2015년도 여름학기 수학 및 연습 2 중간고사 모범답안

#1. 원점을 지나는 직선 $y = 0$ 을 따라서 $(x, y) \to 0$ 일 때의 $f(x, y)$ 의 극한값을 구해보면,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+0}{x^2+0+0} = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

이므로 f 는 원점에서 연속이 아니다. □

- 부분 점수 없음.
- 다른 경로를 통해서 확인했어도 논리가 맞으면 정답.

#2.

(a) $\lim_{r\to+0} e^{-\frac{1}{r}} = 0$ 이므로, f는 원점에서 연속이다. □

- 부분 점수 없음.

(b) 원점이 아닌 경우에는

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r^2}e^{-r}\cos\theta + 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r^2}e^{-r}\sin\theta + 0$$

이므로

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{e^{-r}\cos\theta}{r^2}, \frac{e^{-r}\sin\theta}{r^2}\right)$$

이다.

$$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{-1/|t|}}{t} = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{e^{|s|}} = 0$$

이므로 $\nabla f(0,0) = (0,0)$ 이다. □

- 원점이 아닌 경우, 연쇄법칙의 식을 잘 썼으면 +3점,
  계산과 답까지 모두 맞으면 +5점. (총 8점)
- 원점에서의 기울기벡터를 맞게 구했으면 +2점. (과정이 없으면 점수 없음.)

(c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ &= \left(-\frac{2}{r^3}e^{-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{r^2}e^{-\frac{1}{r}}\right) + \frac{1}{r}\frac{1}{r^2}e^{-\frac{1}{r}} + 0 \\ &= \frac{1-r}{r^4}e^{-\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

□

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ 를 정확히 썼으면 +5점,
  계산과 답까지 모두 맞으면 +5점.
- ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ 를 이용하지 않았더라도,
  바르게 계산하여 답이 맞게 구했으면 10점.)

3. (a) $f(x,y) = \cosh x \sin y$

$$= \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\left(y-\frac{y^3}{6}+o(y^4)\right)$$

$$= y-\frac{y^3}{6}+\frac{x^2y}{2}+\underline{o(\sqrt{x^2+y^2}^{\,4})} \quad \cdots ①$$

이므로, 테일러 전개의 유일성에 의하여 구하는 근사 다항식은

$$T_4f(x,y) = y-\frac{y^3}{6}+\frac{x^2y}{2}.$$

* ①에서 $o(\sqrt{x^2+y^2}^{\,4})$가 언급되지 않은 경우 ($\cdots$ 으로 쓰는 등), 또는 오류가 있을 때 -2점.

* 유일성을 언급하지 않은 경우 -3점.

* 근사 다항식을 잘못 구하면 무조건 0점.

* $T_4f(x,y) = f(0,0) + D_{(x,y)}f(0,0) + \frac{1}{2}D_{(x,y)}^2 f(0,0) + \frac{1}{6}D_{(x,y)}^3 f(0,0) + \frac{1}{24}D_{(x,y)}^4 f(0,0)$

을 이용한 경우, 답이 맞으면 10점, 틀리면 0점. (부분점수 없음).

(b) 구하는 근삿값은 $T_4f(-0.1, 0.2) = 0.2 - \frac{0.2^3}{6} + \frac{(-0.1)^2\,0.2}{6} = \frac{599}{3000}$. +3

이때 오차를 R_4라 하면

$$|R_4| \le M_5 \cdot \frac{(|-0.1|+|0.2|)^5}{5!},$$

이때 $M_5 = \max\{|D_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_5} f(-0.1t, 0.2t)| : 1\le i_1,\cdots,i_5\le 2,\ 0\le t\le 1\}$.

그런데 f의 모든 5계 편도함수의 절댓값은, $\sinh x$, $\cosh x$ 중 하나와 $\sin y$, $\cos y$ 중 하나의 곱이다. 따라서 $M_5 \le \max\{|\sinh 0.1|, |\cosh 0.1|\} < \frac{5}{4}$.

따라서 $|R_4| \le \frac{5}{4}\times\frac{1}{5!}\times\frac{3^5}{10^5} = \frac{81}{32}\times 10^{-5}$ 이다. +7

* (a)에서 $T_4f(x,y)$가 틀렸을 경우 (b)도 0점.

4. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \varphi e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)\cos\theta - \varphi e^{\varphi\cos\theta}\sin(\varphi\sin\theta)\sin\theta$. +10

(부분점수 없음)

(b) $g'(\varphi) = \dfrac{d}{d\varphi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)\,d\theta$

$\varphi \neq 0$일 때

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)\right)d\theta \quad \text{(라이프니츠 정리)}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(e^{\varphi\cos\theta}\cos(\varphi\sin\theta)\cos\theta - e^{\varphi\cos\theta}\sin(\varphi\sin\theta)\sin\theta\right)d\theta$$ +5

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\,d\theta = \frac{1}{\varphi}\left(f(\varphi,2\pi) - f(\varphi,0)\right) = 0.$$

이때 g는 $[0, 2015]$에서 연속이고 $(0, 2015)$에서 $g'(\varphi) = 0$ 이므로, g는 $[0, 2015]$에서 상수함수이다. 여기

$$g(0) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

이므로,

$$g(2015) = g(0) = 2\pi.$$ +5.

#5.

(a)

$$D_1 f = 2x(1+x^2+y^2)e^{x^2-y^2}, \quad D_2 f = 2y(x^2+y^2-1)e^{x^2-y^2}$$

이고,

$$\begin{aligned} D_{11}f &= \{2(1+x^2+y^2)+4x^2(2+x^2+y^2)\}e^{x^2-y^2}, \\ D_{12}f &= -4xy(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}, \\ D_{22}f &= \{2(x^2+y^2-1)-4y^2(x^2+y^2-2)\}e^{x^2-y^2} \end{aligned}$$

이므로, $(0,0)$에서 $D_{11}f = D_{22}f = 2$, $D_{12}f = 0$ 이다. 그러므로

$$D^2_{\mathbf{v}}f(0,0) = D_{11}f(0,0) + 4D_{12}f(0,0) + 4D_{22}f(0,0) = 2 + 4\cdot 0 + 4\cdot 2 = 10$$

이다. □

- 편미분계수들을 맞게 구했으면 +5점.
- 답까지 맞게 구했으면 +5점.

(b)

$$\nabla f = (2x(1+x^2+y^2)e^{x^2-y^2}, 2y(x^2+y^2-1)e^{x^2-y^2}) = O$$

에서, $x=0$ 이고, $y = 0, \pm 1$ 이다. 따라서 임계점은 $(0,0),(0,1),(0,-1)$ 이다.
(i) $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > O$ 이므로 헤세판정법에 의해 $(0,0)$ 은 극소점이다.
(ii) $f''(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}$ 의 행렬식은 음수이므로 헤세판정법에 의해 $(0,1)$ 과 $(0,-1)$ 은 안장점이다. □

- 각 임계점 당 5점. (헤세 행렬이 틀렸을 경우 점수 없음.)
- 임계점에 대한 판정이 모두 틀렸을 경우에도, 임계점 3개를 정확하게 계산한 경우 5점.

#6. $g(x,y,z) = xy + yz$ 라고 하면, $D = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 4\}$ 이고, $\nabla g(x,y,z) = (y, x+z, y)$ 이다. 특히, D 에서 $\nabla g \neq O$ 이다. 또한 $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$ 이다. 따라서 $f|_D$ 가 점 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 에서 최솟값을 가진다고 하면, 라그랑즈 정리에 의해

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

를 만족하는 0 이 아닌 실수 λ가 존재한다. 즉,

$$2x_0 = \lambda y_0 \tag{1}$$
$$2y_0 = \lambda(x_0 + z_0) \tag{2}$$
$$4z_0 = \lambda y_0 \tag{3}$$

이다. (1)과 (3)에 의해 $x_0 = 2z_0$ 이고, 이를 (2)에 대입하면 $y_0 = \frac{3}{2}\lambda z_0$ 이다. 또, 이를 (3)에 대입하면, $\lambda^2 = \frac{8}{3}$ 이다. 따라서 $y_0 = \pm\sqrt{6} z_0$ 이다. 또한,

$$(x_0 + z_0)y_0 = 4$$

이므로 $z_0^2 = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ 이다. 그러므로

$$f(P) = x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 12z_0^2 = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

이고, 다른 값은 없으므로 이 값이 구하는 최솟값이다. □

- 라그랑즈 승수법을 적용한 식을 맞게 썼으면 +10점. (∇f 나 ∇g 가 틀리면 점수 없음.)
- 최솟값까지 맞게 구했으면 +10점.

#7. $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}$ 이다.

그러므로

$$
\begin{aligned}
\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} &= \det \begin{pmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} \\
&= (1-v)((u-uw)uv + u^2vw) + u((v-vw)uv + uv^2w) \\
&= u^2v
\end{aligned}
$$

이다. □

- 야코비 행렬을 맞게 구했으면 +10점. (행렬을 잘못 구했을 경우, 틀린 성분이 2개 이하이면 5점 감점, 3개 이상이면 점수 없음.)
- 답까지 맞게 구했으면 +10점.

#8.

(a). $\mathbb{R}^3$ 에서 $\varphi_c(x,y,z) := yz^2\sin x + \cosh(1+yz) + C$ (상수).

grad $\varphi_c = \mathbb{F}$ 임을 안다. (on $\mathbb{R}^3$)

$\mathbb{R}^3$가 연결집합이므로, 잠재함수는 (상수 : 임의) 유일하다

$\therefore$ 답은 $\varphi_c(x,y,z)$ 꼴 ($C \in \mathbb{R}$, 임의로 잡음)

→ +10점.

- 답 틀리면 0점., 상수없이 언급하면 3점 감점.

(b) 선적분 기본정리에 의해, 답은

$\varphi_c(X(\frac{\pi}{2})) - \varphi_c(X(0)) = \varphi_c\left(\frac{\pi}{2}, 1, -1\right) - \varphi_c(0,-1,1) = 1\cdot(-1)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \cosh(1+1\cdot(-1)) + C$

$-\left(-1\cdot1^2\cdot\sin 0 + \cosh(1+(-1)\cdot1) + C\right) = 1$

→ +10

- 부분점수 없음.

#9.

$$\int_X \frac{(2015x+5y+x^3e^{-x^2-y^2}+xy^2e^{-x^2-y^2},\ 2015y-5x+x^2y\,e^{-x^2-y^2}+y^3e^{-x^2-y^2})}{x^2+y^2}\cdot ds$$

$$=\int_X \Big(\underbrace{2015\,\frac{(x,y)}{x^2+y^2}+(x,y)\cdot e^{-x^2-y^2}}_{①}\ \underbrace{-\,5\,\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}}_{②}\Big)\cdot ds$$

- $\dfrac{(x,y)}{x^2+y^2} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right)$, $e^{-x^2-y^2}(x,y) = \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2}\right)$

on $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ (열린집합) 이므로 ① 에서 선적분 기본정리를 쓸 수 있다.

$\therefore$ ① = 0 ($\because$ $X(t)$ 가 폐곡선)

- -5ω 를 $X(t)$ 를 따라 선적분하면,

② $= -5\cdot$ (원점에서 바라본 각도의 변화량)

$= -5\cdot 6\pi = -30\pi$

$\therefore$ 답 = ① + ② $= -30\pi$ $\blacksquare$

- 직접 계산해도 논리 오류 없다면 +25점
- 사소한 계산 실수 (예: 각원소 벡터장의 적분계산 실수) 시 10점 감점