

수학 및 연습 2 기말고사
(2014년 12월 6일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_1^e \frac{\log x}{x} e^{y \log x} dx dy$$

문제 2. [20점] 좌표평면 위의 점

$$(1, 1), (-1, 0), (1, -1)$$

에 대해 점 $(1, 1)$ 부터 $(1, -1)$ 까지 순서대로 선분으로 연결한 곡선을 C 라 하자. 이때

$$\int_C (2x \arctan y) dx + \left(\frac{x^2}{1+y^2} \right) dy$$

를 구하시오.

문제 3. [20점] 직선 $y = 0$, $y = x$ 와 쌍곡선 $y = \frac{1}{x}$, $x^2 - y^2 = 1$ 으로 둘러싸인 제 1사분면의 영역 D 에 대해 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_D \frac{x^4 - y^4}{1 + xy} dx dy$$

문제 4. [20점] 좌표공간에서 부등식

$$x^2 + y^2 - z^2 + 4z \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 2, \quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0$$

을 모두 만족시키는 영역의 부피를 구하시오.

문제 5. [30점] 좌표평면의 영역 $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 10 - 4x^2 - y^2$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2} + xy^2, \frac{y+x}{x^2+y^2} + x^2y + x \right)$$

에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) $\iint_D \text{rot } \mathbf{F} dV_2$ 를 구하시오.

(b) (15점) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. (단, $C : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 은 반시계 방향으로 향이 주어져 있다.)

문제 6. [20점] 영역 $R : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$ 와 입체각 벡터장 $\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ 에 대해 발산 정리가 성립함을 보이시오.

문제 7. [20점] 영역 $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$ 에서 아래와 같이 정의된 곡면 X 의 넓이 A 와 중심 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 에 대해 $(A\bar{x}, A\bar{y}, A\bar{z})$ 를 구하시오.

$$X(x, y) = (x, \sqrt{2}y, x^2 + 2y^2)$$

문제 8. [20점] 곡면 $\frac{x^2}{8} + y^2 + z^2 = 1$ 과 평면 $y = z$ 가 교차하는 부분을 C 라고 할 때, 선적분

$$\int_C (\sin x - y)dx + (\cos y + z^2)dy + (e^z + x^2)dz$$

를 구하시오. (단, 곡선 C 의 향은 xy -평면으로 정사영한 것의 향이 반시계 방향이 되도록 정한다.)

문제 9. [30점] 곡면 S 와 벡터장 \mathbf{F} 가 다음과 같이 주어져 있다.

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - ye^z, x^2y + xe^z, x^2z).$$

다음 적분값들을 구하시오. (단, S 의 향을 정하는 단위 법벡터 \mathbf{n} 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 주어진다.)

(a) (15점) $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

(b) (15점) $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$