수학 및 연습 2 기말고사

(2014년 7월 29일 오후 7:00-9:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (30점). 다음 적분값을 구하시오.

(a) (10점) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dzdydx$

(b) (10점) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dydzdx$

(c) (10점) $\displaystyle\int_0^\infty \int_{-\infty}^y \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}} dxdy$

문제 2 (20점). 극좌표방정식 $C : r = \sin 2\theta$ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ 로 주어진 곡선에 대하여 선적분

$$\int_C xdy - ydx$$

을 구하시오.

문제 3 (20점). 좌표평면에서 영역 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ge 1, (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$ 의 경계를 시계 반대 방향으로 한바퀴 도는 곡선을 C라고 할 때, 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C \left(y^3 - yx^2 + \frac{1}{x}e^{\arctan x^2}\right) dx + \left(y^8 \cos y + xy^2 - x^3\right) dy$$

문제 4 (20점). 정규 폐곡선을 경계로 가지는 평면 위의 닫힌 영역 D 에서 정의된 이급함수 $u(x, y)$ 에 대하여 다음을 보이시오. ($\nabla^2 u := D_1^2 u + D_2^2 u$ 로 정의한다.)

(a) (10점) $\displaystyle\int_{\partial D} u\, \mathrm{grad} u \cdot d\mathbf{s} = 0$

(b) (10점) $\displaystyle\iint_D |\mathrm{grad} u|^2\, dV_2 = \int_{\partial D} u\, \mathrm{grad} u \cdot \mathbf{n} ds - \iint_D u\, \nabla^2 u dV_2$

(Hint: $\mathrm{div}(u\, \mathrm{grad} u)$ 를 고려하라.)

문제 5 (20점). 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$ 가 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left(x^2 + y^2 \le 1,\ x, y \ge 0\right)$ 로 주어진 곡면 S 를 빠져나가는 플럭스를 구하시오. 이때 S 의 향을 정하는 단위 법벡터 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \le 0$ 이 되도록 주어진다.

문제 6 (20점). 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z)$ 에 대하여 곡면

$$S : \text{회전타원면 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{2} = 1 \text{ 에서 } z \ge -1 \text{ 인 부분}$$

를 벗어나는 적분을 구하시오. 이때 곡면의 향은 회전타원면의 바깥쪽으로 둔다.

문제 7 (20점). 곡면

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4},\quad z \ge 0$$

의 밀도함수가 $f(x, y, z) = z^3$ 일 때 S 의 질량을 구하시오.

문제 8 (10점). 원기둥면 $x^2 + y^2 = 4$ 와 평면 $x - y + z = 2$ 가 교차하는 부분을 C 라고 하자. 이때 선적분

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

를 구하시오. (단, 곡선 C 의 향은 xy-평면으로 정사영한 것의 향이 시계 반대 방향이 되도록 정한다.)

문제 9 (20점). 벡터장

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y,z) = &\left(\frac{x-2}{((x-2)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{(x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} + 3xy^2\right)\mathbf{i} \\ &+ \left(\frac{y}{((x-2)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{(x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} + 3x^2y\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{z}{((x-2)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z-\frac{1}{2}}{(x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} + z^3\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

가 구면 $S : x^2+y^2+z^2 = 1$ 로부터 빠져 나오는 플럭스를 구하시오. (Hint: 입체각 벡터장의 성질을 알고 있다면 사용해도 좋다.)

문제 10 (20점). 곡면 $z = x^2+3y^2$ 과 $z = 8-x^2-y^2$ 으로 둘러싸인 영역 R 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x+x^2+e^{y^3\sin yz}\ ,\ (2-3z^2)y+\cos y\ ,\ z(\sin y-2x)+z^3)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.