1. 从装有 3 个红球 2 个白球的口袋中一个一个的取球，共取了 4 次，取出 X 个红球 Y 个白球，若每次取出的球①立即放回袋中，再取下一个，或者②不放回袋中接着便取下一个，试分别写出 (X,Y) 的分布律.

解：（1）立即放回袋中时，其分布律为：

$$P\{X=i,Y=j\}=C_4^i(\frac{3}{5})^i(\frac{2}{5})^j \quad i=0,1,2,3,4. \quad i+j=4$$ 或表示为表格：

(X,Y)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)
P	$(\frac{3}{5})^4$	$C_4^3(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})$	$C_4^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^2$	$C_4^1(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^3$	$(\frac{2}{5})^4$

(2) 不放回袋中时，其分布律为：（相当于一手抓）

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_3^iC_2^j}{C_5^4} \quad i=1,2,3;\ j=0,1,2;. \quad 3\le i+j\le 4$$ 或表示为表格：

(X,Y)	(3,1)	(2,2)
P	$\frac{C_3^3\cdot C_2^1}{C_5^4}=\frac{2}{5}$	$\frac{C_3^2\cdot C_2^2}{C_5^4}=\frac{3}{5}$

2. 上一题的口袋中如果还有 1 个黑球，其它假定不变，试分别写出 (X,Y) 的分布律**.**

解：（1）立即放回袋中时，其分布律为：

$$p=(X=i,Y=j)=C_4^i\,C_{4-i}^j\,(\frac{1}{2})^i\,(\frac{1}{3})^j\,(\frac{1}{6})^{4-i-j}, \quad i,j=0,1,\cdots,4. \quad i+j\le 4;$$

(2) 不放回袋中，其分布律为：

(X,Y)	(3,1)	(3,0)	(2,2)	(2,1)	(1,2)
P	$\frac{C_3^3\cdot C_2^1}{C_6^4}=\frac{2}{15}$	$\frac{C_3^3}{C_6^4}=\frac{1}{15}$	$\frac{C_3^2\cdot C_2^2}{C_6^4}=\frac{3}{15}$	$\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_6^4}=\frac{6}{15}$	$\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_6^4}=\frac{3}{15}$

3. 从装有 3 个红球和 1 个白球的口袋中任意取出 2 个球，若以 X 表示其中的红球数，以 Y 表示其中的白球数，试求 (X,Y) 的分布函数**.**

解：(X,Y) 的分布律为: $P（X=1,Y=1）=\dfrac{C_3^1}{C_4^2}=0.5$, $P（X=2,Y=0）=\dfrac{C_3^2}{C_4^2}=0.5$ **.**

$$\text{所以 } F(x,y)=\begin{cases}0.5 & 1\le x<2,\ y\ge 1 \text{或} x\ge 2, 0\le y<1\\ 1 & x>2, y>1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

4.设 D 是平面直角坐标系中由 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所围成的区域，(X,Y)在 D 上服从均匀分布，试求(X,Y)的分布密度**.**

解：$\because (X,Y)\sim U(D)$，$\therefore p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$ **.**

而 $S_D=\int_0^1[\int_{x^2}^x dy]dx=\int_0^1(x-x^2)dx=（\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3）\big|_0^1=1/6$,

$\therefore p(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ **.**

5.若(X,Y)的分布密度为：$p(x,y)=\begin{cases}kxy, & 0<x<1, 0<y<1;\\ 0\ , & \text{其它.}\end{cases}$

试求：①参数 k； ②P{0.1<X<0.4，0.2<Y<0.6}**.**

解：①$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$,

$\therefore \int_0^1\int_0^1 kxydxdy=\int_0^1 kydy\int_0^1 xdx=[\frac{k}{2}y^2]_0^1[\frac{1}{2}x^2]_0^1=k/4=1$，$\therefore$ k=4**.**

② $P\{0.1<X<0.4, 0.2<Y<0.6\}=\int_{0.1}^{0.4}\int_{0.2}^{0.6}4xydxdy=\int_{0.1}^{0.4}4xdx\int_{0.2}^{0.6}ydy$

$=[2x^2]_{0.1}^{0.4}[\frac{1}{2}y^2]_{0.2}^{0.6}=0.048$**.**

6. 若(X,Y)的分布密度为：$p(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0;\\ 0\ , & \text{其它.}\end{cases}$

试求：①参数 k； ②P{0<X<1，Y<X}**.**

解：①$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1, \therefore \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}ke^{-(3x+4y)}dxdy=1$,

$\therefore\ k\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx\int_0^{+\infty}e^{-4y}dy=1$， 即： $k=12$.

② $P\{0<X<1,Y<x\}=\int_0^1\int_{-\infty}^x p(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x 12e^{-(3x+4y)}dxdy$

$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\int_0^x e^{-4y}dy=12\int_0^1 e^{-3x}[-\frac{1}{4}e^{-4y}]_0^x dx$

$=12\int_0^1(\frac{1}{4}e^{-3x}-\frac{1}{4}e^{-7y})dx=0.522$.

7. 若(X,Y)的分布密度为：$p(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2<y<1;\\ 0\ , & 其它.\end{cases}$

试求：①参数c； ② $P\{X>0.5\}$及$P\{Y>0.5\}$.

解：①$\because\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1,\therefore\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 cx^2ydxdy=1$.

$\therefore\ \int_{-1}^1 cx^2[\frac{1}{2}y^2]_{x^2}^1dx=1$， $\therefore\ \int_{-1}^1 cx^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^4)dx=1$.

$\therefore\ \frac{c}{2}\int_{-1}^1(x^2-x^6)dx=1,\therefore\ c=21/4=5.25$;

② $P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^1\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydxdy=0.3935$;

$P\{Y>0.5\}=2\int_{0.5}^1\int_0^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydxdy=0.912$.

8.设(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1且y\ge 0\}$内服从均匀分布，在三次重复独立观察中事件$\{X\ge Y\}$出现的次数为$Z$,试求$P\{Z=2\}$.

解：$S_D=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi$，而$(X,Y)\sim U(D)$，$\therefore\ p(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0\ , & 其它\end{cases}$.

$P\{X\ge Y\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\frac{2}{\pi}rdr=\frac{\pi}{4}\frac{2}{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}$ （也可以直接用面积的比得到$\frac{1}{4}$）

（问题转化为：重复独立试验进行 3 次，每次中事件 $A=\{X\ge Y\}$出现的概率为 1/4，求 3 次试验中，事件 A 出现 2 次的概率。）

$P\{Z=2\}=P_3(2)=C_3^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})=3\times\frac{1}{16}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$.