

수학 2 기말고사
(2019년 7월 29일 오후 6:00-8:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

(연습용 여백)

문제 1 [20점] 좌표평면에서 함수 $y = e^x$ 의 그래프와 두 직선 $x = \log \frac{\pi}{2}$, $y = \pi$ 로 둘러싸인 영역 R 에 대하여 다음 적분값을 구하시오.

$$\iint_R ye^x \sin e^x \, dx dy$$

문제 2 [20점] 좌표공간의 영역

$$R: 0 \leq y \leq 2, 0 < x^2 + z^2 \leq 1, x > 0, z > 0$$

에서 정의된 일급가역사상

$$f(x, y, z) = (2zx, 2y, z^2 - x^2) = (u, v, w)$$

에 대하여, 영역 $f(R)$ 의 밀도함수가 $h(u, v, w) = \frac{2}{\sqrt{u^2 + w^2}}$ 일 때 $f(R)$ 의 질량을 구하시오.

문제 3 [20점] 좌표평면에서 영역 $R: 0 \leq x \leq x^2 + y^2 \leq 1$ 의 밀도함수가 $\mu(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 일 때, R 의 질량중심을 구하시오.

문제 4 [20점] 좌표평면의 네 점 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부에서 부등식 $x - y \leq \frac{1}{2} \leq x + y$ 를 만족하는 모든 점으로 이루어진 영역 R 에 대하여, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^2, y - \frac{1}{2}y^2 \right)$$

가 R 의 경계를 빠져나가는 양을 구하시오.

문제 5 [20점] 좌표평면에서 사이클로이드 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)와 x 축으로 둘러싸인 영역의 중심을 구하시오.

(연습용 여백)

문제 6 [20점] 곡면 $S : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, z \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$ 에 대하여 $\iint_S f dS$ 를 구하시오.

문제 7 [20점] 좌표공간에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, -y^2, z)$ 가 곡면

$$S : z = x^2 + 2y^2 \leq 4$$

를 빠져나가는 플럭스를 구하시오.

(S 의 향을 정하는 단위 법벡터 \mathbf{n} 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 정한다.)

문제 8 [20점] 좌표공간의 영역 $R : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq z \leq 1$ 에 대하여, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^z + x \sin y, yz + \cos y, xz - 3z)$$

가 영역 R 의 경계 ∂R 을 빠져나오는 플럭스를 구하시오.

문제 9 [20점] 좌표공간에서 포물면 $z = x^2 + y^2$ 과 평면 $x + y + z = 0$ 의 모든 교점으로 이루어진 곡선 C 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2e^z + z - \sin y, -2xe^z + z \cos y, x^2 e^z + 2y)$$

에 대하여, 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 절댓값을 구하시오.

문제 10 [20점] 좌표공간의 영역에서 정의된 일급 벡터장 \mathbf{F} 와 잠재함수를 가지는 일급 벡터장 \mathbf{G} 에 대하여 $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ 임을 보이시오.