1． (X,Y)的分布律如下，试求 X 与 Y 的相关系数.

$X \backslash Y$	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

解：$E(X)=1\times(0+\frac{1}{3})+2\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$， $E(Y)=1\times(0+\frac{1}{3})+2\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$，

$E(X^2)=1^2\times(0+\frac{1}{3})+2^2\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})=3$， $E(Y^2)=1^2\times(0+\frac{1}{3})+2^2\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})=3$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=3-(\frac{5}{3})^2=\frac{2}{9}$， $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=3-(\frac{5}{3})^2=\frac{2}{9}$

$E(XY)=1\times1\times0+1\times2\times\frac{1}{3}+1\times2\times\frac{1}{3}+2\times2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

$$\rho(XY)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{2}$$

2.设 X 的分布律如下，试证明 X 与 $Y=X^2$ 不相关又不相互独立.

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

解：$E(X)=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$，$E(Y)=E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$，

$E(Y^2)=E(X^4)=(-1)^4\times\frac{1}{3}+0^4\times\frac{1}{3}+1^4\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{9}$，

$E(XY)=E(X^3)=(-1)^3\times\frac{1}{3}+0^3\times\frac{1}{3}+1^3\times\frac{1}{3}=0$，

$$\rho(XY)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{0-0\times\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}}}=0$$

所以 X 与 $Y=X^2$ 不相关，有因为 Y 是 X 的函数，显然不独立，例如

$$0=P\{X=-1,Y=0\}\neq P\{X=-1\}P\{Y=0\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}.$$

3.设 $B\neq 0$，验证 $Y=A+BX$ 时，X 与 Y 的相关系数为 1 或-1.

证明：$\rho(XY)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$$=\frac{E[X(A+BX)]-E(X)E(A+BX)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(A+BX)}}=\frac{AE(X)+BE(X^2)-AE(X)-B[E(X)]^2}{\sqrt{D(X)}\,|B|\sqrt{D(X)}}$$

$$=\frac{B[E(X^2)-[E(X)]^2]}{|B|D(X)}=\frac{B}{|B|}=\begin{cases}1 & B>0\\ -1 & B<0\end{cases}.$$

4.设 $(X,Y)\sim U(D), D$ 是由 $0<\mathrm{x}<1, 0<y<x$ 所围成的区域，试求 X 与 Y 的相关系数.

解：$p(x,y)=\begin{cases}2 & x\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$，

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xdy=\frac{2}{3}, E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^x 2x^2dy=\frac{1}{2}, D(X)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18},$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x 2ydy=\frac{1}{3}, E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^x 2y^2dy=\frac{1}{6}, D(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xydy=\frac{1}{4}, \operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36},$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{2}.$$

5．设 $(X,Y)\sim U(D), D$ 是由 x 轴，y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的区域，试求 $\rho(X,Y)$.

解: $p(x,y)=\begin{cases}2 & x\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 2xdy=\frac{1}{3}, E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 2x^2dy=\frac{1}{6}, D(X)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18},$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 2ydy=\frac{1}{3}, E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 2y^2dy=\frac{1}{6}, D(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 2xydy=\frac{1}{12}, \operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=-\frac{1}{2}.$$

6. 设X_1,X_2,X_3两两不相关，各有均值 0 及方差 1，试求$\rho(X_1+X_2,X_2+X_3)$.

解：$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=0+0=0$

$$E[(X_1+X_2)(X_2+X_3)]=E(X_1X_2)+E({X_2}^2)+E(X_1X_3)+E(X_2X_3)$$

$$\underline{\underline{\text{两两不相关}}}\ E({X_2}^2)=D(X_2)+[E(X_2)]=1$$

$$D(X_1+X_2)=E(X_1+X_2)^2=E({X_1}^2)+2E(X_1X_2)+E({X_2}^2)=1+0+1=2;$$

同理得$D(X_2+X_3)=2$，则

$$\rho(X_1+X_2,X_2+X_3)=\frac{\operatorname{cov}(X_1+X_2,X_2+X_3)}{\sqrt{D(X_1+X_2)}\sqrt{D(X_2+X_3)}}=\frac{1-0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

7.已知某箱装有 10 件产品，其中一等品 8 件，二等品 1 件，三等品 1 件，如果从中任取一件，记$X_i=\begin{cases}1 & \text{抽到}i\text{等品}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$ $i=1,2,3.$ 试求随机变量X_1与X_2的相关系数.

解：由题意知，X_1,X_2的分布律分别为：

X_1	1	0
P	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$

X_2	1	0
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

$$E(X_1)=E({X_1}^2)=\frac{8}{10},D(X_1)=\frac{8}{10}-\left(\frac{8}{10}\right)^2=\frac{16}{100},$$

$$E(X_2)=E({X_2}^2)=\frac{1}{10},D(X_2)=\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{10}\right)^2=\frac{9}{100},E(X_1X_2)=0,$$

又(X_1,X_2)的分布律为：

X_1 \ X_2	1	0
1	0	$\frac{8}{10}$
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X_1X_2)=0,\operatorname{cov}(X_1,X_2)=0-\frac{8}{10}\times\frac{1}{10}=-\frac{8}{100},\rho(X_1,X_2)=-\frac{2}{3}.$$

8.对于任意两个随机变量 X 和 Y,若 $E(XY)=E(X)E(Y)$,则以下选项中肯定正确的是（B）.

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$;　　　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;

(C) X和Y 相互独立;　　　　(D) X和Y 不相互独立.

解： $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$,

而 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$,故选 B .