华中农业大学本科课程期中考试试卷

考试课程:**概率论与数理统计B** 学年学期:2008-2009-1 考试日期:2008-11-14

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								
评卷人								

本题得分	

一、单项选择题(从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案,并将其字母代号写在该题【 】内。答案错选或未选者,该题不得分。每小题 4 分,共 20 分。)

1．设 A, B, C 是任意三个事件,则下列各命题正确的是 【 C 】

A. 若 $A+C=B+C$, 则 $A=B$.　　B. 若 $P(A)=P(B)$, 则 $A=B$.

C. 若 $A-B=A$, 则 $AB=\Phi$.　　D. 若 $P(AB)=0$, 则 $AB=\Phi$

2 从阿拉伯数字 $0,1,2,\cdots,9$ 中随意取四个数字(允许重复)排成一列,

结果恰好形成一个四位数,记 $A=\{$此数是奇数$\}$,则 $P(A)=$ 【 B 】

A. 0.3　　B. 0.5　　C. 0.4　　D. 0.6

3．设 $F_1(x),F_2(x)$ 分别是两个随机变量的分布函数, $f_1(x),f_2(x)$ 是相应的分布密度,则下列说法中正确的是 【 B 】

A. $F_1(x)+F_2(x)$ 是某随机变量的分布函数. B. $F_1(x)F_2(x)$ 是某随机变量的分布函数.

C. $f_1(x)+f_2(x)$ 是某随机变量的分布密度. D. $f_1(x)f_2(x)$ 是某随机变量的分布密度.

4．设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布,则 【 D 】

A. $X+Y$ 一定服从正态分布. B. " X 和 Y 不相关"与" X 和 Y 独立"等价.

C. (X,Y) 一定服从正态分布. D. $(X,-Y)$ 不一定服从正态分布

5. 设随机变量 X 的数学期望与方差分别是 μ 和 σ^2,则对于任意常数 c,有 【 D 】

A. $E(X-c)^2=E(X^2)-c^2$.　　B. $E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$.

C. $E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$.　　D. $E(X-c)^2\ge E(X-\mu)^2$.

※※※ 班级______ 姓名______ 学号______ ※※※

装 订 线

本题得分	

二、填空题（将答案写在该题横线上。每小题 4 分，共 20 分。）

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $P(X=k)=\dfrac{2}{3k}$，$P(Y=k)=\dfrac{4}{5k^2}$, $k=1,2$，则 $X+Y$ 的分布律是

X	2	3	4
P	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

2．从 $1,2,\cdots n$ 中不重复地随意取三个数，X 是其中最大的一个数，X 的分布律是

$P(X=k)=\dfrac{C_{k-1}^2}{C_n^3}\quad(k=3,4,\cdots n)$

3.设随机变量 X 与 Y 的方差都是 1,其相关系数是 0.25,记 $U=X+Y, V=X-2Y$，则 U 与 V 的协方差 $\mathrm{cov}(U,V)=-1.25$

4. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且均服从 $\lambda=1$ 的泊松分布，记 $Y=\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$, 则 $E(Y^2)=\dfrac{4}{3}$

5. 将一枚色子重复掷 n 次，$X_1,X_2\cdots X_n$ 表示各次掷出的点数，依大数定律，对于任意给定的正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\}=1$ 成立，那么 $\mu=\dfrac{7}{2}$

本题得分	

三、(13 分)某机器调整到良好状态时,生产的产品合格率是 0.9,而机器发生故障时，产品的合格率是 0.3，每天早上机器开动时，机器以良好状态运行的概率是 0.75. 请计算：

（1）某天早上机器开动后生产的第一件产品是合格品的概率；

（2）若某天早上机器开动后生产的第一件产品是合格品，机器开动时是良好状态的概率.　　解：

$A_1=\{$机器调整良好$\}$，$A_2=\{$机器未调整良好$\}$，$B=\{$生产的第一件产品是合格品$\}$

（1）$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.75\times0.9+0.25\times0.3=0.75$

（2）$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\dfrac{0.75\times0.9}{0.75\times0.9+0.25\times0.3}=0.9$

本题得分	

四、（13 分）设随机变量 X 服从参数是 λ 的指数分布，$F(x)$ 是其分布函数，而 $Y=F(X)$. 请计算：

（1）随机变量 Y 的分布函数；（2）Y 的期望 $E(Y)$.

解：（1） X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0\\ 0 \quad, x\le 0\end{cases}$ 由于分布函数的值域是 $[0,1]$，

于是，当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$，

而 $0<y<1$ 时，有：

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(1-e^{-\lambda X}<y)=P(X<-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y))=F(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y))=y$$

（2）其实 Y 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，故 $E(Y)=\dfrac{1}{2}$

本题得分	

五、（13 分）二维随机变量 (X,Y) 服从区域 D：$\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 上的均匀分布，计算后请回答：X 与 Y 的相关性如何？是否独立？

解：（1）(X,Y) 的分布密度是 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$E(X)=\iint_{xoy} xp(x,y)dxdy=0,\ E(Y)=\iint_{xoy} yp(x,y)dxdy=0,\ E(XY)=\iint_{xoy} xyp(x,y)dxdy=0,$$

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$, 故 $\rho(X,Y)=0$, 即 X 与 Y 不相关。

（2）当 $-1<x<1$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{\pi}dy=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$

同理，当 $-1<x<1$ 时，$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1\\ 0 & 其他\end{cases};\quad p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

因 $p(x,y)\ne p_X(x)\ p_Y(y)$，故即 X 与 Y 不相互独立。

本题得分	

六、（13 分）某零件成箱的重量是随机变量，其期望是 50 千克，标准差是 5 千克，若承运这批零件的汽车的最大载重量是 5 吨，问该车最多可以装多少箱，才能保障以97.72%的概率不超载？

（附$\Phi(2)=0.9772$ ）

解：$X_i=\{$汽车装载的第i箱产品的重量$\}$，$i=1,2\cdots n$， n是所求箱数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，总重量$T=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

因$EX_i=50$，$\sqrt{DX_i}=5$，故$ET=50n$，$\sqrt{DT}=5\sqrt{n}$. 依独立同分布的中心极限定理，n充分大时（这里n显然接近 100），$\dfrac{T-50n}{5\sqrt{n}}$近似服从$N(0,1)$.

从而，$P(T\le 5000)=P(\dfrac{T-50n}{5\sqrt{n}}\le\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}})\ge 0.9772$，有$\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}\ge 2$，可得

$n\le 98$

即：最多装 98 箱，才能保障以97.72%的概率不超载.

本题得分	

七、（8 分）请说明“抽签时不必争先恐后”.

解：不妨假设共有n张签，其中m张签是“中奖”的签.

A_i表示第i个抽签的人“中奖”，$i=1,2,\cdots n$

（1） 有放回抽签，显然，$P(A_i)=\dfrac{m}{n}$

（2） 无放回抽签.

$P(A_1)=\dfrac{m}{n}$， $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\dfrac{m}{n}\dfrac{m-1}{n-1}+\dfrac{n-m}{n}\dfrac{m}{n-1}=\dfrac{m}{n}$

同理，$P(A_2)=P(A_3)$， $\cdots$， $P(A_{n-1})=P(A_n)$

即每个人“中奖”的概率都是$\dfrac{m}{n}$。