

수학 및 연습 2 기말고사

(2017년 12월 9일 오후 1:00-3:00)

학번: _____ 이름: _____

문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 곡선 $X(t) = \left(t \cos t, \sin^2 \left(\frac{t}{6}\right), \frac{4t}{\pi}\right)$ ($0 \leq t \leq \pi$) 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(yz^2 \cos(xy) + 2 \arctan(yz), xz^2 \cos(xy) + \frac{2xz}{1+y^2z^2}, 2z \sin(xy) + \frac{2xy}{1+y^2z^2}\right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

문제 2. [20점] 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2} \arcsin y}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}} dx dy$$

문제 3. [20점] 좌표평면에서 네 점 $(1, 0), (2, 0), (0, -2), (0, -1)$ 을 꼭지점으로 하는 사각형이 영역 R 일 때, 다음 적분값을 구하시오.

$$\iint_R e^{(x+2y)/(x-y)} dx dy$$

문제 4. [20점] 좌표공간에서 다음 부등식을 모두 만족하는 영역의 부피를 구하시오.

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 + 1 \leq z$$

문제 5. [20점] 양의 실수 a, b 와 곡선

$$X(t) = \left(\frac{2at}{1+t^2}, \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}\right) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

에 대하여 선적분 $\int_X x dy$ 를 구하시오.

문제 6. [20점] 좌표공간에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ 가 곡면

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = e^{4-x^2-y^2}, z \geq 1\}$$

를 통과하여 빠져나가는 양(flux) 을 구하시오. (단, S 의 향은 단위법벡터장 \mathbf{n} 에 대하여 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ 이도록 정한다.)

문제 7. [20점] 좌표평면의 영역 $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + \frac{v^2}{4} \leq 1\}$ 에서 정의된 매개화된 곡면

$$X(u, v) = (uv, 2u + v, 2u - v)$$

의 넓이를 구하시오.

문제 8. [20점] 좌표공간에서 다음 구면 좌표계 식에 의해 표현되는 곡면을 S 라 하자.

$$S: \rho = 1 + \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

아래에 정의된 벡터장 \mathbf{F} 가 곡면 S 를 통과하여 빠져나가는 양(flux)을 구하시오.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + e^z)\mathbf{i} + (yz^2 + \sin x)\mathbf{j} + (zx^2 + \cos y)\mathbf{k}$$

문제 9. [20점] 좌표공간에 있는 단위 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 은 평면 $x + y + z = 1$ 에 의하여 두 조각으로 나뉜다. 이 중 큰 조각을 곡면 S 라 하자. 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ 에 대하여

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

를 구하시오. (단, 곡면 S 의 향은 원점에서 멀어지는 방향으로 정한다.)

문제 10. [20점] 좌표공간에 있는 폐곡선 X 를 아래와 같이 정의하자.

$$X(t) = (\cos 2t, \sin 2t, \sin t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

이 곡선 X 에 대한 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_X (-y + x^2)dx + (x + e^y)dy + (x + \arctan z)dz$$