华中农业大学本科课程考试
参考答案与评分标准

考试课程：概率论与数理统计　　　　　　学年学期：
试卷类型：A 卷　　　　　　　　　　　　考试时间：

一、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其字母代号写在该题【　】内。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 2 分，共 10 分。）

1. 设 A、B 满足 $P(B|A)=1$，则_____.　　【 d 】

（a）A 是必然事件；（b）$P(B|\bar{A})=0$；（c）$A\supset B$；（d）$P(A)\le P(B)$.

2. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则概率 $P(X\leqslant 1+\mu)=$（　）　　【 d 】

A） 随 μ 的增大而增大 ；　　B） 随 μ 的增加而减小；

C） 随 σ 的增加而增加；　　D） 随 σ 的增加而减小.

3. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2 未知，X_1,X_2,X_3 是总体 X 的一个简单随机样本，则下列表达式中不是统计量的是____________.　　【 c 】

（a）$X_1+X_2+X_3$；（b）$\min(X_1,X_2,X_3)$；（c）$\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$；（d）$X+2\mu$.

4. 在假设检验中，H_0 表示原假设，H_1 表示备择假设，则成为犯第二类错误的是________.　　【 c 】

（a）H_1 不真，接受 H_1；　　（b）H_0 不真，接受 H_1；

（c）H_0 不真，接受 H_0；　　（d）H_0 为真，接受 H_1.

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自于正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\qquad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是________________.　　【 b 】

（a）$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$；（b）$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$；（c）$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$；（d）$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

二、填空题（将答案写在该题横线上。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 2 分，

共 10 分。）

1．10 部机器独立工作,因检修等原因,每部机器停机的概率为 0.2，同时停机数目为 3 部的概率= $C_{10}^{3}\square 0.2^{2}\square 0.8^{7}$ **或 0.201** 。

2. 在单因素方差分析中，试验因素 A 的 r 个水平的样本总容量为 n，则当原假设 H_0 成立时，SSA/σ^2 服从 **X^2(r-1)** 分布，MSA/MSE 服从 **F(r-1,n-r)** 分布.

3. 若随机变量 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 相互独立，且都服从正态分布 N(0,1)，则 $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ 服从 **N(0, n)** 分布.

4. 若总体服从正态分布 N(μ，σ^2)，从中抽取样本为：x_1，x_2，⋯，x_n，则μ的矩估计是 $\bar{x}$.

5. 在区间估计的理论中，当样本容量给定时，置信度与置信区间长度的关系是 **置信度** 越大，置信区间长度越长 .

三、(10 分，要求写清步骤及结果) 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重 50 千克，标准重为 5 千克.若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977。(*附：$\Phi(2)=0.977$ 其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。*)

解 设 X_i (i=1,2,…,n)是装运的第 i 箱的重量(单位:千克)，n 是所求箱数.由条件 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 视为独立同分布随机变量，而 n 箱总重量 $T_x= X_1+X_2+\dots+X_n$ 是独立变量之和，依题意有 ··················（2 分）

$EX_i=50$，$\sqrt{DX_i}=5$，$ET_n=50n$，$\sqrt{DT_n}=5\sqrt{n}$ (单位：千克). ··················（2 分）

根据独立同分布中心极限定理，T_n 近似服从正态分布 N(50n,25n).箱数应满足条件

$$P\{T_n\le 5000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\le\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2),$$ ···············（4 分）

由此可见 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$. 从而 $n<98.0199$， 即最多可以装 98 箱. ··················（2 分）

舍去 $n > 102$.

四、(10 分，**要求写清步骤及结果**) 设某厂生产的电灯的寿命 ξ 服从指数分布 E(λ),

其分布密度为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0 \quad , \quad x\le 0\end{cases}$, 为了确定其参数 λ ,现在抽样试验得到如下数据

(单位:小时): **1020, 1111, 1342, 998, 1308, 1623**

试用极大似然法确定未知参数 λ 的极大似然估计.

解: 似然函数 $L=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}$ .... **（2 分）**

取对数: $l=\ln L=n\ln\lambda-\lambda n\bar{x}$,

求导数: $\frac{dl}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-n\bar{x}=0$, ... **（4 分）**

得: $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{1}{1233.67}=8.1\times 10^{-4}$. .... **（4 分）**

五、(12 分，**要求写清步骤及结果**) 已知某树种的木材横纹抗压力遵从正态分布,随机抽取该中木材的试件 9 个,做横纹抗压力试验,获得下列数据(单位 kg/cm2):

482, 493, 457, 510 ,446, 435, 418, 394, 469.

试以 95%的可靠性估计该木材的平均横纹抗压力. *(附 $t_{0.975}(9-1)=2.306$)*

解: 此为小样本问题. 总体 X 具有分布为 N(μ , σ^2), μ , σ^2 均未知.用

$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s^*}$ (或 $T=\frac{\sqrt{n-1}(\bar{x}-\mu)}{s}$) .... **（4 分）**

$\bar{x}=456$, $s^*=37.0135$, $s=34.8967$, ... **（4 分）**

$\Delta=\frac{s^*}{\sqrt{n}}t_{0.975}(9-1)=28.45$, ... **（2 分）**

$\mu \in [\bar{x} - \varDelta, \bar{x} + \varDelta] = [427.55, 484.45]$. .... **（2 分）**

为此抽样下的置信区间.

六、(15 分，要求写清步骤及结果) 设有甲乙两块 10 年生人工马尾林，所研究的标志为胸径.

已知林木的分布近似服从正态分布.用重复抽样方式分别从两总体中抽取了若干林木，测其胸径得数据如表(单位:dm)问：

1)甲，乙二地林木胸径的方差是否有显著差异?(α=0.05)

2)甲地林木的胸径是否比乙地林木的胸径小?

x_{1j}(甲)	4.5	8.0	5.0	2.0	3.5	5.5
x_{2j}(乙)	3.0	5.0	2.0	4.0	5.0	5.0

(附: $F_{0.975}(6-1,6-1)=7.15$， $t_{0.95}(6+6-2)=1.812$)

解 1) 1^0 提出假设: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$， .... (**1 分**)

2^0 $F=\dfrac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}}=\dfrac{2.019^2}{1.265^2}=2.547$， .... (**4 分**)

3^0 $w_1=\{F>7.15\}\cup\{F<1/7.15=0.14\}$; .... (**2 分**)

4^0 **F 值没有落在 w_1 中,接受** $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$. .... (**1 分**)

2. 1^0 提出假设: $H_0:\mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$， .... (**1 分**)

2^0 $T=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{x_1}-\overline{x_2})}{\sqrt{s_1^{*2}+s_2^{*2}}}=\dfrac{\sqrt{6}(4.75-4)}{\sqrt{4.075+1.6}}=0.77$; ... . (**4 分**)

3^0 $w_2=\{T<-1.812\}$ .... (**1 分**)

4^0 T **没有 落在 w_2 中,故有理由拒绝** $H_1:\mu_1<\mu_2$ .... (**1 分**)

七、(15 分，要求写清步骤及结果) 设在育苗试验中有 5 种不同的处理方法,每种方法做 6 次重复试验,一年后,苗高数据如下表:

处理方法	苗高 yij(cm)	行 和
1	39.2　29.0　25.8　33.5　41.7　37.2	$T_{1.}$=206.4
2	37.3　27.7　23.4　33.4　29.2　35.6	$T_{2.}$ =186.6
3	20.8　33.8　28.6　23.4 22.7　30.9	$T_{3.}$=160.2

1. 试问不同的处理方法是否有显著差异?

2. 哪种处理方法最好？

（附:α =0.01, $F_{0.99}(3-1,18-3)=6.36$）

解： 1． T＝553.2, $\bar{x}=30.73$, $\bar{x_1}=34.4$, $\bar{x_2}=31.1$, $\bar{x_3}=26.7$; $C=T^2/n=17001.68$;

$$SST=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6}x_{ij}^2-C=17640.66-17001.68=638.98;$$

$$SSA=6\sum_{i=1}^{3}(\bar{x_i}-\bar{x})^2=179.08,\quad MSA=SSA/2=89.54;$$

SSE=SST-SSA= 459.9, MSE=SSE/15=30.66,　F=MSA/MSE=2.92;

拒绝域为 W={ F ＞ 3.68}, F 值在拒绝域内 ,故有理由认为不同的处理方法没有显著差异.

2.

平方和	F 值	临界值
SST=638.98		3.68
SSA=89.54		
SSE=30.66	2.92	N 不显著

3. 因为不同的处理方法没有显著差异,所以谈不上哪种处理方法最好.

八、(18 分，要求写清步骤及结果)某林场内随机抽取 6 块面积为一亩的样地，测定样地的树高 x 与每公顷横断面积 y 为：（α =0.01）

样地号	1	2	3	4	5	6	行和
平均树高x_i(m)	2 0	22	24	26	28	30	150
横断面积 y_i(m^2/hm^2)	2 4 . 3	26.5	28.7	30.5	31.7	32.9	174.6

1．试求：$\bar{x}$，$\bar{y}$，l_{xx}，l_{xy}，l_{yy}；

2．试求：对 x 的一元线性之经验回归方程；

3．对此一元线性回归方程进行显著性检验.

4．当树高 x_0=32 m 时，横断面积 Y_0 的置信区间是多少?

（附：$t_{0.995}(6-2)=4.604$，$r_{0.01}(6-2)=0.9172$，$F_{0.99}(1,6-2)=21.20$）

（提示：预测公式 $t=(y_0-\hat{y}_0)\Big/\sqrt{\frac{SSE}{n-2}\bullet[1+1/n+(x_0-\bar{x})^2/l_{xx}]}\sim t(n-2)$）

解：1. $\bar{x}=25$，$\bar{y}=29.1$，$\sum x_i y_i=4425.4$，$l_{xx}=70$，$l_{xy}=60.4$，$l_{yy}=53.12$；..... **(4 分)**

2. $\hat{\beta}=l_{xy}/l_{xx}=0.863$，$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=7.53$，

得经验线性回归方程：$\hat{y}=7.53+0.863x$；　　.... .... **(4 分)**

3. 提出假设：H_0：β=0 ↔ H_1：β≠0，　　.... .... **(2 分)**

统计量：$F=SSR/MSE=\hat{\beta}l_{xy}/[(l_{yy}-\hat{\beta}l_{xy})/4]=52.12/0.25=207.77$，

$T=\hat{\beta}\sqrt{\frac{l_{xx}}{MSE}}=14.42$，　　$r=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}=0.99$；

拒绝域：$W=\{F>21.20\}=\{|T|>4.604\}=\{|r|>0.9172\}$　　.... .... **(4 分)**

拒绝 H_0：β=0，即认为线性回归方程显著.

4. 点估计 $\hat{y}_0=35.14$，　$\Delta_1=\sqrt{\frac{SSE}{n-2}\bullet[1+1/n+(x_0-\bar{x})^2/l_{xx}]}=0.683$，

$\Delta=\Delta_1\bullet t_{0.975}(10-2)=3.145$，　　.... .... **(2 分)**

得区间估计：$y_0\in[31.995,\ 38.29]$.　　.... .... **(2 分)**