1. 证明事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，则事件 $A$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

解：若 $A$ 与 $B$ 相互独立，则有 $P(AB)=P(A)P(B)$，

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B}),$$

所以 $A$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

2. 设 $A$ 与 $B$ 为两个事件，如果 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，则 $A$ 与 $B$ 相互独立.

解：若 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，则 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$ ，所以 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

即：$P(AB)[1-P(B)]=P(B)[P(A)-P(AB)]$,得 $P(AB)=P(A)P(B)$，

所以 $A$ 与 $B$ 相互独立.

3. 称一个元件能正常工作的概率为这个元件的可靠性，称由多个元件组成的系统能正常工作的概率为这个系统的可靠性，如果有三个可靠性都是 $p$ 的元件，且各元件能否正常工作是相互独立的，当它们以串联的方式组成系统Ⅰ或者以并联的方式组成系统Ⅱ时，试分别计算系统Ⅰ和Ⅱ的可靠性.

解：用 $A,B,C$ 表示元件 $A,B,C$ 可靠,已知 $P(A)=P(B)=P(C)=p$ ,且 $A,B,C$ 相互独立,

则 $P$ {系统Ⅰ正常工作} $=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=p^3$；

$P$ {系统Ⅱ正常工作} $=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-(1-p)^3$ .

4.三射手中靶的概率分别为 0.6，0.7，0.8，它们相互独立的各射击一次，试计算

①有一名射手中靶的概率；②至少有一名射手中靶的概率.

解：$A,B,C$ 分别表示三射手中靶

已知 $P(A)=0.6$ ， $P(B)=0.7$ ， $P(C)=0.8$ ， $A,B,C$ 相互独立，

① $P(\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A}\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})+P(A\overline{B}\overline{C})$

$=P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})$

$=0.4\times0.3\times0.8+0.4\times0.7\times0.2+0.6\times0.3\times0.2=0.188$;

② $1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-0.4\times0.3\times0.2=0.976$.

5. 某射手命中 10 环的概率为 0.5，命中 9 环的概率为 0.3，命中 8 环的概率为 0.2 .如果他射

出 3 发子弹，试计算①命中 28 环的概率；②至少命中 28 环的概率.

解：设 $A_i=\{$第 $i$ 次命中 10 环$\}$，　$B_i=\{$第 $i$ 次命中 9 环$\}$，　$C_i=\{$第 $i$ 次命中 8 环$\}, i=1,2,3$.

因为　28=10+9+9=10+10+8，所以

① $P\{$命中 28 环$\}=C_3^1P(A_1A_2C_3)+C_3^1P(A_1B_2B_3)=C_3^1P^2(A)P(C)+C_3^1P(A)P^2(B)$

$$=3\times(0.5^2\times0.2+0.5\times0.3^2)=0.285$$

② $P\{$至少命中 28 环$\}=C_3^1P(A_1B_2B_3)+C_3^1P(A_1A_2B_3)+C_3^1P(A_1A_2C_3)+P(A_1A_2C_3)$

$$=3(0.5\times0.3^2+0.5^2\times0.3+0.5^2\times0.2)+0.5^3=0.635 .$$

6. 假设某牌电灯泡的耐用时数在 1000 小时以上的概率为 0.2，试计算三个电灯泡使用 1000 小时以后，①只有一个损坏的概率；②最多只有一个损坏的概率.

解：$A=\{$使用 1000 小时后灯泡损坏$\}$，$P(A)=0.8$，

①　$P_3(1)=C_3^1\times(0.8)\times0.2^2=0.096$；

②　$P=P_3(0)+P_3(1)=C_3^0\times(0.8)^0\times0.2^3+C_3^1\times(0.8)\times0.2^2=0.104$ .

7. 甲、乙两人向同一目标独立的各射击一次, 命中率分别为 1/3 和 1/2，①试计算目标被命中的概率；②如果已知目标被命中，计算它是 被甲命中的概率.

解：设 $A=\{$甲命中$\}$，$B=\{$乙命中$\}$,

① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=2/3$，

② $P(A|C)=\dfrac{P(A)P(C\mid A)}{P(C)}=\dfrac{1}{3}\times1\Big/\dfrac{2}{3}=1/2$ .

8. 已知甲袋中有 3 只白球 7 只红球 15 只黑球，乙袋中有 10 只白球 6 只红球 9 只黑球，如果从两袋中各取一球，试计算两球颜色相同的概率.

解：设 $A_i\ (i=1,2,3)$ 分别表示甲袋中取出一白，一红，一黑球;

$B_i\,(i=1,2,3)$ 分别表示乙袋中取出一白，一红，一黑球

则 $P\{$两球颜色相同$\}=P(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)$

$$=P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)+P(A_3)P(B_3)=\frac{3}{25}\times\frac{10}{25}+\frac{7}{25}\times\frac{6}{25}+\frac{15}{25}\times\frac{9}{25}=\frac{207}{625}.$$

9. 假设飞机的发动机在飞行中出故障的概率为 $1-p$，且各个发动机出故障是相互独立的。如果有 50%以上的发动机能正常工作，飞机就平安无事.试求合适的 $p$，使得有 4 个发动机

的飞机比只有 2 个发动机的飞机更加可靠.

解：设 $A=\{4$ 个发动机的飞机正常工作$\}$，　$B=\{2$ 个发动机的飞机正常工作$\}$，

若 $P(A)>P(B)$　　(1)

则 $P(A)=P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=C_4^2p^2(1-p)^2+C_4^3p^3(1-p)+C_4^4p^4$，

$P(B)=P_2(1)+P_2(2)=C_2^1p(1-p)+C_2^2p^2(1-p)^0$.

代入（1），解不等式得：　$P>2/3$.

10. 某种子公司通过多次试验得知，某批西瓜种籽的发芽率为 95%，出售时将 10 粒装成一包，并保证至少有 9 粒能够发芽，否则退赔，试计算出售的任意一包需要退赔的概率。

解：$\mathrm{P}=1-\mathrm{P}_{10}(9)-\mathrm{P}_{10}(10)=1-\mathrm{C}_{10}^9(95\%)^9(5\%)-\mathrm{C}_{10}^{10}(95\%)^{10}(5\%)^0=0.086$.

11. 如果因接受输血而发生不良反应的概率是 0.001，试计算 2000 人接受输血后，①有 2 人发生不良反应的概率；②至少有 2 人发生不良反应的概率.

解：$n=2000,\ p=0.001,\ \lambda=np=2000\times0.001=2$.

① $P_{2000}(2)=\lambda^2e^{-\lambda}/2!=2^2e^{-2}/2!=2e^{-2}$；

② $1-P_{2000}(0)-P_{2000}(1)=1\lambda^0e^{-\lambda}/0!-\lambda e^{-\lambda}/1!=1-e^{-2}-2e^{-2}$.

12. 某保险公司预计，每一年因某种事故而死亡的客户占总数的 0.005%，试计算一年内 10000 个客户至少有四户以上需要理赔的概率.

解：$\because n=10000,\ p=0.00005,\ \lambda=0.005\%\times10000=0.5$,

$\therefore \mathrm{p}=1-\mathrm{P}_{1000}(0)-\mathrm{P}_{1000}(1)-\mathrm{P}_{1000}(2)-\mathrm{P}_{1000}(3)=1-\lambda^0e^{-\lambda}/0!-\lambda e^{-\lambda}/1!-\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}/2!-\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}/3!=0.0018$.

13. 对某敌舰相互独立的炮击两次，每次发射一发炮弹，命中率分别是 0.6 和 0.7，敌舰中一弹与中两弹而被击沉的概率分别是 0.6 和 0.8，求炮击两次后敌舰被击沉的概率.

解：设 $A_i$ 表示第 $i$ 次命中，$B$ 表示击沉，因为 $A_i$ 相互独立，已知：$P(A_1)=0.6$，

$P(A_2)=0.7$，$P(B|\overline{A_1}A_2)=P(B|A_1\overline{A_2})=0.6$　，$P(B|A_1A_2)=0.8$

则 $P(A_1\overline{A_2}B+A_1A_2B+\overline{A_1}A_2B)=P(A_1\overline{A_2}B)+P(A_1A_2B)+P(\overline{A_1}A_2B)$

$=P(A_1\overline{A_2})P(B|A_1\overline{A_2})+P(A_1A_2)P(B|A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)P(B|\overline{A_1}A_2)$

$=P(A_1)P(\overline{A_2})P(B|A_1\overline{A_2})+P(A_1)P(A_2)P(B|A_1A_2)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(B|\overline{A_1}A_2)$

$=0.6\times0.3\times0.6+0.6\times0.7\times0.8+0.4\times0.7\times0.6=0.612$.

14.　电话分机网络有用户 6 家，每小时每户平均用电话 6 分钟，各户用电话相互独立，求：①每小时恰好有 2 户用电话的概率；②每小时至少有 2 户用电话的概率；③每小时至多有 2 户用电话的概率.

解：$n=6,\ p=6/60=1/10$，

① $P_6(2)=C_6^2 p^2(1-p)^4=C_6^2\times 0.1^2\times 0.9^4=0.098$；

② $P\{\text{至少有 2 户用电话}\}=1-P_6(0)-P_6(1)=1-C_6^0\times 0.1^0\times 0.9^6-C_6^1\times 0.1^1\times 0.9^5=0.114$；

③ $P\{\text{至多有 2 户用电话}\}=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)$

$$=C_6^0\times P^0\times(1-P)^6+C_6^1\times P^1\times(1-P)^5+C_6^2P^2(1-P)^4=0.984\ .$$

15．每一门高射炮发射一发炮弹击中敌机的概率为 0.6，如果 k 门高射炮同时各发射一发炮弹，试计算数值 k 确保击中某架来犯敌机的概率为 0.99.

解：$n=k,p=0.6,$

依题意有：$1-P_k(0)\ge 0.99,$ 所以 $C_k^0 0.6^0 0.4^k\le 0.01$，

即 $k\ge 6$.

16．甲,乙两选手进行乒乓球单打比赛，如果每一局甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4，比赛时可以采用 3 局 2 胜制或 5 局 3 胜制，试分析在哪一种赛制下，甲选手获胜的可能性较大？

解：已知三局两胜制下（2　：0　，　2　：1），

$P_1\{\text{甲胜}\}=C_2^2 0.6^2+(C_3^2-C_2^2)\times 0.6^2\times 0.4=0.648$；

[注：（$C_3^2-C_2^2$）表示去掉前两场胜第三场输的情况，因为前两场胜了就不打第三场]

五局三胜制下（3：0，　3：1　，3：2），

$P_2\{\text{甲胜}\}=C_3^3 0.6^3+(C_4^3-C_3^3)\times 0.6^3\times 0.4+(C_5^3-C_4^3)\times 0.6^3\times 0.4^2=0.68256$

[注：（$C_5^3-C_4^3$）表示去掉前四场胜第五场输的情况，因为前四场胜了就不打第五场]

经比较　$P_1\{\text{甲胜}\}<P_2\{\text{甲胜}\}$　，即 5 局 3 胜制可能性大