Simulação estocástica

- Geologia: Cenários para caracterização de reservatórios
- Computação gráfica e processamento de imagens: remoção de ruídos
- Jogos.
- Atuária: Cenários de vida de um indivíduo.
- Finanças: Cenários econômicos e financeiros
- Avaliação de projetos: Opções reais

Simulação estocástica

- A aleatoriedade é algo complicado de se definir, mas geralmente ela é associada a algo que é difícil de se prever.
- Uma seqüência de números é aleatória quando a sua menor representação é ela mesma.
- Processos físicos tais como jogar uma moeda para cima ou jogar um dado podem ser considerados sistemas determinísticos pelo fato de se conhecer as equações que governam o seu movimento e as condições iniciais que os geram.
- Porém o comportamento desses processos físicos é caótico, pois são extremamente sensíveis às condições iniciais praticadas numa jogada.
- Mesmo num caso determinístico, sistemas altamente complicados são geralmente tratados por métodos de simulação estocástica.

Geração de números pseudo-aleatórios

- A geração de números aleatórios é o alicerce de qualquer sistema de simulação estocástica.
- Porém, nos computadores digitais as conhecidas funções que geram números aleatórios não são efetivamente aleatórias.
- Números realmente aleatórios são gerados por um processo físico. Para isso, são construídos dispositivos físicos que analisam fenômenos microscópicos ou qüânticos e através de um conversor digital conseguem gerar um número aleatório.
- Na prática o que se usa em simulação estocástica são os geradores de números pseudo-aleatórios.

Geração de números pseudo-aleatórios

- Esses geradores produzem uma seqüência determinística de números inteiros ou em ponto flutuante na precisão do computador, que imita uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas entre 0 e 1.
- A essência de uma seqüência de números pseudo-aleatórios é a sua imprevisibilidade, no sentido de que ninguém é capaz de, ao vê-la, dizer qual é a regra determinística que a produz e conseguir prever qual é o próximo número da seqüência.

Lopes, Frery, Vereda, Introdução à simulação estocástica usando R – SPOLM - 2008

Geração de números pseudo-aleatórios

- As propriedades desejáveis de um bom gerador de números pseudo-aleatórios são:
  - Possuir um padrão aleatório : ele deve passar em testes estatísticos de aleatoriedade;
  - Possuir um período longo;
  - Ser eficiente : ele deve ser executado rapidamente e requerer um baixo armazenamento;
  - Ser de fácil reprodução : a partir de determinadas condições iniciais ele deve produzir sempre a mesma seqüência;
  - Ser portável : a partir de determinadas condições iniciais a seqüência gerada deve ser a mesma em qualquer computador.

Lopes, Frery, Vereda, Introdução à simulação estocástica usando R – SPOLM - 2008

Geração de números pseudo-aleatórios

- Linear Congruential Generator (LCG) é um gerador de número pseudo-aleatório muito famoso.
- Ele gera uma seqüencia de números inteiros através da seguinte fórmula de recorrência:

$$x_k = (a \times x_{k-1} + c) \bmod M$$

onde M, a e c são inteiros dados.

- A condição inicial x_0 é chamada semente do gerador.
- O inteiro M é aproximadamente o maior inteiro representável na máquina.
- A qualidade de tal gerador depende da escolha de a e c, e em qualquer caso o período é no menor do que M.

Exercício

- Mostre a seqüencia de inteiros gerada pelo método LCG, usando a = 6, c = 0 e M = 11.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
xi	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1	6

- Repita o exercício fazendo o mesmo valor para *c* e *M*, e alterando *a* para 3. Considere x0 = 1, e depois x0 = 2.

Geração de números pseudo-aleatórios

- Para o gerador LCG, vale a seguinte proposição:

"Se c = 0 e M é primo, então o período máximo da seqüência para qualquer condição inicial x_0 se:

- a^{m-1} -1 é múltiplo de m;
- a^j -1 é múltiplo de m para j = 1,2,...,m-2."

Geração de números pseudo-aleatórios

M	a	Referência
$2^{31} - 1 =$ 2147483647	16807	Park & Miller
2147483647	39373	L'Ecuyer
2147483647	742938285	Fishman & Moore
2147483647	950706376	Fishman & Moore
2147483647	1226874159	Fishman & Moore
2147483399	40692	L'Ecuyer
2147483563	40014	L'Ecuyer

Para todos os casos acima, c = 0.

Geração de números pseudo-aleatórios

- Na realidade, em simulação estocástica, nos interessa ter um gerador que pseudo-aleatoriamente gere uma uniforme entre 0 e 1.
- Para isso podemos criar uma outra seqüência a partir da seqüencia gerada pelo LCG, por exemplo: $x_k = (a \times x_{k-1} + c) \bmod M$

$$\mathrm{u}_k = x_k / M$$

Lopes, Frery, Vereda, Introdução à simulação estocástica usando R – SPOLM - 2008

Seqüências de Números Reais

)

Seqüências de Números Reais

Seqüências convergentes

Vamos estudar um tipo especial de seqüências que são chamadas *seqüências convergentes*. Provavelmente já é familiar a frase

"$\frac{1}{n}$ *tende a zero quando* n *tende a infinito*"

com o significado de que

"*os números* $\frac{1}{n}$ *ficam arbitrariamente próximos do zero quando* n *fica suficientemente grande*".

Seqüências de Números Reais

Definição: Dizemos que uma seqüência a_n *converge ao número real* a, quando n *tende a infinito*, se para cada número inteiro positivo K, pudermos encontrar um índice n_0 tal que

$$\text{se} \quad n > n_0 \quad \text{então} \quad |a_n - a| < 10^{-K}$$

Teorema 1.1: *Se* a_n *é uma seqüência, então* a_n *converge para o número real* a *se e somente se a seqüência* $d_n = |a_n - a|$, *para* $n \geq 1$, *converge a zero.*

Seqüências de Números Reais

uma seqüência a_n converge ao número real a, se por menor que seja a tolerância estabelecida, pudermos encontrar um índice n_0, a partir do qual as distâncias entre os valores a_n da seqüência e o número a são menores do que a tolerância estabelecida.

Para dizermos que uma seqüência a_n converge a um número a, podemos usar qualquer uma das notações a seguir:

- $a_n \to a$ (a_n converge a a ou a_n tende a a)
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (o limite de a_n quando n tende a infinito é a)
- $\lim a_n = a$ (o limite de a_n quando n tende a infinito é a)

Seqüências de Números Reais

11. Seja b_n a seqüência definida por

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,3 \\ b_2 &= 0,33 \\ b_3 &= 0,333 \\ &\vdots \\ b_n &= 0,\underbrace{3...3}_{n\ 3's} \end{aligned}$$

que é a seqüência do exemplo **10.** Como sabemos, para cada n, o número b_n coincide com a expansão decimal do número $\frac{1}{3}$ até a n-ésima casa decimal, isto é, b_n é o truncamento de $\frac{1}{3}$ na $n-$ésima casa decimal. Portanto, pela construção da expansão decimal, temos que para cada n

$$\left|b_n - \frac{1}{3}\right| < 10^{-n}.$$

Logo, se K é um inteiro positivo qualquer, e tomamos $n_0 = K$, temos que

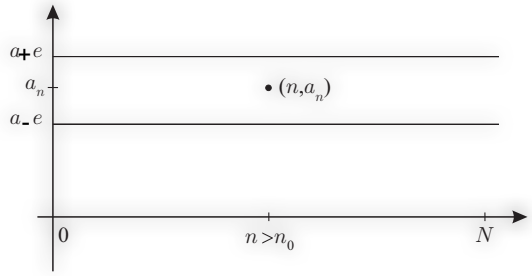
$$\text{se} \quad n > n_0 \quad \text{então} \quad 10^{-n} < 10^{-K}$$

e portanto, dado um inteiro positivo K, podemos encontrar um índice n_0 (basta tomar $n_0 = K$) tal que:

$$\text{se} \quad n > n_0 \quad \text{então} \quad \left|b_n - \frac{1}{3}\right| < 10^{-K}.$$

Isto é, provamos que a seqüência b_n converge ao número $\frac{1}{3}$.

Seqüências de Números Reais



Seqüências de Números Reais

Teorema 3.1*: *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então,*

(i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$

(ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

(iii) *se* $b \neq 0$, *então* $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Seqüências de Números Reais

Definição: Uma seqüência de números reais a_n é dita *limitada* se existe um número M tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \geq 1$.

Teorema 3.2*: *Se a_n é uma seqüência convergente então a_n é limitada.*

Seqüências de Números Reais

Definição: Uma seqüência a_n é dita *crescente* se para todo n tem-se que

$$a_{n+1} > a_n.$$

Se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n, dizemos que a_n é *não-decrescente.*

Definição: Uma seqüência a_n é dita *decrescente* se para todo n tem-se que

$$a_{n+1} < a_n.$$

Se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n, dizemos que a_n é *não-crescente.*

Teorema 3.3: *Se a_n é uma seqüência monótona e limitada, então a_n é convergente.*

Seqüências de Números Reais

Teorema 3.4: *Se a_n e b_n são seqüências convergentes, com $a_n \leq b_n$, para todo n, então*

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Teorema 3.5: *Se x_n, y_n e z_n são seqüências tais que $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo n e*

$$\lim x_n = \lim y_n = a,$$

então z_n também é convergente e $\lim z_n = a$.

Teorema 3.6*: *Se $a_n \to 0$ e b_n é uma seqüência limitada, então $a_n\, b_n \to 0$.*

Seqüências de Números Reais

Definição: Dizemos que uma seqüência de números reais a_n *tende a infinito quando n* tende a infinito se, dado qualquer número real B, podemos encontrar um índice n_0 tal que

$$\text{se } n > n_0, \quad \text{então } a_n > B.$$

Teorema 4.1: *Se $\lim a_n = \infty = \lim b_n$, então*

(i) $\lim(a_n + b_n) = \infty$

(ii) $\lim a_n b_n = \infty$

(iii) $\lim \frac{1}{a_n} = 0$

(iv) *se $c_n \geq a_n$, para $n \geq 1$, então $\lim c_n = \infty$*

Teorema 4.2*: *Se $x_n > 0$ e $\lim x_n = 0$, então $\lim \frac{1}{x_n} = \infty$.*

Seqüências de Números Reais

Definição: Dizemos que uma seqüência de números reais b_n *tende a menos infinito*, quando n tende a infinito, se $|b_n| \to \infty$ e $b_n < 0$ para n suficientemente grande.

Teorema 4.3: *Se* $\lim a_n = -\infty = \lim b_n$, *então*

(i) $\lim(a_n + b_n) = -\infty$

(ii) $\lim a_n b_n = \infty$

(iii) $\lim \frac{1}{a_n} = 0$

(iv) *se* $c_n \leq a_n$, para $n \geq 1$, *então* $\lim c_n = -\infty$

Teorema 4.4: *Se* $x_n < 0$ e $\lim x_n = 0$, *então* $\lim \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Seqüências de Números Reais

Teorema 4.5: *Se* $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim c_n = c$, *então*

(i) $\lim a_n b_n = -\infty$

(ii) $\lim(a_n + c_n) = \infty$ *e* $\lim(b_n + c_n) = -\infty$

(iii) $\lim a_n c_n = \infty$ *se* $c > 0$

(iv) $\lim a_n c_n = -\infty$ *se* $c < 0$