1.X 的分布律如下,试求 $(1)EX,DX;(2)E(-2X+1),D(-2X+1);(3)EX^2,DX^2$. .

X	1　　2
P	1 8

解： (1) $EX=(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

$$EX^2=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{3}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}=1$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

(2) $E(-2X+1)=-2EX+1=-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{1}{2}$

$$D(-2X+1)=4DX+0=4\times\frac{15}{16}=\frac{15}{4}$$

(3) $EX^2=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{3}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}=1$

$$EX^4=(-1)^4\times\frac{1}{4}+0^4\times\frac{3}{8}+1^4\times\frac{1}{4}+2^4\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$$

$$DX^2=E(X^2)^2-(EX^2)^2=EX^4-(EX^2)^2=\frac{5}{2}-1^2=\frac{3}{2}.$$

2．设 $X\sim U(0,2\pi)$，试求：$(1)EX,DX;(2)EX^2,DX^2;(3)E(\sin x),D(\sin x).$

解：由 $X\sim U(0,2\pi)$， $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & x\in(0,2\pi)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(1) $EX=\frac{a+b}{2}=\frac{0+2\pi}{2}=\pi$， $DX=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{4\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{3}$；

(2) $\because DX=EX^2-(EX)^2,\therefore EX^2=DX+(EX)^2=\frac{\pi^2}{3}+\pi^2=\frac{4}{3}\pi^2$,

$$EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4p(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{x^4}{2\pi}dx=\frac{16}{5}\pi^4,$$

$$DX^2=EX^4-(EX^2)^2=\frac{16}{5}\pi^4-\frac{16}{9}\pi^4=\frac{64}{45}\pi^4;$$

(3) $E(\sin x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\cdot p(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2\pi}dx=0$,

$$E(\sin x)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2 x\cdot p(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{2\pi}dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2},$$

$\because D(\sin x)=E(\sin x)^2-[E(\sin x)]^2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

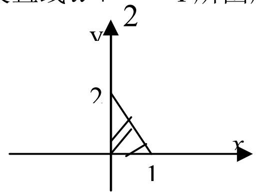
3．测量球的直径，若直径的值 $X\sim U(1,2)$，试计算球的数学期望与方差。

解：$V=\frac{4}{3}\pi(\frac{X}{2})^3=\frac{1}{6}\pi X^3$， $EV=\int_1^2\frac{1}{6}\pi x^3dx=\frac{15}{24}\pi$，$DV=D(\frac{1}{6}\pi X^3)=\frac{1}{36}\pi^2DX^3$

$$\because DX^3=EX^6-(EX^3)^2=\int_1^2x^6dx-(\int_1^2x^3dx)^2=\frac{127}{7}-(\frac{15}{4})^2=\frac{457}{112},$$

$$DV=\frac{1}{36}\pi^2\cdot\frac{457}{112}=\frac{457}{4032}\pi^2.$$

4.设（X，Y）服从区域 A 上的均匀分布，且由 x 轴，y 轴及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成，试求：$(1)EX,DX;(2)EY,DY;(3)E(XY),D(XY)$.



解： $p(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$(1)\ p_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}1dy=2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx=\int_0^1 2x(1-x)dx=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$EX^2=\int_0^1x^2(2-2x)dx=\frac{1}{6},\quad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$(2)\quad p_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}1dy=1-\frac{y}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)dx=\int_0^2y(1-\frac{y}{2})dy=[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}]_0^2=\frac{2}{3}$$

$$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2p_Y(y)dx=\int_0^2y^2(1-\frac{y}{2})dy=[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{8}]_0^2=\frac{2}{3}$$

$$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

$$(3)\ E(XY)=\iint_D xyp(x,y)d\sigma=\int_0^1[\int_0^{2(1-x)}xydy]dx=\frac{1}{6}$$

$$E(X^2Y^2)=\iint_D x^2y^2p(x,y)d\sigma=\int_0^1[\int_0^{2(1-x)}x^2y^2dy]dx=\frac{2}{45}$$

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=\frac{2}{45}-\frac{1}{36}=\frac{1}{60}$$

5. 设 $X_1,X_2,\ldots\ldots X_5$ 相互独立且都服从 $N(12,4)$ 分布，试求 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{5}X_i\right)$ 与 $D\left(\sum\limits_{i=1}^{5}X_i\right)$.

解： $X_i\sim N(12,4),EX_i=12,DX_i=4$

$$E\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)\overset{\text{独立}}{=}\sum_{i=1}^{5}EX_i=12\times5=60\ ;\qquad D\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)\overset{\text{独立}}{=}\sum_{i=1}^{5}DX_i=4\times5=20\ .$$

6. 袋中装有结构相同的 n 个小球，将数字 1，2，…….，n 上分别标这 n 个小球，每个球上只有一个数字，从中任取 k 次，每次取一个球，看过球上数字以后放回，若 k 个数字的和为 X，试求 X 的数学期望与方差.

解： 设第 i 次取出球的标数为随机变量 X_i，i=1,2…..k．各 X_i 相互独立同分布，且

X_i	… …	n
P	… …	$\frac{1}{n}$

$$EX_i=\frac{1+2+\ldots..n}{n}=\frac{n+1}{2},$$

$$X=\sum_{i=1}^{k}X_i\,,EX=E(\sum_{i=1}^{k}X_i)=\sum_{i=1}^{k}EX_i=\frac{n+1}{2}k\,,$$

$$EX_i^{\,2}=\frac{1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

$$DX_i=EX_i^{\,2}-(EX_i)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-(\frac{n+1}{2})^2=\frac{n^2-1}{12}\,,$$

$$DX=D(\sum_{i=1}^{k}X_i)=\sum_{i=1}^{k}DX_i=\frac{n^2-1}{12}k\,.$$

7. 随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 在区间[0，6]上服从均匀分布，X_2 服从 N（0,4），X_3 服从参数λ=3 的 Poisson 分布，记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$ 则 $DY=$__________.

解：$D(Y)=D(X_1-2X_2+3X_3)=D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}+4\cdot\sigma^2+9\times\lambda=\frac{6^2}{12}+4\times4+9\times3=46\,.$$

8．X服从参数为 1 的指数分布，则数学期望$E(X+e^{-2X})$____________.

解：$X \sim E(\lambda), \lambda = 1, p(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\therefore EX = \dfrac{1}{\lambda} = 1$，

$$E(e^{-2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} p(x)dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} dx = \frac{1}{3},$$

$$E(X + e^{-2X}) = E(X) + E(e^{-2X}) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

9．$X \sim B(n, p)$，且EX=2.4，DX=1.44，则n =___6__，p =__0.4__

解：$EX=np=2.4$，$DX=np(1-p)=1.44$　　$\therefore 1 - p = \dfrac{1.44}{2.4} = 0.6,\ p = 0.4, n = 6$.

10．设X与Y相互独立，分布密度同为$p(z) = \begin{cases} 2z\theta^2, 0 < z < \dfrac{1}{\theta} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ 则 E（X+2Y）=________.

解：$X \sim p(x) = \begin{cases} 2x\theta^2, 0 < x < \dfrac{1}{\theta} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$

$EX = \int_0^{\frac{1}{\theta}} x.2x\theta^2 dx = \dfrac{2}{3\theta}$，同理$EY = \int_0^{\frac{1}{\theta}} y.2y\theta^2 dy = \dfrac{2}{3\theta}$

$$\therefore E(X + 2Y) = \frac{2}{3\theta} + \frac{4}{3\theta} = \frac{2}{\theta}$$

11．某机器加工某产品的次品率为 0.1，每天检查 4 次，每次随机地抽取 5 件产品进行检验，如果发现多于 1 件次品就要调整机器，求一天中调整机器次数的数学期望.

解：先看随机检查一次：设从 5 件产品中抽得X件次品，则多于 1 件次品的概率为：

$$P\{X > 1\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - P_5(0) - P_5(1) = 1 - C_5^0 0.1^0 0.9^5 - C_5^1 0.1^1 0.9^4 = 0.08146$$

设一天中调整机器Y次。则$Y \sim B(4,\ 0.8146)$，$EY = np = 4 \times 0.08146 = 0.3258$

12．设一次试验成功的概率为p，若进行 100 次这样的试验，则成功次数的标准差的最大值为

解：$X \sim B(100, p)$,$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{100p(1-p)}$，$\sigma^2(X) = 100(p - p^2)$

令$[\sigma^2(X)]' = 100(1 - 2p) = 0 \Rightarrow p = \dfrac{1}{2}$，即当$p = \dfrac{1}{2}$时，$\sigma$最大，且$\sigma_{\max} = \sqrt{DX} = 5$.