1． 设 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5,$ 试计算下列事件发生的概率：

①$\overline{A}\cup\overline{B}$；②$\overline{A}B$；③$A\cup\overline{B}$；④$\overline{A}\,\overline{B}$；⑤$B(A\cup\overline{B})$.

解：$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$

①$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$；

②$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.4-0.2=0.2$；

③$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8$；

④$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-0.7-0.4+0.2=0.1$

⑤$P(B(A\cup\overline{B}))=P(AB\cup B\overline{B})=P(AB)=0.2$.

2. 当 $P(B\,|\,A)<P(B)$ 时称 A 不利于 B，当 $P(A\,|\,B)<P(A)$ 时称 B 不利于 A.试证明：若 A 不利于 B,则 B 不利于 A.

证明：若 A 不利于 B，即

$$P(B\,|\,A)<P(B)\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}<P(B)\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(B)}<P(A)\Rightarrow P(A\,|\,B)<P(A),$$

即 B 不利于 A.

3．设某种动物由出生算起活 20 岁以上的概率为 0.8，活 25 岁以上的概率为 0.4。如果现在有一个 20 岁的这种动物，试求它能够活 25 岁以上的概率.

解：设 A={活 20 岁以上}，B={活 25 岁以上}；

已知 $P(A)=0.8$，　$P(B)=0.4$，

所以 $P(B\,|\,A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.8}=\dfrac{1}{2}$.　　($\because B\subset A, \therefore AB=B$)

4. 袋中装有 4 个红球 3 个白球，用取后不放回的方法，每次任取一球，共取 3 次，若 A={三次都取出红球}，B={前两次都取出红球}，C={前两次都取出红球第三次取出白球}，试用概率的乘法公式计算这三个事件的概率.

解：设 A_i={第 i 次取红球}，$i=1,2,3$；则

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{35};$$

$$P(B)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7};$$

$$P(C)=P(A_1A_2\overline{A_3})=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A_3}\mid A_1A_2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{35}.$$

5.一个不称职的秘书，随手将 3 封不同的信放进了 3 个写有不同地址的信封，试计算至少有一封信放对了信封的概率

解：全部方法：$n=A_3^3=6$ 种，仅一封放对：$C_3^1=3$ 种，二封放对则必三封都对：1 种

P\{至少一封放对\}=$\dfrac{C_3^1+1}{A_3^3}=\dfrac{2}{3}$.

6.一批零件中有 90 个正品 10 个次品，若每次从中任取一个零件，取出的零件不在放回去. 试计算①第二次才取出正品的概率；②第三次才取出正品的概率.

解：A_i 表示第 i 次取出正品,则

① $P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})=\dfrac{10}{100}\times\dfrac{90}{99}=\dfrac{1}{11}$=0.091；

② $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\dfrac{10}{100}\times\dfrac{9}{99}\times\dfrac{90}{98}=\dfrac{9}{1078}=0.0083$.

7.某光学仪器厂制造的透镜，在第一次落下时打破的概率为 0.5，若第一次未打破，第二次落下时打破的概率为 0.3，若前两次未打破，第三次落下时打破的概率为 0.9，试求透镜三次落下而未打破的概率.

解：A_i =\{第 i 次落下打破\}， i=1，2，3.

已知 $P(A_1)=0.5$ ，$P(A_2\mid\overline{A_1})=0.3$ ，$P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.9$

所以 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})\,P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.5\times(1-0.3)\times(1-0.9)=0.035$。

8.一道考题同时列出 4 个答案，要求学生把其中的一个正确答案选择出来. 假设他知道正确答案的概率为 0.5，而乱猜的概率也是 0.5，如果他乱猜答案猜对的概率为 0.25，并且已知他答对了，试求他确实知道正确答案的概率.

解：设 A_1 =\{知道正确答案\}， A_2 =\{乱猜\}，B =\{答对\}

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=0.5\times1+0.5\times0.25=0.625,$$

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.5\times1}{0.625}=0.8 .$$

9.如果甲口袋中有 3 个红球一个白球，乙口袋中有 4 个红球 2 个白球，从甲口袋中任取一球，不看颜色放入乙口袋中，再从乙口袋中任取一球，试求取出红球的概率.

解：设 A ={从甲口袋取出一红球}，$\bar{A}$ ={从甲口袋取出一白球} ，B={从乙口袋取出一红球}

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{C_3^1}{C_4^1}\times\frac{C_5^1}{C_7^1}+\frac{C_1^1}{C_4^1}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}=\frac{19}{28}.$$

10. 用甲胎蛋白法普查肝癌，由过去的资料知道，肝癌患者用此法检验得出阳性结果的概率为 0.95，非肝癌患者用此法检验得出阴性结果的概率为 0.90。如果某地居民中肝癌的发病率为 0.0004，某人用此法检验得出了阳性结果，试计算他是肝癌患者的概率。

解：设 A ={肝癌患者}, B ={阳性结果},已知 $P(B\mid A)=0.95$，$P(\overline{B}|\overline{A})=0.90$， $\mathrm{P(A)}=0.0004$，

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=0.0004\times0.95+(1-0.0004)\times(1-0.90)$$

所以 $$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.0096\times0.1}=0.0038$$

11. 某校男女比例为 3：1，男生中身高 1.70 米以上的占 60%，女生中身高 1.70 米以上的仅占 10%，在校内随机的采访一位学生，①若这位学生的身高在 1.70（含 1.70 米）以上，求这位学生是女生的概率；②若这位学生的身高不超过 1.70 米，求这位学生是男生的概率.

解：设 A ={男生}, $\bar{A}$ ={女生}, B ={身高 1.70 米以上}, 已知 $P(A)=3/4,\ P(\overline{A})=1/4$，

$P(B\mid A)=60\%=0.6$, $P(B\mid \overline{A})=0.1$,

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{3}{4}\times0.6+\frac{1}{4}\times0.1=\frac{19}{40},$$

所以 $$P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\bar{A})\cdot P(B\mid \bar{A})}{P(B)}=\frac{1}{4}\times0.1\Big/\frac{19}{40}=\frac{1}{19}=0.0526,$$

$$P(A\mid \overline{B})=\frac{P(A)\cdot P(\bar{B}|A)}{P(\bar{B})}=\frac{3}{4}\times(1-0.6)\Big/(1-\frac{19}{40})=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}=0.5714.$$

12. 将储户按收入多少分为高，中，低三类，通过调查得知，这三类储户分别占总户数的 10%，60%，30%，而银行存款在 20 万元以上的储户在各类中所占的比例分别为 100%，60%，5%，试计算①存款在 20 万元以上的储户在全体储户中所占的比例；②一个存款在 20 万元以上的储户属于高收入的概率.

解：设 A_1={高收入}， $A_2=${中收入}， $A_3=${低收入}， B={存款 20 万元以上}

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=0.1\times1+0.6\times0.6+0.3\times0.05=0.475$$

所以： $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.1\times1}{0.475}=0.211$.