

수학 및 연습 2 중간고사

(2016년 7월 8일 11:00-13:00)

학번:

이름:

모든 문제에 바르고 깨끗한 풀이과정을 쓰시오. (총점 150점)

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^6 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 함수 f 가 원점에서 연속인지 판정하시오.
- (b) (5점) $D_1 f(0, 0)$ 와 $D_2 f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (c) (5점) 함수 f 가 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

문제 2. [15점] 주어진 함수의 이계 편도함수 $\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} f(r, \theta)$ 를 구하시오.

$$f(r, \theta) = \int_{r \cos \theta}^{r \sin \theta} e^{-t^2} dt$$

문제 3. [15점] 3차원 공간의 점 $(0, 0, 3)$ 에서 $\mathbf{v} = (1, 2, -6)$ 방향으로 발사된 빛이 곡면 $z = x^2 - y^2$ 에 접함을 보이시오.

문제 4. [15점] $y > 0$ 에서 정의된 함수 $f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(y^2 + \tan^2 x) dx$ 에 대하여 $f'(1)$ 을 구하시오.

문제 5. [15점] 함수 $f(x, y) = 3x^2 y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1$ 의 임계점을 모두 구하고 그것이 극댓점인지 극솟점인지 혹은 안장점인지 판정하시오.

문제 6. [15점] $z = f(x, y)$ 가 방정식 $2x + y + z + \frac{e^{2z}}{2} = \frac{1}{2}$ 의 해가 된다고 할 때, 원점에서 $f(x, y)$ 의 이차 근사다항식을 구하시오.

문제 7. [15점] n -공간에서 정의된 2016급 함수 f 가 임의의 점 P 에 대하여 $f(-P) = -f(P)$ 를 만족할 때, $D_X^{2016} f(O)$ 을 구하시오.

문제 8. [15점] 양수 c 에 대하여 곡면 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = c$ 에서의 함수 $f_c(x, y, z) = x^2 - y^2 + c^2$ 의 임계점들을 P_1, \dots, P_k 라고 하자. 이 때, $\sum_{j=1}^k f_c(P_j)$ 를 구하시오.

문제 9. [15점] 벡터함수 $F(x, y) = (3 - x^2 - y, x)$ 와 점 $P = (1, 1)$ 에 대하여,

- (a) (5점) 함수 F 의 야코비 행렬 $F'(P)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) $n = 1, 2, 3, \dots$ 에 대해 F 를 n 번 합성한 함수를 $F_n = F \circ F \circ \dots \circ F$ 이라고 할 때, $A_n := F'_n(P)$ 를 구하시오.

문제 10. [15점] $z > 0$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \cos y - \log z, -e^x \sin y + 2yz, -\frac{x}{z} + y^2)$$

에 대하여,

- (a) (10점) \mathbf{F} 가 잠재함수를 가지면 그것을 모두 구하시오.
- (b) (5점) 곡선 $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $(\pi \leq t \leq 2\pi)$ 에 대하여 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.