华中农业大学本科课程期中考试试卷
参考答案及评分标准

考试课程：概率论与数理统计 B　　　　试卷类型：A

学年学期：2010-2011-1　　　　考试日期：2010-11-19

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 【 A 】　2. 【 B 】　3. 【 C 】　4.【 D 】　5. 【 B 】

二、填空题（每空 4 分，共 20 分）

1. 1/3 ；　2. 19/27 ；　3. 5/7 ；　4. 46 ；　5. 1-(1/2n).

三、(15 分)

解：设 A_1={身材肥胖}，A_2={身材中等}，A_3={身材瘦小}，B={患有高血压},

已知 $P(A_1)=0.15, P(A_2)=0.75, P(A_3)=0.1;$

$$P(B|A_1)=0.2, P(B|A_2)=0.1, P(B|A_3)=0.05$$ （6 分）

(1) 根据全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)*P(B|A_i)=0.15*0.2+0.75*0.1+0.1*0.05=0.11$$ (10 分)

(2) 根据贝叶斯公式：

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)*P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)*P(B|A_i)}=\frac{0.15*0.2}{0.11}=\frac{3}{11}$$ (12 分)

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)*P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)*P(B|A_i)}=\frac{0.75*0.1}{0.11}=\frac{15}{22}$$ (13 分)

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)*P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)*P(B|A_i)}=\frac{0.1*0.05}{0.11}=\frac{1}{22}$$ （15 分）

$\therefore$ 最有可能是中等身材的人。

四、（10 分）解：(1) 由连续的条件有：

$x=a, x=-a$ 处左右极限存在且相等

$$\begin{cases} A+B\arcsin\dfrac{-a}{a}=0, \\ A+B\arcsin\dfrac{a}{a}=1. \end{cases} \text{解得}\quad A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi}$$ （3 分）

(2)因为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -a \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a \\ 1, & x>a \end{cases}$，而 $p(x)=F^{'}(x)$

故 $p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ （6 分）

(3) 因为方程 $t^2+Xt+\dfrac{a^2}{16}=0$ 有实根，则 $X^2-\dfrac{a^2}{4}\ge 0$

故 $P(X\ge\dfrac{a^2}{4})=P(X\ge\dfrac{a}{2})+P(X\le-\dfrac{a}{2})=1-F(\dfrac{a}{2})+F(-\dfrac{a}{2})=\dfrac{2}{3}$ （10 分）

五、（10 分）解：把线段置于数轴上，使它与区间 $[0,a]$ 重合，设 X,Y 分别表示任取两点的坐标，则 X,Y 相互独立，且都服从 $U(0,a)$ 的分布，故 (X,Y) 的联合分布密度为：

$$p(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} & 0\le x\le a, 0\le y\le a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$ （3 分）

于是两点间距离 $|X-Y|$ 的期望为：

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|p(x,y)dxdy=\int_0^a\int_0^a|x-y|\frac{1}{a^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{a^2}[\int_0^a dx\int_0^x(x-y)dy+\int_0^a dx\int_x^a(y-x)dy]=\frac{a}{3}$$ （6 分）

而 $E(|X-Y|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|^2 p(x,y)dxdy=\int_0^a\int_0^a(x-y)^2\dfrac{1}{a^2}dxdy$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^a dx\int_0^a(x-y)^2dy=\frac{a^2}{6}$$

故两点间距离 $|X-Y|$ 的方差为：

$$D(|X-Y|)=\frac{a^2}{6}-(\frac{a}{3})^2=\frac{a^2}{18}$$ （10 分）

六、（15 分）解：设每个加数含舍入误差为 $X_i\ (i=1,2\cdots n)$，由题设 X_i 独立同分布，且都服从

$U(-0.5,0.5)$，从而 $E(X_i)=\dfrac{-0.5+0.5}{2}=0, D(X_i)=\dfrac{(0.5+0.5)^2}{12}=\dfrac{1}{12}$ （5 分）

记 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$，要使得 $P(|X|<10)\geq 0.9$。由独立同分布的中心极限定理，近似有

$$P(|X|<10)=P(-10<X<10)=P(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}<\frac{X}{\sqrt{n/12}}<\frac{10}{\sqrt{n/12}})=2\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})-1\geq 0.9$$

即 $\Phi(\dfrac{10}{\sqrt{n/12}})\geq 0.95$ （12 分）

故 $\dfrac{10}{\sqrt{n/12}}\geq 1.645$，解得 $n\leq 443$ （15 分）

七、(10 分) （答案略）提示：小概率原理