수학 및 연습 2 2018-계절 기말고사

1. $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (x-3z+1)\,dx\,dy\,dz$

$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \frac{1}{2}(1-y-z)^2 - 3z(1-y-z) + (1-y-z)\,dy\,dz$ 5점

$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{6}(1-y-z)^3 + \frac{3}{2}z(1-y-z)^2 - \frac{1}{2}(1-y-z)^2\right]_0^{1-z} dz$ 5점

$= \int_0^1 \frac{1}{6}(1-z)^3 - \frac{3}{2}z(1-z)^2 + \frac{1}{2}(1-z)^2\,dz$

$= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ 5점

※ 푸비니 정리를 통해 적분을 바꿔 계산해도 채점기준 동일

※ 대칭성에 의해 $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-y-z} x\,dx\,dz\,dy$ 를 구하고

$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-y-z} dx\,dz\,dy$ 를 구해도 가능

2. (a) 해당 적분 영역은 $\begin{cases} 2\cos\theta-1 \le r \le 1, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 1 \le r \le 2, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 2 \le r \le 2\cos\theta+1, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\therefore \iint_D dV_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{2\cos\theta-1}^{2\cos\theta+1} r\,dr\,d\theta$$

┘5점

이를 계산하면 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\cos\theta\, d\theta = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ┘10점

(b) $$\bar{x} = \frac{1}{\text{area}D} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{2\cos\theta-1}^{2\cos\theta+1} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{area}D} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{2\cos\theta-1}^{2\cos\theta+1} r\sin\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

┘+3점

$$\bar{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8\cos^3\theta + \frac{2}{3}\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos 3\theta + \frac{20}{3}\cos\theta\right) d\theta = \frac{5}{3}$$ ┘+4점

$$\bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8\cos^2\theta\sin\theta + \frac{2}{3}\sin\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} 8x^2\,dx + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$ ┘+3점

※ $\bar{x}$, $\bar{y}$ 중 1개라도 맞으면 +4점, 2개 다 맞으면 +7점.

3. 구면좌표계로 바꿀 시 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\rho e^{-\rho^2}\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

┘+5점

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}te^{-t}\sin\varphi\, dt\, d\varphi\, d\theta \quad (t=\rho^2)$$

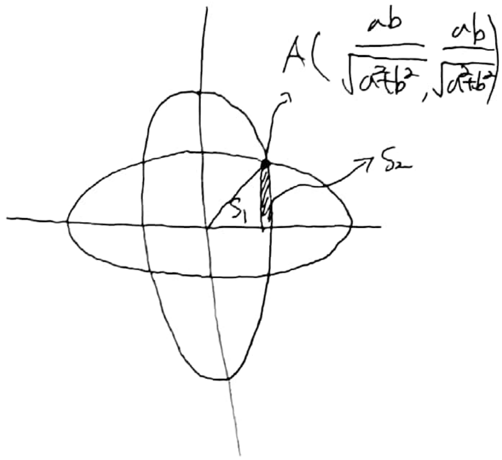
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}(t-1)e^{-t}\right]_0^{\infty}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}1\, d\theta = 2\pi$$ ┘10점

Scanned by CamScanner

4.

- 그림으로부터 대칭성에 의해 구하는 공통부분의 넓이는 $8(S_1+S_2)$ 이다.



S_1: $\frac{1}{2} \times \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

S_2: $\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{a} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

$$= \int_0^{\arctan\frac{a}{b}} ab\sin^2\theta\, d\theta = \frac{ab}{2}\arctan\frac{a}{b} - \frac{1}{2} \times \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

따라서 $8(S_1+S_2) = 4ab\arctan\frac{a}{b}$. 이다.

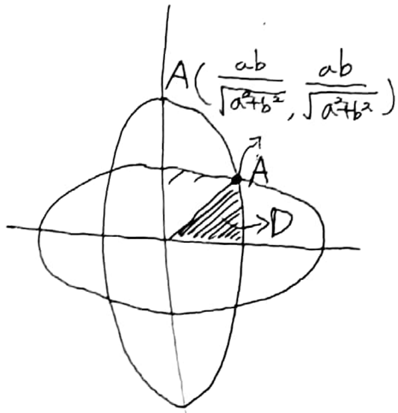
채점기준.

1. S_1, S_2 식이 맞으면 +5점.

2. S_2의 계산이 올바르면 +10점.

3. 답까지 맞으면 +5점.

#4 (별해)



풀이1. 대칭성에 의해 오른쪽 색칠된 영역의 넓이만 구하면 된다.

$(ar\cos\theta, br\sin\theta)$로 매개화 하면

r, θ의 범위는 각각 $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \arctan\frac{a}{b}$이다.

$$\left|\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix}\right| = abr$$ 이므로

$$\iint_D 1\, dA = \int_0^1 \int_0^{\arctan\frac{a}{b}} abr\, dr\, d\theta = \frac{ab}{2}\arctan\frac{a}{b}.$$

따라서 공통부분의 넓이는 $4ab\arctan\frac{a}{b}$.

풀이2. 주어진 영역에서 y좌표만 $\frac{a}{b}$배 하면 영역의 넓이는 $\frac{a}{b}$배가 된다.

또 원점과 점A를 잇는 기울기가 $\frac{b}{a}$에서 변한 후 α로 변한다. ($\tan\alpha = \frac{a}{b}$).

따라서

$$\iint_D 1\, dA = \frac{b}{a} \times \frac{1}{2} \times a^2 \cdot \arctan\frac{a}{b}$$

$$= \frac{ab}{2}\arctan\frac{a}{b}.$$

5. $\frac{d}{dt}f(tX) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(tX)}{\partial(tx_i)} \cdot \frac{\partial(tx_i)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot D_i f(tX)$

$\frac{d}{dt} t^n f(X) = n t^{n-1} f(X)$

t=1 을 대입하면 $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot D_i f(X) = n f(X) \cdots ①$

10점

$\mathrm{div}F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(\frac{x_i}{f(X)}\right)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{f(X)} - \frac{x_i \cdot D_i f(X)}{(f(X))^2} \right)$

$= \frac{n f(X) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot D_i(f(X))}{(f(X))^2}$

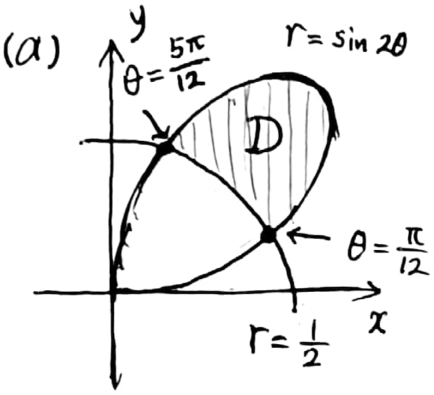
10점

그런데 ①에 의해 분자가 0이 되므로

div F = 0 이 된다.

문제 6.

(a)



이 구간 틀리면 0점.

$$\text{Area}(D) = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sin 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

+5 바른 적분식에

$$= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(\frac{1}{2}\sin^2 2\theta - \frac{1}{8} \right) d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(\frac{1-\cos 4\theta}{4} - \frac{1}{8} \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{8}\theta - \frac{1}{16}\sin 4\theta \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}}$$

바른 답에 +5점.
총 10점

(b) $$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds \underset{\text{발산 정리}}{=} \iint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dS = \iint_D 2\, dS$$

+5점

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 에서 $\operatorname{div}\vec{F} = 2$.

D를 둘러싸는 곡선 중 $r = \frac{1}{2}$ 위에 놓인 부분을 C'라 두면 $\partial D = C \cup C'$ 이다. C' 위에서의 한 법선벡터를 $\vec{n} = 2\vec{X}$ 이라 두면, $\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds + \int_{C'} \vec{F} \cdot (-2\vec{X})\, ds$

$$\int_{C'} \vec{F} \cdot (2\vec{X})\, ds = \int_{C'} \left(\frac{1}{|X|^2} + 1 \right) \vec{X} \cdot (2\vec{X})\, ds$$

$$= \int_{C'} (5\vec{X}) \cdot (2\vec{X})\, ds = \frac{10}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

따라서, $\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D 2\,dS + \int_{C'} \vec{F}\cdot(2\vec{X})\,ds$

$= 2\cdot \text{Area}(D) + \frac{5\pi}{6}$

$= \frac{11}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{8}$

┘ 바른 답에 +5점

총 10점.

#7. 곡면의 매개화 $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, $x^2+2y^2 \le 1$.

면적소 : $\left| \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \times \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \right|$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

+5 (다른 좌표계에서 면적소를 잘 구한 경우도 +5)

$$\iint_{x^2+2y^2\le 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

+5

(각 변수에 대해 범위를 잘 쓴 경우만 +5)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} 1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= 2\pi - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1+\sin^2\theta}}\,\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi - 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$$

$$= \pi.$$

+10

8. $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$은 주어진 곡면 S의 단위법벡터장이다.

입체각 벡터장 $\mathbb{A} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$에 대하여, 주어진 곡면 S 위에서는

$\mathbb{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($\because$ S 위에서는 $x+y+1=1$) 이므로,

10점

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,dS = \sqrt{3}\iint_S \mathbb{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \sqrt{3}\iint_S \mathbb{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \sqrt{3}\times(\text{S의 입체각})$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

정답.

임을 안다.

20점.

* 채점 기준

— 상수배와 관련된 작은 실수를 한 경우, 5점 감점.
(예: $\sqrt{3}$ 누락된 경우).

9. (a) $\mathbb{F}$ 를 $\mathbb{F} = (f_1, f_2, f_3)$ 라고 하자.

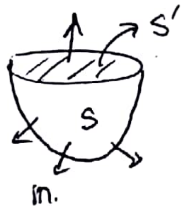
$$\nabla\times(h\mathbb{F}) = \nabla\times(hf_1, hf_2, hf_3) = ((hf_3)_z - (hf_2)_y, (hf_1)_z - (hf_3)_x, (hf_2)_x - (hf_1)_y)$$

$$= (h_z f_3 + hf_{3z} - h_y f_2 - hf_{2y}, h_z f_1 + hf_{1z} - h_x f_3 - hf_{3x}, h_x f_2 + hf_{2x} - h_y f_1 - hf_{1y})$$

$$= h(f_{3z} - f_{2y}, f_{1z} - f_{3x}, f_{2x} - f_{1y}) + (h_z f_3 - h_y f_2, h_z f_1 - h_x f_3, h_x f_2 - h_y f_1)$$

$$= h\cdot\nabla\times\mathbb{F} + \nabla h\times\mathbb{F}.$$

(b). $S' : x^2 + \frac{y^2}{2} \le 4, \ z = 4.$



스토크스정리의 응용에 의해 $\iint_S \nabla\times\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_{S'} \nabla\times\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$ ┘ 5.

S' 의 수직벡터는 항등적으로 $(0,0,-1)$ 이다.

$$\nabla\times\mathbb{F} = \left(0, 1+e^y\sin\left(\tfrac{\pi}{2}z\right), e^y\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{2}z\right)\right)\times(z, -x, y)$$

$$+ \left(y + e^y\sin\left(\tfrac{\pi}{2}z\right)\right)\cdot(1,1,-1)$$

$$\Rightarrow -(\nabla\times\mathbb{F})\cdot\mathbb{k} = +\left(z\left(1+e^y\sin\left(\tfrac{\pi}{2}z\right)\right)\right) + \left(y + e^y\sin\left(\tfrac{\pi}{2}z\right)\right)$$ ┘ 10.

S' 에서는 $+4+y$ 이다.

그러므로 $\iint_{S'} \nabla\times\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_{x^2+\frac{y^2}{2}\le 4} (+4+y)\,dV_2 = +16\sqrt{2}\pi.$ ┘ 20.

(a): 부분점수 없음, x, y, z 중 하나의 성분만 보인경우 0점.

(b) 부호가 틀리면 15점. 경계에서 선적분을 한 경우에도 적분식이 올바르면 10점, 답까지 맞는경우 만점

#10.

$$\int_C (y+\sin x)\,dx + (x^2+\cos y)\,dy + x^3\,dz$$

$$= \int_C y\,dx + x^2\,dy + x^3\,dz + \cancelto{0}{\int_C d(-\cos x + \sin y)}$$ by 선적분의 기본정리

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\cdot\cos t + \sin^2 t\,(-\sin t) + \sin^3 t\,(2\sin 2t)\,dt$$ ⌋ +5

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} \cancelto{0}{-\sin^3 t\,dt} + \int_0^{2\pi} \cancelto{0}{4\sin^4 t\cos t\,dt}$$

$$= \pi$$ ⌋ +10.

* 새로운 매개변수를 도입해서 Stokes' theorem을 쓴 경우, π 까지 나오면 15점, 부호를 틀리면 5점, 그 외 0점.