

# 수학 및 연습 2 중간고사

(2017년 10월 21일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1. [15점] 주어진 함수에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^6 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) (5점) 함수  $f$  의 원점에서의 연속성을 조사하시오.
- (b) (5점)  $D_1 f(0, 0)$ ,  $D_2 f(0, 0)$  를 구하시오.
- (c) (5점) 함수  $f$  의 원점에서의 미분가능성을 조사하시오.

문제 2. [15점]  $w = x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$  일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 2w$$

문제 3. [15점] 좌표공간에서 식

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 1$$

로 주어지는 타원면을 생각하자. 타원면 위에있는 점  $P = (a, b, c)$  에 대하여 점  $P$  에서의 접평면이 원점을 지나는 조건을 만족하는 점  $P$  들의 집합은 하나의 평면안에 들어있다. 이 평면의 방정식을 구하시오.

문제 4. [15점] 이급함수  $f(x, y)$  가

$$\begin{aligned} D_1 f(1, \sqrt{3}) &= \sqrt{3}, \quad D_2 f(1, \sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}, \\ D_1^2 f(1, \sqrt{3}) &= 0, \quad D_1 D_2 f(1, \sqrt{3}) = 1, \quad D_2^2 f(1, \sqrt{3}) = 2 \end{aligned}$$

를 만족한다.  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  라 할 때, 점  $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{3})$  에서

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

의 값을 구하시오.

문제 5. [15점] 함수  $f(x, y) = x^3 y + 2xy^2 - xy$  의 임계점을 모두 구하고, 그 점들을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

문제 6. [15점] 좌표평면에 있는 곡선  $x^3 + y^3 + 6xy = 8$  에서의 함수  $f(x, y) = x^2 + y^2$  의 최솟값을 구하시오.

문제 7. [15점] 함수  $f(x, y) = e^{x+xy} \log(1-xy)$ 에 대하여 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 원점에서  $f$  의 2차 근사다항식을 구하시오.
- (b) (10점)  $D_1^3 D_2^3 f(0, 0)$ 을 구하시오.

문제 8. [15점] 벡터함수  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 와  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 는 다음과 같이 주어질 때,

$$f(s, t) = (e^{2s+t}, 3t - \cos s, s^2 + t + 2)$$

$$g(x, y, z) = (3x + 2y + z^2, x^2 - z + 1)$$

벡터함수  $F = g \circ f$ 와  $G = f \circ g$ 에 대하여,  $F'(0, 0)$ 과  $G'(0, 0, 0)$ 을 각각 구하시오.

문제 9. [15점] 좌표평면에서 정의된 영역  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \right\}$  에서 정의된 사상  $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) = (u, v)$ 와  $F$ 의 역사상  $G(u, v) = (x, y)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 영역  $D$ 의  $F$ 에 의한 상을  $uv$ -평면 위에 그리시오.
- (b) (10점)  $G'(u, v)$  와  $\det G'(u, v)$ 를  $u, v$  로 표현하시오.

문제 10. [15점] 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} + x^2 y \right) \mathbf{j}$$

를 곡선  $y = 2 - x^2$  을 따라서 점  $(-1, 1)$  에서 점  $(\sqrt{2}, 0)$  까지 적분한 값을 구하시오.