수학 및 연습 2 중간고사

(2017년 7월 10일 11:00-13:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^6+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) (5점) 함수 f 가 원점에서 연속임을 보이시오.

(b) (5점) $D_1f(0,0)$ 와 $D_2f(0,0)$ 를 구하시오.

(c) (5점) 함수 f 가 원점에서 미분가능한지를 판정하시오.

문제 2. [10점] 점 $P\in\mathbb{R}^2$ 근방에서 정의된 미분가능함수 $f(x,y)$ 가 $(1,1)$ 방향 단위벡터 $\mathbf{v}$ 와 $(0,-2)$ 방향 단위벡터 $\mathbf{w}$ 에 대하여

$$D_{\mathbf{v}}f(P)=2\sqrt{2},\qquad D_{\mathbf{w}}f(P)=-3$$

을 만족한다고 한다. $\mathbf{u}$ 를 $(-1,-2)$ 방향 단위벡터라 할 때 $D_{\mathbf{u}}f(P)$ 를 구하시오.

문제 3. [15점] 함수 $f(x,y,z)=\dfrac{x}{yz^2}$ 과 점 $P=(4,1,2)$ 에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) (5점) 점 P 에서 함수 f 의 기울기 벡터를 구하시오.

(b) (5점) 점 P 에서 등위면 $f(x,y,z)=1$ 의 접평면을 구하시오.

(c) (5점) 점 P 에서 $f(x,y,z)$ 가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위 벡터를 $\mathbf{v}$ 라고 할 때, $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 를 구하시오.

문제 4. [15점] $\mathbb{R}^2$ 에서 정의된 이급함수 $f(u,v)$ 와 변환

$$(u,v)=G(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{2},xy\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$ 임을 보이시오.

(b) (5점) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$ 이면, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 임을 보이시오.

문제 5. [10점] $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\}$ 인 영역에서 정의된 함수

$$f(x,y)=\int_{x+y}^{x^2y}\frac{\sin(xt)}{t}\,dt$$

에 대하여 $\mathrm{grad}f(x,y)$ 를 구하시오.

문제 6. [15점] 점 $P=(1,0)$ 과 함수 $f(x,y)=\sin(e^y+x^2-2)$ 에 대하여 P 에서 $f(x,y)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 7. [10점] 함수 $f(x,y)=y^3+3x^2y-6x^2-6y^2+2$ 의 모든 임계점을 구하고, 각각의 임계점이 극대점인지 극소점인지 안장점인지 판정하시오.

문제 8. [15점] 구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 에서 정의된 함수 $f(x,y,z)=xy+yz+3$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

문제 9. [10점] 미분가능한 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 와 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 가 다음 조건을 만족한다.

$$f(1,1)=(1,0),\quad (g\circ f)'(1,1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad g'(1,0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

이 때, $f'(1,1)$ 을 구하시오.

문제 10. [10점] 곡선 $X(t)=\big(t-\sin t-\pi,\ 1-\cos t,\ 0\big)$ $(0\le t\le 2\pi)$ 와 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,\ -x,\ x^2+y^2)$ 에 대하여

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

를 구하시오.

문제 11. [15점] 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(2x\sin(yz)+1,\ x^2z\cos(yz)+3y^2e^z,\ x^2y\cos(yz)+e^zy^3\big)$$

의 잠재함수를 구하고, 곡선 $X(t)=(e^t,\ \cos t,\ t)$ $(0\le t\le\pi)$ 에 대하여 $\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

문제 12. [10점] 다음 명제가 참이면 T, 거짓이면 F라고 쓰시오. (풀이과정 불필요.)

(a) (2점) 각원소 벡터장은 $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 에서 잠재함수를 가진다.
(b) (2점) 모든 일급 벡터장은 국소적으로 잠재함수를 가진다.
(c) (2점) $\mathbb{R}^n$ 의 열린집합에서 정의된 일급 벡터장 $\mathbf{F}$ 의 임의의 두 잠재함수 ϕ 와 ψ 에 대하여, $\phi-\psi$ 는 상수함수이다.
(d) (2점) 입체각 벡터장은 $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ 에서 닫힌 벡터장이다.
(e) (2점) $\mathbb{R}^n$ 의 열린집합 U에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}$ 에 대하여, 영역 U 속의 임의의 닫힌 곡선 C 에 대하여 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=0$ 이면, $\mathbf{F}$ 는 닫힌 벡터장이다.