

2017년 1학기 수학및연습 I 중간고사 채점기준

I-(a) $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 이라하면,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 고대급수.

(ii) $|a_n| \geq |a_{n+1}|$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

\therefore 고대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴.

(b) $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ 이라하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)! / (n+1)^{n+1}}{2^n n! / n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

\therefore 비율판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴.

(c) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 이라하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

\therefore 일반항 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산.

* 채점 기준

- 고대급수 판정 조건 (ii), (iii) 중 한개 없을시 -2점
둘 다 없을시 짐수 없음.

- 극한값이 틀렸을 시 짐수 없음.

- 다른 방법으로 풀었을 시 계산과정, 수렴/발산 이 모두 정확하면 5점
아니면 짐수 없음.

$$2(a). a_n = \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \text{ 으로 하면, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} \\ = 1$$

이므로 2장의 정리 2.1.5에 의하여 수렴반경은 1이다.

• 채점기준: 답이 맞으면 5점, 틀리면 0점.

• 별해: 수렴반경을 $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{\frac{1}{a_n}}} = 1$ 과 같이 구한 경우,
답이 맞으면 5점, 틀리면 0점.

2(b). (a)에서, $a(x)$ 의 수렴반경이 1임을 밝혔으므로 $x = \pm 1$ 에서의 수렴성을 판정하면 충분하다.

$x = 1$ 인 경우,

$$\text{풀이 1) } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ > \frac{x^2}{4!} \quad (\text{for } x > 0)$$

\Rightarrow 자연수 n 에 대해 $e^{\sqrt{n}} > \frac{n^2}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} < \frac{24}{n^2}$ 이 성립.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2}$ 이 수렴하므로, $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ 은 비교판정법

에 의해 수렴.

풀이 2) $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ 로 하면, f 는 $x \geq 0$ 에서 연속이고, 양함수이며, 단조감소한다. 그런데 $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2 < \infty$

이므로, 금수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ 은 적분 판정법에 의해 수렴한다.

2(b). $x = -1$ 인 경우,

풀이 1) $a_n = \frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}}}$ ($n \geq 0$) 으로 하면 $|a_n|$ 은 감소수열이고,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ 이므로 고대급수 정리에 따라 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 은 수렴.

풀이 2) $x = 1$ 인 경우 $a(1)$ 의 수렴성을 보였으므로, $a(-1)$ 은 절대수렴한다. 따라서 수렴한다.

• 채점기준: $x = 1$ 인 경우 풀이 (1)과 비슷한 풀이의 경우,
논리적 비약 혹은 '충분히 큰 n에 대해서만' 성립하는
실을 아무 설명 없이 쓰면 2점 감점.
문제가 없으면 7점.

$x = 1$ 일 때 풀이 (2)와 비슷한 풀이의 경우,
절분계산을 틀리거나 혹은 적분 판정법을 쓰기 위한
조건을 안 쓰면 2점 감점, 나머지 경우 7점.

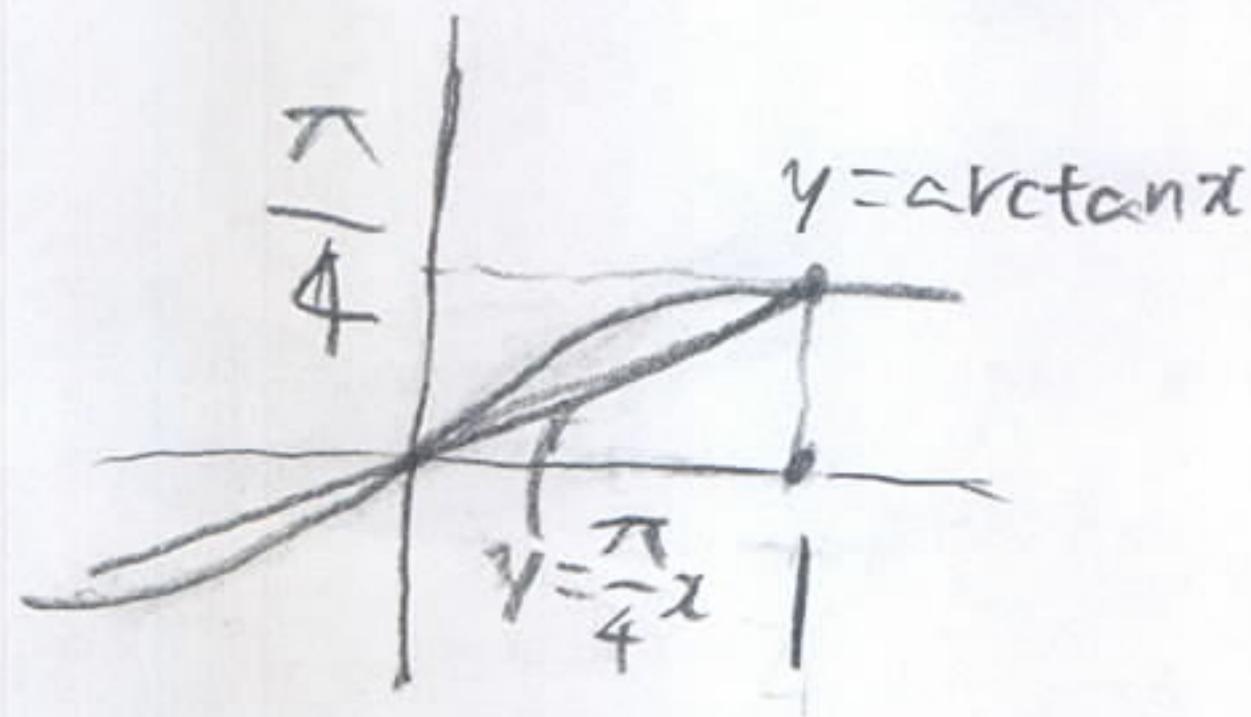
$x = -1$ 인 경우, 고대급수 판정법을 사용하기 위한 조건이
하나라도 빠지면 2점 감점, 나머지 3점.

$x = -1$ 인 경우, 풀이 (2)와 비슷한 풀이의 경우,
 $x = 1$ 일 때의 풀이가 틀리면 0점.

기타 논리적인 오류가 있는 경우 0점.

기타 사소한 실수 2점 감점.

3



$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ 에서 $\arctan x \geq \frac{\pi}{4}x$.

$\therefore \arctan \frac{1}{n} \geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n}$ for $n \geq 3$. ①

$$\Rightarrow a_n = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{(\log n)(\log \log n)} \geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)} \geq 0 \quad n \geq 3.$$

그런데, $f(x) = \frac{1}{x \log x \log \log x}$ 를 두면, 10점

$3 \leq x < \infty$ 에서 $f(x)$ 는 연속, 감소, $f(x) > 0$.

따라서, 적분판정법에 의해

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} \text{ 수렴성} \Leftrightarrow \int_3^{\infty} f(x) dx \text{ 수렴성}.$$

$$\begin{aligned} \text{그런데, } \int_3^{\infty} f(x) dx &= \int_3^{\infty} \frac{1}{x \log x \log \log x} dx = \int_{\log 3}^{\infty} \frac{1}{t \log t} dt \quad (\because t = \log x) \\ &= \int_{\log \log 3}^{\infty} \frac{1}{s} ds = \infty. \quad (\because s = \log t \text{ 치환}) \end{aligned}$$

따라서, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n}$ 은 발산.

①에 비교판정법 적용 $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n = a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n = \infty$ (발산)

* ①의 부등식에서 $\frac{\pi}{4}$ 대신 다른 상수 K 를 썼을 때,
 $K \geq 1$ 이면, 주어진 부등식 성립 X. (~5점)

5점

$$\# 4. \text{ (a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}, \quad (|x| < 1)$$

여기서 $x = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}$ 대입하여, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = 16,$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8,$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$$

($|x| < 1$, 혹은 $|x| \leq 1$ 도 가능.)

여기서 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 대입하여, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

Case 1. 주어진 급수의 수렴성을 별도로 보인 후,

값의 계산을 시도한 경우 (혹은 수렴성만을 보인 경우):

(a), (b) 각각에서

수렴성에 2점

부여,

계산에 5, 6점

(a), (b)

계산 부분에서: ① 답이 틀리면 부분점수 없이 0점.
a, b 각각 5, 6점

② 답이 맞은 경우:

(i) 분이 과정 중에 등장한 항수의 급수 표현에 대한 수렴 반경, 혹은 수렴구간을 '한번이라도' 표현하면 만점,

(ii) '한번도 표현하지 않은 경우' 2점 감점.

Case 2 금수의 값을 구하는 과정에서

수령 성까지 보이려고 시도한 경우 :

예산에 7, 8 점 부여.
(a) (b)

- ① 답이 틀리면 부분점수 없이 0 점.
- ② 답이 맞은 경우, Case 1과 동일하게 처리.

5.

(a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \quad (t \in \mathbb{R})$$

∴ 거듭제곱급수의 기본정리에 의해

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot n!} x^{2n+1}$$

(b) $\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots$ 는 고대급수이다.

고대급수의 성질에 의해

$$\left| \int_0^x e^{-t^2} dt - \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \right| \leq \frac{x^5}{5 \cdot 2!}$$

$$x=0.3 \text{ 일 때 } \frac{0.3^5}{5 \cdot 2!} = \frac{3^5}{10^6} < \frac{10^3}{10^6} = \frac{1}{1000}$$

∴ 오차의 범위가 10^{-3} 이하인 근삿값은 $0.3 - \frac{1}{3} \cdot (0.3)^3 = 0.291$ 이다.

* 채점기준

(a)- 거듭제곱급수의 기본정리를 언급하지 않았을 경우 -2점.

- 유한 개의 항만 계산한 경우 0점.

(b)- 근삿값만 맞을 경우 3점. (오차 이내의 값이기만 하면 정답 인정)

- 오차 계산시 정확한 근거를 제시하지 않았을 경우 -5점.

(사용한 정리 이름만 언급하지 않았을 경우는 -2점)

- 테일러 정리를 이용할 시, 계산과정의 비약이 있을 경우 -5점

#6. 주어진 거듭제곱급수 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 에 대하여.

$a_n := \frac{1}{n^2}$ 로 두면 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$
 이므로, $f(x)$ 의 수렴반경은 $\frac{1}{1} = 1$ 이다.] + 3

또한, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 는 p-test에 의해 수렴하고,] + 3

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 은 절대수렴하여 수렴하므로

$f(x)$ 가 수렴하는 x 의 범위는 $[-1, 1]$ 이다.] + 3

① 거듭제곱급수의 기본정리에 의해, f' 과 f'' 은 수렴반경이 1인 거듭제곱급수

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ 로 표현되며, 미분의 정의에 의해 이는 $(-1, 1)$ 에서만 정의된다.] + 6

② $x = \pm 1$ 에 대해 f' 과 f'' 이 정의되지 않지만,

이를 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$ 로 간주한 경우 수렴판별이 맞으면 정수를 부여한다.

f' 과 f'' 의 수렴반경을 직접 구하거나 거듭제곱급수의 기본정리에서 도출해내면,] 각 + 1

$f'(1) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 은 조화급수로, 발산.] + 1

$f'(-1) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 은 고대급수정리에 의해 수렴.] + 1

$f''(1) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$ 과 $f''(-1) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} (-1)^{n-2}$ 는 일반항 판정법에 의해 발산.] 각 + 1

참고 사항은 다음 쪽에.

- * f' , f'' 의 거듭제곱급수 표현을 구해서 틀린 경우,
경계값 뿐 아니라 수렴반경 점수 역시 인정하지 않는다.
(특히 $f'' = \sum \frac{x^{n-2}}{n(n-1)}$ 등.)
- * 적용할 수 없는 판정법을 적용하면 감점하되,
적용가능한 판정법을 쓰고, 조건을 적지 않거나 사소한 실수가 있다면 점수 인정
(eg. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \text{ 비교판정 } (O)$)
- * 수렴반경이 동일한 이유를 틀리게 (eg. 미분가능.) 적거나, 아예 적지
않은 경우 감점.
- * 거듭제곱급수의 기본성리에 의해 수렴 '범위'가 동일하다고 기술하여도
수렴반경 점수는 인정.

문제 7

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctant - \sin t}{t^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t^2} - \cos t}{3t^2} \quad (\because \lim_{t \rightarrow 0} t^3 = \lim_{t \rightarrow 0} (\arctant - \sin t) = 0) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{2t}{(1+t^2)^2} + \sin t}{6t} \quad (\because \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{6t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+t^2} - \cos t \right) = 0) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin t}{t} \right) = \boxed{-\frac{1}{6}} \quad \textcircled{1} + 5 \\
 &\quad \textcircled{2} \\
 &\quad + 10
 \end{aligned}$$

* 채점 기준

- 로피탈 정리를 사용하는 모든 과정을 하나라도 빠거나, 분모가 0으로 수렴함을 명시하지 않으면 ①에 애매한 점수가 인정되지 않음.
- 계산 실수로 인해 잘못된 과정은 ②에 0점

$$\left. \begin{array}{l} \arctant = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \\ \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctant - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(t^3)}{t^3} \right) = \boxed{-\frac{1}{6}} \quad \textcircled{1} + 5$$

* 채점 기준

- 0 표기법 없이 \arctant 와 $\sin t$ 의 미분계급수 전역을 사용하는 경우 두 계급의 정의역이 맞지 않으면 -5

$$8. \quad f'(x) = \frac{1}{2} (4 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{4} (4 + \sin x)^{-\frac{3}{2}} \cos^2 x \\ &\quad - \frac{1}{2} (4 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \sin x. \end{aligned}$$

$$f(0) = 2 \quad f'(0) = \frac{1}{4} \quad f''(0) = -\frac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &= 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 \quad \boxed{7. \quad \left. \begin{array}{l} \text{(사소한 계산실수)} \\ -2 \end{array} \right\}} \end{aligned}$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_3(x)}{3!} \cdot |x|^3 \quad \text{파급정리 4.04.}$$

$$M_3(x) = \max \left\{ |f^{(3)}(t)| \mid t \in [0, x] \right\} \quad \boxed{3.}$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8} (4 + \sin x)^{-\frac{5}{2}} \cos^3 x + \frac{3}{4} (4 + \sin x)^{-\frac{3}{2}} \sin x \cos x \\ &\quad - \frac{1}{2} (4 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(x)| &\leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{3}{256} + \frac{3}{32} + \frac{1}{4} = \frac{91}{256} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 < \frac{1}{10^4}. \quad \boxed{5.}$$

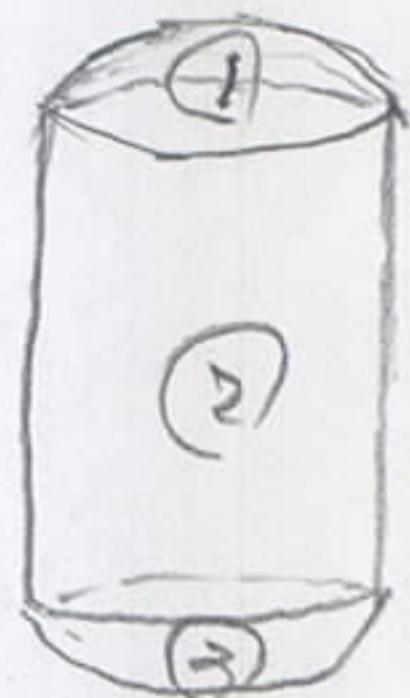
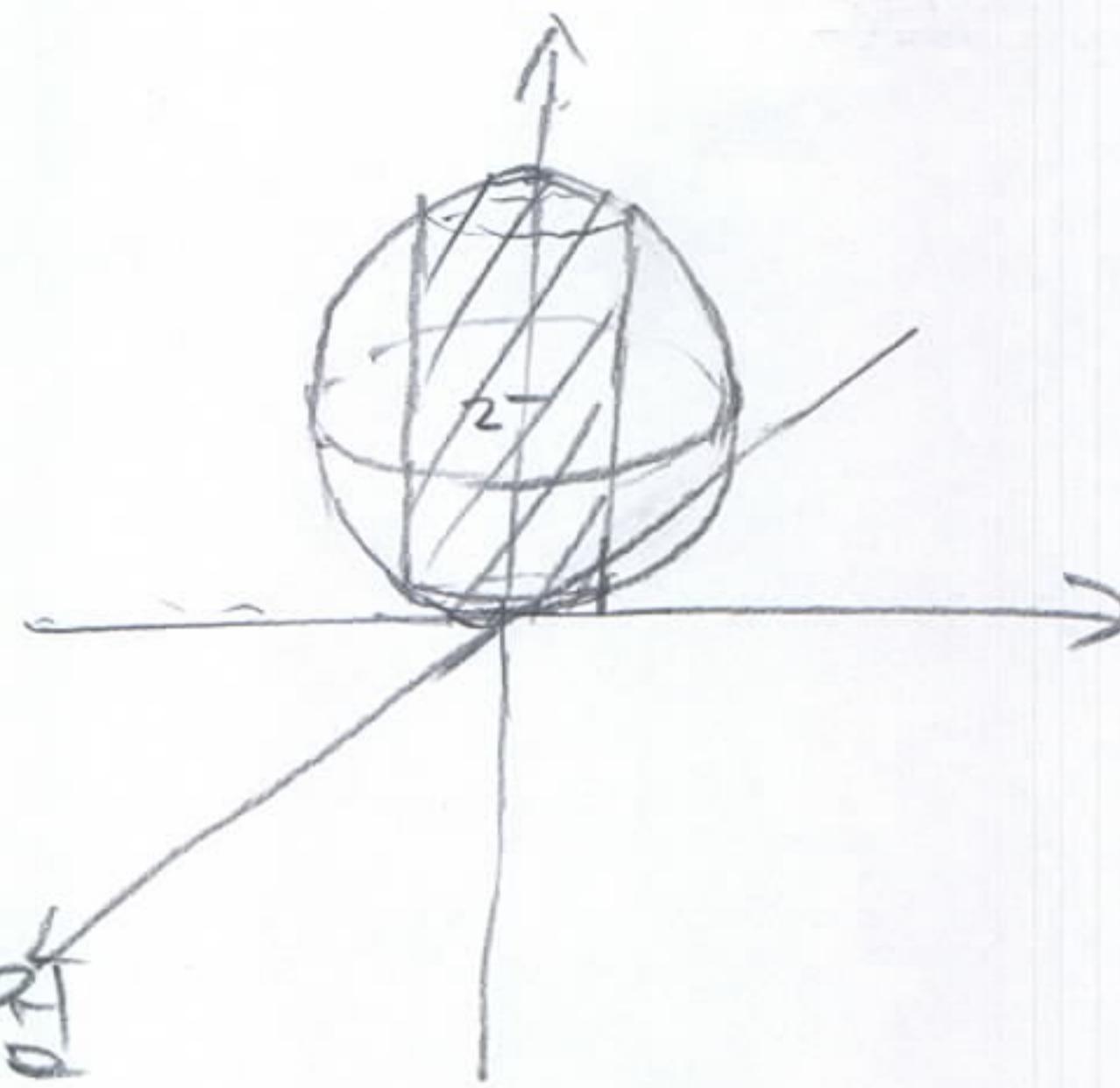
문제 9

$$\rho \leq 4 \cos \varphi$$

$$\rho^2 \leq 4\rho \cos \varphi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$$

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 2^2 \dots 5점$$



$$\text{부피 } ① = \text{부피 } ③$$

$$= \pi \int_{\sqrt{3}}^2 (4-z^2) dz \dots \dots 5점$$

$$= \pi \left(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3} \right)$$

$$\left(\text{or } \text{부피 } ③ = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} (4 - (2-z)^2) dz = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} (4z - z^2) dz = \pi \left(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3} \right) \right)$$

$$\text{부피 } ② = 2\sqrt{3} \cdot 1^2 \pi = 2\sqrt{3} \pi$$

$$\begin{aligned} & \text{부피 } ① + \text{부피 } ② + \text{부피 } ③ \\ &= 2\sqrt{3} + 2\pi \left(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3} \right) \\ &= \left(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3} \right) \pi \dots \dots 5점 \end{aligned}$$

추가 ① 원기둥을 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 인 구로 해석할 때 ○ 꿈 처리

추가 ② 자소한 계산 실수는 모두 최종답의 5점에서 감점

원래 문제는 $0 \leq r \leq 1$ 인 영역이 아니라 $r \leq 1$ 인 영역이 주어졌고 이에 따라 r 이 음수인 영역을 고려해 3차원 좌표공간 전체가 나온 풀이의 경우, 좌표 공간 전체와 구의 공통부분인 구의 부피 $32\pi/3$ 를 구하여도 만점 처리 하였음

모범답안.

10. a)

주기성에 의해 $0 \leq \theta < 2\pi$ 인 경우만 생각하자.

i) Case 1 : $r \neq 0$.

$$\begin{cases} r = \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \\ r = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow 2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}, -1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi.$$

$$r = \sin \theta \text{ 이므로, } \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ r = -1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi\right) \text{ } \left(-1, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\therefore \text{ 직교좌표계로, } (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right), (0, 1)$$

ii) Case 2 : $r=0$.

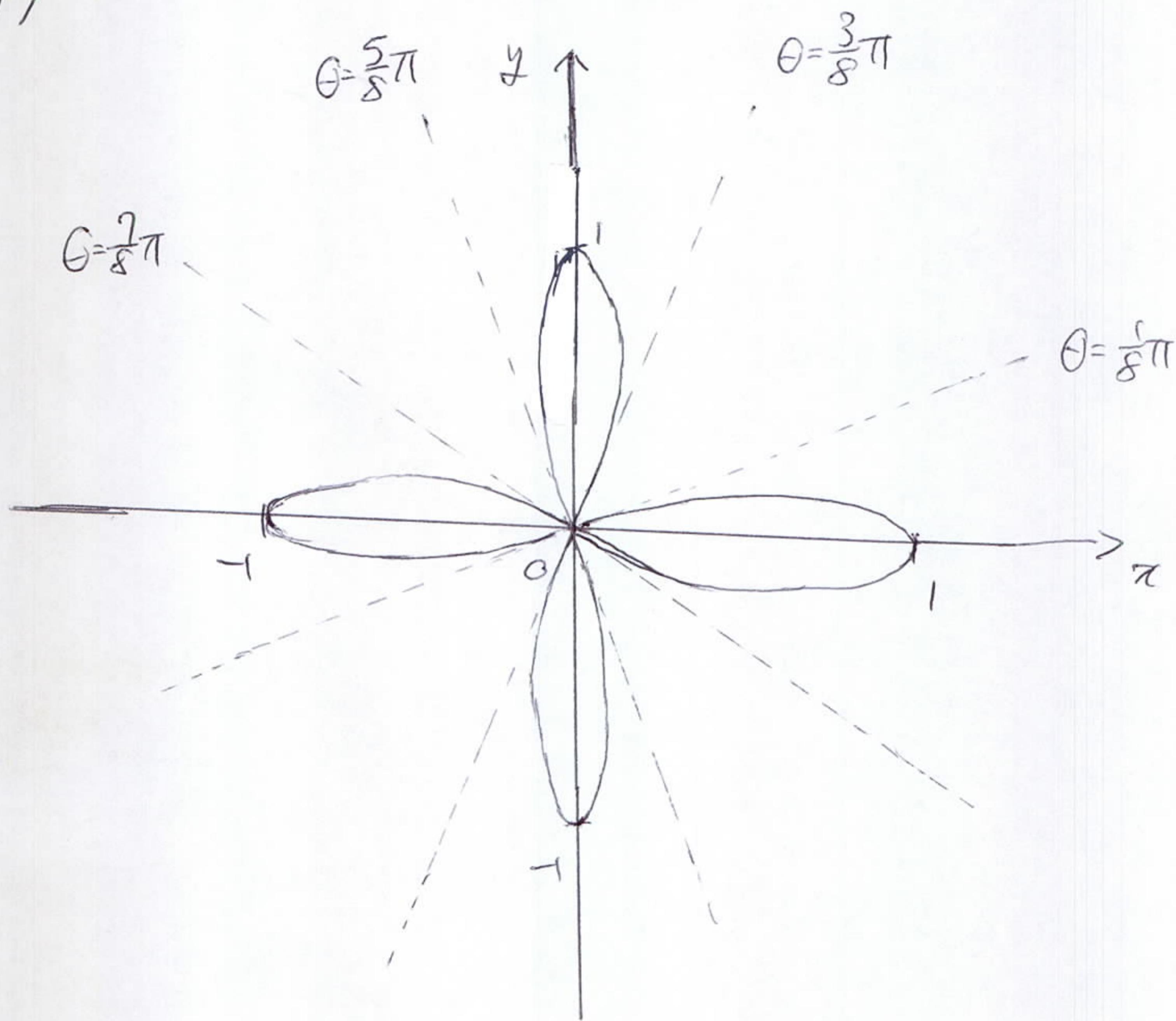
$$r = \cos 2\theta \text{ 는 } \theta = \frac{1}{4}\pi \text{ 일 때, } r=0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ 을 지낸다.}$$

$$r = \sin \theta \text{ 는 } \theta = 0 \text{ 일 때, } r=0 \Rightarrow$$

$$\therefore \text{ 교점은 } (0, 0), (0, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

모방답안

10. b)



10. a)에서

$\cos 2\theta = \sin \theta$ 를 언급하면 +5점

4개의 교점의 좌표가 모두 맞아야 +5점.

10. b)에서

대략적인 개형만 맞으면 +5점.