

수학 및 연습 2 중간고사
(2018년 7월 9일 오전 11:00 – 오후 1:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1 [15점] 좌표평면에서 정의된 다음 함수에 대하여 아래 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) (5점) 원점에서 함수 $f(x, y)$ 의 연속성을 판정하시오.
- (b) (5점) 편미분계수 $D_1f(0, 0)$ 와 $D_2f(0, 0)$ 의 값을 구하시오.
- (c) (5점) 원점에서 함수 $f(x, y)$ 의 미분가능성을 판정하시오.

문제 2 [10점] $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ 을 만족하는 x, y, z 에 대하여 $z^2 + 2xy \neq 0$ 일 때, z 를 x, y 의 함수로 쓸 수 있다고 한다. 이 때 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 를 x, y, z 에 대한 식으로 나타내시오.

문제 3 [10점] 함수 $f(x, y) = e^{-x^2 - 2y^2}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 점 $(1, 1)$ 에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향이 $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 일 때, $\tan \theta$ 를 구하시오.
- (b) (5점) 그래프 $z = f(x, y)$ 의 점 $(1, 1, e^{-3})$ 에서의 접평면의 방정식을 구하시오.

문제 4 [15점] 평면에서 서로 다른 두 점 F_1, F_2 을 초점으로 갖는 타원에 대하여, 타원의 한 초점을 지나는 빛이 타원에서 반사하면 다른 초점을 향하여 반사됨을 보이시오.
(Hint: $f(X) = |X - F_1| + |X - F_2|$ 를 생각한다.)

문제 5 [10점] 함수 $f(x, y) = \int_{y^2}^x \frac{e^{xt^2}}{t} dt$ 에 대하여 $\text{grad } f(2, 1)$ 를 구하시오.

문제 6 [15점] 함수 $f(x, y) = e^x \log(1 + y)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 원점에서 3차 근사다항식 $T_3f(x, y)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) $|e^{0.1} \log 1.1 - T_3f(0.1, 0.1)| < 5 \times 10^{-4}$ 임을 보이시오.
(단, $e^{0.1} < 1.2$ 이다.)

문제 7 [15점] 삼차원 좌표공간에서 원점과 곡면 $z^2 + xy^2 - 1 = 0$ 사이의 최단거리를 라그랑주 승수법을 이용하여 구하시오.

(연습용 여백)

문제 8 [15점] 다음 함수의 임계점을 구하고 극대점인지 극소점인지 또는 안장점인지를 판별하시오.

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - xy$$

문제 9 [10점] 사상 $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 와 선형사상 $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 에 대하여 $\det(G \circ F)'(2, \pi/6) = 3$ 일 때, $\det G'(1, 1)$ 을 구하시오.

문제 10 [10점] 곡선 $X(t) = (t, \sin t, \cos t)$ ($1 \leq t \leq e^2$)에 대하여 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_X \log x \, dx - z \, dy + y \, dz$$

문제 11 [10점] xyz -공간에서 정의된 다음 벡터장의 잠재함수를 모두 구하시오.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz^2 \cos x, z^2 \sin x + z \sinh(1 + yz), 2yz \sin x + y \sinh(1 + yz) + z)$$

문제 12 [15점] 좌표평면의 오른쪽 반평면, 즉 $H = \{(x, y) \mid x > 0\}$ 에서 정의된 다음 벡터장에 대하여 물음에 답하시오.

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$$

- (a) (5점) 이 벡터장이 닫힌 벡터장인지 판단하시오.
- (b) (5점) 이 벡터장이 잠재함수를 갖는지 판단하고, 만일 잠재함수를 갖는다면 이를 구하시오.
- (c) (5점) H 위에 놓인 일급곡선 X 는 $(1, -1)$ 에서 출발하여 $(1, 1)$ 에서 끝난다고 할 때, 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.