# 华中农业大学本科课程期末考试试卷

考试课程：**概率论与数理统计 A**　　　　试卷类型：B

学年学期：2007-2008-1　　　　考试日期：2008-01-

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | | | |

※※※ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ ※※※

装 订 线

| 本题得分 | |
|---|---|

**一、单项选择题**（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其字母代号写在该题【　】内。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1．在假设检验问题中，原假设为 $H_0$，备择假设为 $H_1$，则成为犯第一类错误的是　【 B 】

A. $H_0$ 不真，接受 $H_0$；B. $H_0$ 为真，接受 $H_1$；

C. . $H_0$ 不真，接受 $H_1$；D. $H_0$ 为真，接受 $H_0$.

2．如果 $X$ 与 $Y$ 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则必有　【B 】

A. $X$ 与 $Y$ 相互独立；　B. $X$ 与 $Y$ 不相关；

C. $D(Y)=0$ ；　D. $D(X)D(Y)=0$.

3．设 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 相互独立，且服从同一分布，$EX_1$ 存在，$Y=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$　【 C 】

则 $E(Y)=$

A. 1；　B. $-1$；　C. 0；　D. 2.

4．设 $X$ 与 $Y$ 是两个连续型随机变量它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则　【 B 】

A. $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

B. $\frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]$ 必为某一随机变量的概率密度；

C. $f_1(x)-f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

D. $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

5．设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，且知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$　【 A 】

A. 1；　B. 2；　C. 3；　D. 4.

| 本题得分 | |
|---|---|

二、**填空题**（将答案写在该题横线上。每小题3分，共15分。）

1. 设随机变量 $X \sim N(0,1), Y = 2X-1$，则 $E(Y)$ ＝$\underline{-1}$；

2. 设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取样本为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，则 $\mu$ 的矩估计量是 $\underline{\overline{X}}$；

3.设总体 $X$ 服从正态分布 $N(0, 2^2)$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 是来自总体的样本，则统计量 $Y = \dfrac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)}$ 服从 $\underline{F(10,5)}$ 分布 ；

4. 若总体 $X$ 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，由来自 $X$ 的容量为 16 的简单随机样本，测得样本均值为 503.75，样本标准差为 6.2022，则 $\mu$ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间（$t_{0.025}(15)$ ＝2.1315）为$\underline{（500.4，507.1）}$；

5. 设总体 $X$ 服从 $N(\mu,1)$ 分布，$X_1$，$X_2$ 是一个样本，则两个无偏估计量 $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$，$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$，中有效的是$\underline{\hat{\mu}_1}$.

| 本题得分 | |
|---|---|

三、（10分，要求写清步骤及结果）重复掷硬币100次，设每次出现正面的概率均为0.5.试计算正面出现的次数大于50而不超过60的概率.（$\Phi(2) = 0.9772$）

解　用X表示出现正面的次数，则X～B(100, 0.5)　　（3分）

利用中心极限定理

$$P(50 < X \le 60) = \Phi\left(\frac{60-50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{50-50}{5}\right) = \Phi(2) - \Phi(0)$$

=0.9772-0.5=0.4772　　（10分）

| 本题得分 | |
|---|---|

四、（10分，要求写清步骤及结果）设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, 0 \le x \le 1 \\ 0, \ 其它 \end{cases}$，其中θ>0是未知参数，$X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $X$ 的样本. 求θ的最大似然估计量.

解　似然函数，$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} (\theta+1) X_i^{\theta} = (\theta+1)^n X_1^{\theta} \cdots X_n^{\theta}$　　（3分）

$$\ln(L(\theta)) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$　　（5分）

令 $\dfrac{d(\ln L(\theta))}{d\theta} = \dfrac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0$

得 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$ .（10分）

| 本题得分 | |
|---|---|

五、（12分，要求写清步骤及结果）设总体$X$的概率密度为

$f(x)=\begin{cases}2x,0\le x\le 1\\ 0,\ 其它\end{cases}$，$X_1,\cdots,X_n$是来自$X$的一样本.

（1）求$\max(X_1,\cdots,X_n)$的概率密度；（2）求$P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>\dfrac{1}{2}\}$.

解 (1) 因为$X$的分布函数$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ x^2,0\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$

$F_{\max}(x)=(F(x))^n=\begin{cases}0,x<0\\ x^{2n},0\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$，$f_{\max}(x)=\begin{cases}2nx^{2n-1},0<x<1\\ 0,其它\end{cases}$（6分）

(2) $P\{\min(X_1,\cdots,X_5)>\dfrac{1}{2}\}=\prod\limits_{i=1}^{n}P(X_i>\dfrac{1}{2})=[P(X>\dfrac{1}{2})]^n=[\int_{\frac{1}{2}}^{1}2xdx]^n=(\dfrac{3}{4})^n$

（12分）

| 本题得分 | |
|---|---|

六、（12分，要求写清步骤及结果）中药厂从一种中药材中提取某种有效成分．现对同一质量的药材，用两种方法各做了10次试验，两种方法分别用$X$与$Y$表示，且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$相互独立，从观测值得 $\bar{x}=76.23,s_x^2=3.325,\bar{y}=79.43,s_y^2=2.225$，现取$\alpha$=0.01．求（1）两种方法方差有无差异；（2）两种方法均值有无差异．（$F_{0.005}(9,9)$=6.54, $t_{0.005}(18)$=2.8784）

解 （1）$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$

F=3.325/2.225=1.49 (3分)

因为 $F_{0.005}(9,9)$=6.54，则$F_{0.995}(9,9)$=1/6.54=0.1529,

0.1529<F=1.49<6.54 ，接受原假设，认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (6分)

（2）认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_0:\mu_1=\mu_2,H_1:\mu_1\ne\mu_2$

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=\frac{76.23-79.43}{\sqrt{2.775}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}=-4.2953$$ （10分）

$|T| > t_{0.005}(18) = 2.8784$，故拒绝原假设，即认为均值有差异.（12 分）

| 本题 | |
|---|---|
| 得分 | |

**七**、（12分，要求写清步骤及结果）三台机器制造同一种产品，记录五天的产量如下：

| 机器 | 日 产 量 | | | | | $T_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 38 | 44 | 35 | 49 | 43 | 209 |
| $A_2$ | 63 | 48 | 52 | 46 | 57 | 266 |
| $A_3$ | 55 | 44 | 59 | 47 | 53 | 258 |

用方差分析检验这三台机器的日产量是否有显著差异（写出方差分析表），并估计各个总体的未知参数 $\mu_{i\cdot}$ 和 $\mu$ .（$\alpha = 0.05, F_{0.05}(2,12) = 3.89$）

解 $H_0$：三台机器的日产量没有显著差异.

s=3,n=15, $T_{1\cdot} = 209, T_{2\cdot} = 266, T_{3\cdot} = 258, T = 733,$

$\sum X_{1j}^2 = 8855, \sum X_{2j}^2 = 14342, \sum X_{3j}^2 = 13460, \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 = 36657,$（3 分）

$C = \dfrac{T^2}{n} = 35819.267, \sum_{i=1}^{3}\dfrac{T_i^2}{n_i} = 36200.2$，

SST=837.7, SSA=380.9, SSE=SST-SSA=456.8.

方差分析表

| 来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | F 值 | 显著性 |
|---|---|---|---|---|---|
| SSA | 380.9 | 2 | 190.45 | 5 | * |
| SSE | 456.8 | 12 | 38.06 | | |
| SST | 837.7 | 14 | | | |

F=5>3.89 ,产品有显著差异。 （10 分）

$\hat{\mu}_1 = \bar{x}_{1\cdot} = 41.8$，$\hat{\mu}_2 = \bar{x}_{2\cdot} = 53.2$， $\hat{\mu}_3 = \bar{x}_{3\cdot} = 51.6$，$\hat{\mu} = \bar{x}_{\cdot\cdot} = 48.9$.（12分）

| 本题 | |
|---|---|
| 得分 | |

八、（14 分，要求写清步骤及结果）为研究某种商品单位家庭的月需求量 y 与该商品的价格 $x$ 之间的关系，通过做调查得到以下的数据：

| 价格 $x$ | 1.0 | 2.0 | 2.0 | 2.3 | 2.5 | 2.6 | 2.8 | 3.0 | 3.3 | 3.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 月需求量 $y$ | 5.0 | 3.5 | 3.0 | 2.7 | 2.4 | 2.5 | 2.0 | 1.5 | 1.3 | 1.2 |

1）求 $\bar{x}, \bar{y}, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}$；

2）求 $Y$ 对 $x$ 的线性回归方程；

3）在 $\alpha = 0.05$ 下用 t 检验法检验回归方程的显著性.（$t_{0.025}(8) = 2.306$）

解 1）

$\sum x_i = 25, \sum x_i^2 = 67.28, \bar{x} = 2.5,$

$\sum y_i = 25.1, \sum y_i^2 = 74.93, \overline{y} = 2.51, \sum x_i y_i = 1240$

$S_{xx} = \sum x_i^2 - n\overline{x}^2 = 4.78, S_{xy} = \sum x_i y_i - n\overline{x}\overline{y} = -7.45, S_{yy} = \sum y_i^2 - n\overline{y}^2 = 11.929$

（5 分）

2） $b = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = -1.56, a = \overline{y} - b\overline{x} = 6.406.$

故回归方程　$\hat{y} = a + bx = 6.406 - 1.56x.$　（10 分）

3）$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{SSE}{n-2} = \dfrac{1}{8}(S_{yy} - bS_{xy}) = 0.04$

$|t| = |b|\sqrt{\dfrac{S_{xx}}{SSE/(n-2)}} = -1.56\sqrt{\dfrac{4.78}{0.04}} = 17.05 > t_{0.025}(8) = 2.306$，

故回归方程显著.　（14 分）