

수학 및 연습 2 기말고사
(2016년 12월 10일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

1번을 제외한 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 좌표공간에서 부등식 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 로 주어지는 영역 R 에서 정의된 적분가능한 함수 f 에 대하여 다음 등식이 성립하도록 빈칸을 채워 넣으시오. (풀이과정 없어도 됨.)

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \square d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \square dz dr d\theta \end{aligned}$$

문제 2. [20점] 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_{-3}^3 \int_{y^2}^9 \int_{-\sqrt{x-y^2}}^{\sqrt{x-y^2}} \sqrt{y^2 + z^2} dz dx dy$$

문제 3. [25점] 타원 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 단위법벡터장 \mathbf{n} 과 함수 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ 에 대하여, 선적분

$$\int_C D_{\mathbf{n}} f ds$$

의 값을 구하시오. (단, \mathbf{n} 의 향은 타원의 바깥쪽을 향하며 $D_{\mathbf{n}} f$ 는 f 의 \mathbf{n} -방향미분계수를 의미한다.)

문제 4. [20점] 좌표평면에서 $y = x$ 와 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 부분의 경계를 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C 라고 할 때, 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C (e^{\arctan x} + (xy + 1)e^{xy}) dx + (x^3 - xy + x^2 e^{xy}) dy$$

문제 5. [20점] 좌표평면에서 사이클로이드 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 경계를 시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C 라고 할 때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = (xe^{x^2+y^2} + x - 2y, ye^{x^2+y^2} + 2x + y)$$

에 대하여 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

문제 6. [20점] 곡면

$$S: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$$

의 밀도함수가 $\mu(x, y, z) = z$ 로 주어졌을 때 S 의 질량을 구하시오.

문제 7. [30점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) \mathbb{R}^3 에서 정의된 벡터장 \mathbf{F} 와 함수 h 에 대하여

$$\operatorname{curl}(h\mathbf{F}) = (\operatorname{grad} h) \times \mathbf{F} + h \operatorname{curl} \mathbf{F}$$

임을 보이시오.

(b) (15점) 두 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}, 0 \right), \quad \mathbf{A}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, y, z)$$

과 함수 $h(x, y, z) = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ 에 대하여 $\operatorname{curl}(h\mathbf{F}) = \mathbf{A}$ 임을 보이시오.

문제 8. [20점] 곡면

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$$

와 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + e^{yz}, y + \sin(x^2 + z^2), x^2 + y^2 + z)$$

에 대하여 \mathbf{F} 의 플럭스 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, a, c 는 양의 실수이고, 곡면 S 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 정한다.)

문제 9. [25점] 곡면

$$S : x^2 + 2y^2 = 1 + z^2, -1 \leq z \leq 1$$

와 벡터장

$$\mathbf{H}(x, y, z) = (z^2 - 1)(x^2 \tan z, e^x \sin(y^2 z), xy^2 z) + (2z + 1)(y, z, x)$$

에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, 점 $(1, 0, 0)$ 에서 S 의 향을 정하는 단위벡터는 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ 이다.)