2015학년도 수학 및 연습 I 중간고사 (2015.04.18.)

1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴·발산? ($a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}a_n$)

sol1) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}\right| \le \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{\sqrt{n}}\right|$ ((∵) $|\cos n|\le 1$).

$0 \le \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{\sqrt{n}}\right| = 0$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$.

$|\cos n|\le 1$ 에서 (a_n)이 양항급수이므로, 극한비율판정법에 의해서,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

sol2) $a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}a_n = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2+\cos(n-1)}{\sqrt{n-1}}a_{n-1} = \cdots$

$$= \frac{(2+\cos n)(2+\cos(n-1))\cdots(2+\cos 1)}{\sqrt{n!}}a_1$$

$$= \frac{(2+\cos n)(2+\cos(n-1))\cdots(2+\cos 1)}{\sqrt{n!}}$$

$$\le \frac{3^n}{\sqrt{n!}} \quad \text{for } n\ge 1.$$

$b_n := \frac{3^n}{\sqrt{n!}}$ 이라 하면, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{3^n}{\sqrt{n!}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+1}} = 0$ 에서 극한비율판정법에

의해, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴한다.

비교판정법에 의해, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴한다.

배점기준 : 10점 - sol1, sol2 중 택 1 경우

5점 - ① $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 이라고만 쓴 경우 (사실, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le \rho<1$을 보여야 합니다.)

② $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$을 계산안하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 이라고만 쓴 경우.

③ 사소한 실수 및 논리적 비약

0점 - ① $a_n = \left(\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}\right)^{n-1}$ 라 한 경우

② 발산이라고 한 경우

③ 수렴이라고 하였으나 말도 안되는 논리적 비약.

1. (b) 실수 $x \geq 0$ 에 대하여 $0 \leq x \leq \tan x$ 이므로

자연수 $n \geq 2$ 에 대하여

$$0 < \frac{1}{n\log n} < \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$$ 이다. ⋯ ① 비교판정법

┘5점

이제 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = \infty$ 임을 보이자.

$f(x) = \frac{1}{x\log x}$ 은 $[2, \infty)$ 에서 연속인 감소함수 이며 $f(x) > 0$ 이다.

그리고

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \left[\log\log x\right]_2^{\infty}$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\log\log b - \log\log 2) = \infty$$ 이므로 적분판정법

적분 판정법에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ 발산.

따라서 비교판정법에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$ 발산

┘5점

* 수렴·발산 여부가 틀리면 무조건 0점
* 적분판정법의 5점은 비교판정법의 5점을 받아야 인정
* ①의 과정을 다음과 같이 해도 인정.

「 자연수 $n \geq 2$ 에 대하여 $\frac{1}{n\log n} > 0$, $\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n} > 0$ 이고

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n} \Big/ \frac{1}{n\log n} = 1$$ 이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} < \infty \iff \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n} < \infty$$ 이다. (∵ 극한비교판정법) 」

* 적분판정법의 조건 (3가지) 이 없으면 각 1점 감점.

적분계산이 틀리거나 없으면 2점 감점.

1-(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$ 수렴/발산 판정.

풀이 1.)

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$$

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

$\forall n,\ 0 \le a_n \le b_n$

$b_n \ge 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1$ 이므로

멱근판정법에 의해 $\sum b_n$ 수렴.

비교판정법에 의해, $\sum a_n$ 도 수렴.

풀이 2) · $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1+n}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{1+n}\cdot\frac{1+n}{n}}}$$

$$= \frac{1}{e} \quad \left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n}=1\right).$$

· $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \ge 0$, $\forall n$ 이므로,

멱근판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$ 수렴

* 간단한 실수 −2점

* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1$ 이므로 멱근판정법에 의해 수렴한다고

쓴경우 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n}}$ 의 수렴여부를 정확히 알수 없으므로 −5점.

2.

풀이) $f(x) = \frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $(x \geq 1)$ 로 두면, $f(x) > 0$ (모든 $x \geq 1$) 이고,

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x}{x+1}\right) < 0$ (모든 $x \geq 1$) 이므로 주어진 수열의

수렴성은 적분 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ 의 수렴성과 같다.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \log(x+1) + \log x\right) dx$$

$$= \Big[\log x - (x+1)\log(x+1) + x\log x\Big]_1^\infty$$

$$= 2\log 2 - 1$$

따라서 적분판정법에 의하여 주어진 수열은 수렴한다.

* 판정법의 조건이 누락된 경우 ($f'(x) < 0$ 을 적절보이지 않은 경우 포함) −5.
* 적분값이 틀리거나 적분계산을 마치지 않은 경우 −5.
* 멱급수를 사용할 경우 수렴반경이 명시되지 않으면 −5.
  로피탈급수의 2차추정원리를 사용할 경우 (1) 조건을 확인하지 않거나 (2) 원래를 언급하지 않은 경우 −5.
* 로피탈을 사용할 경우 계산 실수 −5.
* 2답 ((예) 발산) 또는 잘못된 판정법을 사용한 경우 점수 없음.

3. $a_n = \dfrac{1}{2^n - 3^n + 5^n}$ 이라 하면

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n-3^n+5^n}{2^{n+1}-3^{n+1}+5^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{2\left(\frac{2}{5}\right)^n-3\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}\right| = \frac{1}{5}$$ 」5점

이므로 수렴반경 $R = \frac{1}{\rho} = 5$ 」10점.

$x=5$ 일 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{2^n-3^n+5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n+1} = 1 \neq 0$$ 이므로

일반항 판정법에 의해 발산 」15점

$x=-5$ 일 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^n}{2^n-3^n+5^n} = 0$$ 이라 가정하면

$$0 = 0\cdot 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^n}{2^n-3^n+5^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n+5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$$ 모순.

∴ 일반항 판정법에 의해 발산 」20점.

감점요인

① 비율판정법 사용시 절대수렴하면 수렴한다는 언급이 없으면 −2.

② 〃 〃 수렴반경에 대한 언급이 없으면 −2.

③ 사소한 실수 −2 (예 $\lim(-1)^n = \pm 1$ or $=\infty$)

④ x가 음수일 때를 고려하지 않은 경우 최대 10점

⑤ 논리가 틀린경우 0점 (예 $x=-5$ 일 때 교대급수 판정법 쓴 경우)

#4. (a) $\cosh(x)$ 의 멱급수 전개는

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x\text{는 모든 실수})$$

+3 +2

이므로, x에 log 2를 대입할 수 있다.

따라서,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\log 2) = \frac{e^{\log 2} + e^{-\log 2}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

+4 +1

* 표기법상 실수, 사소한 계산 실수 등은 각 1점 감점

4 - (b).

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n+3}} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} \right).$$

$$= -\frac{3}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{5}{16}$$ ⇒ 간단히 정리

(멱급수 기본정리 ⇒ $|x|<1$ $\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$

적분. $-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \log 2.$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{3}{8} \log 2.$$

※ (1) (멱급수 기본정리에 의해) 수렴 반경 서술되지 않으면 (-5.)

(2) 2가지 풀이에 대해 오수 계산 실수면 (-10.)

(3) - 5점 ⇒ 수렴 반경 O. (결과값) 정답 X. (계산실수)

-10점 ⇒ 〃 X 〃 O

-15점 ⇒ 〃 O 정답 O

- 결과값 없이 수렴반경만 적어도 점수 '0' 점

#5 $\lim_{x \searrow 0} \sin x \cdot \log x = \lim_{x \searrow 0} \dfrac{\log x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim_{x \searrow 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \searrow 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot (-\tan x)$

로피탈 정리

$= 0$

1) 로피탈 정리를 알고 있는 경우 5점, 이를 잘 이용해 답이 맞으면 10점

2) 로피탈 정리를 이용하지 않고 풀었을 경우 올바르게 풀었으면 10점 아니면 0점

6번

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1 \qquad (*)$$

$$\frac{1}{x}\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \qquad |x|<1 \quad ,$$

따라서, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\log(1+x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, 멱급수의 기본정리

a. $\boxed{10점}$, 단 수렴범위 이탈기재 5점감점

수렴하는 교대급수의 성질에 의해

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\log(1+x)\,dx - \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\right| < \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right|$$ 이고,

b. $\boxed{5점}$

$n=2$일때, $\left|(-1)^3 \frac{1}{4^2}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right| = \frac{1}{256} < \frac{1}{200} = 0.005$ 이므로

c. $\boxed{5점}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\log(1+x)\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \pm 0.005$$

$$= \frac{65}{144} \quad \pm 0.005$$

· (1)에서 주어진 식의 멱급수는 틀렸으나 (*)까지 올바르면 5점 부여

· 교대급수가 되지 않는 x에 대해서 b를 쓰면 점수 없음

($f(x) = \int_0^x \frac{1}{t}\log(1+t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$ 은 $0<x<1$ 에서 교대급수임)

· b와 c는 독립적으로 채점

* 테일러 근사다항식 이용한 경우, 근사다항식이 적어도 3차이상 표현되어야 5점 부여,

이후의 나머지항으로 오차를 계산할 때 풀이과정이 완벽해야 15점 부여

(부분점수 없음)

[#7] $f'(x) = 2 - \sin x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 이므로

역함수 정리에 의해 $y = f(x)$ 의 역함수 $x = g(y)$ 가 존재 ┘ 5점

$f(0) = 1$ 이므로 $g(1) = 0$

$f'(x) = 2 - \sin x$ 이므로 $f'(0) = 2$, $g'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$ ┘ 10점

$f''(x) = -\cos x$ 이므로 $f''(0) = -1$, $g''(1) = -\dfrac{f''(0)}{f'(0)^3} = \dfrac{1}{8}$ ┘ 15점

$$\therefore T_2^1 g(y) = g(1) + g'(1)(y-1) + \frac{g''(1)}{2!}(y-1)^2$$

$$= \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{16}(y-1)^2$$

☒ ┘ 20점

(채점기준) • 역함수의 존재성을 올바른 도함수를 통해 증명하면 5점 부여

• $g'(1)$ 과 $g''(1)$ 을 각각 올바르게 구하는 과정 5점씩 부여

• $T_2^1 g(y)$ 를 올바르게 기술한 경우 5점 부여

예) ($y-1$ 이 들어갈 자리에 x 혹은 y 가 들어간 경우, $\frac{1}{2!}$ 을 이차항에서 빼먹은 경우) 점수 없음

$g'(1)$ 이나 $g''(1)$ 을 잘못 구하여도 $T_2^1 g(y)$ 에 올바르게 대입한 경우는 점수 부여.

8번.

$f(x)=\sqrt{1+x}$ 는 $x=0$ 에서 무한번 미분가능하므로, 테일러 급수

$Tf(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 를 갖는다.

$f(0)=\sqrt{0+1}=1$

$f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n+1}\left[(1)\cdots(2n-3)\right]}{2^n}$ for $n\geq 2$.

$\therefore Tf(x)=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left[(1)\cdots(2n-3)\right]}{2^n\cdot n!}$

(미분으로 $Tf(x)$ 구하면 10점.)

(이항계수를 쓴 경우는 증명을하면 10점, 아니면 0점)

($f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{2^n n!}$ 과 같은 꼴은 $n=0,1$ 에서 정의가 안되므로 5점)

(일반항을 구하지 않고 $Tf(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$ 꼴로 쓰면 5점)

$$|f(1) - T_n f(1)| = |R_n f(1)| \le \frac{M_{n+1}(1)}{(n+1)!}(1)^n \quad \cdots (*)$$

$$M_{n+1}(1) = \max\{|f^{(n+1)}(t)| : 0 \le t \le 1\}$$

$$= |f^{(n+1)}(0)| \qquad (\because |f^{(n+1)}|\text{이 감소 함수 라서})$$

$$= \frac{(1)\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}$$

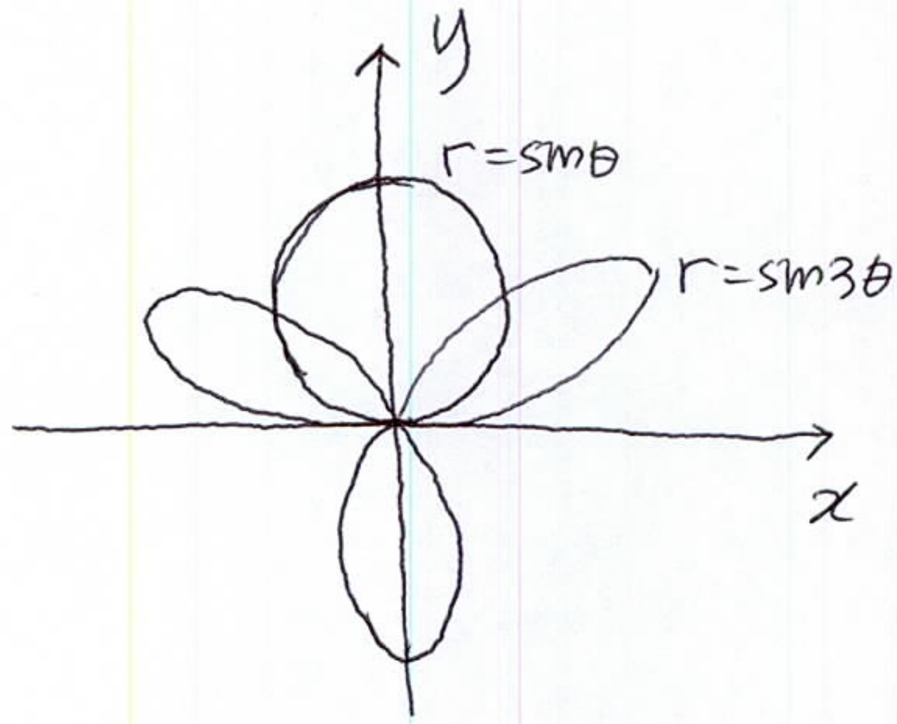
$$\therefore |R_n f(1)| \le \frac{(1)\cdots(2n-1)}{(n+1)!\,2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left(\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right) < \frac{1}{2(n+1)}.$$

Since $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, $\lim_{n\to\infty} |R_n f(1)| = 0$

$\blacksquare$ (0점)

#9. • 그래프 각 5점.



• (교점 찾기)

$\sin 3\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta(2\sin^2\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 0$ or $\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ +5

$\Rightarrow \theta = n\pi$ or $\theta = n\pi \pm \frac{1}{4}\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

Case I) $\theta = n\pi$; $(x, y) = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta) = (0, 0)$

Case II) $\theta = n\pi + \frac{1}{4}\pi$; $(x, y) = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Case III) $\theta = n\pi + \frac{3}{4}\pi$; $(x, y) = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\therefore$ 답 : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ +5

10번 모범답안

(a) $r = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ $\longrightarrow$ $r^2 \cos 2\theta = 1$

$\longrightarrow$ $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$

$\longrightarrow$ $x^2 - y^2 = 1$ $\quad (\cos 2\theta \geq 0)$

$\cos 2\theta \geq 0$ 의 범위를 확인해보면 $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\theta \in [\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$

가 되어 영향을 주지 않는다. 따라서

답: $x^2 - y^2 = 1$ ① ···· 5점

점근선 $y = \pm x$ ② ···· 5점

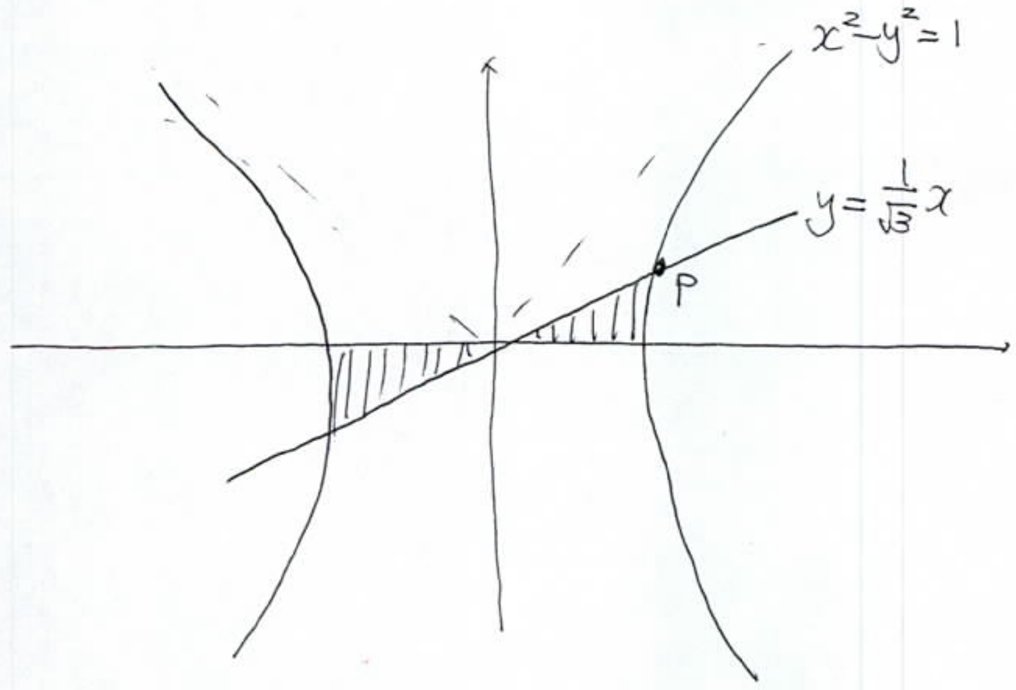
① ···· 잘못된 식을 구한 경우 0점

잘못된 범위를 추가한 경우 3점

② ··· 점근선을 틀릴경우 0점

하나만 구한경우 3점

(b) 그림을 그려보면, 주어진 영역은



$P = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

이 되어, 빗금친 부분의 넓이가

$$S = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx\right) \quad \cdots\cdots ①$$

여기까지 3점

가 된다.

$$\int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_0^{\alpha} \sinh^2 t\,dt \qquad \begin{cases} x = \cosh t & (x \geq 1) \\ dx = \sinh t \\ \alpha = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \end{cases}$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{t}{2}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2\alpha) - \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sinh\alpha \cdot \cosh\alpha - \frac{\alpha}{2}$$

α를 구해보면

$$\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \longrightarrow e^{2\alpha} - \sqrt{6}e^{\alpha} + 1 = 0$$

$$\longrightarrow e^{\alpha} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad (e^{\alpha} \geq 1)$$

따라서,

$$S = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\log\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \quad \cdots ②$$

여기까지 10점

···· ① S에 해당하는 적분식을 정확히 찾은 경우 +3점

····· ② · 1사분면 상의 도형만 구한 경우 -2 점

· 적분 계산 실수로 답이 틀린 경우 부분점수 없음

· 연습문제의 내용을 증명없이 사용한 경우 +3점

· 기타 치환적분을 이용한 경우, 과정이 정확하다면 +7점

· 극좌표계로 주어진 곡선의 넓이 계산법 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$ 를 사용한 경우, 적분식이 올바르면 +3점, 답이 정확하게 나오면 10점

· 답에 $\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 을 계산하지 않고 남겨둔 경우 -2 점