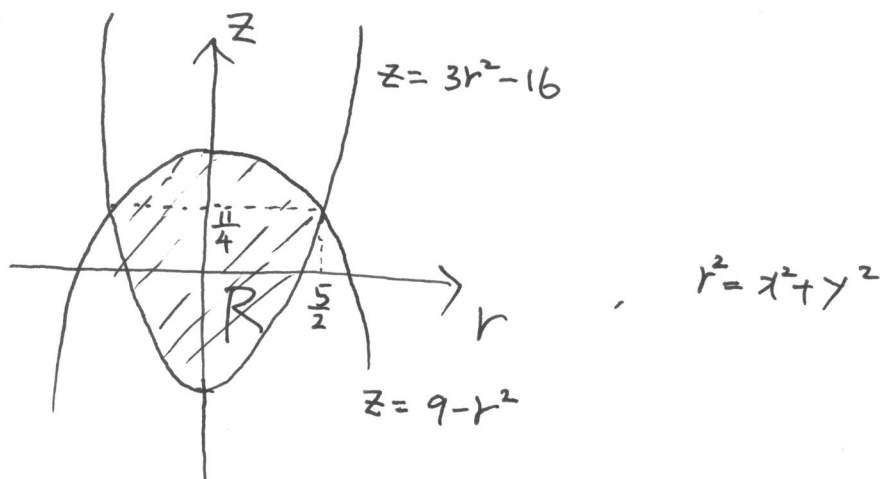


# 2013년 2학기 수학 및 연습 2 기말고사

#1.



$$3x^2 + 3y^2 - 16 \leq 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow 3r^2 - 16 \leq 9 - r^2$$

$$\Rightarrow r^2 \leq \frac{25}{4} \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{5}{2}$$

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}} \int_{3x^2+3y^2-16}^{9-x^2-y^2} 1 \cdot dz dy dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{5}{2}} \int_{3r^2-16}^{9-r^2} r dz dr d\theta \quad \dots (*) \quad \boxed{5\text{점}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{5}{2}} (25r - 4r^3) dr d\theta = 2\pi \left[ \frac{625}{8} - \frac{625}{16} \right]$$

$$= 2\pi \cdot \frac{625}{16} = \frac{625}{8}\pi \quad \boxed{15\text{점}}$$

채점기준

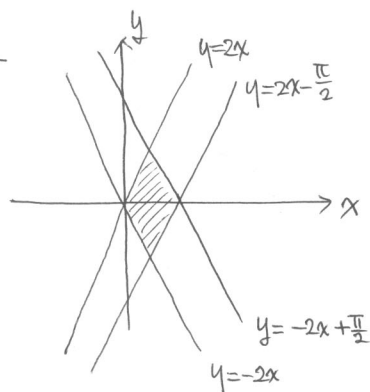
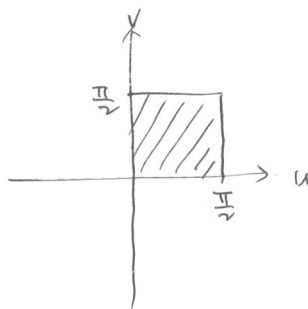
1. (\*) 대신에  $\int_{\frac{11}{4}}^9 \pi(9-z) dz + \int_{-16}^{\frac{11}{4}} \pi\left(\frac{z+16}{3}\right) dz$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \int_{-16}^{\frac{11}{4}} \int_0^{\sqrt{\frac{z+16}{3}}} r dr dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{11}{4}}^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} r dr dz d\theta$$

도 인정. (계산 가능한 적분식으로 표현해야 함)

2. 다른 부분점수 없음.

#2


 $G^{-1}$ 


$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2x - y \end{cases} \text{라 치환하면,}$$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{4} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \text{이고,}$$

$$0 \leq u, v \leq \frac{\pi}{2} \text{ 이다.}$$

5점

$$(x, y) = G(u, v) = \left( \frac{u+v}{4}, \frac{u-v}{2} \right) \text{가 된다.}$$

$$\det G'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$\text{절댓값 } M = \int_D (4x^2 - y^2) \sin(2x + y) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv \cdot \sin u \cdot |\det G'| \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv \sin u \, du \, dv$$

15점

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \, dv \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin u \, du$$

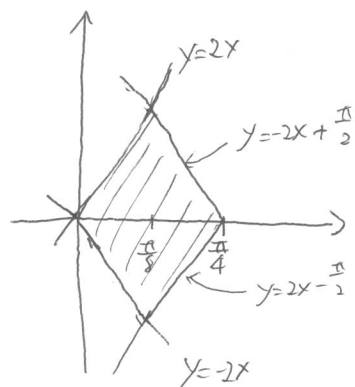
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{8} \cdot \left( [-u \cos u]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{32}$$

20점

※  $\frac{1}{4} du dv = dx dy$  를 언급한 경우 적분식이 틀려도 10점.

치환을 하지 않고 직접을 계산한 풀이.



$$M = \iint_D (4x^2 - y^2) \sin(2x+y) dy dx$$

$$= \int_0^{\pi/8} \int_{-2x}^{2x} (4x^2 - y^2) \sin(2x+y) dy dx + \int_{\pi/8}^{\pi/4} \int_{2x-\pi/2}^{2x+\pi/2} (4x^2 - y^2) \sin(2x+y) dy dx$$

5점

$$\int_0^{\pi/8} \int_{-2x}^{2x} (4x^2 - y^2) \sin(2x+y) dy dx$$

$$= \int_0^{\pi/8} \left[ -(4x^2 - y^2) \cos(2x+y) - 2y \sin(2x+y) - 2 \cos(2x+y) \right]_{-2x}^{2x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/8} -4x \sin(4x) - 2 \cos(4x) + 2 dx$$

$$= \left[ x \cos(4x) - \frac{3}{4} \sin(4x) + 2x \right]_0^{\pi/8} = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \int_{2x-\pi/2}^{2x+\pi/2} (4x^2 - y^2) \sin(2x+y) dy dx$$

$$= \int_{\pi/8}^{\pi/4} \left[ -(4x^2 - y^2) \cos(2x+y) - 2y \sin(2x+y) - 2 \cos(2x+y) \right]_{2x-\pi/2}^{2x+\pi/2} dx$$

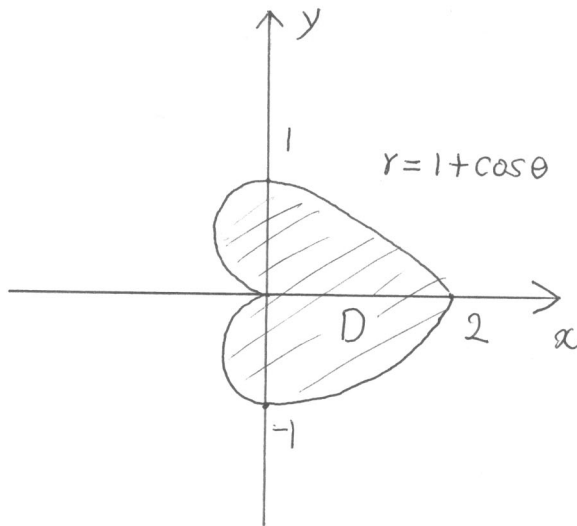
$$= \int_{\pi/8}^{\pi/4} + (4x - \pi) + \left( \cos \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \left( -\frac{\pi^2}{4} + 2x\pi \right) + 2 \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right) + 2 \cos \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$= \left[ 2x^2 - \pi x + \left( \sin \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \left( -\frac{1}{16} \pi^2 + \frac{1}{2} x \pi \right) - \left( x - \frac{3}{8} \pi \right) \cos \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{3}{4} \sin \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right) \right]_{\pi/8}^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{16} - 0 + \frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^2}{8} + 0 - \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi^2}{32} + \frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$M = \frac{\pi^2}{32}$$

3.



영역  $D$  에서 기하학적 중심을  $(\bar{x}, \bar{y})$  라 하자. 그러면

$\text{Area } D = A$  라 할 때

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x \, dV,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y \, dV \quad \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} A = \text{Area } D &= \iint_D 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2} \, d\theta = \frac{3}{2}\pi \quad \dots (5\text{점}) \end{aligned}$$

영역  $D$  는  $x$  축에 대칭이므로  $\bar{y} = 0$ .  $\dots (5\text{점})$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A} \iint_D x \, dV \\ &= \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta \quad \dots (5\text{점}) \\ &= \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^3}{3} \cos\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{A} \times \frac{5}{4}\pi = \frac{2}{3\pi} \times \frac{5\pi}{4} = \frac{5}{6} \quad \dots (5\text{점}) \end{aligned}$$

따라서  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{5}{6}, 0)$

(1)  $\bar{y} = 0$  은 식 또는 그림을 통해 정당화를 했을 경우도 5점

(2) 영역  $D$  의 넓이를 잘못 구하더라도 구해 놓은 넓이에 대해

$\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  를 잘 구했으면  $\bar{x}$  의 경우 10점,  $\bar{y}$  의 경우 5점

문제 4

$$F(x, y) = (3yx^2\sqrt{1+yx^3} - y^2e^{xy}, x^3\sqrt{1+yx^3} - xy e^{xy})$$

$$\text{rot } F = y \cdot e^{xy}$$

그린 정리에 의해,

$$\int_C F \cdot ds = \iint_D \text{rot } F \, dx \, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_{\frac{1}{x}}^2 y e^{xy} \, dy \, dx \dots (1)$$

↓ (+10점)

rot F 구하는 과정에서 계산이 틀리면  
5점 감점.

∴ 푸비4 정리

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_{\frac{1}{y}}^2 y e^{xy} \, dx \, dy$$

↓ (+5점)

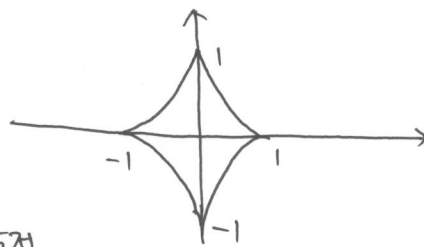
$$= \frac{1}{2} e^4 - 2e \quad \downarrow (+5점)$$

- \* (1)에서 푸비4 정리를 이용하지 않고, 부분적분을 이용하는 경우  
과정과 결과가 모두 맞으면 +10점.  
과정이 맞더라도 계산 결과가 틀리는 경우 5점 감점.

# 문제 5

그린 정리에 의해

$$\text{Area}(D) = - \underbrace{\int_{\partial D} y dx}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\int_{\partial D} x dy}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy}_{\textcircled{3}}.$$



이다. 이때,  $\partial D$ 를  $\chi(t) = (\cos^5 t, \sin^5 t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  로 매개화하면

$$x = \cos^5 t$$

$$y = \sin^5 t$$

$$dx = 5\cos^4 t \cdot (-\sin t) dt \quad dy = 5\sin^4 t \cdot \cos t dt. \quad \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} = \int_0^{2\pi} 5\cos^4 t \sin^6 t dt, \quad \textcircled{2} = \int_0^{2\pi} 5\sin^4 t \cos^6 t dt, \quad \textcircled{3} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 5\cos^4 t \sin^4 t dt. \quad \text{10점}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &= \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^4} \cdot (2\sin t \cos t)^4 dt = \frac{5}{2^5} \int_0^{2\pi} \sin^4 2t dt \\ &= \frac{5}{2^5} \int_0^{2\pi} (2\sin^2 2t)^2 dt = \frac{5}{2^5} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)^2 dt \\ &= \frac{5}{2^5} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos 4t + \cos^2 4t) dt \\ &= \frac{5}{2^5} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos 4t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 8t) dt \\ &= \frac{5}{2^5} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = \frac{15}{2^4} \pi = \frac{15}{128} \pi \end{aligned}$$

①, ② 도 비슷하게 계산.

20점.

별해)  $D$ 를  $\chi(r, \theta) = (r \cos^5 \theta, r \sin^5 \theta)$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  라고 하면

$$\begin{aligned} |X'(r, \theta)| &= \begin{vmatrix} \cos^5 \theta & -5r \cos^4 \theta \sin \theta \\ \sin^5 \theta & 5r \sin^4 \theta \cos \theta \end{vmatrix} = 5r \sin^4 \theta \cos^6 \theta + 5r \sin^6 \theta \cos^4 \theta \\ &= 5r \sin^4 \theta \cos^4 \theta \quad \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\text{따라서, } \text{Area}(D) = \iint_D |dV_2| = \iint_D |X'(r, \theta)| dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r \sin^4 \theta \cos^4 \theta dr d\theta = \frac{15}{128} \pi \quad \text{10점} \quad \text{20점.}$$

6

$$X_u = (2u, 1, 2u)$$

$$X_v = (-2v, 1, 4)$$

$$X_u \times X_v = (4 - 2u, -8u - 4uv, 2u + 2v) \quad (5\text{점})$$

$$X(u_0, v_0) = P = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\right) \text{ 를 만족하는 } u_0, v_0 \text{ 를}$$

$$\text{구하면, } u_0 = 0, v_0 = \frac{1}{2} \text{ 이다.} \quad (2\text{점})$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 점 } P \text{에서 접평면의 법선벡터 } N &= X_u \times X_v(0, \frac{1}{2}) \\ &= (4, 0, 1) \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서, 점 } P \text{에서 접평면은 } 4(x + \frac{1}{4}) + 0 \cdot (y - \frac{1}{2}) + 1 \cdot (z - 2) &= 0 \\ \text{이다.} \quad (3\text{점}). \end{aligned}$$

\*  $X_u \times X_v$  계산이 틀린 경우, 답이 맞더라도 점수 없음.

\* 법선벡터를 구하지 않고 다른 방법으로 풀 경우  
답이 틀리면 부분점도 없음.

[#7] 구면 S의 매개화  $X(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi + 1)$   
 $(0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$

구면의 면적소  $dS = |X_\varphi \times X_\theta| d\varphi d\theta = \sin \varphi d\varphi d\theta$  5점

$$\begin{aligned} \therefore \iint_S f dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{1+\cos \varphi} \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \sqrt{1+\cos \varphi} \sin \varphi d\varphi \right) \quad \text{10점} \\ &= 2\pi \cdot \left[ -\frac{2}{3} (1+\cos \varphi)^{\frac{3}{2}} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \quad \text{15점} \end{aligned}$$

(채점기준) ① 곡면의 매개화가 올바르게 5점

다른 예)  $X(\varphi, \theta) = (\sin 2\varphi \cos \theta, \sin 2\varphi \sin \theta, 2\cos^2 \varphi)$

$X_2(\varphi, \theta) = (\sqrt{2z-z^2} \cos \theta, \sqrt{2z-z^2} \sin \theta, z)$  5점

② 면적분을 계산할 때 매개변수의 적분범위, 적분식, 면적소가 모두 올바르게  
구해지면 그에 해당하는 점수 +5점

$X_1$ 의 경우  $dS = 4 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta$  10점

③ 면적분 식에서 최종계산 결과까지 올바르게 도달하면 +5점 15점

\* 구면의 매개화가 위반쪽만 된 경우 ( $X(x, y) = (x, y, 1 + \sqrt{1-x^2-y^2})$ )

이 반쪽에 해당하는 면적분 값  $\frac{4\pi}{3} (2\sqrt{2}-1)$  이 올바르게 계산되면 5점 부여.

아래 반쪽에 대하여서도 올바른 값  $\frac{4\pi}{3}$ 를 구하고 두 값을 합쳐 답이 나오면 15점.

\* 면적분을 3차원 적분으로 얻어 계산하면 점수 없음.



#8.

매개변수:  $X(\varphi, \theta) = ((\cos \varphi + 2) \cos \theta, (\cos \varphi + 2) \sin \theta, \sin \varphi), (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$

+5

편미분:  $X_\varphi = (-\sin \varphi \cos \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$

$X_\theta = (-(\cos \varphi + 2) \sin \theta, (\cos \varphi + 2) \cos \theta, 0)$

$X_\varphi \times X_\theta = (-(\cos \varphi + 2) \cos \varphi \cos \theta, -(\cos \varphi + 2) \cos \varphi \sin \theta, -(\cos \varphi + 2) \sin \varphi)$

$\therefore |X_\varphi \times X_\theta| = \cos \varphi + 2$

정답값:

$$\begin{aligned} \iint_T f dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi + 2} \cdot (\cos \varphi + 2) d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

+5

참고점기:

- \* 매개변수가 완전히 틀린 경우, 0점 (즉, 원한면이 아닌 경우를 포함.)
- \* 매개변수가 틀리지는 않지만 원한면인 경우 (예: 평행이동된 경우, 축이 바뀐 경우.)  
매개변수에 대한 정수는 없으나 이력 정수는 인정.

- \* 면적수가 틀린 경우, 면적수에 대한 정수는 없으나 그정확 정수는 인정.
- \* 사소한 실수는 5점 감점.

예) ① 매개변수의 범위를 잘못 지정한 경우.

② 함수형을 잘못 본 경우.

③ 계산 실수를 한 경우.

+10

#9.



D를  $x^2+y^2 \leq 4$ ,  $z=4$  인 곡면이라 하자.

$$\begin{aligned} \text{이때, } \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \iint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

(5점)

$$\text{이때, } \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_R 3 dV = 3 \cdot 3 = 9. \quad (10점)$$

$$\begin{aligned} \text{그리고, } \iint_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (x, y, z) \cdot (0, 0, -1) dS \\ &= \iint_D -z dS \\ &= -4 \iint_D dS = -4 \cdot 4\pi = -16\pi \quad (20점). \end{aligned}$$

$$\text{따라서, } \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 9 + 16\pi.$$

「항이 틀리면 5점 감점.  
계산 실수 5점 감점」

10.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dS &= \iint_S -p(z) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dS \\
 &= \iint_S -p(z) \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (*) \quad \underline{\hspace{1cm}} 5 \\
 &= \iint_S -p(z) \hat{\mathbf{z}} \cdot d\vec{S} \quad (*) \\
 \text{S가 폐곡면이므로} &\quad \swarrow \\
 \text{발산정리 사용가능} &\quad \searrow \\
 &= \iiint_{\text{Int} S} \text{div}(-p(z)\hat{\mathbf{z}}) \, dV_3 \quad (**) \\
 &= \iiint_{\text{Int} S} \underbrace{\frac{\partial(-p(z))}{\partial x}}_{(**)} \, dV_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{j}} \, dS = 0 \quad (\because 0과 마찬가지로 이유) \quad \underline{\hspace{1cm}} 5$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dS &= \iint_S -p(z) \cdot \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \\
 &= \iint_S -p(z) \cdot \mathbf{k} \, d\vec{S} \\
 &= \iiint_{\text{Int} S} \text{div}(-p(z) \cdot \mathbf{k}) \, dV_3 \\
 &= \iiint_{\text{Int} S} -\mu(z) \, dV_3 \\
 &= -m \quad \underline{\hspace{1cm}} 10
 \end{aligned}$$

- (\*):  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  을 명시한 경우 (+5점)

- (\*\*): (\*\*) 라절을 생략하고 발산정리 언급없이 추가점수 없음.  
 (\*\*) 라절을 생략하고 발산정리 언급이 있다면 최대 10점

#11.

$$\text{curl } \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ z(1+\cosh x) & \cosh y - e^z & \sinh x \end{vmatrix}$$

$$= (e^z, 1, 0) \quad \text{5점}$$

곡면  $S$  을 매개변수화하면  $X(x, y) = (x, y, -\sqrt{x^2+y^2})$  이므로,

$$X_x = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), \quad X_y = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \quad \text{이 되며}$$

$$N = X_x \times X_y$$

$$= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \quad \text{이다.} \quad \text{5점}$$

그러면, 스톡스 정리에 의해,

$$\int_{\partial S} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{s} = \iint_S \text{curl } \mathbb{F} \cdot d\mathbb{s}$$

$$= \iint_D \text{curl } \mathbb{F}(X(x, y)) \cdot N \, dx \, dy$$



$$= \iint_D (e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, 1, 0) \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (e^{-r} \cos \theta + \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{2}{e} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{e} \quad \text{10점}$$

• 매개변수를 다르게 했어도 항이 정확하면 인정.

• 폐곡면을 이용했을 시 항이 모두 정확해야 인정.