2018학년도 2학기 수학 및 연습 2 기말고사 채점기준

1. $\varphi(x,y,z) = x^2\cos y + z^3\sin(xy)$ +10

$\nabla\varphi = F$, $\Rightarrow \int_X F\cdot ds = \int_X \nabla\varphi$

$$= \varphi(X(\pi)) - \varphi(X(0))$$
$$= \varphi(-e^\pi, 0, \pi^2) - \varphi(1,0,0)$$
$$= e^{2\pi} - 1$$

+10

※ $\nabla\varphi$를 명기하지 않거나 틀렸을 경우 0점

(다른풀이) $\mathrm{curl}F = 0$, $Y(t) = \left(t, 0, \frac{-\pi^2}{1+e^\pi}(t-1)\right)$, $-e^\pi \le t \le 1$

by Stokes' thm, $\int_D \mathrm{curl}F\,dS = \int_X F\cdot ds + \int_Y F\cdot ds$

where D satisfies $\partial D = X \cup Y$

Since $\mathrm{curl}F=0$,

$\Rightarrow \int_X F\cdot ds = -\int_Y F\cdot ds$ +10

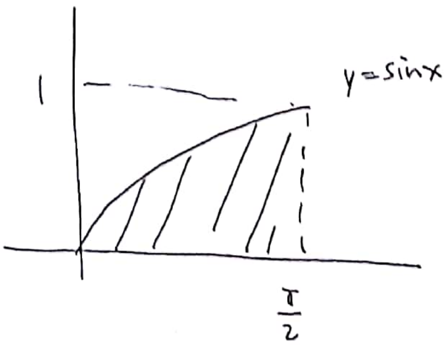
$$= -\int_{-e^\pi}^{1} \left(2t, t\cdot\left(\frac{-\pi^2}{1+e^\pi}(t-1)\right), 0\right)\cdot\left(1, 0, \frac{-\pi^2}{1+e^\pi}\right)dt$$
$$= -\int_{-e^\pi}^{1} 2t\,dt$$
$$= -\left[t^2\right]_{-e^\pi}^{1} = e^{2\pi} - 1$$

+10

※ Stokes' thm 을 올바르게 사용하지 않을 경우 0점

문제 2

적분영역이 다음과 같다.



$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le y \le \sin x$

따라서 푸비니 정리에 의해

$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dy\, dx \quad 10$$

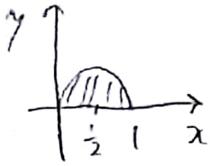
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$\left(= \frac{\pi}{4} \right) \quad 10$$

푸비니 정리를 올바르게 적용한 경우 — 10점

정답인 경우 — 10점

3. (a) D_1 :  $\overset{\text{극좌표 치환에서}}{=} \begin{cases} 0 \le r \le \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 로 주어진 영역.

$$\iint_{D_1} \frac{32x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \frac{32r^2\cos^2\theta}{r^2}\, r\,dr\,d\theta \quad \text{5점}$$

$$= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos\theta} \cos^2\theta\, d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 16\cdot\frac{3\pi}{16} = 3\pi \quad \text{5점}$$

· 별해 : $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{32x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} \frac{32x^2}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 32\left[x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^{\sqrt{x-x^2}} dx$

$$= \int_0^1 32x \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx$$

$\theta = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ 로 치환. $\Rightarrow x = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta$.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\cos^2\theta \cdot \theta \cdot (2\cos\theta\sin\theta)\, d\theta \quad (\because dx = -2\cos\theta\sin\theta\, d\theta) \quad \text{5점}$$

$$= \left[-16\cos^4\theta\cdot\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^4\theta\, d\theta = 3\pi. \quad (\because \text{부분적분}) \quad \text{5점}$$

* · 적분영역 잘못 구한 경우 0점.

· $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{32x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \frac{32r^2\cos^2\theta}{r^2}\, r\,dr\,d\theta$ 에서 우변이 조금이라도 틀리면 0점. ($\cos^2\theta$를 $\cos\theta$라 쓴 경우, 상수곱 32 빼먹은 경우 포함.)

(b) $D_2' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le u < \infty,\ -1 \le v \le 1\}$, Define $G : D_2' \longrightarrow D_2$ s.t. $G(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

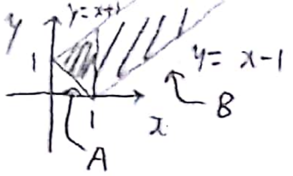
Then, denoting $(x,y) = G(u,v)$, $\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases}$ $\Rightarrow$ G는 일급, 가역 & $G^{-1}(x,y) = (x+y, x-y)$

또, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$.

$$\therefore \iint_{D_2} e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}}\,dx\,dy = \iint_{D_2'} e^{\frac{1-u}{\sqrt{2}}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_1^\infty \int_{-1}^1 e^{\frac{1-u}{\sqrt{2}}}\, \frac{1}{2}\, dv\,du \quad \text{5점}$$

$$= \left[-\sqrt{2}e^{\frac{1-u}{\sqrt{2}}}\right]_1^\infty = \sqrt{2} \quad \text{5점}$$

뒷장 계속.

· 별해 : 

$D_2 = A \cup B$ 임을 관찰.

$$\iint_{D_2} e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}}\,dx\,dy = \left(\iint_A + \iint_B\right) e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}}\,dy\,dx + \int_1^{\infty} \int_{x-1}^{x+1} e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}}\,dy\,dx$$

5점

$$= \int_0^1 e^{\frac{1-x}{\sqrt{2}}} \left[-\sqrt{2}\, e^{-\frac{y}{\sqrt{2}}}\right]_{1-x}^{1+x} dx + \int_1^{\infty} e^{\frac{1-x}{\sqrt{2}}} \left[-\sqrt{2}\, e^{-\frac{y}{\sqrt{2}}}\right]_{x-1}^{x+1} dx$$

$$= \int_0^1 -\sqrt{2}\left(e^{-\sqrt{2}x} - 1\right) dx + \int_1^{\infty} -\sqrt{2}\left(e^{-\sqrt{2}x} - e^{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}\right) dx$$

$$= \sqrt{2}$$

5점.

※ · 적분 영역 틀리면 0점. (잘 구했어도 적분 식으로 잘못 옮겨 적은 경우도 포함.)

· $\iint_{D_2} e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}}\,dx\,dy = (\quad)$ 꼴의 등식에서 우변이 조금이라도 틀리면 0점. (야코비 행렬식 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$ 대신 $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 2$ 를 곱한 경우 또, 절대값을 빼서 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$ 을 곱한 경우 포함.)

4. 주어진 영역 R을 원기둥좌표계에 대하여 나타내면:

$\{(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -a\le z\le a,\ \sqrt{b^2-a^2}\le r\le\sqrt{b^2-z^2}\}$.

따라서, 치환적분을 사용하면

$$\mathrm{Vol}(R)=\iiint_R 1\,dV_3=\int_0^{2\pi}\int_{-a}^{a}\int_{\sqrt{b^2-a^2}}^{\sqrt{b^2-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta \quad \cdots (*)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-z^2)\,dz\,d\theta=\int_0^{2\pi} a^3-\frac{1}{3}a^3\,d\theta=\frac{2}{3}a^3\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi a^3$$

채점 기준.

① 영역을 적절한 좌표계에 대해 표현한 후, 구체적인 (다중)적분 식을 옳게 얻어낸 경우 10점. (Ex, 위의 (*)에 해당하는 식)

- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{b^2-a^2}}^{b}\int_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$ 도 유효함.
- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\int_{\sqrt{b^2-a^2}\csc\varphi}^{b} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \quad \left(\alpha=\arcsin\left(\frac{a}{b}\right)\right)$ 혹은

  $\displaystyle 2\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{b^2-a^2}}^{b}\int_{\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\rho}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta$ 등 구면좌표계를 이용한 식도 인정함.

- 단, 적분 범위가 틀린 경우는 점수를 부여하지 않음.

② 식을 잘 계산하여 정답 $\frac{4}{3}\pi a^3$ 을 얻어낸 경우 10점.

비고: 자주 등장한 오답

- 영역의 절반에 해당하는 적분을 구한 경우 적분 범위 설정이 잘못된 것으로 0점 처리
- 구에서 영역 R을 뺀 나머지 영역의 부피를 구한 경우에도 0점 처리.
  (단, 전체 구의 부피 $\frac{4}{3}\pi b^3$ 에서 그것을 뺀다는 언급이 있으면 ①의 점수를 부여.)

#5 A를 곡선 X로 둘러싸인 영역이라 하자. 이때 그린정리에 의하여

$$\int_X (\arctan(1+x^2)-2y)dx+(e^{y^2-2y}+3x)dy$$

$$=\iint_A \frac{\partial}{\partial x}(e^{y^2-2y}+3x)-\frac{\partial}{\partial y}(\arctan(1+x^2)-2y)\,dV_2 \quad \cdots (*)$$

$$=\iint_A 3-(-2)\,dV_2 = 5\,\mathrm{area}(A) \quad +5$$

이때 $\mathrm{area}(A)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}$ $\quad +10$

$$\therefore \int_X (\arctan(1+x^2)-2y)dx+(e^{y^2-2y}+3x)dy=\frac{5}{2} \quad +5$$

※ 그린정리를 사용하지 않았어도 식 (*)와 유사한 식을 유도했으면 5점 인정

(풀이 1). #6.

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ $(y\geq 0)$을 x축으로 회전하면 다음과 같이 매개화 할 수 있다.

$$X(\theta,\varphi)=(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta\cos\varphi,\ \sin^3\theta\sin\varphi)\quad\begin{pmatrix}0\leq\theta\leq\pi\\0\leq\varphi\leq 2\pi\end{pmatrix}$$ — 5점. (매개화)

$\Rightarrow$ $X_\theta=(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi)$

$X_\varphi=(0,\ -\sin^3\theta\sin\varphi,\ \sin^3\theta\cos\varphi)$

$\Rightarrow$ $X_\theta\times X_\varphi=(3\sin^5\theta\cos\theta,\ 3\sin^4\theta\cos^2\theta\cos\varphi,\ 3\sin^4\theta\cos^2\theta\sin\varphi)$

$\Rightarrow$ $|X_\theta\times X_\varphi|=3\sin^4\theta|\cos\theta|$ — 5점.

$\therefore$ 회전체의 넓이 $=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|X_\theta\times X_\varphi|d\theta d\varphi$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}3\sin^4\theta|\cos\theta|d\theta d\varphi=\frac{12}{5}\pi$ — 10점.

(단, $x\geq 0$인 영역만 구하면 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$가 되고 이의 경우 넓이는

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}3\sin^4\theta|\cos\theta|d\theta d\varphi=\frac{6}{5}\pi$ 가 되는데,

이 경우, 정확히 영역을 명시해야 답을 인정.)

그 외, 다양한 매개화가 가능한데, 매개화가 합당하고 계산이 모두 맞으면 인정.

※ x축이 아닌 y축으로 회전시킨 경우, 대칭성으로 인해 회전축이 y축이어도 상관 없다는 언급이 있으면 인정, 그러한 언급이 없으면 0점.

※ 파푸스 정리 ($Area=2\pi d\cdot l$), 회전체 넓이 공식 ($Area=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$) 등을 이용시, 공식을 옳게 적용시 10점, 답까지 맞으면 10점으로 총 20점

7.

$x^2+y^2+z^2 \le 1 \Rightarrow u^2+\cos^2 v \le 1 \Rightarrow 0 \le u \le \sin v$

$\therefore$ 곡면 : $0 \le v \le \pi,\quad 0 \le u \le \sin v.$

$X(u,v) = u(\cos v, \sin v, 0) + \cos v\,(0,0,1)$

$X_u = (\cos v, \sin v, 0),\qquad X_v = u\cdot(-\sin v, \cos v, 0) - \sin v\,(0,0,1)$

$\therefore |N| = |X_u \times X_v| = |X_u|\cdot|X_v| = \sqrt{u^2+\sin^2 v}$

$(\because X_u\cdot X_v = 0)$

$$\iint_S f\,dS = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin v} (u+\cos v)\sqrt{u^2+\sin^2 v}\,du\,dv$$ 10점 ···※

- $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\sin v} u\cdot\sqrt{u^2+\sin^2 v}\,du\,dv = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}(u^2+\sin^2 v)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sin v} dv.$

$\displaystyle = \int_0^{\pi}\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\cdot\sin^3 v\cdot dv = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{9}(2\sqrt{2}-1)$ 5점.

- $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\sin v}\cos v\sqrt{u^2+\sin^2 v}\cdot du\,dv = 0$ ($\because$ v는 $\frac{\pi}{2}$에 대칭). 5점.

$\displaystyle\therefore \iint_S f\cdot dS = \frac{4}{9}(2\sqrt{2}-1)+0 = \frac{4}{9}(2\sqrt{2}-1)$

※ 적분 영역 에 5점, 피적분 함수에 5점.
이 중에 하나라도 틀리면 이후의 계산 점수는 없음.

#8

$$\text{Flux} = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \underset{\text{발산 정리}}{=\!=\!=} \iiint_R \operatorname{div} \vec{F} \, dV_3$$ ┘5

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2 + 8xy + (10 - 8xy) = 12$$ ┘5

$$\therefore \text{Flux} = 12 \cdot \text{vol}(R)$$

$$\text{vol}(R) = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} \int_{r^2}^{r\sin\theta} r \, dz \, dr \, d\theta$$ (원통 좌표계)

┘5

「* 적분 범위 까지 정확히 적어야 인정

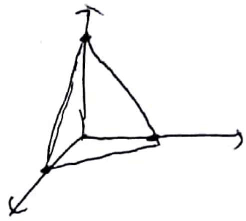
* 다른 좌표계를 쓰더라도 정확히 적으면 인정」

$$\text{vol}(R) = \frac{1}{12} \int_0^{\pi} \sin^4\theta \, d\theta = \frac{\pi}{32}$$

$$\therefore \text{Flux} = \frac{3}{8}\pi$$

┘5

#9. (a) 주어진 곡면 S의 각점을 원점과 이은
선분들이 단위구면과 만나는 부분은 제일팔분면체
(즉, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 에 해당하므로



입체각 = (단위구면 넓이) $\times \frac{1}{8} = 4\pi \times \frac{1}{8} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ +5

채점기준 (답을 $\frac{\pi}{2}$라고 쓰면 5점.
답을 $\frac{\pi}{2}$라고 안 쓰면 0점.)
* 90° 등도 인정X

(b) $\mathbb{n}$을 곡면 S에서의 원점에서 멀어지는 방향의 법선벡터라고 하면

$$\mathbb{n} = \frac{1}{7}(6, 3, 2)$$

이고, 입체각은 $\iint_S A \cdot \mathbb{n}\, dS$ 이다. (A: 각원소 벡터장)

$$\iint_S A \cdot \mathbb{n}\, dS = \iint_S \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \frac{1}{7}(6, 3, 2)\, dS$$

$$= \iint_S \frac{(6x+3y+2z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \frac{1}{7}\, dS \quad +5$$

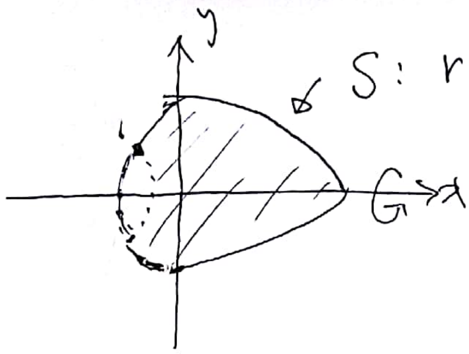
$$= \frac{6}{7} \cdot \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\, dS.$$

$$\therefore \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\, dS = \frac{7}{6}\iint_S A \cdot \mathbb{n}\, dS = \frac{7}{6} \cdot (\text{입체각}) \quad +10$$

$$= \boxed{\frac{7}{12}\pi}$$

채점기준 ① $\mathbb{n} = \frac{1}{7}(6, 3, 2)$를 잘 구하고, $(x, y, z) \cdot \left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right) = \frac{6}{7}$ (6x+3y+2z=1 등은 점수X)
등을 활용하여 주어진 적분식을 입체각 벡터장과 계산실수 없이 정확히 연관시켜야 +5
② 주어진 적분식이 $\frac{7}{6} \times$ (입체각) 이라는 사실까지 확인하면 15점 인정.
마지막에 계산실수 있어도

※ 10



S : $r = 1+\cos 2\theta$를 x축에 대해 회전한 측면 $(0 \le \theta \le \frac{2}{3}\pi)$

(1) S의 경계를 ∂S 이라 하면

· ∂S : $y^2 + z^2 = \frac{3}{16}$, $x = -\frac{1}{4}$.

∂S 를 경계로 가지는 원판을 D라고 하면,

· D : $y^2 + z^2 \le \frac{3}{16}$, $x = -\frac{1}{4}$

(S의 경계든, 원판 D든 잘 언급하면 +5점)

(2) 스토크스 정리를 잘 서술하면 +5점

$$\iint_S \mathrm{curl}\,F \cdot d\vec{S} = \pm \iint_D \mathrm{curl}\,F \cdot d\vec{S} \quad \cdots (a)$$

or, $$\iint_S \mathrm{curl}\,F \cdot d\vec{S} = \pm \int_{\partial S} F \cdot d\vec{r} \quad \cdots (b)$$

(3-a) $\mathrm{curl}\,F = (-x, \ \star, \ \triangle)$

$\vec{n} = (\pm 1, 0, 0)$ ⇒ 부호는 (a)에 따라 바뀐다

$$\Rightarrow \pm \iint_D \mathrm{curl}\,F \cdot d\vec{S} = \iint_D -x \, dS \underset{\text{5점 } x=-\frac{1}{4}}{=} \iint_D \frac{1}{4} dS = \frac{1}{4} \cdot \mathrm{area}(D)$$

$$= \frac{3}{64}\pi \quad \text{5점}$$

(3-b) 선적분을 이용한 경우. ∂S를 (b)의 방향과 맞게 매개화한 후

잘 대입하여 올바른 식을 적으면, +5점

계산이 맞으면 +5점.