1.若随机变量 X 的 $EX=\mu,DX=\sigma^2$,且$\sigma>0$,则对于任意给定的正数 k , $P\{|X-\mu|\geq k\sigma\}\leq$ $\underline{1/k^2}$.

解：由 $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$, $P\{|X-\mu|\geq k\sigma\}\leq\dfrac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}=\dfrac{1}{k^2}$.

2.设 DX=2.5，试用 *Chebyshev* 不等式估计 $P\{|X-EX|\geq5\}$的值。

解： $P\{|X-EX|\geq5\}\leq\dfrac{DX}{5^2}=\dfrac{2.5}{25}$ =0.1.

3.已知成年男性的血液中，每毫升白细胞数的平均值是 7300，标准差是 700，试用 *Chebyshev* 不等式估计每毫升白细胞数在 5 200~9400 之间的概率。

解：设 X 为成年男性血液中的白细胞数(每毫升）, $EX=7300,\sqrt{DX}=700$,

$$P\{5200\leqslant X\leqslant 940\}=P\{|X-7300|\leqslant 2100\}>1-\frac{700^2}{2100^2}=\frac{8}{9}.$$

4.有 1 万盏电灯，每盏灯开的概率都是 0.7。如果电灯的开关都是相互独立的，试用 *Chebyshev* 不等式估计并用中心极限定理计算同时有 6800~7200 盏电灯是开着的概率。

解：设 X 为开着的灯的盏数,则 $X\sim B$（10000,0.7）,有

$EX=np=10000\times0.7=7000$, $DX=np(1-p)=2100$.

Chebyshev 不等式估计:

$$P\{6800\leq X\leq 7200\}=P\{|X-7000|\leq 200\}>1-\frac{2100}{200^2}=0.9475;$$

中心极限定理计算:

$$P\{|X-7000|\leq 200\}=P(\left|\frac{X-7000}{\sqrt{2100}}\right|\leq\frac{200}{\sqrt{2100}})=2\Phi(\frac{20}{\sqrt{21}})-1=2\Phi(4.36)-1\approx 1.$$

5.在次品率为 $\dfrac{1}{6}$ 的一大批产品中，任意抽取 300 件产品，试用中心极限定理近似计算这 300 件产品中次品数在 40~60 之间的概率.

解：设 X 为这些产品中的次品数，则 $X\sim B$（300，1/6），

$EX=np=50$, $DX=np(1-p)=250/6=125/3$,

$$P\{40\leqslant X\leqslant 60\}=P\{|X-50|\leqslant 10\}=P\left\{\left|\frac{X-50}{\sqrt{125/3}}\right|\leq\frac{10}{\sqrt{125/3}}\right\}$$

$$=2\Phi(10/\sqrt{125/3})-1=2\Phi(1.55)-1=2\times0.9394-1=0.8788.$$

6.区间$\left[0,1\right)$中可重复地任取 100 个实数 X_i(i=1,2,…100)作为随机数字，试用中心极限定理近似计算$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 45\right\}$.

解：因 $X_i \sim U(0,1)$, 故 $E(X_i)=\frac{1-0}{2}=0.5, D(X_i)=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$,

又$E(\sum_{i=1}^{100} X_i) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$, $D(\sum_{i=1}^{100} X_i) = 100 \times \frac{1}{12} = \frac{25}{3}$ ；

由中心极限定理得:

$$P(\sum_{i=1}^{100} X_i > 45) = 1 - P(\sum_{i=1}^{100} X_i \le 45) = 1 - \Phi(\frac{45-50}{5/\sqrt{3}}) = 1 - \Phi(-\sqrt{3})$$

$$= 1 - [1 - \Phi(\sqrt{3})] = \Phi(\sqrt{3}) \approx 0.9582$$