

수학 및 연습 2 기말고사

(2015년 7월 27일 11:00-13:00)

학번: _____ 이름: _____

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 다음 반복적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 (\sqrt{1+y^4} + y^2 \sin(y^3 - 1)) dy dx$$

문제 2. [20점] 좌표평면에서 x -축과 y -축 그리고 직선 $x + y = 2$ 로 둘러싸인 제 1사분면의 영역을 A 라고 하자. 변환 $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 $(u, v) = G(x, y) = (x + y, x^2 - y)$ 와 같이 정의될 때, 영역 $G(A)$ 위에서 함수 $f(u, v) = \frac{u+v}{\sqrt{1+4u+4v}}$ 의 적분값을 구하시오.

문제 3. [20점] 좌표공간에서 부등식

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad x^2 + y^2 \geq 3z^2, \quad z \geq 0$$

을 모두 만족시키는 영역의 부피를 구하시오.

문제 4. [20점] 평면에서 포물선 $y^2 = 2x + 4$ 와 직선 $x = 3$ 에 의해 둘러싸인 영역을 D 라고 할 때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$$

가 D 의 경계를 빠져나가는 양(flux)을 계산하시오.

문제 5. [20점] 함수 $P(x, y) = y \arctan y - \frac{1}{2} \log(1 + y^2)$, $Q(x, y) = x^2 e^{-y^2}$ 에 대하여 벡터장 \mathbf{F} 를 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\text{rot } \mathbf{F}$ 를 구하시오.

(b) (10점) 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. 여기서 곡선 $C: |x| + |y| = 1$ 의 향은 반시계방향이다.

문제 6. [20점] 영역 D 는 점 $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 내부이다. 곡면

$$S: z = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D$$

에서 함수 $f(x, y, z) = \frac{\sin x}{x}$ ($(x, y, z) \in S$) 의 평균값을 구하시오.

문제 7. [20점] 구면 $S(4): x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$ 에서 다음 적분값을 구하시오. (답만 쓰면 0점)

$$\iint_{S(4)} \frac{dS}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}}$$

문제 8. [20점] 좌표공간에서 포물면 $z = 4 - x^2 - y^2$ 과 xy -평면으로 둘러싸인 영역 R 과 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ 에 대하여 $\iint_{\partial R} \text{grad}(\text{div} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오. (단, 이때 ∂R 의 향을 정하는 단위 법벡터 \mathbf{n} 은 영역 R 을 벗어나는 방향으로 택한다.)

문제 9. [20점] 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3 + e^{x+z}, \sin(y+z) - x^3, e^{x+y+z} + \cos(xy))$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\text{curl } \mathbf{F}$ 를 구하시오.

(b) (10점) 곡면 $S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, z \geq 0$ 에 대하여 $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.
(단, 이때 향을 정하는 단위 법벡터 \mathbf{n} 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 주어진다.)

문제 10. [20점] 곡면 $S_1: x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2$ 와 곡면 $S_2: x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z \geq 2$ 의 합으로 이루어진 곡면을 S 라고 하자. 이때 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (z \sin x + ze^y, xy \sin z + y, z(x+y))$ 에 대하여 $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, S 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이도록 정한다.)