

수학 및 연습 2 중간고사

(2015년 7월 8일 11:00-13:00)

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^5}{x^2 + xy^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

가 원점에서 연속인지 아닌지를 밝히시오.

문제 2. [30점] 평면에서 극좌표로 다음과 같이 정의된 함수 f 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(r, \theta) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r}}, & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 함수 f 가 원점에서 연속임을 보이시오.
- (b) (10점) 함수 f 의 기울기 벡터 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 를 r 과 θ 를 사용하여 나타내시오.
- (c) (10점) 원점이 아닌 점에서의 f 의 라플라시안 $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 을 r 과 θ 를 사용하여 나타내시오. (Hint : 연쇄법칙을 사용한다.)

문제 3. [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 원점에서 함수 $f(x, y) = \cosh x \sin y$ 의 4차 근사다항식을 구하시오.
- (b) (10점) (a)를 이용하여 $\cosh(-0.1) \sin 0.2$ 의 4차 근사값을 구하고, 오차가 $\frac{81}{32} 10^{-5}$ 이하임을 보이시오. (단, $\cosh 0.1 < \frac{5}{4}$, $\sinh 0.1 < \frac{1}{4}$ 로 계산.)

문제 4. [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 함수 $f(\varphi, \theta) = e^{\varphi \cos \theta} \sin(\varphi \sin \theta)$ 에 대하여, 편미분 $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ 를 구하시오.
- (b) (10점) 함수 $g(\varphi) = \int_0^{2\pi} e^{\varphi \cos \theta} \cos(\varphi \sin \theta) d\theta$ 라 하면 $g(\varphi)$ 는 실수전체집합 \mathbb{R} 에서 정의된 연속함수이다. 이 때 $g(2015)$ 의 값을 구하시오. (Hint. 주의해서 $g(\varphi)$ 가 상수함수임을 보인다.)

문제 5. [25점] 함수 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$ 에 대하여 다음에 답하시오.

- (a) (10점) $\mathbf{v} = (1, 2)$ 일 때 $D_{\mathbf{v}}^2 f(0, 0)$ 의 값을 구하시오.
- (b) (15점) 함수 $f(x, y)$ 의 임계점을 모두 구하고, 각각을 극대점, 극소점 및 안장점으로 분류하시오.

문제 6. [20점] 집합 $D = \{(x, y, z) \mid xy + yz = 4\}$ 에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ 의 최솟값이 존재한다. 이 때 최솟값을 구하여라.

문제 7. [20점] $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$ 일 때, $\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ 를 구하시오.

문제 8. [20점] 곡선

$$X(t) = (t, -\cos 2t, 1 - 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

와 3차원 공간에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz^2 \cos x, z^2 \sin x + z \sinh(1 + yz), 2yz \sin x + y \sinh(1 + yz))$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 벡터장 \mathbf{F} 의 잠재함수가 존재하면 모두 구하시오.
- (b) (10점) 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

문제 9. [25점] 곡선 $X(t) = (\cos(3t), \sin(3t))$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 를 따르는 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2015x + 5y + x^3 e^{-x^2 - y^2} + xy^2 e^{-x^2 - y^2}, 2015y - 5x + x^2 y e^{-x^2 - y^2} + y^3 e^{-x^2 - y^2})}{x^2 + y^2}$$

의 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.