2017 여름 계절학기
수학 및 연습 2 중간고사 채점기준

1-a) 극좌표 이용

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$|f(x,y)| = r\left|\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}\right|$$

$\cos^6\theta+\sin^6\theta \neq 0$ 이므로 $\lim_{r\to 0} r\left|\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}\right| = 0$ 5점

* 부등식을 이용한 풀이 경우, 틀린 부등식이 쓰인 경우 점수 없음.

계산 과정이 명확하지 않은 경우 2점 감점

-b) $f(t,0) = f(0,t) = f(0,0) = 0$

$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$

$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ 5점

c) $\lim_{|X|\to 0} \frac{|f(X)-f(0)-a\cdot X|}{|X|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}}{(x^6+y^6)\sqrt{x^2+y^2}}$

i) $x=0$ 따라서 접근 $=0$

ii) $y=x$ 따라서 접근시 1 → 극한값 존재 안하므로 미분가능X

5점

* 다른 방식을 이용하여 풀 경우도 OK.

2. $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. $\vec{w} = (0,-1)$.

$$D_{(1,1)} f(P) = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4.$$

$$D_{(0,-2)} f(P) = -3 \times 2 = -6.$$

$$(-1,-2) = -(1,1) + \frac{1}{2}(0,-2).$$

즉, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$.

$$D_{\vec{u}} f(P) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-D_{(1,1)}f(P) + \frac{1}{2} D_{(0,-2)} f(P)\right)$$

$$= -\frac{7}{\sqrt{5}} = -\frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

※ $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ 를 잘옥 구한 경우 3점

※ $D_{(-1,-2)} f(P) = -7$ 까지 구한 경우 7점.

3-a)

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{1}{yz^2}, \frac{-x}{y^2z^2}, \frac{-2x}{yz^3} \right)$$

$$\nabla f(4,1,2) = \left(\frac{1}{4}, -1, -1 \right)$$ 5점

-b) - (4,1,2)를 지나고 $(\frac{1}{4}, -1, -1)$에 수직인 접 평면은

$$\frac{1}{4}(x-4) - (y-1) - (z-2) = 0$$

$$\frac{1}{4}x - y - z = -2$$ 5점

c) $D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot v$,

가장 빨리 증가하는 방향은 그라디언트 방향이므로

$$\Rightarrow \nabla f(P) \cdot v = \| \nabla f(P) \|$$

$$= \left| \sqrt{\frac{1}{16} + 1 + 1} \right| = \frac{\sqrt{33}}{4}$$ 5점

a를 틀려서 b, c를 맞는 방향으로 풀었으나 답이 틀릴경우

a 0점, b, c는 3점씩.

4. (a). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

$= x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}$ ... (1)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ ... (2)

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$

$= x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$.

$= x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

(b). $\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial f}{\partial u} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$ ... (3)

$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$ 이면 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ 이다.

※ 계산 과정이 분명하게 있어야 함.

※ 부분점수 없음.

5. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x+y}^{x^2y} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt \right)$$

P478 연습문제 11장 1절 #2 이용

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,y)\, dy = g(x, b(x))\, b'(x) - g(x, a(x))\, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} D_1 g(x,y)\, dy$$

일급함수 $a(x)$, $b(x)$, $g(x,y)$ 에 대해서.

$$= \frac{\sin(x^3y)}{x^2y}\cdot 2xy - \frac{\sin(x(x+y))}{x+y} + \int_{x+y}^{x^2y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt$$

$$= \frac{2\cdot\sin(x^3y)}{x} - \frac{\sin(x(x+y))}{x+y} + \int_{x+y}^{x^2y} \cos(xt)\, dt$$ 2점

$$= \qquad '' \qquad + \left[\frac{1}{x}\sin(xt)\right]_{x+y}^{x^2y}$$

$$= \qquad '' \qquad + \frac{1}{x}\left[\sin(x^3y) - \sin(x(x+y))\right]$$

$$= \frac{3\cdot\sin(x^3y)}{x} - \frac{\sin(x(x+y))}{x+y} - \frac{\sin(x(x+y))}{x}$$ 3점

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x+y}^{x^2y} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt \right)$$

$$= \frac{\sin(x\cdot x^2y)}{x^2y}\cdot x^2 - \frac{\sin(x(x+y))}{x+y}$$

$$= \frac{\sin(x^3y)}{y} - \frac{\sin(x(x+y))}{x+y}$$ 5점

$$\therefore \operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{3\sin(x^3y)}{x} - \frac{\sin(x(x+y))}{x+y} - \frac{\sin(x(x+y))}{x},\; \frac{\sin(x^3y)}{y} - \frac{\sin(x(x+y))}{x+y} \right)$$

6. $f(x,y) = \sin(e^y + x^2 - 2) \Big|_{(1,0)} = 0$

$D_1 f(x,y) = 2x\cos(e^y + x^2 - 2) \Big|_{(1,0)} = 2$

$D_2 f(x,y) = e^y \cos(e^y + x^2 - 2) \Big|_{(1,0)} = 1$

$D_1^2 f(x,y) = 2\cos(e^y + x^2 - 2) - 4x^2 \sin(e^y + x^2 - 2) \Big|_{(1,0)} = 2$

$D_1 D_2 f(x,y) = -2x e^y \sin(e^y + x^2 - 2) \Big|_{(1,0)} = 0$

$D_2^2 f(x,y) = e^y \cos(e^y + x^2 - 2) - e^{2y} \sin(e^y + x^2 - 2) \Big|_{(1,0)} = 1$

(*) 각 계수마다 2점

(1,0) 에서 $f(x,y)$ 의 2차 근사 다항식은

$T_2 f((1,0),(x-1,y)) = f(1,0) + D_{(x-1,y)} f(1,0) + \frac{1}{2!} D_{(x-1,y)}^2 f(1,0)$

$= 2(x-1) + y + \frac{1}{2}(2(x-1)^2 + y^2)$ 2점

$= 2(x-1) + y + (x-1)^2 + \frac{1}{2} y^2$ 1점

(*) 계산까지 완벽해야 점수 있음.

7. $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

$D_1 f(x,y) = 6xy - 12x$

$D_2 f(x,y) = 3y^2 + 3x^2 - 12y$

$6xy - 12x = 0 \quad , \quad 3y^2 + 3x^2 - 12y = 0$

$x = 0$ 또는 $y = 2$

i) $x = 0$; $y = 0$ 또는 $y = 4$

ii) $y = 2$; $x = \pm 2$

따라서 임계점은 $(0,0)$, $(0,4)$, $(2,2)$, $(-2,2)$ 이다.

2점 (*)

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-12 & 6x \\ 6x & 6y-12 \end{pmatrix}$$

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} < 0$$ ∴ $(0,0)$ 극대점이다.

2점

$$f''(0,4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} > 0$$ ∴ $(0,4)$는 극소점이다.

2점

$$f''(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det f''(2,2) < 0$ ∴ $(2,2)$는 안장점이다.

2점

$$f''(-2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det f''(-2,2) < 0$ ∴ $(-2,2)$는 안장점이다.

2점

(*) 하나의 점이라도 제대로 구하지 않으면 부분점수 없음.

8. 구면은 유계닫힌집합이고 함수 f가 연속이므로 최대최소정리에 의해 f는 구면에서 최댓값, 최솟값을 갖는다 ┘ +5

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ 이라 하면 구면에서 함수 f의 극점 (x,y,z)에 대하여 $\operatorname{grad} g(x,y,z) \neq 0$ 이므로

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z)$ 인 실수 λ가 존재한다

$(y,\ x+z,\ y) = 2\lambda(x,y,z)$, $x^2+y^2+z^2 = 1$ 로 부터

(i) $\lambda = 0$; $(x,y,z) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow f(x,y,z) = 3$ ┘ +5

(ii) $\lambda \neq 0$; $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x,y,z) = (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ or $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$

$\Rightarrow f(x,y,z) = 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ or $3-\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 최댓값은 $3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 최솟값은 $3-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다 ┘ +5

9. $(g\circ f)'(1,1) = g'(f(1,1))\cdot f'(1,1)$ ┘ +5

$= g'(1,0)\cdot f'(1,1)$

따라서 $f'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ┘ +5

10. $\displaystyle\int_{\mathbf{x}} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (1-\cos t,\ \pi + \sin t - t,\ x(t)^2 + y(t)^2) \cdot (1-\cos t,\ \sin t,\ 0)\, dt$ —— 1)

$$\left(= \int_0^{2\pi} F(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt \quad \text{—— 2)} \right).$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 + \pi \sin t + \sin^2 t - t\sin t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 - 2\cos t \, dt + \int_0^{2\pi} \pi \sin t \, dt - \int_0^{2\pi} t\sin t \, dt$$

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2 - 2\cos t \, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 4\pi$

$$\int_0^{2\pi} \pi \sin t \, dt = \pi \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0.$$

$$\left(\because \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0 \right).$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin t \, dt = \Big[-t\cos t + \sin t \Big]_0^{2\pi} = -2\pi.$$

$$\therefore \int_{\mathbf{x}} F \cdot ds = 4\pi - (-2\pi) = 6\pi.$$

* 채점 기준

- 1) 혹은 2)를 바르게 적었을 시 +5점.
- 답을 옳게 구했으면 +5점.

11. 계산을 통해 F의 잠재 함수 $\varphi(x,y,z)$는

$$\varphi(x,y,z) = x^2\sin(yz) + y^3e^z + x$$ 이다.

(모든 잠재 함수를 구할 필요는 없음, 위 식에 상수 C를 더해서 나타낼 필요 없음).

선적분의 기본 정리에 의해

$$\int_X F\cdot ds = \varphi(X(\pi)) - \varphi(X(0)) \quad \text{———} \quad 1)$$

$$= \varphi(e^{\pi}, -1, \pi) - \varphi(1,1,0)$$

$$= 0 - 2 = -2.$$

* 채점 기준.

- φ 잘 구했으면 +5점.
- 1) 제대로 잘 썼으면 +5점.
- 답을 옳게 구했으면 +5점.

12. (답만 기입) (a) F (b) F (c) F (d) T (e) T.