2019-여름 수학2

#1. $\text{grad} f = (a, b, 1)$.

$\therefore (a, b, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) = 1$

$(a, b, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 0, 3) = \sqrt{2}$

정리하면 $a + 2b = \sqrt{5}$, $-a+3 = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow a = 3 - 2\sqrt{5}$, $b = \frac{3\sqrt{5}-3}{2}$ … a, b 각 3점

$\therefore \frac{1}{\sqrt{29}}(2, 4, 3)$ 방향 기울기

$= (a, b, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2, 4, 3)$

$= \frac{1}{\sqrt{29}}(3+2\sqrt{5})$ … 답 4점

(별해) $(a, b, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2, 4, 3)$

$= \frac{1}{\sqrt{29}}(2a+4b+3)$

$= \frac{1}{\sqrt{29}}(3+2\sqrt{5})$

* (별해)의 방법대로 a, b를 구하지 않고 풀었으나
답이 틀린 경우 0점

#2. $f(x,y,z) = x^2+2y^2+4z^2$

$g(x,y,z) = x^2+2y^2-2z$

$P=(a,b,c)$가 두 곡면 (f의 6-등위면, g의 0-등위면)

의 교점이라 하자.

P에서 f의 6-등위면의 접평면의 법벡터

$= \mathrm{grad}\, f(P) = (2a, 4b, 8c)$ … 3점

P에서 g의 0-등위면의 접평면의 법벡터

$= \mathrm{grad}\, g(P) = (2a, 4b, -2)$ … 3점

두 접평면이 수직하므로 두 법벡터가 수직

$\therefore (2a, 4b, 8c)\cdot(2a, 4b, -2) = 4(a^2+4b^2-4c) = 0$ … 4점

$P=(a,b,c)$가 f의 6-등위면, g의 0-등위면 위의 점이므로

$a^2+2b^2+4c^2=6$, $a^2+2b^2-2c=0$

연립해서 풀면 $(a,b,c) = (0, \pm1, 1)$ … 5점

* 교점 중 하나만 구하거나, 틀린 교점이 포함되면 2점 감점

#3. (a) $D_1 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$ … 2점

$D_2 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ … 2점

$D_{(1,1)} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sqrt{|t|^3 + t^6}}$: 발산

$\therefore D_{(1,1)} f(0,0)$은 존재하지 않는다 … 2점

(b) $X(t) = (t|t|, t)$ 라 두자.

$\lim_{t \to 0} X(t) = (0,0)$

$\lim_{t \to 0} f(X(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2|t|}{\sqrt{|t|^6 + t^6}} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|^3}{\sqrt{2}|t|^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq f(0,0)$

$\therefore f$는 원점에서 연속이 아니다.

(c) f는 원점에서 연속이 아니므로 원점에서 미분 불가능

* (a)에서, $D_{(1,1)} f(0,0)$을 구할 때 논리에 결함이 있으면 1점 감점

(b), (c)에서 논리가 부족하면 2점 감점

(c)에서, (a)나 (b)를 이용한 경우 해당 소문항을 풀었어야 점수 인정

<논리가 부족한 예시>

$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\sqrt{|t|^3 + t^6}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{|t| + t^4}} = \infty$: $t<0$인 경우 부호가 반대가 됨.

$\lim_{|v| \to 0} \frac{|f(v) - f(0) - \operatorname{grad} f(0) \cdot v|}{|v|}$ 가 발산하므로 원점에서 미분 불가능

: $v \neq (0,b), (a,0)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ 이어야 성립.

#4. $D_1 f(x,y) = 2x\cos(e^y + x^2 - 2)$

$D_2 f(x,y) = e^y \cos(e^y + x^2 - 2)$

$D_1^2 f(x,y) = 2\cos(e^y + x^2 - 2) - 4x^2 \sin(e^y + x^2 - 2)$

$D_1 D_2 f(x,y) = D_2 D_1 f(x,y) = -2xe^y \sin(e^y + x^2 - 2) \quad (\because f \in C^2)$

$D_2^2 f(x,y) = e^y \cos(e^y + x^2 - 2) - e^{2y} \sin(e^y + x^2 - 2)$

… 편도함수 하나당 1점

$(0,0)$을 대입하면

$f(0,0) = -\sin 1,\ D_1 f(0,0) = 0,\ D_2 f(0,0) = \cos 1,$

$D_1^2 f(0,0) = 2\cos 1,\ D_1 D_2 f(0,0) = D_2 D_1 f(0,0) = 0,$

$D_2^2 f(0,0) = \cos 1 + \sin 1$

… 계수 하나당 1점

$\therefore T_2 f(x,y) = f(0,0) + (x,y)\cdot \mathrm{grad} f(0,0)$

$+ \frac{1}{2!}\left(x^2 D_1^2 f(0,0) + 2xy D_1 D_2 f(0,0) + y^2 D_2^2 f(0,0)\right)$

$= -\sin 1 + y\cos 1 + x^2 \cos 1 + \frac{\cos 1 + \sin 1}{2} y^2$

… 답 4점

#5. $\mathrm{grad} f(x,y) = (2\cos x \sin y,\ 2\sin x \cos y)$.

(x,y) 가 f의 임계점 $\Leftrightarrow$ $(2\cos x \sin y,\ 2\sin x \cos y) = (0,0)$

$\therefore$ f의 임계점 $= (0,0),\ (\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}),\ (\pm\frac{\pi}{2}, \mp\frac{\pi}{2})$ (복호동순)

… 임계점 하나당 1점

$D_1^2 f(x,y) = -2\sin x \sin y$

$D_1 D_2 f(x,y) = D_2 D_1 f(x,y) = 2\cos x \cos y$ $(\because f \in C^2)$

$D_2^2 f(x,y) = -2\sin x \sin y$

$\therefore f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin x \sin y & 2\cos x \cos y \\ 2\cos x \cos y & -2\sin x \sin y \end{pmatrix}$

각 임계점을 대입하면

$f''(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} < 0$: 극대점

$f''(\pm\frac{\pi}{2}, \mp\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$: 극소점

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det f''(0,0) = -4 < 0$: 안장점

… 임계점 하나당 2점

* 틀린 임계점이 있는 경우 3점 감점

#6. $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=x^3+y^3-3x-3y-4$ 로 하면,

영역 $S=\{f(x,y)\le 100\}\cap\{g(x,y)=0\}$은 유계 폐영역이고,

$(-1,-1)$은 이 영역 안에 있으므로 공집합이 아니다. 따라서

S에서 연속함수 $f(x,y)$는 최솟값을 갖는다. 5

$\nabla f(x,y)$가 영벡터가 되는 점 $(0,0)$은 S에 없으므로, 라그랑주 승수

법에 의하여 f가 극값을 갖는 S 내부의 점에서

$\lambda(2x,2y)=(3x^2-3,\ 3y^2-3)$ 이다. 5

여기서 $\big(3(x+y)-2\lambda\big)(x-y)=0$ 인데,

$x=y$인 경우 가능한 (x,y)는 $(-1,-1)$, $(2,2)$ 이고 가능한 f의

최솟값은 2이다.

5

$x\ne y$인 경우, $3(x+y)=2\lambda$ 이고 $xy=-1$ 에서 $x^2+y^2\ge 2|xy|=2$

이므로 f가 2보다 작은 값을 가질 수 없다. 5

$\therefore$ 거리 $=\sqrt{2}$.

#7. $G'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$, $F'(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 2e^y \\ -\cos x & -e^y \end{pmatrix}$

이므로

$$((G\circ F)'(\pi,0) = G'(F(\pi,0)) \cdot F'(\pi,0) \rfloor 5$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \rfloor 3$$

이고, $\det((G\circ F)'(\pi,0)) = -48$ 이다. $\rfloor 2$.

#8 (풀이 1)

$$\mathbb{F}(x,y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2} + \frac{(x,y)}{x^2+y^2}$$

$$= \mathbb{F}_1(x,y) + \mathbb{F}_2(x,y) \text{ 로 하면}$$

$$\int_X \mathbb{F}\cdot ds = \int_X \mathbb{F}_1\cdot ds + \int_X \mathbb{F}_2\cdot ds \quad \rfloor 3.$$

인데, $\int_X \mathbb{F}_1 \cdot ds = 10\pi$, ($\because$ 각원소 벡터장) $\rfloor 6$

$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ 이면 $\nabla\varphi = \mathbb{F}_2$ 이므로

선적분 기본정리에서 $\int_X \mathbb{F}_2\cdot ds = \frac{1}{2}\left(\log(100^2) - \log(100-10\pi)^2\right)$

$$= \log\left(\frac{10-\pi}{10}\right) \quad \rfloor 6.$$

$$\therefore \int_X \mathbb{F}\cdot ds = 10\pi + \log\left(\frac{10-\pi}{10}\right).$$

(풀이 2) 각원소 벡터장이나 기울기 벡터장의 성질을 전혀 이용하지 않는 경우,

$\int_X \mathbb{F}\cdot ds$ 를 θ에 대한 적분식으로 정확히 바꾸면 5점,

답이 맞으면 나머지 10점 부여.

#9 (a)

$\varphi(x,y,z) = xe^{x+y+z} + yz$ 로 하면

$\nabla\varphi = \mathbb{F}$ 이다. 연결된 열린 집합인 $\mathbb{R}^3$에서 $\rfloor_3$

$\mathbb{F}$의 잠재함수는 $\underbrace{\varphi(x,y,z)}_{5} + \underbrace{C}_{2}$ 로 유일하게 존재한다.

#9 (b)

선적분 기본정리에 의하여

$$\int_X \mathbb{F}\cdot ds = \varphi(X(\pi)) - \varphi(X(0))$$

$$= \varphi(5,1,\pi) - \varphi(1,1,0)$$

$$= 5e^{6+\pi} + \pi - e^2 \text{ 이다.}$$

$\rfloor_5$.

#10. (풀이 1)

$\mathbb{F}_1(x,y) = (xy, x^2)$로 하면,

$\mathbb{F}(x,y) = \nabla\left(\frac{1}{2}e^{x^2+y^2}\right) + \mathbb{F}_1(x,y)$ 이므로.

$\int_X \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_X \mathbb{F}_1(x,y)\,d\mathbf{s}$ 인데, $\rfloor 8$. (∵ 선적분 기본정리)

X(t)를 세 부분
$$\begin{cases} X_1 : (t,0), & 0 \le t \le 1 \\ X_2 : (1,t), & 0 \le t \le 1 \\ X_3 : (1-t,1-t), & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

으로 나누어 $\int_X \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbf{s} = \int_{X_1} \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{X_2} \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{X_3} \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbf{s}$

$$= \underbrace{0}_{4} + \underbrace{1}_{4} + \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)}_{4}$$

$= \frac{1}{3}$ 이다.

(풀이 2) 기울기 벡터장의 성질을 이용하지 않고, X를 세 부분으로 나누는 경우.

$$\int_X \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{X_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{X_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{X_3} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} \rfloor 2$$

$$= \underbrace{\frac{e-1}{2}}_{6} + \underbrace{\frac{e^2-e}{2} + 1}_{6} + \underbrace{\left(-\frac{2}{3} - \left(\frac{e^2-1}{2}\right)\right)}_{6}$$

$= \frac{1}{3}$.