1. 设随机变量 $K \sim U(0,10)$，求方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率.(57 页原题中小写 k 改大写 K.)

解：$\because K \sim U(0,10)$ $\therefore p(k) = \begin{cases} 1/10 & 0 < k < 10 \\ 0. & \text{其它} \end{cases}$,又$\because$方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根,

$\therefore \Delta = K^2 - 4 \geq 0$ 即 $K \geq 2$ 或 $K \leq -2$ (舍).

$\therefore$方程有实根的概率 $P\{K \geq 2\} = \int_2^{10} \frac{1}{10} dx = 8/10 = 0.8$.

2. 设随机变量 $X \sim U(a,b)$，其分布密度为 $p(x)$，试验证 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

解：$\because X \sim U(a,b)$, $\therefore p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1$. 证毕.

3. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$，试确定满足条件 $0 < a < 1$ 的数 a，使得随机抽取且可以重复的 4 个数值中,至少有一个超过 a 的概率为 0.9.

解：$\because X \sim U(0,1)$, $\therefore p(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

设随机抽取一个数超过 a 的概率为 p,则随机抽取的可以重复的 4 个数中至少一个超过 a 的概率为:

$1 - P_4(0) = 1 - C_4^0 p^0 (1-p)^4 = 1 - (1-p)^4 = 0.9, \quad \therefore p = 0.4377$

又 $P\{X > a\} = \int_a^{+\infty} p(x)dx = \int_a^1 1dx = 1 - a$

$\therefore 1 - a = 0.4377, a = 0.5623$

4. 设连续型随机变量 X 的分布密度: $p(x) = \begin{cases} kx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$,

试求：① $p(x)$ 中的系数 k；② $P(0.3 < X < 0.7)$；③ X 的分布函数.

解：(1) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^1 kx\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = k/2$, $\therefore k = 2$.

(2) $P(0.3 < X < 0.7) = \int_{0.3}^{0.7} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{0.3}^{0.7} = 0.49\text{-}0.09\text{=}0.4$

(3) $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x 2x\,dx = x^2 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$.

5. 设电子管的使用时间X(单位：h)的分布密度：$p(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{x^2} & x>100\\ 0 & 其它\end{cases}$，

试求：① $p(x)$中的系数b；② $P\{X<150\}$；③ X的分布函数.

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{b}{x^2}dx=-b\left[\dfrac{1}{x}\right]_{100}^{+\infty}=\dfrac{b}{100}$ 所以$b=100$；

（2）$P\{X<150\}=\int_{-\infty}^{150}p(x)dx=\int_{100}^{150}\dfrac{100}{x^2}dx=-100\left[\dfrac{1}{x}\right]_{100}^{150}=1/3$.

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx=\begin{cases}\int_{100}^{x}\dfrac{100}{x^2}dx=1-\dfrac{100}{x} & x>100\\ 0 & 其它\end{cases}$.

6. 设随机变量$X\sim E(k)$，其分布密度为$p(x)$，试验证$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$.

解：$\because X\sim E(k),\therefore p(x)=\begin{cases}ke^{-kx} & x\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}\quad k>0$，

$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{0}^{+\infty}ke^{-kx}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{-kx}d(-kx)=-\left[e^{-kx}\right]_{0}^{+\infty}=-(0-1)=1$.

7. 某顾客不愿在银行窗口等待服务时间过长，等待 10 分钟，没有得到服务他就会离开，如果他一个月去银行办理业务 3 次，3 次中因等待超过 10 分钟而放弃等待的次数为Y，若顾客等待服务的时间为X(单位：分钟) $\sim E(0.2)$，试写出Y的分布律.

解：先看办理一次业务：$X\sim E(0.2),\ p(x)=\begin{cases}0.2e^{-0.2x} & x\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$\therefore P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}p(x)dx=\int_{10}^{+\infty}0.2e^{-0.2x}dx=e^{-2}.$$

以下问题为：重复独立试验进行 3 次，在每一次试验中，时间 A(等待超过 10 分钟)发生的概率为e^{-2}，问 3 次试验中，事件 A 发生的次数 Y 的分布律. 故$Y\sim B(3,e^{-2})$

$P(Y=k)=C_3^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{3-k},\quad k=0,1,2,3.$ 即

Y	0	1	2	3
P	$(1-e^{-2})$	$3e^{-2}(1-e^{-2})^2$	$3e^{-4}(1-e^{-2})$	e^{-6}

8. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，其分布密度为 $p(x)$，试验证 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

解：$\because$ X ～ N(0,1) $\therefore p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

$$\text{而}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \xrightarrow{\text{令}t=\frac{x^2}{2}\text{，则}dx=\frac{1}{\sqrt{2t}}dt} \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2t}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt \quad =\frac{1}{\sqrt{2}}.\Gamma(\frac{1}{2})= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{\frac{\pi}{2}} =1.$$

9. 若 $X \sim N(0,1)$，试查 $\Phi(x)$ 的数值表计算：

① $P\{X<2.2\}$;② $P\{X>1.76\}$;③ $P\{X<-0.78\}$; ④ $P\{|X|<1.55\}$; ⑤ $P\{|X|>2.5\}$.

解：①$\because X \sim N(0,1)$ $\therefore P\{X<2.2\}=\Phi(2.2)$=0.9861;

② $P\{X>1.76\}=1-P\{X\le 1.76\}=1-P\{X<1.76\}$=1-Φ(1.76)=1−0.9608=0.0392;

③ $P\{X<-0.78\}=1-P\{X<0.78\}$=1−Φ(0.78)=1−0.7823=0.2177;

④ $P\{|X|<1.55\}=P\{-1.55<X<1.55\}$=Φ(1.55)- Φ(-1.55)= Φ(1.55)-(1-Φ(1.55))

=2Φ(1.55) −1=2×0.9394−1=0.8788;

⑤ $P\{|X|>2.5\}=2P\{X>2.5\}$=2(1− Φ(2.5))= 2(1-0.9938)=0.0124.

10. 若 $X \sim N(-1,16)$，试查 $\Phi(x)$ 的数值表计算：

① $P\{X<2.44\}$; ② $P\{X>-1.5\}$; ③ $P\{X<-2.8\}$; ④ $P\{|X|<4\}$; ⑤ $P\{|X-1|>1\}$.

解： $X \sim N(-1,16), \mu=-1, \sigma=4$,

① $P\{X<2.44\}=\Phi(\dfrac{2.44-(-1)}{4})$= Φ(0.86)=0.8051;

② $P\{X>-1.5\}=1-P\{X<-1.5\}=1-\Phi(\dfrac{-1.5-(-1)}{4})$=1−Φ(−0.125)=1− [1−Φ (0.125)]

= Φ(0.125)=[Φ(0.12) +Φ(0.13)]/2=[0.5478+0.5517]/2=0.5498;

注：表中数值只到小数点后两位，此题Φ(0.125)可取一前一后的两个值相加除以 2.

③ $P\{X<-2.8\}=\Phi(\frac{-2.8-(-1)}{4})=\Phi(-0.45)=1-\Phi(0.45)=1-0.6736=0.3264$;

④ $P\{|X|<4\}=P\{-4<X<4\}=\Phi(\frac{4-(-1)}{4})-\Phi(\frac{-4-(-1)}{4})=\Phi(1.25)-\Phi(-0.75)$

$=\Phi(1.25)-[1-\phi(0.75)]=\Phi(1.25)+\Phi(0.75)-1=0.8944+0.7734-1=0.6678$;

⑤ $P\{|X-1|>1\}=1-P\{|X-1|\le 1\}=1-P\{0\le X\le 2\}=1-\Phi(\frac{2-(-1)}{4})-\Phi(\frac{0-(-1)}{4})$

$=1-\Phi(0.75)+\Phi(0.25)=1-0.7734+0.5987=0.8253$.

11．测量某一塔形建筑的高度，其测量误差为 X （单位：厘米)，若 $X\sim N(2,16)$，试求：

①测量误差的绝对值不超过 3 的概率;

②相互独立地测量三次，其中至少有一次的测量误差的绝对值不超过 3 的概率.

解：$\because X\sim N(2,16),\mu=2,\sigma=4.$

① $P\{|X|\le 3\}=P\{-3\le X\le 3\}=\Phi(\frac{3-2}{4})-\Phi(\frac{-3-2}{4})=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)$

$=\Phi(0.25)-[1-\Phi(1.25)]=0.5987-1+0.8944=0.4931$;

②用 Y 表示测量三次中误差绝对值不超过 3 的次数，则 $Y\sim B(3,0.4931)$.

$1-P_3(0)=1-C_3^0 0.4931^0(1-0.4931)^3=1-0.1302=0.8696$.

12. 某电子元件的寿命 X （单位：小时） $\sim N(160,\sigma^2)$，若 $P\{120<X<200\}\ge 0.8$，试求 σ^2.

解：$\because X\sim N(160,\sigma^2)$,

$\therefore P\{120<X<200\}=\Phi(\frac{200-160}{\sigma})-\Phi(\frac{120-160}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{40}{\sigma})-\Phi(\frac{-40}{\sigma})=2\Phi(\frac{40}{\sigma})-1\ge 0.8$,

即 $\Phi(\frac{40}{\sigma})\ge 0.9$

查表得 $\frac{40}{\sigma}\ge 1.28$；　$\therefore \sigma^2\le 976.56$.

（或查表得 $\frac{40}{\sigma}\ge 1.29$，则 $\sigma^2\le 961$.）