2018학년도 2학기
수학 및 연습 2
중간고사 채점 기준

1. (a)

$$|f(x,y)-f(0,0)| = |f(x,y)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2}$$

$$= |x| \cdot \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le |x| \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2}|x|$$

$$\therefore 0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-f(0,0)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|x| = 0$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ 이므로

f는 원점에서 연속.

* 부등식에 절댓값을 안 쓸 경우 혹은
분모가 0이 되는 경우를 고려하지 않은 경우 (-2)

* 그외 부등식 오류 0점

1.(b): $D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(vt)-f(0,0))$
$(v=(a,b))$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(at,bt) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{a^2bt^3}{a^2t^2+b^2t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{a^2+b^2} = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

$$\cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(f(vt)-f(0,0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}t\right) = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

*. 단순 계산 실수 2점 (정답은 맞는 경우)

* 정답이 틀린 경우 0점

1. (c)

① 첫 번째 풀이

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\frac{0}{t^2} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(0,t) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\frac{0}{t^2} = 0$$

$\therefore \text{grad} f(0,0) = (0,0)$

(혹은 (b)에서 $\vec{v} = (1,0), (0,1)$에서 $D_1 f = D_2 f = 0$)

그런데 $a \neq 0$, $b \neq 0$인 경우

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \frac{a^2 b}{a^2+b^2} \neq 0 = \text{grad} f(0,0)\cdot(a,b) \quad \text{이므로}$$

f는 (0,0)에서 미분 가능 하지 않다.

② 두 번째 풀이.

f가 P에서 미분 가능 $\Leftrightarrow \lim_{|\vec{v}|\to 0} \frac{|f(P+v) - f(P) - \vec{a}\cdot\vec{v}|}{|v|} = 0$ 인 벡터 a가 존재,

$\vec{a} = \text{grad} f(P)$

$\vec{v} = (a,b)$라 하자.

$P = (0,0)$, $\text{grad} f(P) = (0,0)$ (①의 과정)

$$\frac{|f(P+v) - f(P) - \text{grad}f(P)\cdot(a,b)|}{|v|} = \frac{|f(v)|}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|a^2 b|}{a^2+b^2}$$

$b=a$ 이면, 윗식 $= \frac{1}{\sqrt{2}|a|}\cdot\frac{|a|^3}{2a^2} = \frac{|a|^2}{\sqrt{2}\cdot 2a^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\therefore \lim_{(a,a)\to 0} \frac{|f(v)|}{|v|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

$\therefore$ f는 원점에서 미분 불가능.

* 과정이 틀렸지만 ((b)가 틀리고 그 결과를 이용한 경우 포함)

②의 정의를 올바르게 쓰거나, $D_v f(0,0) \neq \text{grad} f(0,0)\cdot v$ 를 보였으면 2점

Scanned by CamScanner

2. $xy\,f(x,y) = \cos(x+y+f(x,y))$ 양변을 y로 편미분

$\Rightarrow$ $x f(x,y) + xy \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y+f(x,y)) \cdot \left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ ⌋ 5점

$\Rightarrow$ $(0,0)$ 대입 $\Rightarrow$ $0 = -\sin(f(0,0)) \cdot \left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$ ⋯ ①

그런데, 원래 식에서 $(0,0)$을 양변에 대입하면,

$0 = \cos(f(0,0))$ 따라서, $0 \neq \sin(f(0,0))$ ⌋ 5점

따라서, ① 식으로부터 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$ ⌋ 5점

* 다른 풀이

준 식에 $(0,t)$ 대입 $\Rightarrow$ $0 = \cos(t + f(0,t))$ ⋯ ⑦

〃 $(0,0)$ 〃 $\Rightarrow$ $0 = \cos(f(0,0))$

$\Rightarrow$ ⑦에서 $t + f(0,t) = \frac{2n(t)+1}{2}\pi$ ($n(t)$는 정수)

② 이므로 $n(t)$는 정수 값을 갖는 연속 함수이고. 그러기 위해서는 (충분히 작은 t에 대해) $n(t)$는 t에 대해 상수함수이다. $n(t) = n$ 이라고 두면.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - t - \frac{2n+1}{2}\pi\right) = -1$$

①　　　　③

* ① : 편미분 정의를 정확히 서술 → 5점

② : $f(0,t) = -t + \frac{2n+1}{2}\pi$ 꼴이 됨을 설명하면 → 5점

③ : 답 5점

3. $f(x,y,z) = xyz - 2018$.

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

$\operatorname{grad} f(a,b,c) = (bc, ac, ab)$ $\quad (f(a,b,c) = abc - 2018 = 0)$.

• 접평면의 방정식

$\operatorname{grad} f(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$

$bcx + acy + abz = 3abc$.

x축 과의 교점 $(3a, 0, 0)$

y축 과의 교점 $(0, 3b, 0)$

z축 과의 교점 $(0, 0, 3c)$

• 사면체의 부피

$\frac{1}{6} \cdot |3a \cdot 3b \cdot 3c| = \frac{9}{2}|abc| = 9081$

채점기준

• grad f 를 구하면 5점

• 접평면의 방정식을 구하면 5점.

• 사면체의 부피를 구하면 5점.

(abc = 2018 대입 안하면 −2점).

(교점을 잘못 구하면 부피가 맞아도 점수 없음).

4. $F_n'(x) = \int_2^{2x} n(x-t)^{n-1} e^{t^2} dt + 2\cdot(-x)^n \cdot e^{4x^2}$ (by 라이프니츠 정리) +10

$F_n'(1) = (-1)^n \cdot 2e^4$ +5

※ 라이프니츠 정리를 적용할 때 오류가 있으면 5점 (정답점수 X)
라이프니츠 정리 적용시, 적분 안에 미분이 그냥 들어가면 0점
($F_n'(x) = \int_2^{2x} n(x-t)^{n-1} e^{t^2} dt$ 라 한 경우)

다른 풀이 " $\binom{n}{k} = {}_nC_k$ "

$$F_n(x) = \int_2^{2x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-t)^{n-k} e^{t^2} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \int_2^{2x} (-t)^{n-k} e^{t^2} dt.$$

$$\therefore F_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_2^{2x} (-t)^{n-k} e^{t^2} dt + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 2 (-2x)^{n-k} e^{4x^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_2^{2x} (-t)^{n-k} e^{t^2} dt + 2x^n \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k}}\, e^{4x^2}$$ +5

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_2^{2x} (-t)^{n-k} e^{t^2} dt + 2x^n e^{4x^2} \cdot (1+(-2))^n$$ +5

$$F_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\, 1^{k-1} \underbrace{\int_2^{2} (-t)^{n-k} e^{t^2} dt}_{=0} + 2e^4 (-1)^n$$

$$= 2(-1)^n e^4$$

+5

5. $f(x,y)$의 그레이디언트를 구하면

$\nabla f(x,y) = \left(1 + \frac{x-y}{x^2+y^2},\ -2 + \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ 이다. (3점)

$\{(x,y) \mid x>0\}$ 에서 $\nabla f(x,y) = (0,0)$ 을 만족하는 점을

구하면 $(x,y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 뿐이고, 이것이 유일한 임계점이다. (5점)

$f(x,y)$의 헤세 행렬을 구하면

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x^2+y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$ 이고, (5점)

$$\det f''\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = -\frac{25}{2} < 0$$ 이다.

따라서, 헤세 판정법에 의해 $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$은 안장점이다. (2점)

극좌표 치환을 통해 f를 (r,θ)의 함수로 바꾸어 $D_r f$, $D_\theta f$,

그리고 헤세 행렬을 구해 푼 경우에도 단계별로 점수를 부여함.

단, 이 경우 임계점을 정확히 구하고 그 점에서 헤세 행렬의

행렬식이 음수임을 잘 논증한 경우에만 최종 결론 점수가 주어짐.

6(a) $f(x,y) = e^{x+y}\sin(xy)$ 의 3차 근사다항식

$$e^{x+y}\sin(xy) = \left(1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+o\left((x^2+y^2)^{\frac{2}{2}}\right)\right)$$
$$\left(xy+o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$
$$= xy+x^2y+xy^2+o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right) \text{ 이므로}$$

테일러 전개의 유일성에 의해서 $T_3f(x,y) = xy+x^2y+xy^2$.

채점기준 * 답이 틀리면 0점.

* 테일러 전개의 유일성 언급하지 않을시 (−2) 점.
* 직접 미분하여 구한 경우 $\{$ 답까지 정확히 맞으면 7점

테일러 전개식을 언급시 2점.

$(D_i = \partial_i)$ 계수를 모두 잘 구한경우 5점

(b) $T_3f(x,y) = f(0,0) + (\partial_1 f(0,0)x + \partial_2 f(0,0)y) + \frac{1}{2!}(\partial_1^2 f(0,0)x^2 + 2\partial_1\partial_2 f(0,0)xy + \partial_2^2 f(0,0)y^2)$

$$+\frac{1}{3!}\left(\partial_1^3 f(0,0)x^3+3\partial_1^2\partial_2 f(0,0)x^2y+3\partial_1\partial_2^2 f(0,0)xy^2+\partial_2^3 f(0,0)y^3\right)$$

$\Rightarrow$ $\cancel{\frac{1}{3!}3\partial^3}$ $\frac{1}{3!}\partial_1^3 f(0,0) = \frac{1}{3!}\partial_2^3 f(0,0) = 0 \Rightarrow 0 = \partial_1^3 f(0,0) = \partial_2^3 f(0,0)$

$\frac{1}{3!}\cdot 3\partial_1^2\partial_2 f(0,0) = \frac{1}{3!}3\partial_1\partial_2^2 f(0,0) = 1 \Rightarrow 2 = \partial_1^2\partial_2 f(0,0) = \partial_1\partial_2^2 f(0,0)$

$$\therefore D^3_{(1,2)} f(0,0) = (1\cdot\partial_1 + 2\partial_2)^3 f(x,y)\Big|_{(0,0)}$$
$$= \partial_1^3 f(0,0) + 3\cdot 2\,\partial_1^2\partial_2 f(0,0) + 3\cdot 2^2\,\partial_1\partial_2^2 f(0,0) + 2^3\partial_2^3 f(0,0)$$
$$= 0 + 6\cdot 2 + 12\cdot 2 + 0 = 36.$$

채점기준 * 답이 맞고 풀이가 타당하면 8점

* 3계 미분계수에 대한 식을 잘 적었으면 4점 $(\vec{v} = (a,b))$

$(D_{\vec{v}}^3 f = a^3 D_1^3 f + 3a^2b\, D_1^2 D_2 f + 3ab^2 D_1 D_2^2 f + b^3 D_2^3 f)$

7. (모범답안)

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x \le 0,\ x \ge -2\}$.

$f(x,y,z) = x+y+z$.

• 집합 S는 유계, 닫힌 집합이므로, 연속함수 f는 S에서 최대값과 최소값을 가진다. ⋯ (3점).

* 유계라는 단어가 없으면 무조건 점수 없음.

* S가 아닌 다른 집합의 유계는 해당없음.

• S의 내부 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x < 0,\ x > -2\}$ 에서는 $\text{grad} f = (1,1,1) \neq 0$ 이므로 임계점을 가지지 않는다. ⋯ (4점). 따라서 이 영역에서는 최대, 최소를 가지지 않는다.

* grad f를 구하지 않아도, 그림을 통해 f의 최대, 최소가 S의 경계에만 존재한다는 언급이 있으면 4점.

• 반구각 영역 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x = 0,\ x > -2\}$ 에서 라그랑주 승수법을 사용하면,

$(2x+4,\ 2y,\ 2z) = \lambda(1,1,1)$ (적당한 λ에 대해).

$\frac{3}{4}\lambda^2 = 4$. $\lambda = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

영역을 고려하면 $\lambda = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, 임계점은 $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-2,\ \frac{2}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

이때 함수 값은 $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-2,\ \frac{2}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}-2$ ⋯ (4점)

* 임계점이 틀리면 점수없음.
임계점이 맞고 함수값이 틀리면 3점.
임계점이 맞고 라그랑주 승수법을 쓰면 점수 없음.

* 반구각 영역을 잡지 않고 라그랑주 승수법을 쓰면 점수 없음.

* 반구각 영역을 잡지 않고 라그랑주 승수법을 쓰면 점수 없음. 다만 각 $k<0$에 대해 반구각들 $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2+4x = k,\ x > -2\}$ 각각에 대해 라그랑주 승수법을 쓰는 경우는 인정.

Scanned by CamScanner

• 원판 영역 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x \le 0,\ x=-2\}$.

에서, 원판 내부 $\{(-2,y,z) : y^2+z^2 < 4\}$ 에서는

$\mathrm{grad}\, f(y,z) = (1,1) \ne 0$ 이므로 임계점을 갖지 않는다.

원 영역 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x=0,\ x=-2\}$

$= \{(-2,y,z) : y^2+z^2=4\}$ 에서 라그랑주 승수법을 쓰면

$(2y, 2z) = \lambda(1,1)$, $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$,

범위를 고려하면 임계점은 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 함숫값은

$f(-2,-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -2-2\sqrt{2}$.

... (4점)

* 임계점이 틀리면 점수 없음. 임계점이 맞고 함숫값이 틀리면 3점.

* 원판 내부를 고려 하지 않으면 0점.

* 원판 내부를 고려 하지 않으면 0점.
  다만 그림을 통해 최대, 최소가 원판 경계에만 존재한다고 언급한 경우는 인정.

* 코시-슈바르츠 정리를 이용하는 경우, 등호성립조건이 없으면 -1점.

최대값 $2\sqrt{3}-2$

최소값 $-2\sqrt{2}-2$

8. (a) $G'(1,0) = \begin{pmatrix} D_1g_1(1,0) & D_2g_1(1,0) \\ D_1g_2(1,0) & D_2g_2(1,0) \end{pmatrix}$ 이다.

문제에서 $D_1g_1(1,0)=2$, $D_2g_1(1,0)=1$임이 주어져 있으므로

$D_1g_2(1,0) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0)$, $D_2g_2(1,0) = \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0)$을 구하면 된다.

연쇄법칙 (chain rule)에 의하여, $u = x^3 - xy^2$, $v = x^2y - y^3$로 두면

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial g_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy$

$$= (3x^2-y^2)\cdot\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + 2xy\cdot\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)$$

$$= (3x^2-y^2)\cdot D_1g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3) + 2xy\cdot D_2g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3)$$

따라서 $\frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0) = 3\cdot D_1g_1(1,0) + 0\cdot D_2g_1(1,0) = 6$이다.

마찬가지로 $\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 3y^2$

$$= -2xy\cdot D_1g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3) + (x^2-3y^2)D_2g_1(x^3-xy^2, x^2y-y^3).$$

따라서 $\frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0) = 0\cdot D_1g_1(1,0) + 1\cdot D_2g_1(1,0) = 1$이다.

$\therefore G'(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

채점기준 | 과정과 답이 모두 맞았을 시 +6점.

(답이 맞더라도 연쇄 법칙 적용이 잘못되는 등 과정상의 실수가 있다면 답이 틀린 경우(아래)의 부분점수만 받음.)

답이 틀렸을 시 부분점수 : 야코비 행렬의 정의를 썼다면 +2점.

연쇄 법칙에 해당하는 식을 올바르게 썼다면 +2점.

8.(b) 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$(F\circ G)'(1,0)=F'(G(1,0))\cdot G'(1,0)$ 이다.

$G(1,0)=(g_1(1,0),\ g_2(1,0))=(1,1)$ 이므로 $F'(1,1)$을 구한다.

$F'(1,1)=\begin{pmatrix} D_1f_1(1,1) & D_2f_1(1,1) \\ D_1f_2(1,1) & D_2f_2(1,1)\end{pmatrix}$ 이고, $t=x^2+y^2$, $s=xy$로 두면

$$D_1f_2(x,y)=\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,s)=\frac{\partial f_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}$$

$\frac{\partial t}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial s}{\partial x}=y$

$$=2x\cdot D_1f_1(t,s)+y\cdot D_2f_1(t,s)$$

$$=2x\cdot D_1f_1(x^2+y^2,xy)+y\cdot D_2f_1(x^2+y^2,xy)$$

따라서 $D_1f_2(1,1)=2\cdot D_1f_1(2,1)+1\cdot D_2f_1(2,1)=2\cdot1+1\cdot3=5$이다.

$$D_2f_2(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(t,s)=\frac{\partial f_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}$$

$\frac{\partial t}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial s}{\partial y}=x$

$$=2y\cdot D_1f_1(x^2+y^2,xy)+x\cdot D_2f_1(x^2+y^2,xy)$$

따라서 $D_2f_2(1,1)=2\cdot D_1f_1(2,1)+1\cdot D_2f_1(2,1)=2\cdot1+1\cdot3=5$이다.

이제 $F'(1,1)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 5\end{pmatrix}$ 임을 알았고, 따라서

$$\det(F\circ G)'(1,0)=\det(F'(1,1)\cdot G'(1,0))$$

$$=\det F'(1,1)\cdot\det G'(1,0).$$

$$=\det\begin{pmatrix}4&2\\5&5\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}2&1\\6&1\end{pmatrix}=10\cdot(-4)=-40$$ 이다.

$\boxed{\text{채점기준}}$ 과정과 답이 모두 맞았을 시 +9점. (*는 (a)와 동일)

답이 틀렸을 시 부분점수 : $(F\circ G)'(1,0)=F'(G(1,0))\cdot G'(1,0)$에 해당하는 식 (연쇄법칙)을 올바르게 썼다면 +3점.

D_1f_2, D_2f_2를 계산하는 데에 필요한 연쇄법칙을 올바르게 썼다면 +3점. (대입 과정의 계산실수는 고려하지 않음).

#9 (질량) $= \int \mu \, ds = \int \mu(X(t)) \cdot |X'(t)| \, dt$ 를 이용하여

$$\mu(X(t)) = t + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

$$X'(t) = \left(\frac{2}{1+t^2}, \frac{-4t}{(1+t^2)(1-t^2)}\right)$$

$$|X'(t)| = \frac{1}{1+t^2}\sqrt{\frac{4(1-t^2)^2+16t^2}{(1-t^2)^2}} = \frac{1}{1+t^2}\sqrt{\frac{4(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}} = \frac{2}{1-t^2}$$

($\because$ 주어진 범위 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $1-t^2 > 0$ 이므로)

대입하면

$$(\text{질량}) = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \left(t + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right) \cdot \frac{2}{1-t^2} \, dt$$

$$= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{2t}{1-t^2} + \frac{4}{1+t^2}\right) dt$$

$\frac{2t}{1-t^2}$ 는 기함수 이므로 $\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{2t}{1-t^2} dt = 0.$

$$\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{4}{1+t^2} dt = \left[4 \cdot \arctan t\right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\pi.$$

- $\int \mu \, ds = \int \mu(X(t)) \cdot |X'(t)| \, dt$ 을 제대로 언급 했을 시 +5
- $\mu(X(t))$, $|X'(t)|$ 를 모두 제대로 계산 했을 시 +5
- 마지막 $\frac{4}{3}\pi$ 까지 정적분을 제대로 계산했을 시 +5.

문제 10.

곡선 $r = e^{\theta}$ 의 매개화 : $X(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos t \\ e^t \cdot \sin t \end{pmatrix}$

$(0 \le t \le 2\pi)$

방법 1

일의 양 : $\int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(X(t)) \cdot \vec{X}'(t)\, dt$ ① 이 선적분의 정의에 +5점

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2t}} \begin{pmatrix} 2e^t\cos t - e^t\sin t \\ e^t\cos t + 3e^t\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3\cos^2 t + 4\sin^2 t + \cos t \sin t\right) dt$$

$$= 7\pi$$

② 바른 답 계산에 +10점.

방법 2

일의 양 : $\int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_X \vec{a} \cdot d\vec{s} + \int_X (\vec{F} - \vec{a}) \cdot d\vec{s}$

$\Downarrow$

① 각원소 벡터장의 선적분이 2π 임을 설명하는 데에 +5점

$\Downarrow$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2t}} \begin{pmatrix} 2e^t\cos t \\ 3e^t\sin t \end{pmatrix} \cdot \vec{X}'(t)\, dt$$

② 이 선적분의 정의에 +5점

$\Downarrow$

5π

③ 바른 계산에 +5점

답 : 7π