2015년도 여름학기 수학 및 연습 1 중간고사 모범답안

\#1. (a) $0 \le \dfrac{n+(-1)^n}{n^3} \le \dfrac{2n}{n^3} = \dfrac{2}{n^2}$ 이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2} < \infty$ 이므로

비교판정법에 의해서 수렴

(b) $n \geq 2$ 일때 $\dfrac{1}{n((\log n)^2 + \log n + 1)} \le \dfrac{1}{n(\log n)^2}$ 이다.

$f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ 이라 하면 f는 연속함수, 감소함수, $f(x) > 0$

을 만족한다 ($x \geq 2$ 일때)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = -\frac{1}{\log x}\Bigg|_2^{\infty} = \log 2 < \infty \text{ 이므로}$$

적분판정법에 의해서 수렴

(c) $0 \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \le \dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot n}$ 이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} < \infty$ 이므로

비교판정법에 의해서 수렴

㊀ 채점 기준

1. 수렴, 발산 틀리면 0점
2. 적분판정법 사용시 조건 check 하지 않으면 -2점
3. 계산실수 -1점

#2. $b_n = 2^{-n+(-1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{2}$$

∴ 멱근 판정법에 의해서 급수가 수렴한다.

계산실수 -5점

3) 풀이 I

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad (|x|<1)$$

적분

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x) \quad \left(\because \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(x)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^x \arctan(t)\,dt$$

$$\int_0^x \arctan(t)\,dt = \Big[t\arctan(t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^x$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{x^2}\left(x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)$$

$-1 < x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ 이므로 대입 가능!

답 : $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

- 테일러 전개 이용하면 5점 ($\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ 형태 나와야 함)

- $\int_0^x \arctan(t)\,dt$ 형태 5점

- 적분 잘 하면 5점

- 답 5점

풀이 II

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - (-1)^n \frac{1}{2n+2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2(n+1)}$ 이라 하자

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$\hookrightarrow$ 적분

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$g(x) = \frac{x}{2}\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$답 = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - g\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{2}\log\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 의 계산에 대해 10점 씩

- 계산 오류 5점 감점

문제4.

① 멱급수의 수렴범위.

$a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ 이라 두면, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{(-1)^n}{n^3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$

∴ 수렴반경은 1.

5점

$x=-1$ 에서는

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 수렴하는 급수.

$x=1$ 에서는

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ 교대급수판정법에 의해 수렴

5점

∴ 수렴범위 $-1 \le x \le 1$

② $x=1$ 에서 근삿값

수렴하는 교대급수의 성질에 의해

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3} - \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^3}\right| < \left|\frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)^3}\right| = \frac{1}{(N+1)^3}$ $\forall N\in\mathbb{N}$

이 때, $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} < \frac{1}{200}$ 이므로 $N=5$ 이면 근삿값의 오차가 $\frac{1}{200}$ 이하이다.

5점

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^n}{n^3} = -1+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\frac{1}{64}-\frac{1}{125}$

5점

#5. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \tan x + \sec x$ 의 역함수가 존재함을 보이고, 그 역함수의 도함수를 구하시오. [20점]

Sol) $f'(x) > 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 임을 보이자.

$f'(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ 이고 $1+\sin x > 0$, $\cos^2 x > 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 이므로

$f'(x) > 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 이다. 5점

$f(x)$ 가 주어진 구간에서 강조 증가 함수이므로 역함수가 존재한다. 5점

이제 f 의 공역인 $(0, \infty)$ 에서 f 의 역함수를 g 라 하면,

역함수 정리에 의하여

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(1+\sin x)/\cos^2 x}.$$

한편 $f'(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1+f(x)^2}{2}$ 이므로,

$$g'(f(x)) = \frac{2}{1+f(x)^2}.$$

따라서 $g'(y) = \dfrac{2}{1+y^2}$. 이다. 10점

※ 이 외의 부분 점수 없음

#6. $\sin(x^2) = x^2 - \dfrac{x^6}{3!} + \cdots$ 5점

$\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 + \cdots$ 5점

$\therefore f(x) = \left(x^2 - \dfrac{x^6}{3!} + \cdots\right)\left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 + \cdots\right) + 3x$

$= 3x + x^3 - \dfrac{1}{3}x^5 + o(x^5)$

$\therefore T_5 f(x) = 3x + x^3 - \dfrac{1}{3}x^5$

$o(x^5)$ 표현 잘못된 경우 -5점

$\boxed{\#7}$

$$\frac{3n-1}{2n^2-n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1} \text{ 이다.}$$

- $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x|<1)$

$$\Rightarrow \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad (|x|<1) \text{ . 이때,}$$

$M_{n+1} := \max\left\{ |f^{(n+1)}(t)| : t \in [0,1] \right\} = \max\left\{ \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} : t \in [0,1] \right\} = n!$ 이므로

$x=1$ 일 때, $|R_n f(1)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} R_n f(1) = 0$.

따라서 $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\log(1+x) \quad (-1 < x \le 1)$. (5점)

$\displaystyle \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$. (5점)

- $\displaystyle \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ 이다.

$\displaystyle \tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$ 이므로

$\displaystyle R_{2n+1}(x) = R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$ 이다.

따라서 $\displaystyle |R_{2n+1}(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \le \int_0^{|x|} t^{2n+2}\, dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

이다. 따라서

$$\left| \tan^{-1}x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$ 이다.

이때 $x=1$을 대입하면 $\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \le \frac{1}{2n+3}$ 이므로

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$ 이다.

$$\therefore -\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1} \quad (-1 < x \le 1)$$

(5점)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$$ (5점)

그러므로 $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n^2-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\log 2 - \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\#8}$

$\log(\sqrt{x}-x)^x = x\log(\sqrt{x}-x)$ 이다.

$$\lim_{x\to 0+} x\log(\sqrt{x}-x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\log(\sqrt{x}-x)}{\frac{1}{x}}$$

로피탈정리 (분자 → $-\infty$, 분모 → $+\infty$)

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}-x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

5

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{-\left(\frac{x\sqrt{x}}{2}-x^2\right)}{\sqrt{x}-x}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{-\left(\frac{x}{2}-x\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}} = 0$$ 이므로

15

$$\lim_{x\to 0+}(\sqrt{x}-x)^x = e^{\lim_{x\to 0}\log(\sqrt{x}-x)^x} = e^0 = 1.$$

20

- 로피탈 정리를 시도했으나 답이 틀린 경우 : 5점
- $\lim_{x\to 0+}\log(\sqrt{x}-x)^x = 0$ 까지만 구한 경우 : 15점
- 답은 맞았으나 계산과정에 실수가 있는 경우 : 15점

#9.

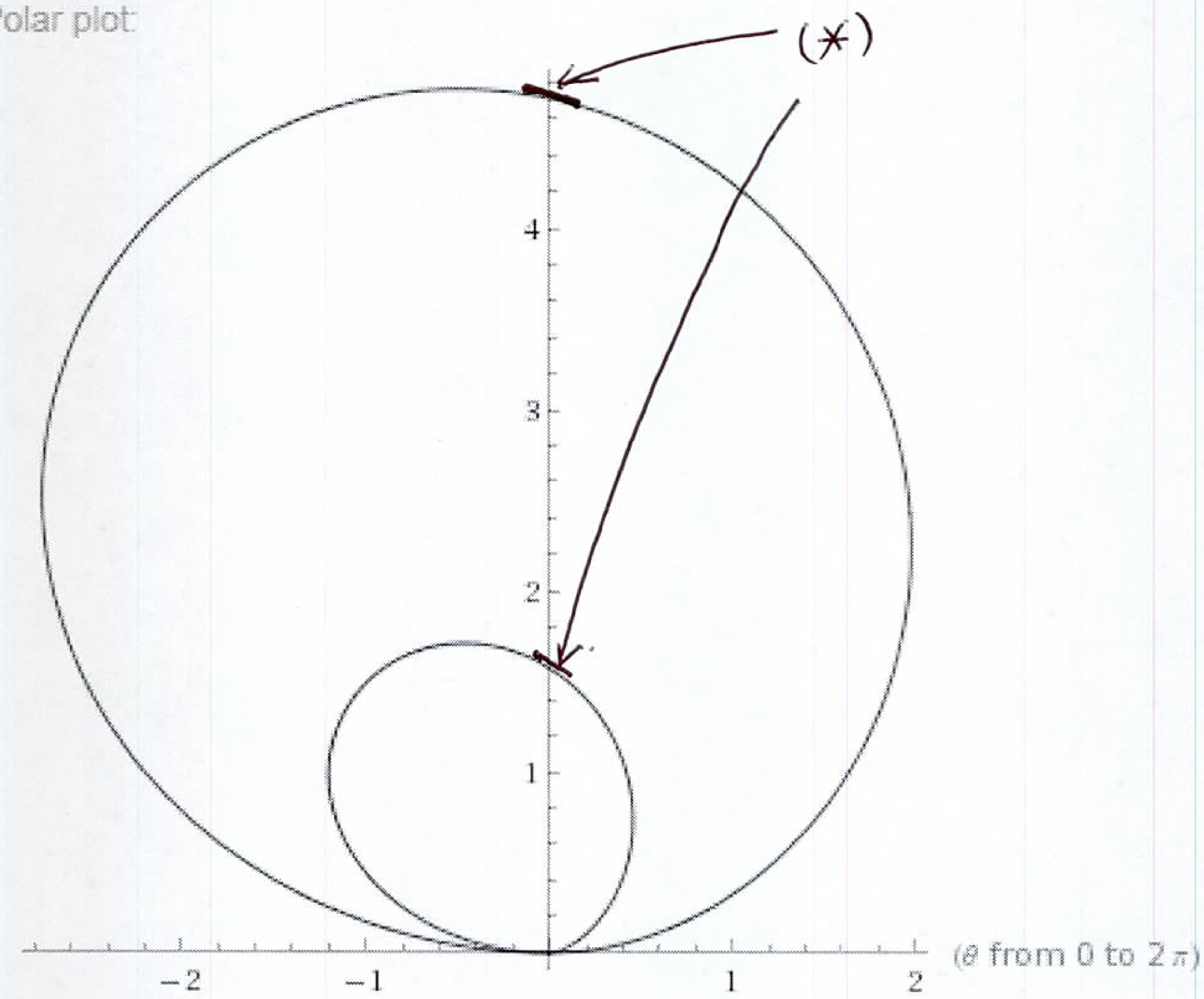
r=theta*sin(theta) in [0,2pi]

≡ Exan

Input interpretation:

plot	$r = \theta \sin(\theta)$	$\theta = 0$ to 2π

Polar plot:



※ 1. (*)에서 기울기 없으면 0점.
2. 좌측으로 쏠리지 않으면 0점.
3. 부분점수 없음.

문제 10.

$\rho = \sin\theta \sin\varphi$

$\downarrow \times \rho$

$\rho^2 = \rho \sin\theta \sin\varphi$

이 때 $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$ 이므로

$$x^2+y^2+z^2=y \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2+z^2=\tfrac{1}{4}$$

$\therefore$ 중심이 $(0, \frac{1}{2}, 0)$ 이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 구면.

10점

부분점수없음.

11 a) $P(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ $\boxed{(\rho, \phi, \theta)}$

$Q(2, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi)$

P: $x = \rho\cos\theta\sin\phi = 2\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

$y = \rho\sin\theta\sin\phi = 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = \rho\cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$

Q: $x = \rho\cos\theta\sin\phi = 2\cos\frac{5}{6}\pi\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2}$

$y = \rho\sin\theta\sin\phi = \cancel{2\cos}\ 2\sin(\frac{5}{6}\pi)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = \rho\cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$

$P(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ $Q(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

---

b) $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - (-\frac{3}{2})\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1-1)^2}$

$= 3$

• 부분 점수 없음.