〈2013년 1학기 수학 및 연습 1 중간고사 모범답안〉

#1. (a). 구간 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 에서 $\tan x \le \frac{4}{\pi}x$ 이므로

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$$

$a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$ 라 두면,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{2^n}\right)}{\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)} = \frac{1}{2} < 1$ 이므로, 비율판정법에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ 는 수렴한다. ┘+5

그러므로, 비교판정법에 의하여, $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 도 수렴한다. ┘+5

(다른풀이) $a_n=n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 라 두면, $a_n>0$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \quad ┘+5$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2}<1$$

그러므로, 비율판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 은 수렴한다. ┘+5

* 채점기준 이외의 풀이의 경우, 다 맞으면 10점, 아니면 0점.

1 (b) 급수의 수렴·발산 판정

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{e^2}{n}\right)^n, \quad a_n = n!\left(\frac{e^2}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\frac{e^2}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{e^2}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)\,e^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= e^2\cdot\frac{1}{e} = e > 1$$

∴ 비율판정법에 의해 발산

* 계산과정 실수 0점

* 판정법 이름을 잘못쓰면 -3점

ex) 비율판정법으로 풀고 "비교판정법" 으로 적은경우

* 멱근판정법을 이용할때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ 을 증명없이 적은경우 -3점

* 다른방법으로 풀었을 경우 맞으면 10점 부여.

1. (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{이므로}}_{(*)}$ 일반항 $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 은 0 으로 수렴하지 않는다.

따라서, 일반항 판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 은 발산한다.

((*) : 로피탈 정리에의해, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ 이므로 $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$.)

(채점기준)

- 교대급수 판정법의 조건이 성립하지 않음을 보여서 발산함을 증명한 경우 0 점.
  (즉, 교대급수 판정법을 이용한 경우, 0점)
- 풀이에 근거가 부족한 경우 0점, 근거를 틀리게 적은 경우 0점.
- 표기에 관한 실수

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ or } -1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = \infty \end{array}\right)$$

등으로 쓴 경우 3점 감점.

1. (d). $a_n = \dfrac{1}{n - \log n}$ 이라 하면 모든 n에 대하여 $a_n > 0$ 이다.

① $f(x) = x - \log x$, $x \in [1, \infty)$ 는 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ 이므로

$f(n) = n - \log n$ 은 증가 하고

따라서 $a_n = \dfrac{1}{n - \log n}$ 이 감소한다.

② $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{\log n}{n}} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

따라서 교대급수 정리에 의해

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}$ 이 수렴한다.

채점기준 : ① a_n은 감소한다 (5점)

언급만 하거나 증명이 잘못된 경우 3점

증명까지 잘 하면 5점.

② $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (5점)

언급만 하거나 증명이 잘못된 경우 3점

증명까지 잘 하면 5점.

* 마무리가 잘못된 경우 -2점

* 점수는 의도가 맞아야 인정

(주의 : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n - \log n} = 0$ 만 쓰신 분들은 언급만 한 경우로

증명 점수 2점을 받을 수 없습니다.).

* $\lim_{n\to\infty} (n - \log n) = \infty$ 임을 보이지 않으면 인정하지 않습니다.

* $x - \log x$ 가 증가한다고 해서

$\lim_{x\to\infty} (x - \log x) = \infty$ 임이 설명되지 않습니다.

#2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 일반항 판정법에 의해,

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

5점.

$\therefore\ ^{\forall}\varepsilon \in (0,1)\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $0 \leqq a_n < \varepsilon \quad \forall n \geqq N$

10점

$\Rightarrow \quad 0 \leqq \frac{a_n}{1-a_n} < \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot a_n \quad \forall n \geqq N$

15점.

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로, 비교판정법에 의해

$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n} \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot a_n$ 수렴.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ 수렴.

20점.

(극한 비교 판정법을 이용한 풀이)

$\sum a_n$ 이 수렴하므로 일반항 판정법에 의해,

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

┘ 5점

$\therefore$ 충분히 큰 N 이 존재하여, $n \geq N \Rightarrow a_n < 1$

$\therefore n \geq N \Rightarrow 0 < \dfrac{a_n}{1-a_n}$

┘ 15점

양항수열 (a_n), (b_n) 에 대해

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ 이면,

$\sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum b_n < \infty$ (극한 비교 판정법)

$b_n = \dfrac{a_n}{1-a_n}$ 으로 잡으면,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{a_n}{1-a_n}} = \lim_{n\to\infty}(1-a_n) = 1$$ 이므로,

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n} < \infty$$

유한개의 항은 급수의 수렴성에 영향을 미치지 않으므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n} < \infty$$

┘ 20점.

#3 -(a)

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 꼴}\right)$$

위 값을 구하기 위해 자연수 n을 실수 x로 간주하고 로피탈의 정리를 적용하면,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2} = 1 \quad +5$$

따라서 수렴반경이 1 이고, 주어진 급수는

$-1 < x < 1$ 에서 수렴한다.

(i) $x=1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\log(n+1)$$

$$= \infty$$

$\therefore$ $x=1$ 일 때 발산 +5

(ii) $x=-1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$b_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 이라 두면,

① $b_n > 0$

② $b_n > b_{n+1}$

③ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ +2

교대급수 정리에 의해 위 급수는 수렴한다. +3

* 채점기준

1. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 을 계산실수 없이 정확히 구하면 5점

2. $x=1$ 일 때 발산함을 보이는 과정이 정확하면 5점

3. $x=-1$ 일 때 교대급수 정리 가정 ②, ③ 중 하나라도 언급이 없을 시 -2 점.

3. 다음 멱급수가 수렴하는 x의 범위를 구하시오.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1} x^n$

모범답안)

① $|x| \leq 1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2+1} x^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2+1} |x|^n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} |x|^n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty.$$

절대수렴하는 급수는 수렴하므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1} x^n$ 도 수렴. ··· 5점.

② $|x| > 1$ 일 때

$a_n := \dfrac{\sin n}{n^2+1} x^n$ 이라 하자.

만약 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이라면,

$$\lim_{n\to\infty} |\sin n| = \lim_{n\to\infty} |a_n| \cdot \frac{n^2+1}{|x|^n} = 0 \times 0 = 0.$$

($\because$ 지수함수는 다항함수보다 증가속도가 크므로)

하지만 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\sin n|$ 은 진동하므로 모순!

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이고, 일반항판정법에 의해 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1} x^n$ 은 발산. ··· 10점.

$\boxed{\text{답) } -1 \leq x \leq 1}$ (총 15점)

채점기준.

1. 답이 틀리면 무조건 0점.
2. $\rho := \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2+1}}{\frac{\sin n}{n^2+1}} \right| = 1$ 이라고 계산하여 푼 경우 (실제로는 극한값이 존재하지 않음)

   $x = \pm 1$ 일 때 수렴함을 두 경우 모두 완벽하게 보이고 답까지 맞으면 5점,
   하나라도 틀리면 0점. (부분점수 없음)
3. $x=1$ 일 때 $\sum \dfrac{\sin n}{n^2+1}$ 에 대해 비교/적분판정법을 쓰거나, $x=-1$ 일 때 $\sum (-1)^n \dfrac{\sin n}{n^2+1}$ 에 대해 교대급수정리를 사용한 경우 0점. ($\because \dfrac{\sin n}{n^2+1}$ 이 항상 양항이 아님)

$\boxed{4}$ (a) ① $h(y) = \frac{d}{dy}\tanh^{-1}y = \frac{1}{\frac{d}{dx}\tanh x}$

$$= \frac{1}{\frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)} = \frac{1}{1-\tanh^2 x} = \frac{1}{1-y^2}.$$

② $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$

$\Rightarrow e^{2x} = \frac{2}{1-y} - 1 = \frac{1+y}{1-y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

$\tanh^{-1}y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$

$\therefore \frac{d}{dy}\tanh^{-1}y = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) = \frac{1}{1-y^2}.$

채점기준

역함수 정리를 잘못 이해하고 있거나 미분이 틀린 경우 : 0점

미분결과가 맞았으나 답을 x에 관한 식으로 작성한 경우 : 5점.

(ex $\frac{1}{1-(\tanh x)^2}$, $\cosh^2 x$. $\frac{1}{\operatorname{sech}^2 x}$, $\frac{(e^{2x}+1)^2}{4e^{2x}}$).

$\frac{1}{1-y^2}$ 이외의 다른 답 : $\cosh^2(\tanh^{-1}y)$, $\frac{1}{\operatorname{sech}^2(\tan^{-1}y)}$, $\frac{(e^{2\tan^{-1}y}+1)^2}{4e^{2\tan^{-1}y}}$

$\boxed{4}$ (b) ① $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \quad (|x|<1).$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x|<1.$$

by (a) $$\Rightarrow \tanh^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}. \qquad (*)$$

$$\therefore \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

② $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(1+x) - \log(1-x)\right].$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \qquad (*).$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\log 3.$$

채점기준.

①, ② 풀이에서 (*) 까지 맞는 경우에만 부분점수 5점.

#5.

$f(x)=x^2\arcsin x$

$f^{(1)}(x)=2x\arcsin x+x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$f^{(2)}(x)=2\arcsin x+4x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$f^{(3)}(x)=6(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+7x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^4(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$f^{(4)}(x)=20x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+33x^3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}+15x^5(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}$

$f^{(5)}(x)=20(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+159x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}+240x^4(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}+105x^6(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}$ 10점.

계산 실수 −5점.

$T_5f(x)=\sum_{n=0}^{5}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x^3+\frac{x^5}{6}$ 20점.

별해.

$g(x)=\arcsin x$로 두면,

$g^{(1)}(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ------ (☆)

$g^{(2)}(x)=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$g^{(3)}(x)=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$ 이므로

$g(x)=\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ 10점, 계산 실수 −5점.

따라서 $f(x)=x^2g(x)=x^3+\frac{1}{6}x^5+o(x^5)$ 이므로

$T_5f(x)=x^3+\frac{1}{6}x^5$ 20점

$o(x^3)$등의 표현을 사용하지 않았거나

근사 다항식의 유일성을 사용하지 않았으면 −5점

추가 채점기준

- (☆)의 멱급수 전개를 이용한 경우: 논리과정이 명확한 경우 같은 점수 부여.
  7번 문제 이용 시 −5점 (x의 범위가 다릅니다). (☆)까지만 쓰면 3점.
- 이전 단계에서 만점을 받지 못한 경우 다음 단계에서 점수 없음

#6. $\int_0^{0.1} \arctan t \, dt$ 의 값을 오차 10^{-7} 이내가 되도록 구하기.

[Method1] arctant 의 멱급수 전개 이용.

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x|<1)$$

(멱급수 기본정리)

$$\Rightarrow \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$

$$\therefore \int_0^{0.1} \arctan t \, dt = \int_0^{0.1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} dx$$

①

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}\right]_0^{0.1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+2}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{3\cdot 4}\left(\frac{1}{10}\right)^4 + \frac{1}{5\cdot 6}\left(\frac{1}{10}\right)^6 - \cdots$$

교대급수의 성질에 의해 $\left|\int_0^{0.1} \arctan t \, dt - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^4\right)\right|$

$$\leq \frac{1}{30}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^6 < \left(\frac{1}{10}\right)^7 = 10^{-7}$$

②

이므로, 구하는 근사값은 $\int_0^{0.1} \arctan t \, dt \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{599}{120000}$

③

* 채점기준. arctanx의 멱급수 전개를 틀린 경우, 0점.

① arctanx의 멱급수 전개를 이용하여 ①까지 전개시 5점.

단, 수렴반경에 대한 언급이 없으면 ①에 대한 점수 없음.

② 오차의 한계를 정확하게 구했으면 10점.

③ 근사값을 계산 실수없이 잘 구했으면 5점.

[Method 2] 테일러 전개를 이용.

$f(x) := \int_0^x \arctan t \, dt$ 라 하자.

$f'(x) = \arctan x$, $f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f^{(3)}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$,

$f^{(4)}(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$,

$f^{(5)}(x) = -\frac{48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3} = -\frac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$,

$f^{(6)}(x) = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3} = \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}$

이므로, $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f^{(3)}(0)=0$,

$f^{(4)}(0)=-2$, $f^{(5)}(0)=0$, $f^{(6)}(0)=24$,

곧 $T_5 f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$ 이다. ① 이때

$|R_5 f(x)| \leq \max\{|f^{(6)}(t)| : 0 \leq t \leq x\} \cdot \frac{|x|^6}{6!}$ 에서

$|R_5 f(0.1)| \leq \max_{0\leq t\leq 0.1} \left| \frac{24(5t^4-10t^2+1)}{(1+t^2)^5} \right| \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{10^6}$

$\leq \frac{24}{(1+0^2)^5} \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{10^6} \leq \frac{1}{10^7}$ 이므로 ②

[$\because$ $5t^4-10t^2+1 = 5(t^2-1)^2-4 \leq 1$ for $0\leq t\leq 0.1$]

$f(0.1) = \int_0^{0.1} \arctan t \, dt \approx T_5 f(0.1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{10^4} = \frac{599}{120000}$

① 테일러근사다항식을 실수없이 잘 구했으면 5점. (적어도 $f^{(6)}(x)$ 까지는 반드시 구해야 함)

② $|R_5 f(0.1)| \leq 10^{-7}$ 임을 잘 보이면 10점.

③ 근사값을 계산 실수없이 잘 구했으면 5점.

7. (a) $f^{(n)}(x) = n!\binom{r}{n}(1+x)^{r-n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 임을 보이자.

① $f^{(0)}(x) = 0!\binom{r}{0}(1+x)^{r} = (1+x)^{r}$, OK!

② $f^{(n)}(x) = n!\binom{r}{n}(1+x)^{r-n}$ 이면 $f^{(n+1)}(x) = n!\binom{r}{n}(r-n)(1+x)^{r-n-1}$

$$= (n+1)!\binom{r}{n}\frac{r-n}{n+1}(1+x)^{r-(n+1)}$$

$$= (n+1)!\binom{r}{n+1}(1+x)^{r-(n+1)}$$ 이므로,

$n+1$ 일 때에도 공식이 성립.

따라서 수학적 귀납법에 의해, 모든 n에 대해 공식이 성립한다. 따라서

$$f^{(n)}(0) = n!\binom{r}{n}$$

이고,

$$\therefore Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^{n}.$$

(b) $|f(x) - T_nf(x)| = |R_nf(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$ 을 만족시키는 x^*이 (각각의 n마다)

$0 \le x^* \le x$ 사이에 존재한다. 따라서 $r < N$ 이면,

$$n \geq N \Rightarrow r-(n+1) < r-N < 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}\right| = \left|\binom{r}{n+1}(1+x^*)^{r-n-1}\right| \le \left|\binom{r}{n+1}\right| \quad ①$$

이므로

$$|R_nf(x)| \le \left|\binom{r}{n+1}\right||x|^{n+1}$$

$$= \underbrace{\frac{|r(r-1)\cdots(r-N+1)|}{N!}}_{=:A}\underbrace{\left(\frac{N-r}{N+1}\right)}_{\le 1}\underbrace{\left(\frac{N+1-r}{N+2}\right)}_{\le 1}\cdots\underbrace{\left(\frac{n-r}{n+1}\right)}_{\le 1}|x|^{n+1}$$

$$\le A|x|^{n+1}$$

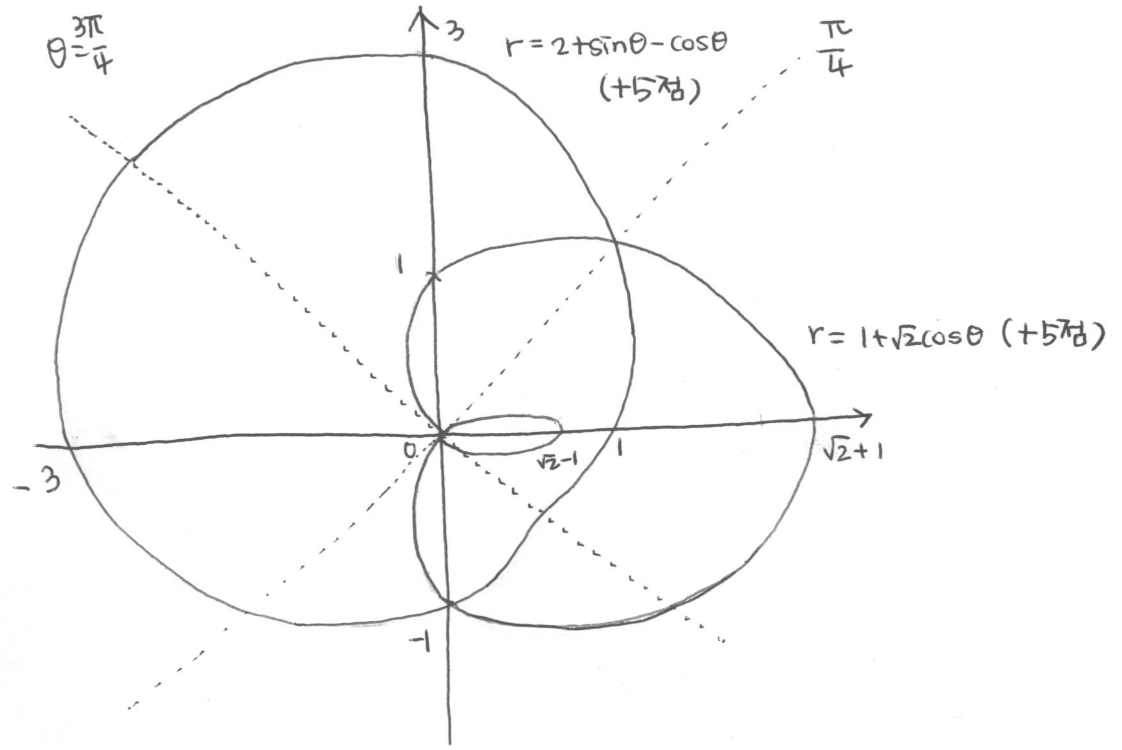
이고, 따라서 $0 \le x < 1$ 이므로 $|R_nf(x)| \to 0$ 이다. 그러므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}T_nf(x) = Tf(x). \quad ②$$

(b): ① … 5점

② … 10점, 단 사소한 계산실수는 (-5) 감점.

#8. (a)


$\theta = \frac{3\pi}{4}$
3
$r = 2+\sin\theta-\cos\theta$
(+5점)
$\frac{\pi}{4}$
1
$r = 1+\sqrt{2}\cos\theta$ (+5점)
-3
0
$\sqrt{2}-1$
1
$\sqrt{2}+1$
-1

#8. (b)

$$2r + r\sin\theta - r\cos\theta = r + \sqrt{2}\, r\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $r = (\sqrt{2}+1) r\cos\theta - r\sin\theta$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2 = (\sqrt{2}+1)^2 x^2 + y^2 - 2(\sqrt{2}+1)xy$

$\Rightarrow$ $0 = 2(\sqrt{2}+1)\, x(x-y)$

$\Rightarrow$ $x = 0$ or $x = y$

$\Rightarrow$ $\theta = \underset{\times}{\frac{\pi}{2}}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \underset{\times}{\frac{5\pi}{4}}$

$\Rightarrow$ $(r,\theta) = (1, \frac{3\pi}{2}), (2, \frac{\pi}{4})$ 5점

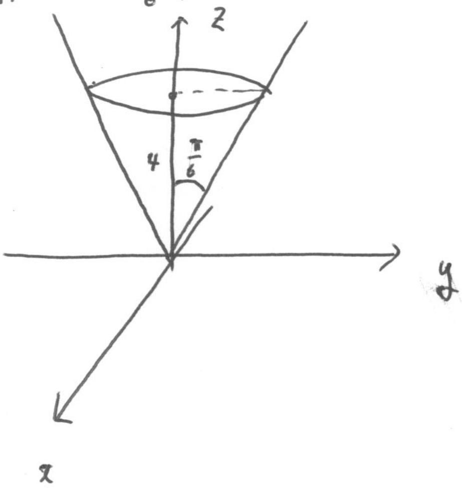
$\Rightarrow$ $(x,y) = (0,-1), (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$\Rightarrow$ $d^2 = 5 + 2\sqrt{2}$ 5점

채점기준

- 교점을 극좌표로 구하지 않으면 -5점.
- 교점 하나 틀리면 -2점.
- $(1, -\frac{\pi}{2})$는 틀림. 각의 범위는 $0 \le \theta \le 2\pi$.
- 거리의 제곱 대신 거리 구하면 -2점.

9. $\varphi \le \frac{\pi}{6}$, $z \le 4$ 인 영역은 높이가 4이고 밑변의 길이가 $\frac{4}{\sqrt{3}}$ 인 원뿔



따라서 주어진 영역의 부피는

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{16}{3} \cdot 4 = \frac{64}{9}\pi$$

주어진영역을 그림이나 설명을 통해 정확히 표현 하면 5점

답을 정확히 계산하면 5점