1．设 X 的分布密度为 $p(x)=\begin{cases}2x,0<x<1\\0,其它\end{cases}$，试求 $Y=2X,Z=X^2$ 的分布密度。

解：(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X\le y\}=P\left\{X\le\dfrac{y}{2}\right\}$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}}p(x)dx=\begin{cases}0, & y/2\le 0\\ \int_0^{\frac{y}{2}}2xdx, & 0<y/2<1\\ 1, & y/2\ge 1\end{cases}$$

$$\therefore P_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(2) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2\le z\}\underline{\underline{\ z>0\ }}P\{-\sqrt{z}\le X\le\sqrt{z}\}=\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}f(x)dx$

$$=\int_0^{\sqrt{z}}f(x)dx=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{z}}2x\,dx=z & \sqrt{z}\le 1\\ 1 & \sqrt{z}>1\end{cases}$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2\le z\}=0$

综上有：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ z, & 0<z\le 1\\ 1, & z>1\end{cases}$，　　$P_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1 & 0<z\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

2．若 X 的分布密度为 $p(x),a\ne 0$，试求 $Y=aX+b$ 的分布密度。

解：$X\sim p(x)$,假设 $Y=aX+b$ 的分布函数是 $F_Y(y)$，则由定义得到：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{aX+b\le y\}$$

当 $a>0$ 时，　$F_Y(y)=P\left\{X\le\dfrac{y-b}{a}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}}p(x)\,dx$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=p\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}$$

当 $a<0$ 时，　$F_Y(y)=P\left\{X\ge\dfrac{y-b}{a}\right\}=\int_{\frac{y-b}{a}}^{+\infty}p(x)\,dx$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=-p\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}$$

综上 $P_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} p(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a} & a>0 \\ -p(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a} & a<0 \end{cases}$， 即 $P_Y(y)=P(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{|a|}$

3.若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求 $Y=e^X$ 的分布密度.

解： $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty<x<+\infty$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$

当 $y>0$ 时， $F_Y(y)=P\{X\le \ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\cdot e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

当 $y\le 0$ 时， $F_Y(y)=0$， $p_Y(y)=F_Y'(y)=0$

综上 $P_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\cdot e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}} & y>0 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

4.若 $X\sim U(1,3)$，试求 $Y=X^2$ 的分布密度.

解： $X\sim U(1,3)$, $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 1<x<3 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$,

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

当 $y\ge 0$ 时， $F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}p(x)dx$

若 $\sqrt{y}\le 1$，则 $F_Y(y)=0$；

若 $1<\sqrt{y}\le 3$，则 $F_Y(y)=\int_1^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx$；

若 $\sqrt{y}>3$, 则 $F_Y(y)=1$.

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=0$

综上有，$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 1 \\ \int_1^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx & 1<y\le 9 \\ 1 & y>9\end{cases}$ $\quad p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}} & 1<y\le 9 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

5．设 X 与 Y 相互独立且都服从 $N(0,1)$ 分布，试求 $Z=X+Y$ 的分布密度．

解：$X\sim N(0,1)$, $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<+\infty$

$Y\sim N(0,1)$, $p(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\qquad -\infty<y<+\infty$

X 与 Y 相互独立， $p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\qquad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$

由卷积公式 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,z-x)dx$ 得

$Z=X+Y$ 的分布密度

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}}dx\,,$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2x^2-2zx}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot e^{\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}d(x-\frac{z}{2})\qquad (*)$$

又 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}d(x-\frac{z}{2})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ (微积分 7.3 节例题结论)

$$\therefore (*)=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}},$$

即 $Z=X+Y\sim N(0,2)$.

6．设 X_1，X_2，..., X_5 相互独立且都服从 $N(12,5)$ 分布，试求 $P\left\{\sum_{i=1}^{5}X_i>65\right\}$

解: X_1，X_2，..., X_5 相互独立,且 $X_i\sim N(12,5)$

$$\therefore \sum_{i=1}^{5}x_i\sim N(60,\,25),$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{5}x_i>65\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{5}x_i\le 65\right\}=1-\Phi(\frac{65-60}{5})=1-\Phi(1)$$

=1-0.8413=0.1587.

7．设X与Y相互独立且都服从$N(0,1)$分布，试求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布密度．

解： $X\sim N(0,1)$, $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<+\infty$

$Y\sim N(0,1)$, $p(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\qquad -\infty<y<+\infty$

X与Y相互独立， $p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\qquad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$

$F_z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$

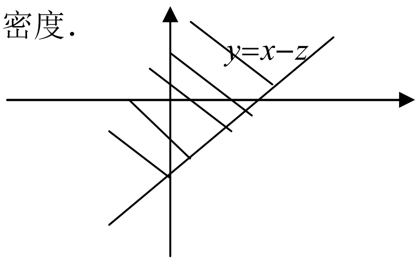
当$z\ge 0$时， $F_z(z)=\int_0^{2\pi}[\int_0^z\dfrac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}rdr]d\theta=\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$ ；

当$z<0$时， $F_z(z)=0$．

综上， $F_z(z)=\begin{cases}\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr & z\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$p_Z(z)=F_z'(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}} & z>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

8．若(X,Y)的分布密度为$p(x,y)$,试求$X-Y$的分布密度．



解：记$Z=X-Y$ 其分布函数设为$F_Z(z)$则

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x-z}^{+\infty}p(x,y)dy\right]dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{+\infty}^{x-z}-p(x,y)dy\right]dx$

在积分$\int_{+\infty}^{x-z}-p(x,y)dy$中，

y	$+\infty$	$x-z$
u	$-\infty$	z

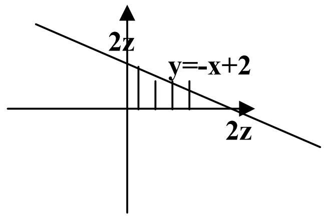
令$u=x-y,y=x-u,dy=-du$

代入上式则$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}p(x,x-u)\,du\right]dx=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-u)\,dx\right]du$

故$P_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-z)dx$．

9．若(X,Y)的分布密度为$p(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,y>0; \\ 0 & 其它 \end{cases}$

试求$Z=\dfrac{1}{2}(X+Y)$的分布密度.



解： $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{1}{2}(X+Y)\le z\}=P\{(X+Y)\le 2z\}$

当$z>0$时，

$$F_Z(z)=\int_0^{2z}dx\int_0^{2z-x}e^{-x}\cdot e^{-y}dy=\int_0^{2z}e^{-x}(1-e^{x-2z})dx$$

$$=\int_0^{2z}e^{-x}(1-e^{x-2z})dx=[-e^{-x}-e^{-2z}x]_0^{2z}=-2ze^{-2z}-e^{-2z}+1;$$

$$P_Z(z)=F_Z^{'}(z)=4ze^{-2z}$$

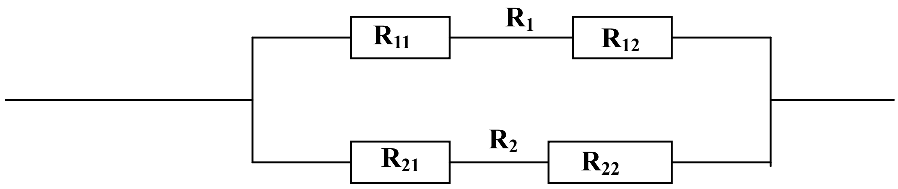
当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$；

$$P_Z(z)=F_Z^{'}(z)=0$$

综上，$P_Z(z)=\begin{cases} 4ze^{-2z} & z>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$.

10．有四个工作相互独立的元件 R_{ij}(i,j=1,2)，它们的寿命（单位：h）都服从参数为λ的指数分步。若 R_{11} 与 R_{12} 串联为子系统 R_1，R_{21} 与 R_{22} 串联为子系统 R_2，子系统 R_1 与 R_2 未并联系统 R，R 的寿命为 Z，试求 Z 的分布密度.

解：如图示



设 R_{ij}(i,j=1,2)的寿命为$X_{ij}(i,j=1,2)$，R_1,R_2 的寿命分别为 Z_1, Z_2,

则 $Z_1=\min\{X_{11},X_{12}\}$,

Z_1的分布函数$F_{Z_1}(z)=1-(1-F_{X_{11}}(z))\cdot(1-F_{X_{12}}(z))=1-(1-F_{X_{11}}(z))^2$,

$$=\begin{cases} 1-\left[1-(1-e^{-\lambda z})\right]^2 & z>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1-e^{-2\lambda z} & z>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}.$$

同理，Z_2的分布函数与Z_1相同.

又$Z=\max\{Z_1,Z_2\}$,故Z的分布函数为：

$$F_Z(z)=F_{Z_1}(z)F_{Z_2}(z)=[F_{Z_1}(z)]^2=\begin{cases}(1-e^{-2\lambda z})^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

Z 的分布密度：$p_Z(z)=[F_{Z_1}^2(z)]'=2F_{Z_1}(z)F'_{Z_1}(z)=\begin{cases}4\lambda(e^{-2\lambda z}-e^{-4\lambda z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$.

11. 若X与Y相互独立且都服从$U(0,1)$，试求$\min(X,Y)$与$\max(X,Y)$的分布密度.

解：设 $Z_1=\min(X,Y)$，$F_{z_1}(z)=1-(1-F_X(z))^2$

X,Y相互独立同分布,故Z_1的分布密度$p_{Z_1}(z)=2(1-F_X(z))p_X(z)$，

并且$F_X(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ z & 0<z\le 1\\ 1 & z>1\end{cases}$，故$p_{Z_1}(z)=\begin{cases}2(1-z) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

设$Z_2=\max(X,Y)$，其分布函数为$F_{Z_2}(z)=F_X^2(z)$，

$$p_{Z_2}(z)=F'_{Z_2}(z)=2F_X(z)p_X(z)=\begin{cases}2z & 0<z<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$

12．设随机变量X服从参数为λ的指数分布，则$Y=\min\{X,2\}$的分布函数[D].

（A）是连续函数；（B）至少有两个间断点；（C）是阶梯函数；（D）恰好有一个间断点.

解：$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $\lambda>0$，$Y=\min\{X,2\}$

$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\min\{X,2\}<y\}$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{X\le y\}=F_X(y)=0$;

当$0<y<2$时，$F_Y(y)=P\{X\le y\}=F_X(y)=1-e^{-\lambda y}$;

当$y\ge 2$时，$F_Y(y)=P\{\min\{X,2\}\le y\}\underline{\underline{\ \min\{X,2\}\le 2\ }}1$.

故$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ 1-e^{-\lambda y} & 0<y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}$，$y=2$为间断点.