

2014년 2학기 수학 및 연습 2. 기말고사 모범답안.

1. 푸비니 정리에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^e \frac{\log x}{x} e^{y \log x} dx dy &= \int_1^e \int_0^1 \frac{\log x}{x} e^{y \log x} dy dx \\ &= \int_1^e \left[\frac{1}{x} e^{y \log x} \right]_0^1 dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} e^{\log x} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = e - 2\end{aligned}$$

┘ 10점

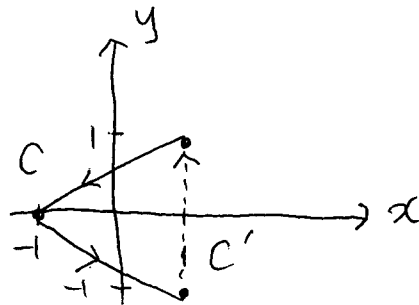
┘ 20점

#2

(pf1) 그린정리 이용.

$$\text{Let } \vec{F}(x,y) := (2x \arctan y, \frac{x^2}{1+y^2}).$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x}{1+y^2} = 0. \quad \text{┘ 5점.}$$



Let $\text{int}(C \cup C') \equiv D$.

$$\text{then by 그린정리, } \iint_D \text{rot } \vec{F} dV_2 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

$$\parallel$$

$$0.$$

$$\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad \text{┘ 10점}$$

$$(C' \text{의 매개변수 : } (1,t) \ (-1 \leq t \leq 1)) \Rightarrow = - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= -\arctan(1) + \arctan(-1) \quad \text{┘ 5점}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \quad \text{┘ 20점.}$$

(pf2) 선적분 기본정리 이용.

$$\text{Let } \varphi(x,y) := x^2 \arctan(y) \text{ then } \nabla \varphi = \vec{F}. \quad \text{┘ 5점}$$

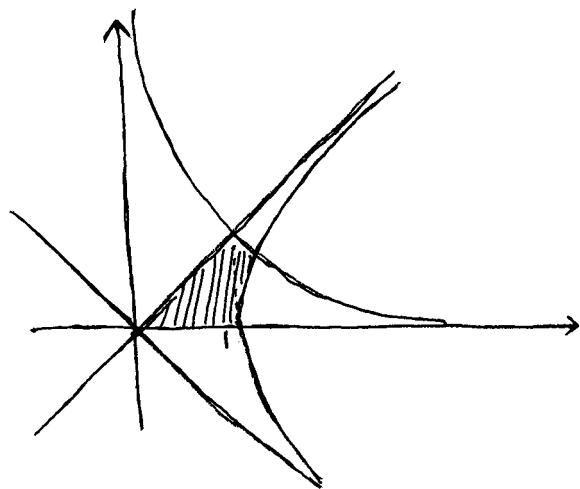
$$\therefore \text{By 선적분 기본정리, } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \varphi(-1,0) - \varphi(1,1) + \varphi(1,-1) - \varphi(-1,0)$$

$$= \varphi(1,-1) - \varphi(1,1). \quad \text{┘ 10점}$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{┘ 20점.}$$

※. 부호틀릴 경우, 부분점수 없음.

3. $y=0$, $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x^2-y^2=1$.



방법 1) $u=x^2-y^2 \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ $\angle + 5$ 점
 $v=xy$

$$G(u,v) = (x,y), \quad G^{-1}(x,y) = (u,v)$$

$$(G^{-1})'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$|G'(u,v)| = \frac{1}{|(G^{-1})'(x,y)|} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

$$\therefore \iint_D \frac{x^2-y^2}{1+xy} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{u}{1+v} du dv \quad \angle + 5$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 u du \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{1+v} dv \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log 2 = \frac{\log 2}{4} \quad \angle + 10$$

(*) 적분영역을 3사분면까지 하여 $\frac{1}{2}$ 을 곱한 경우 - 10 점.

문제 4.

$$x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 + 4z \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 2$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2r \cos \theta \leq 0, \quad r^2 \leq (z-2)^2, \quad 0 \leq z \leq 2 \quad (\text{원기둥 좌표계})$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, \quad 0 \leq z \leq 2-r$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, \quad 0 \leq z \leq 2-r$$

$$\therefore \text{부피} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{2-r} r \, dz \, dr \, d\theta \quad \text{10점}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} (2r - r^2) \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 \cos \theta - \frac{8}{3} \cos^3 \theta \right) d\theta$$

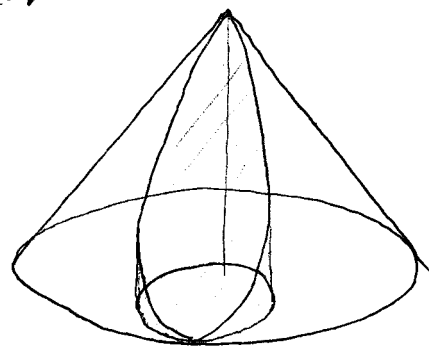
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 + 2 \cos 2\theta - \frac{2}{3} \cos 3\theta - 2 \cos \theta \right) d\theta$$

$$= \left(2\theta + \sin 2\theta - \frac{2}{9} \sin 3\theta - 2 \sin \theta \right) \Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi + \frac{4}{9} - 4$$

$$= 2\pi - \frac{32}{9} \quad \text{20점}$$



※ 채점기준 : 다른 방법(발산 정리 등)을 사용하였을 경우에도

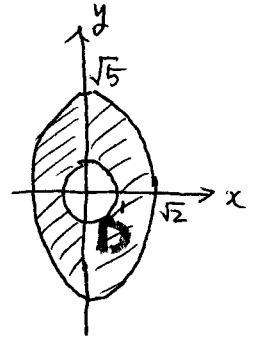
색이 맞으면 10점, 답까지 맞으면 20점. 그 외 부분점수 없음.

$$(\#5) (a) F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) + (xy^2, x^2y+x)$$

$$= F_1(x,y) + F_2(x,y) + F_3(x,y)$$

$$\text{rot } F = \text{rot } F_1 + \text{rot } F_2 + \text{rot } F_3$$

$$= 0 + 0 + 1 = 1 \quad \text{이므로} \quad \underline{\underline{10}}$$



$$\therefore \iint_D \text{rot } F \, dV_2 = \text{area}(D) = \pi(\sqrt{10}-1) \quad \underline{\underline{15}}$$

(b) $B_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ 이라 두면 그린 정리에 의해.

$$\int_C F \cdot ds - \int_{B_1} F \cdot ds = \iint_D \text{rot } F \, dV_2 = (\sqrt{10}-1)\pi \quad \underline{\underline{5}}$$

$$\int_{B_1} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t + \cos t \sin^2 t, \sin t + \cos t + \cos^2 t \sin t + \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt$$

$$\underline{\underline{10}}$$

$$= \int_0^{2\pi} [1 + \cos^2 t + \cos t \sin t (\cos^2 t - \sin^2 t)] \, dt$$

$$= 3\pi$$

$$\therefore \int_C F \cdot ds = (\sqrt{10}-1)\pi + 3\pi = (\sqrt{10}+2)\pi \quad \underline{\underline{15}}$$

※ (참고사항) • (a)에서 $\text{rot } F$ 의 값이 틀린 경우 무조건 (답이 맞더라도) 0점!

• (b)에서 원점을 포함한 영역을 잡고 F 에 대해 그린정리를 쓴 경우 0점!

• (b)에서 F_1, F_2, F_3 로 나누어 선적분을 구한 경우, 각 경우당 5점씩 배점

• (b)에서 항을 잘못 생각하여 3π 를 빼는 경우 5점 감점.

• B_1 대신에 B_2 를 사용하고, ∂B_2 에서의 복잡한 적분을 $\epsilon \rightarrow 0$ 으로의 극한으로

계산한 풀이도 인정. 다만 $\iint_{(x^2+y^2 \geq \epsilon^2 \text{ and } \frac{x^2+y^2}{2} \leq 1)} \text{rot } F \, dV_2 = \sqrt{10}\pi$ 같이 틀린 표현이 있으면 5점 감점.

6. $\iiint_R \operatorname{div} A \, dV_3 = \iint_{\partial R} A \cdot dS$ 양은 보인다.

$\operatorname{div} A = 0$ 이므로 (좌변) $= \iiint_R 0 \, dV_3 = 0.$ -1+5

주어진 영역 R 의 경계 ∂R 이 대하여

S_1 은 ∂R 의 바깥쪽 옆면 ($z = \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \leq z \leq 2$),

S_2 는 ∂R 의 밑면 ($z=2$, $1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2$),

S_3 은 ∂R 의 안쪽 옆면 ($\sqrt{x^2+y^2}=1$, $1 \leq z \leq 2$)

이다. 여기서 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \partial R$.

(단, 각 면의 양은 ∂R 을 향하는 방향으로 정한다.)

그러면

$$(\text{우변}) = \underbrace{\iint_{S_1} A \cdot dS}_{=: \alpha} + \underbrace{\iint_{S_2} A \cdot dS}_{=: \beta} + \underbrace{\iint_{S_3} A \cdot dS}_{=: \gamma}.$$

S_1 위의 임의의 점 (x, y, z) 이 대하여, S_1 은 원뿔을 지나는 (x, y, z) 방향이 같은 법선을 포함한다. 따라서 S_1 의 법벡터 n 은 $(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 이 수직이다. 이때 $A \cdot n = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot n = 0$.

$$\therefore \alpha = \iint_{S_1} A \cdot n \, dS = 0.$$

(또는, S_1 은 $X(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ 로 매개화한 후

$$X_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), \quad X_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \text{ 이며}$$

$$N = -X_x \times X_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right)$$

이므로 ~~$\alpha = \iint_{S_1} A \cdot N \, dxdy$~~ $\alpha = \iint_{1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2} A \cdot N \, dxdy = 0$ -1+5

S_2 의 단위법벡터장은 $n = (0, 0, 1)$

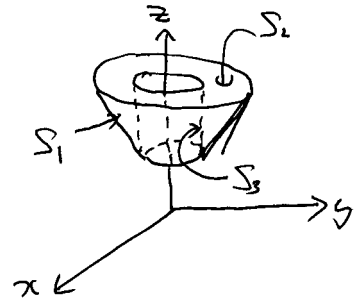
$$\beta = \iint_{S_2} A \cdot n \, dS = \iint_{S_2} \frac{(x, y, 2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}} \cdot (0, 0, 1) \, dS$$

$$= \iint_{1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2} \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4}} \, dxdy \quad \left(S_2 \text{는 } (x, y, 2) \text{로 매개화 } (1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2) \right.$$

$$\left. \rightarrow |N| = |(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)| = |(0, 0, 1)| = 1 \right)$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{r^2+4}} \, dr \, d\theta = 2 \cdot 2\pi \cdot \int_5^8 \frac{1}{2 \cdot 5^{3/2}} \, ds \quad (r^2+4 = s \text{로 치환})$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$
-1+5



S_3 의 단위 법선장은 $n = (-x, -y, 0)$.

$$\gamma = \iint_{S_3} A \cdot n \, dS = \iint_{S_3} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot (-x, -y, 0) \, dS$$

$$= - \iint_{S_3} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \, dS$$

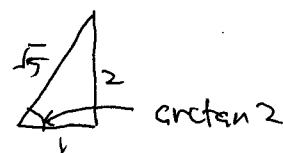
$$= - \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^3}} \, d\theta \, dz$$

(S_3 은 $(\cos\theta, \sin\theta, z)$ 로 매개화
 $\rightarrow |N| = |(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (0, 0, 1)|$
 $= |(\cos\theta, \sin\theta, 0)| = 1$.)

$$= -2\pi \int_1^2 \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}} = -2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t} \, dt$$

$$= -2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \cos t \, dt = -2\pi \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$-1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$

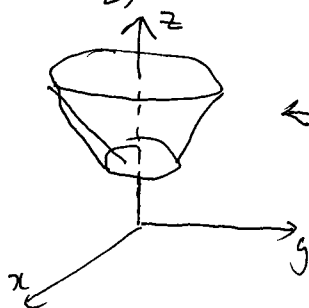


$$\therefore (\text{곡면}) = \alpha + \beta + \gamma = 0 = (\text{좌측})$$

* 변각은 계산에서 곡면의 양이 틀리면 해당 계수의 값이 없음.

* 영역이 원지 못해도, $\text{div } A = 0$ 일뿐 알고 $(\text{좌측}) = 0$ 일뿐 구하면 5점 만점.

* 영역은 다음과 같이 생각한 경우에 한하여, $\alpha = \iint_{S_1} A \cdot dS$ (별첨) 의 계산에 대해 문제점 없음 (즉, 최대 10점)



← 중간에 원기둥을 제외하고
 남은 부분 ($1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{5}$
 2번 x)

* 가우스 정리를 이용하면 점수 없음. (별첨 장의 결과임)

* 기타 문제점 없음.

#7.

Sol 그래프가 $x=y=0$ (z축) 에 대칭이므로, 곡면의 중심은

$x=y=0$ 위에 있다. 즉, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

— 5점

$$dS = |X_x \times X_y| dx dy = \sqrt{8x^2 + 16y^2 + 2} dx dy. \dots$$

— 5점

$x = \sqrt{2}r \cos \theta, y = r \sin \theta. \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 로 두면,

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \sqrt{2}r \quad \text{이므로,}$$

$$dS = \sqrt{8x^2 + 16y^2 + 2} dx dy = \sqrt{16r^2 + 2} \cdot \sqrt{2} \cdot r dr d\theta$$

$$= 2\sqrt{8r^2 + 1} \cdot r dr d\theta.$$

$$\therefore A\bar{z} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\sqrt{8r^2 + 1} \cdot r \cdot 2r^2 dr d\theta \quad (z = 2r^2)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^9 \frac{1}{8} \sqrt{t} \left(\frac{t-1}{4} \right) dt d\theta \quad \left(\because t = 8r^2 + 1, \quad 2r dr = \frac{1}{8} dt, \quad 2r^2 = \frac{t-1}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_1^9 t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} dt. \quad (\text{Fubini 정리})$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^9$$

— 10점

$$= \frac{149}{30} \pi.$$

- 대칭성이 아닌 방법으로 $A\bar{x}$, $A\bar{y}$ 를 직접 계산했을 시 논리가 맞아야 +5점.
- 피적분함수 (A 를 계산 때) 전에 사소한 계산 실수라도 0점.
- 임의의 변환에서, 면적소를 구해도 +5점.
- 대칭 언급에서 논리에 오류 있을시 0점.

문제 8. $\mathbf{F} = (\sin x - y, \cos y + z^2, e^z + x^2)$ 라 하자, 그러면 $\text{Curl } \mathbf{F} = (-2z, -2x, 1)$ 이고, +5점.

또 xy -평면에서 C 에 둘러싸인 영역을 D 라 하면,

스토크스정리에 의해 주어진 식 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \text{Curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 이다. +5점.

D 를 xy -평면에 정사영한 영역을 E 라 하면, E 는 $\frac{x^2}{8} + 2y^2 \leq 1$ 인 타원이고,

매개화 $X: E \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (u, v, v)$ 를 통해 D 의 매개화를 얻는다.

$N = X_u \times X_v = (0, -1, 1)$ 이므로 곡선 C 의 향과 어긋난다.

따라서 $\iint_D (-2z, -2x, 1) \cdot d\mathbf{S} = \iint_E (2x+1) dx dy$ 이다.

E 는 $\frac{x^2}{8} + 2y^2 \leq 1$ 인 타원이므로, $x = 2\sqrt{2}r \cos \theta$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 로

치환적분하면,

$$\iint_E (2x+1) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4\sqrt{2}r \cos \theta + 1) \cdot 2r d\theta dr$$

$$= 2\pi \text{ 이다. } \quad +10점.$$

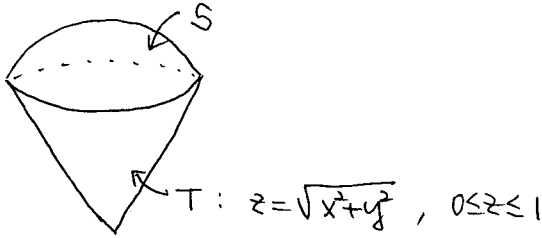
* 스토크스 정리를 사용하지 않고 선적분으로 계산한 경우 답안의 완성도에 따라 점수 인정.

* 적분계산지 사소한 계산실수 -5점.

* 다른 매개화를 사용한 경우 완성도에 따라 점수 인정.

9. (a)

Ⅱ이1)



SUT 에 대해 발산정리를 사용

$$(R = \text{Int}(SUT))$$

$$\iiint_R \text{div} F dV_3 = \iint_S F \cdot dS + \iint_T F \cdot dS$$

5점

$$(\star) \iiint_R \text{div} F dV_3 = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{10}{3}\pi$$

5점

$$\iint_T F \cdot dS = 0 \quad (F \text{와 } T \text{의 법선벡터가 수직이므로 } F \cdot n = 0)$$

5점

Ⅱ이2)



SUK에 대해 발산정리를 사용

$$(R' = \text{Int}(SUK))$$

$$\iiint_{R'} \text{div} F dV_3 = \iint_S F \cdot dS + \iint_K F \cdot dS$$

5점

$$(\star\star) \begin{cases} \iiint_{R'} \text{div} F dV_3 = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{43}{12}\pi \\ \iint_K F \cdot dS = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

5점

5점

Ⅱ이3) 직접 매개변수화해서 연립분

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{10}{3}\pi \end{aligned}$$

5점

10점

* 1, 2 에서 발산정리를 정확하게 알고있지 않다고 판단되면 0점

$$(ex. \iint_S F \cdot dS = \iiint_{\text{Int} S} \text{div} F dV_3 \quad \text{주어진 } S \text{는 폐곡면이 아니므로 옳지 않음})$$

$$(\star) \iiint_R \text{div} F dV_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} 5(2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$(\star\star) \iiint_R \text{div} F dV_3 = \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} 5(r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta dz$$

$$\iint_K F \cdot dS = \iint_K F(0,0,-1) dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dS = -\frac{\pi}{4}$$

9(b)

풀이 1) 스톡스 정리

$$i) \iint_S \text{curl} F \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} \quad - 5\text{점}$$

$$ii) \partial S: x^2 + y^2 = 1, z = 1. \quad \underbrace{\text{방향은 반시계방향}}_{(0,0,\sqrt{2}) \text{에서 보았을 때}} \quad (\text{즉, } \vec{X}(t) = (\cos t, \sin t, 1), 0 \leq t \leq 2\pi) \quad - 5\text{점}$$

$$iii) \int_{\partial S} F \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} F(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt = (2\pi) \cdot e \quad - 5\text{점}$$

풀이 2) a-(a)에서의 계곡면에 대해 발산정리 사용 ($K: x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$)

$$\iint_S \text{curl} F \cdot d\vec{S} = - \iint_K \text{curl} F \cdot d\vec{S} \quad (\because \text{div}(\text{curl} F) = 0 \text{ 이므로}) \quad - 5\text{점}$$

$$- \iint_K \text{curl} F \cdot d\vec{S} = (2\pi) \cdot e \quad (\text{정답이 맞아야함}) \quad - 10\text{점}$$

* 직접 $\iint_S \text{curl} F \cdot d\vec{S}$ 를 계산한 경우 답이 맞아야만 점수 인정

* 옳지 않은 논리로 $(2\pi)e$ 가 나오면 점수 없음.

* 풀이 1)에서 iii)은 i)과 ii)가 맞았을 때만 인정.