2016년 수학 및 연습 1 중간고사 (계절)

1.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(\log n)}$ 이라 할 때,

(i) 모든 n에 대하여 a_n과 a_{n+1}의 부호가 다르고,

(ii) 모든 n에 대하여 $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ 이며,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 이므로

교대급수 판정법에 의해 수렴한다.

* 채점기준 : 조건 (ii), (iii) 각 5점 씩

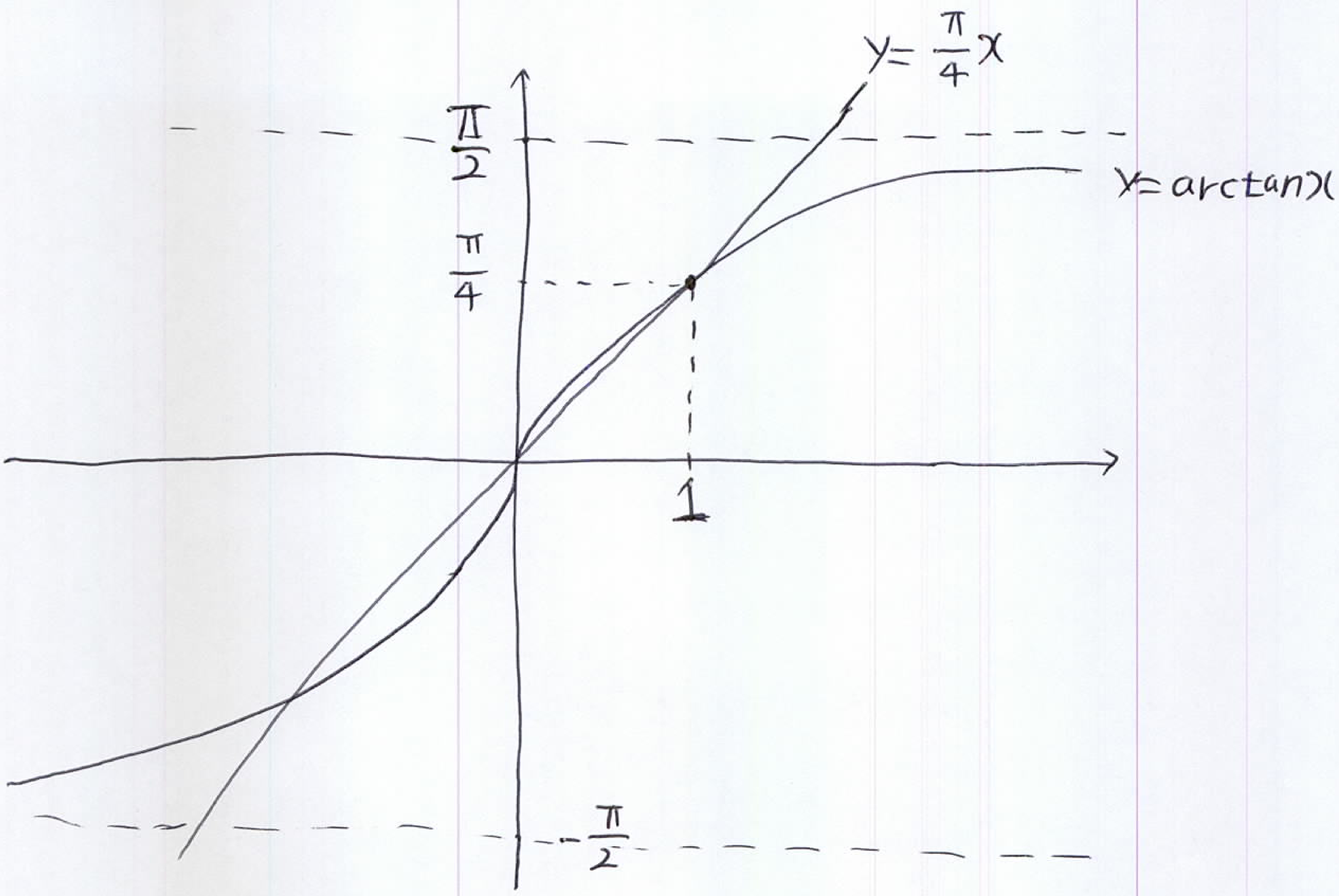
(b) $$\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}\right\}^{\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} = \left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-2} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} e^{-2} < 1$$

이므로 거듭제곱근 판정법에 의해 수렴한다.

* 채점 기준 : 다 맞으면 10점, 틀리면 0점.

1.

(c)



위 그래프로부터 $0 \le x \le 1$ 일 때 $\frac{\pi}{4}x \le \arctan x$ 가 성립하므로

$n \ge 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n} \le \arctan \frac{1}{n}$

이 성립한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4n}$ 는 발산하므로 비교 판정법에 의하여 발산한다.

* 채점 기준 : 모든 과정이 다 맞으면 10점

틀리면 0점

(※ 위의 부등식 이외의 부등식을 써도 똑같은 기준 적용.
극한 비교판정법 이나 적분 판정법도 똑같은 기준 적용.)

#2.

풀이 1) 수렴범위를 구하자.

$h_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$ 이므로, $h_n > 0$ for $^\forall n \in \mathbb{N}$.

그리고 $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{h_{n+1}}{h_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{h_n + \frac{1}{n+1}}{h_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{h_n}\right) = 1 \cdots (*)$$

$(\because (n+1)h_n \to \infty \text{ as } n\to\infty)$

∴ 수렴반경은 1 이다. ┘ +10

경계를 알아보자.

i) $x=1$

$\lim_{n\to\infty} h_n \neq 0$ 이므로, 일반항 판정법에 의해 $\sum h_n x^n$: 발산.

ii) $x=-1$.

$\lim_{n\to\infty} h_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n h_n \neq 0$

일반항 판정법에 의해, $\sum h_n x^n$: 발산

* $\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = 1$ 이유가 충분하지 않은 경우 (−3).

* $\sum h_n = \infty$ 설명이 충분하지 않은 경우 점수 없음

* $x = \pm 1$ 한 경우만 맞은 경우 +3점

* 판정법 잘못 적은 경우 점수 없음.

#2.

풀이2

i) 임의의 $|x|<1$에 대하여,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n}|x| \underset{\text{by }(*)\text{, 풀이1}}{=} |x|<1.$$

$\Rightarrow |x|<1$ 인경우, 비율판정법에 의해

$\sum h_n x^n$은 절대수렴한다. +5

ii) $x=\pm1$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} h_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-1)^n h_n \neq 0$ 이므로,

일반항 판정법에 의해 $\sum h_n x^n$은 발산. +5

iii) $|x|>1$ 인경우, $x=\pm1$일때 발산하므로,

정리 2.1.4에 의해 $\sum h_n x^n$은 발산.

∴ 수렴범위는 $-1<x<1$ 이다. +5

* ii)의경우 $x=\pm1$ 한경우만 맞은시 +3점.

* 풀이 1의 채점기준 동일 적용.

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

$$\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}.$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\pi} = \frac{3}{\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh(\ln 2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

각각이 수렴하기 때문에

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{(\ln 2)^{2n}}{(2n)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{3}{\pi} + \frac{5}{4}$$

※ 둘중 하나만 맞으면 8점.
※ $\cosh(\ln 2)$를 바꾸지 않으면 -2

#4

$f'(x) = 2 + \cos x \neq 0$ 이므로 $y=f(x)$의 역함수 $x = g(y)$가

존재하고, 미분가능하다. 3 $f(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$ 3 이므로

$$g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3} \quad 3, \quad g''(0) = -\frac{f''(0)}{f'(0)^3} = 0 \quad 3$$

이다. 따라서,

$$T_2 g(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{1}{2}g''(0)y^2 = \frac{1}{3}y \quad 3$$

* $T_2 g(y)$를 구하는 공식이 잘못된 경우 −3점

5. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

풀이 1.

$\displaystyle\lim_{x \to 0}(x\cos x - \sin x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ 이므로

로피탈의 정리를 쓸수 있다,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x\sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0 \quad //.$$

풀이 2

$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = x + O(x^2)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + O(x^2)$$

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{O(x^2)}{x^2}$$ 이므로,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{O(x^2)}{x^2} = 0. \quad //.$$

※. 부분 점수 없음.

6. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$\int_0^{0.1} \frac{\arctan x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0.1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$a_n := \frac{(0.1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ 두면. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > a_{n+1}$

이므로, 교대급수의 성질에 의해

$$\left| \int_0^{0.1} \frac{\arctan x}{x}\, dx - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq |a_{n+1}| .$$

$|a_2| = \left| \frac{(0.1)^5}{5^2} \right| < 10^{-6}$ 이므로

$$\int_0^{0.1} \frac{\arctan x}{x}\, dx \approx (0.1) - \frac{1}{9}(0.1)^3$$

(*) $\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\, dt$ 의 거듭제곱급수가 맞으면 10 점

(*) 근사값을 잘 계산하고 오차범위를 제대로 구했다면 +5 점

7. $f(x) = \frac{1}{1+x} \log\left(\frac{1}{1+x}\right).$

풀이 1.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x|<1).$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x|<1)$$

$$\log\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1} \quad (|x|<1).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^3).$$

$$\log\left(\frac{1}{1+x}\right) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^3)$$

$$\frac{1}{1+x}\log\left(\frac{1}{1+x}\right) = (1 - x + x^2 - x^3)\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + O(x^3)$$

$$= -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + O(x^3).$$

테일러 근사 다항식은 유일하므로,

$$T_3 f(x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3$$

풀이 2.

$$f(0) = 0. \quad \left(f(x) = -\frac{1}{1+x} \cdot \log(1+x) \right).$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\log(1+x) - \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0) = -1.$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}\log(1+x) + \frac{3}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(0) = 3.$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}\log(1+x) - \frac{2}{(1+x)^4} - \frac{9}{(1+x)^4}$$

$$= -\frac{6}{(1+x)^4}\log(1+x) - \frac{11}{(1+x)^4} \Rightarrow f'''(0) = -11.$$

$$T_3 f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

$$= -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3$$

※. 풀이1 의 경우, $\frac{1}{1+x}$ 와 $\log\left(\frac{1}{1+x}\right)$ 의

거듭제곱급수를 잘 구했으면 10점.

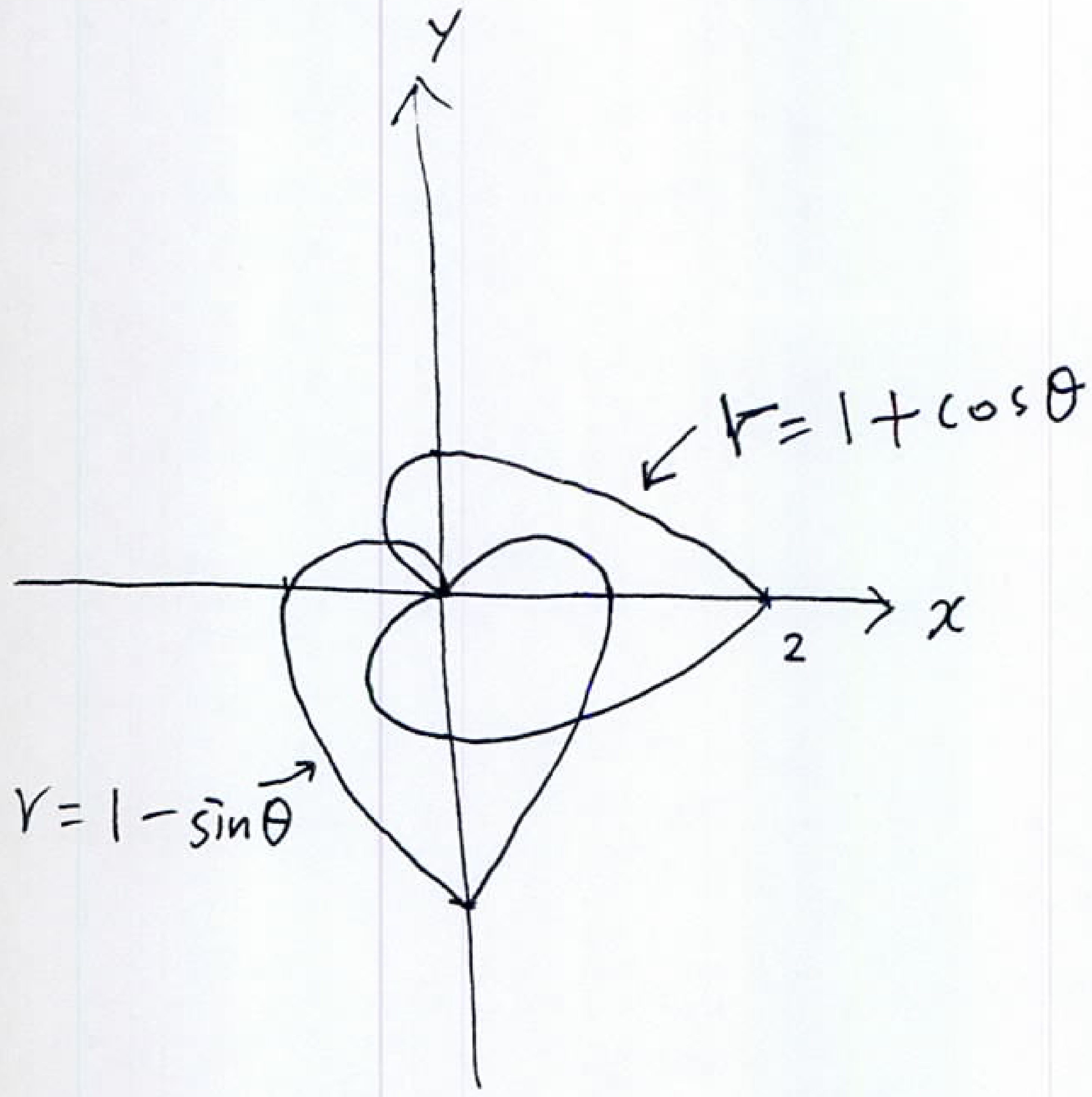
근사 다항식 $T_3 f(x)$ 를 구했으면 +5 점

15점.

※. 풀이 2 의 경우, 구하는 계수 하나가 틀리면 −5점,

두개 이상 틀리면 0점.

#8.



$1 + \cos\theta = 1 - \sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ 인 경우, $r = 1 + \cos\frac{3\pi}{4} = 1 - \sin\frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{7\pi}{4}$ 인 경우, $r = 1 + \cos\frac{7\pi}{4} = 1 - \sin\frac{7\pi}{4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ 교점 $r = 0$, $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7\pi}{4}\right)$

(극좌표 $(0, 0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$)

※ 기타풀이로 풀었으나 논리가 부족하면 (-3)

#9.

$$\rho = 4\cos\varphi \iff \rho^2 = 4\rho\cos\varphi$$

$$\iff x^2+y^2+z^2 = 4z$$

$$\iff x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$$

그러므로 주어진 곡면은 반지름 2인 구다. 10

겉넓이는 $4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ 5