2017년 2학기 수학 및 연습 2
중간고사 채점기준

1. (a) $(x, y) \neq (0.0)$ 일 때

$$|f(x,y)| = \frac{|x| \cdot |x^3 y^2|}{|x^6 + y^4|}$$

산술·기하평균 부등식에 의해

$$|x^3 y^2| \leq \frac{x^6 + y^4}{2}$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||x^6 + y^4|}{2|x^6 + y^4|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{2} = 0.$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0.0)$ 이므로 f는 원점에서 연속.

- 산술·기하평균 부등식을 이용할 때 절댓값을 적용하지 않은 경우 (−1)

- $|f(x,y)| \leq \frac{|x^4 y^2|}{2|x^3 y^2|}$ 등과 같이 분모를 변형한 경우 분모가 0이 되는 경우를 고려하지 않으면 (−2)

- 부등식을 전개할 때 중간과정에 대한 설명이 부족한 경우 (−3)

(b) $D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$

$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$.

- 답이 맞아도 식이 틀린 경우 점수 없음.

(c) f가 원점에서 미분가능하다면

$$\lim_{|\vec{v}|\to 0} \frac{|f(\vec{v}) - f(0) - \mathrm{grad} f(0)\cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = 0$$

$\vec{v} = (a,b)$라 하면 $f(0)=0$, $\mathrm{grad} f(0) = (0,0)$ 이므로

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{\frac{a^4b^2}{a^6+b^4}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{a^4b^2}{(a^6+b^4)\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

그런데 $a^3=b^2$ 인 경우

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{a^4b^2}{(a^6+b^4)\sqrt{a^2+b^2}} = \lim_{a\to 0} \frac{a^7}{2a^6|a|\sqrt{1+a}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

위의 가정에 모순

$\therefore$ f는 원점에서 미분불가능.

- 부분점수 없음.

2. $\frac{y}{x} = u$, $\frac{z}{x} = v$ 라 하자.

$w = x^2 f(u,v)$ 이므로

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x f(u,v) + x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)$$

$$= 2x f(u,v) + x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= 2x f(u,v) + x^2 \left(D_1 f(u,v) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + D_2 f(u,v) \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right) \right)$$

$$= 2x f(u,v) - y D_1 f(u,v) - z D_2 f(u,v) \quad \cdots ①$$ +6

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$$

$$= x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= x^2 \left(D_1 f(u,v) \cdot \frac{1}{x} + D_2 f(u,v) \cdot 0 \right)$$

$$= x D_1 f(u,v) \quad \cdots ②$$ +3

마찬가지로 $\frac{\partial w}{\partial z} = x D_2 f(u,v) \quad \cdots ③$ +3

①, ②, ③ 에 의해 $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 2x^2 f(u,v) = 2w \quad \cdots ④$ +3

채점 기준

- 편미분 기호를 잘못 사용한 경우 0점 (ex. $D_3 f$, f_1, f_2, $\cdots$)
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ 를 더 전개하지 않은 경우 0점.
- ①, ②, ③ 중 하나라도 틀릴 경우 ④ 점수 없음.
- 기타 $\frac{\partial}{\partial x}$를 $\frac{d}{dx}$로 쓰는 등 미분기호를 쓰는 과정에서 사소한 실수는 감점 없음.

3. $f(x,y,z) = (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2$ 라고 두자.

문제에서 주어진 타원면은 $f^{-1}(1)$ 등위면이다.

타원면에 있는 점 (a,b,c)의 접평면은 $\mathrm{grad}f(a,b,c)$를 법선벡터로 가진다.

$\mathrm{grad}f(a,b,c) = (2(a-1), 4(b-2), 6(z-3))$

5

따라서 (a,b,c)에서의 접평면은 $(2(a-1), 4(b-2), 6(z-3)) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$

이다.

접평면이 원점을 지나야하므로 $(0,0,0)$을 대입하면

$(2(a-1), 4(b-2), 6(z-3)) \cdot (-a, -b, -c) = 0$ 을 얻는다.

5

(a,b,c)는 타원면 위에 있으므로 $(a-1)^2 + 2(b-2)^2 + 3(c-3)^2 = 1$을 만족한다.

정리하면 다음의 연립방정식을 얻는다:

$$\begin{cases} a^2 - a + 2b^2 - 4b + 3c^2 - 9c = 0 \\ a^2 - 2a + 2b^2 - 8b + 3c^2 - 18c + 35 = 0 \end{cases}$$

위의 식에서 아래식을 빼면 $a + 4b + 9c = 35$를 얻는다.

5

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$\boxed{x + 4y + 9z = 35.}$$

4. $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$

$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta$ +3.

$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta\right)$

$= \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}$

$= \cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \sin\theta\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)$

$= \cos^2\theta\cdot D_1^2 f + 2\cos\theta\sin\theta\cdot D_1D_2 f + \sin^2\theta\cdot D_2^2 f$ +7.

(· 형태는 다르지만 연쇄법칙을 사용하여 이와 같은 식을 쓰면 +7.
· 전개 과정 중에 먼저 값을 대입하고 식을 전개하면 틀린 것으로 간주.).

$(r,\theta) = (2, \frac{\pi}{3}) \longrightarrow (x,y) = (1,\sqrt{3})$을 대입하면,

답 : $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. +5

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2y^2 - y$ — ①

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4xy - x$ — ②

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 4y - 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x$

f의 임계점 : ①, ② $= 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y(3x^2+2y-1) = 0 \\ x(x^2+4y-1) = 0 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0), (-1,0), (1,0), \left(0,\tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{\sqrt5}{5}, \tfrac{1}{5}\right), \left(-\tfrac{\sqrt5}{5}, \tfrac{1}{5}\right)$$

각각의 경우 f''은

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt5}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4\sqrt5}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{6\sqrt5}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4\sqrt5}{5} \end{pmatrix}$$

로 계산되므로, 헤세 판정법에 의하여

$(0,0)$, $(0,\tfrac{1}{2})$, $(-1,0)$, $(1,0)$ 은 안장점,

$\left(\tfrac{\sqrt5}{5}, \tfrac{1}{5}\right)$는 극소점, $\left(-\tfrac{\sqrt5}{5}, \tfrac{1}{5}\right)$는 극대점이다. ⌟

- ∇f 계산 : 5점
- f'' 계산, "헤세 판정법" 사용 : 4점
- 각 임계점별 판정이 맞아야 1점씩 획득.

#6

$g(x,y) = x^3+y^3+6xy-8$

$S = \{(x,y) \mid g(x,y)=0\}$

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 8\}$ 라 두면

$S \cap D$ 는 공집합이 아닌 ($\because (-2,-2) \in S \cap D$)

유계 닫힌 집합이므로 연속함수 f는 $S \cap D$ 위에서

최댓·최솟값을 갖는다 ($\because$ 최대·최소 정리)

이때, $S \cap D$ 위에서 $f(x,y) \le 8$ 이므로

$S \cap D$ 위에서 최솟값이 S에서의 최솟값이다.

┘4

i) $\nabla f(x,y) = 0$ 인 경우

$\nabla f = (2x, 2y) = (0,0)$ 은 S에 들어가지 않음.

ii) $\nabla f(x,y) \neq 0$ 인 경우

라그랑주 승수법에 의해 극점에서

$\nabla g = \lambda \nabla f$ 인 λ가 존재한다. ┘3

($\because \nabla f \neq 0$) ┘3

#6 이어서)

$$\Rightarrow 3x^2 + 6y = 2\lambda x, \quad 3y^2 + 6x = 2\lambda y$$

$$\Rightarrow 2\lambda xy = \underline{3x^2y + 6y^2 = 3xy^2 + 6x^2} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow 3(x-y)(2x+2y-xy) = 0$$

a) $x = y$ 인 경우

$$0 = g(x,x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$$

$$\Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$= (x-1)(x+2)^2$$

$\therefore$ 최솟점 후보 $(1,1), (-2,-2)$

$$(f(1,1) = 2, \quad f(-2,-2) = 8)$$

b) $2x + 2y = xy$ 인 경우

$$0 = g(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy - 8$$

$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 6xy - 8$$

$$= (x+y)^3 - 6(x+y)^2 + 12(x+y) - 8$$

$$= (x+y-2)^3$$

#6 이어서

$\Rightarrow$ $x+y=2$, $xy=4$

하지만 위를 만족하는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

$\therefore$ S 위에서 f의 최솟값은 $f(1,1)=2$

5

7

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$\log(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \cdots)$

에서 $e^{x+xy}\log(1-xy) = -(1+(x+xy)+\frac{(x+xy)^2}{2!}+\cdots)(xy+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3y^3}{3}+\cdots)$

$= -xy - x^2y - \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{2}x^3y^2 - \frac{1}{6}x^4y - \frac{4}{3}x^3y^3 - \frac{3}{4}x^4y^2 + \cdots$

테일러 전개의 유일성에 의하여,

$T_2f((0,0)) = -xy$. +5점

b)

a)와 마찬가지로 테일러 전개의 유일성에 의하여

$T_6f((0,0))$을 구할 수 있고,

$\frac{{}_6C_3}{6!}(D_1^3D_2^3f)((0,0))$과 $T_6f((0,0))$에서 x^3y^3의 계수가 같다.

따라서, $-xy\cdot(\frac{x^2y^2}{2}) - (\frac{x^2y^2}{2!})\cdot xy - 1\cdot\frac{x^3y^3}{3} = -\frac{4}{3}x^3y^3$ 에서, +5점

$(D_1^3D_2^3f)((0,0)) = \frac{6!}{{}_6C_3}\cdot -\frac{4}{3} = -48$. +5점

*) a), b) 각각 '테일러전개의 유일성'에 대한 언급이 없을시 2점씩 감점.

8

$$f'(s,t) = \begin{pmatrix} 2e^{2s+t} & e^{2s+t} \\ \sin s & 3 \\ 2s & 1 \end{pmatrix} \qquad g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2z \\ 2x & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*

+7.

$f(0,0) = (1,-1,2)$, $g(0,0,0) = (0,1)$ 이므로,

$$F'(0,0) = g'(f(0,0)) \cdot f'(0,0) = g'(1,-1,2) \cdot f'(0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

+4

$$G'(0,0,0) = f'(g(0,0,0)) \cdot g'(0,0,0) = f'(0,1) \cdot g'(0,0,0)$$

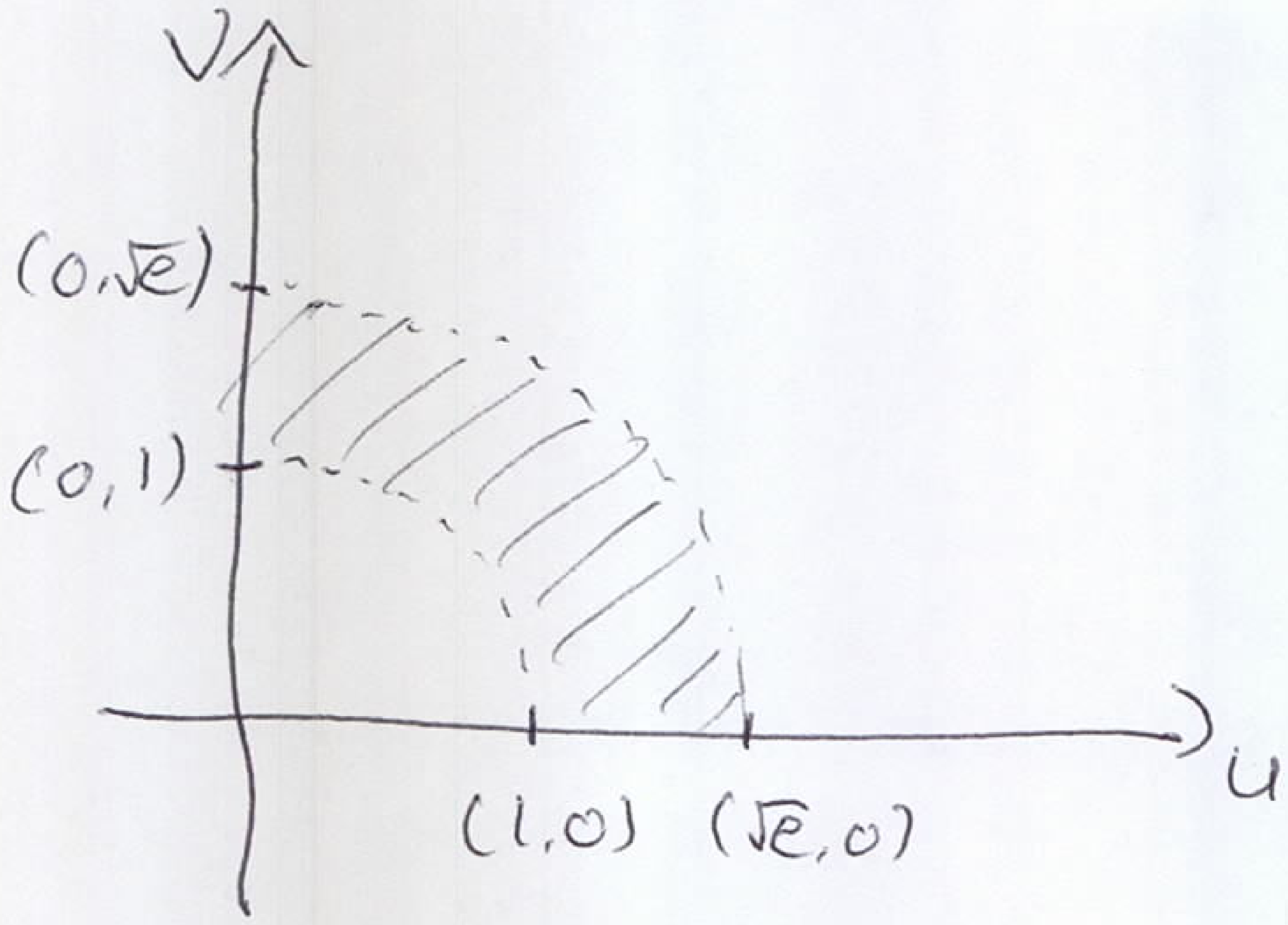
$$= \begin{pmatrix} 6e & 4e & -e \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

+4.

- * 를 적지 않은 경우, $F'(0,0)$ 와 $G'(0,0,0)$ 중 하나가 틀리면 8점.
  둘 다 맞으면 15점.

- $f'(s,t)$, $g'(x,y,z)$를 전치 행렬로 적은 경우, 7점.

9.(a)



경계를 점선으로 그리지 않고
따로 언급이 없으면 -2점

9.(b)

$(F \circ G)(u,v) = (u,v)$

이므로 연쇄법칙에 의해

$F'(x,y)\,G'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서

$$G'(u,v) = (F'(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} \\ \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

$$\det G'(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2}$$

$G'(u,v)$ 만 맞고
$\det G'$ 틀리면 8점
$\det G'$ 을 따로 구해서
맞으면 3점
모두 맞으면 10점

※ u, v로 표현하지 않으면 -1점
$\det G'$ 만 맞아도
과정에 오류가 있으면 0점
G' 에서 역행렬 계산을
완전히 끝내지 않으면 점수없음

10. $F(x,y) = a(x,y) + (0,\ x^2y)$ (a는 각원소 벡터장)

곡선 $X(t) = (t,\ 2-t^2)$ $(-1 \le t \le \sqrt{2})$

~) $\int_X \vec{F} d\vec{s} = \underbrace{\int_X \vec{a}\, d\vec{s}}_{①} + \underbrace{\int_X (0,\ x^2y)\, d\vec{s}}_{②}$

① = 곡선을 따른 각의 변화량 $\lrcorner +2$

$= -\frac{3}{4}\pi$ (시계 방향 이므로) $\lrcorner +5$

② $= \int_{-1}^{\sqrt{2}} (0,\ t^2(2-t^2)) \cdot (1,\ -2t)\, dt$

$\lrcorner +3$

$= \int_{-1}^{\sqrt{2}} 2t^5 + 4t^3\, dt$

$= \cancel{\int_{-1}^{\sqrt{2}}} \left[\frac{t^6}{3} + t^4 \right]_{-1}^{\sqrt{2}}$

$= \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 1$

$= -\frac{2}{3}$

$\lrcorner +5$

$\therefore \int_X \vec{F} d\vec{s} = -\frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3}$

※ ①, ② 계산시 곡선의 향 문제로 부호가 반대일 경우 각각 -2점