$$f(\alpha) = \frac{1}{\chi(\log x)^2} \qquad x > 1$$

$$a_{N} = \frac{(N^{2}+2)(N^{2}-4)}{(N^{2}+1)(N^{2}-2)N}$$
  $b_{N} = \frac{1}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ 

$$\frac{60}{2}$$
  $\frac{1}{2}$   $\frac{1$ 

※ M Z 7 · ·
D 千型 收处 古이 童时时 0月.
图 牡杉 新母 别 别

2.

1) 11-02 四, 2012 对贵州是百年 수智社다.

2) x +0 0/2+ 3+2+.

订工一旦22H

\* X=1인대: ` 충분히 큰 Non 대하더 ' 등의 된기가 阪으면 -2 程 된기가 틀기고 방산만 맛으면 O점

\* N=-1022H: ZCH34 配对电 飞机是 加州之 见于外别 哈尼辛哲故是

ex) ~ Pertago (103 father) ( = 21 or | N)

米外经 尼梨 一对

 $\star \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{10}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  이 각고 設理を発生 (-2)

\* X二인 22H 的区址对识 enel 正型的是外层对至 221外 安空世纪

× 기(x<1인 명명은 O(x<1 등 0号信으고 나뉘서 구하면 부분정수부터 \* 기=1인 72H \* N' TH신 1010 등 중심히 큰 상수를 민급해도 인정

#### 중간고사 3번 모범답안 및 채점기준

f의 원점에서 2차 근사다항식  $T_2f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2=3+8x+\frac{1}{2}f''(0)x^2$ 이므로 모든 실수 x에 대하여  $f'(x)\neq 0$ 이므로 역함수 정리에 의해 g 또한 두 번 미분가능하다. 또, f(0)=3,f'(0)=8,f''(0)=1 이므로 g(0),g'(0),g''(0)의 값은 다음과 같다:

$$f(0) = 3 \implies g(3) = 0,$$

$$f(g(x)) = x \implies g'(x)f'(g(x)) = 1$$

$$\implies g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\implies g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{8}$$

$$\cdots \quad (+5\frac{1}{1}),$$

$$f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) = 0 \implies g''(x) = -\frac{f''(g(x))(g'(x))^2}{f'(g(x))}$$

$$\implies g''(3) = -\frac{f''(g(3))(g'(3))^2}{f'(g(3))} = -\frac{1}{512}$$

$$\stackrel{\overline{\otimes} \circ}{= -\frac{1}{512}}$$

$$g''(x) = -\frac{g'(x)f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2} \implies g''(3) = -\frac{g'(3)f''(g(3))}{(f'(g(3)))^2} = -\frac{1}{512}$$

$$\cdots \quad (+5\frac{1}{12})$$

따라서,

$$T_2g(y) = g(3) + g'(3)(y-3) + \frac{g''(3)}{2}(y-3)^2$$
$$= \frac{1}{8}(y-3) - \frac{1}{1024}(y-3)^2$$
$$\cdots (+5점; 식이 맞을 때)$$

\*계산에 대한 부분 점수 없음.

먼저  $x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$ 로 나타낼 수 있다.

한편,  $\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$  이므로,  $x \log x = t$ 로 치환.

주어진 극한식은,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t(e^t - 1)}$$

이다. 이때,  $f(t)=e^t-1-t,\ g(t)=t(e^t-1)$ 이라 정의하자. 이제 로피탈 정리를 사용하기 위해 조건을 확인해보면,

$$\lim_{t \to 0} f(t) = 0, \quad \lim_{t \to 0} g(t) = 0$$

이다. 또한  $f'(t) = e^t - 1$ ,  $g'(t) = e^t - 1 + te^t$ 이므로,

$$\lim_{t \to 0} f'(t) = 0, \quad \lim_{t \to 0} g'(t) = 0$$

이다. 또한,  $f''(t) = e^t$ ,  $g''(t) = 2e^t + te^t$ 이므로,

$$\lim_{t \to 0} f''(t) = 1, \quad \lim_{t \to 0} g''(t) = 2$$

이다.

따라서, 로피탈 정리를 각각 적용하면,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{f''(t)}{g''(t)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{1}{2}$$

이므로, 주어진 극한값은  $\frac{1}{2}$ 이다.  $\square$ 

## 채점기준

- $1. \ x \log x$  의 극한값을 이용해 극한식의 치환을 완료하는 데에 5점.
- 2. 로피탈 정리를 이용하기 위한 조건을 확인하고, 정리를 적용하는 데에 각각 5점.
- 3. 주어진 극한식을 구할 때 로피탈 정리의 조건을 확인하지 않은 경우에는 5점 감점.
- 4. 치환을 하지 않고 로피탈 정리를 바로 적용한 경우, 로피탈 정리의 조건을 확인 하는 데에 5점, 계산을 통해 답을 얻는 데에 10점. 계산 실수시, 계산 점수 없음.
- 5. 지수함수의 거듭제곱급수를 이용한 경우, 계산과정과 답이 맞으면 15점.

#5. 
$$f'(x) = e^x(\cos x - \sin x), \ f''(x) = -2e^x \sin x, \ f^{(3)}(x) = -2e^x(\sin x + \cos x)$$
 이므로  $f(0) = 1, \ f'(0) = 1, \ f''(0) = 0, \ f^{(3)}(0) = -2입니다. 따라서$ 

$$Tf_3(x) = 1 + x - \frac{2}{3!}x^3 = 1 + x - \frac{1}{3}x^3$$

이고, 이 때

$$|Rf_3(1)| \le \max\left\{ \left| \frac{f^{(4)}(x)}{4!} \right| : 0 \le x \le 1 \right\}$$
 (1)

입니다. 여기서

$$g(x) := |f^{(4)}(x)| = 4e^x \cos x, \ g'(x) = 4e^x (\cos x - \sin x)$$

이고  $x \in [0,1]$ 에 대해  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/4$ 입니다. 따라서  $x = \pi/4$ 에서  $|f(^{(4)}(x)|$ 가 극댓값을 가지고  $\max\left\{\left|\frac{f^{(4)}(x)}{4!}\right|: 0 \leq x \leq 1\right\} = \frac{\sqrt{2}}{12}e^{\pi/4}$ 이고, 원하는 결과를 얻습니다.

- 1. 근사 다항식을 구할 때 원점에서 f의 함숫값과 1,2,3계 미분계수들 중 하나를 잘못 구한 경우와 근사 다항식의 계수가 틀린 경우에 각각 4점을 감점합니다.
- 2. 테일러 정리의 따름정리를 잘못 적용해 식 (1)와 다른 잘못된 부등식을 구한 경우 4점을 감점하고,  $|f^{(4)}(x)|$ 가 구간 [0,1]에서 극댓값을 갖는 지점이  $x=\pi/4$ 임을 정확히 설명하지 않은 경우 8점을 감점합니다.
- 3. f(x)의 3차 테일러 근사 다항식을  $e^x$ 와  $\cos x$ 의 근사 다항식의 곱으로 구한 경우, 두 함수의 근사 다항식들 중 하나를 올바르게 구하지 않으면 **4점**을, 근사 다항식의 곱을 올바르게 구하지 않으면 **4점**을 감점합니다.

6.

[풀이 1] 테일러 정리에 의하여(+2점),  $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\cosh^{(6)}(x_*)}{6!} x^6$ 인  $x_* \in [0,x]$ 가 존재한다. (+2점) 그런데,  $\cosh^{(6)} = \cosh$ 이고,  $0 \le x \le 1$ 일 때,  $0 \le x_* \le 1$ 이므로, 다음의 부등식이 성립한다.

$$0 \le \frac{\cosh x - 1}{x^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2\right) = \frac{\cosh(x_*)}{6!}x^4 \le \frac{\cosh(1)}{6!}x^4 \le \frac{2}{6!}x^4.$$

(+4점)

따라서

$$0 \le \int_0^1 \frac{\cosh x - 1}{x^2} dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2\right) dx \le \int_0^1 \frac{2}{6!} x^4 dx = \frac{2}{5 \cdot 6!} < 10^{-3}$$

이므로(+5점), 근삿값을  $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 24}=\frac{37}{72}(+2점)$ 로 하면 오차가  $10^{-3}$  이하이다.

[풀이 2]  $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 이므로, 거듭제곱급수의 기본정리를 이용하면(+2점),

$$\int_0^1 \frac{\cosh x - 1}{x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n)!}$$

이다.(+6점)

여기서

$$0 \le \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot (2n)!} \le \frac{1}{5\cdot 6!} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{7^{2n-6}} = \frac{1}{3600} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{49}} = \frac{1}{3600} \cdot \frac{49}{48} < 10^{-3}$$

이므로(+5점), 구하는 근삿값은 
$$\sum_{n=1}^2 rac{1}{(2n-1)\cdot(2n)!} = rac{1}{2} + rac{1}{3\cdot 4!} = rac{37}{72}$$
이다. (+2점)

[풀이3] 
$$F(t) = \int_0^t \frac{\cosh x - 1}{x^2} dx$$
라 놓자. 그러면

$$F'(t) = \frac{\cosh t - 1}{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+2)!}$$

이고, 거듭제곱급수의 기본정리에 의해(+2점)

$$F''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)t^{2n-1}}{(2n+2)!}$$

$$F'''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)t^{2n-2}}{(2n+2)!}$$

$$F^{(4)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)t^{2n-3}}{(2n+2)!}$$

$$F^{(5)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)t^{2n-4}}{(2n+2)!}$$

이다. 이때 함수 F(t)의 원점에서의 4차 테일러 나머지항을  $R_4(t)$ 라 하면, 테일러 정리에 의하여

$$|R_4(t)| \le M_5(t) \frac{|t|^5}{5!}$$

이다. (단,  $M_5(t) = \max\{|F^{(5)}(s)|: s \in [0,t]\}$ .) (+6점) 여기서 t=1일 때,  $F^{(5)}$ 가 구간 [0,1]에서 0이상의 값을 가지면서 증가하므로

$$M_5(1) = F^{(5)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{(2n+2)!}$$

이다. 이 값을 관찰해보면,

$$0 \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{(2n+2)!}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1) \cdot (2n-4)!}$$
$$\le \frac{1}{6 \cdot 5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \le \frac{\cosh(1)}{30}$$

이므로, 결과적으로  $|R_4(1)| \le \frac{\cosh(1)}{30 \cdot 5!} \le \frac{2}{30 \cdot 120} = \frac{1}{1800} < 10^{-3}$ 임을 알 수 있다. (+5점) 따라서 구하는 근삿값은  $T_4(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \frac{F^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4!} = \frac{37}{72}$ 이다. (+2점)

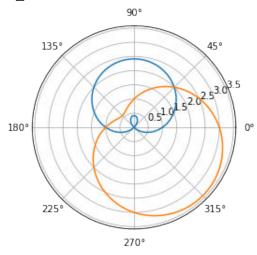
#### [채점기준]

• 각 풀이에서 "테일러 정리에 의하여" 또는 "거듭제곱급수의 기본정리에 의하여"라는

#### 언급에 **2점**

- 테일러 정리 또는 거듭제곱급수의 기본정리를 이용해 원래의 적분을 적당한 함수로 제한하거나 또는 급수로 변형했을 때 **6점**
- 올바른 논증을 통해 근삿값의 오차가  $10^{-3}$  이하임을 보이고, 답을 제대로 쓰면 **7점** (답만 틀린 경우 2점 감점)
- 근삿값의 오차를 계산하는 과정에서 급수를 교대급수로 생각하여 n+1번째 항이  $10^{-3}$ 이하가 되는지만 확인하거나, 테일러 정리를 적용할 때  $M_{n+1}(x) = \max\{|f^{n+1}(x_*)|: x_* \in [0,x]\}$ 을 계산하지 않고  $f^{(n+1)}(0)$ 을 대입하는 경우들이 많았습니다. 이러한 답안들은 답이 옳더라도 해당 부분에 점수를 부여하지 않았습니다.

7번



### [모범답안1]

교점의 극좌표를  $(r, \theta)$ 라고 하면,  $r = 1 + \sqrt{2}\sin\theta = 2 + \cos\theta - \sin\theta$ .

 $\therefore (1+\sqrt{2})\sin\theta - 1 = \cos\theta.$ 

양변을 제곱하면  $(3+2\sqrt{2})\sin^2\theta - (2+2\sqrt{2})\sin\theta + 1 = \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ .

 $\therefore (4+2\sqrt{2})\sin^2\theta - (2+2\sqrt{2})\sin\theta = 0.$ 

 $\therefore \sqrt{2}\sin^2\theta - \sin\theta = 0$ . 따라서  $\sin\theta = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

··· +7점

즉  $\theta=0,\frac{1}{4}\pi,\pi,\frac{5}{4}\pi$ 를 얻고, 이 중 첫 줄의 식을 만족하는 것을 구하면  $\theta=\frac{1}{4}\pi,\pi$ 이다. 이 때 r의 값은 각각 2,1이다. 따라서 모든 교점을 극좌표계로 나타내면  $(2,\frac{1}{4}\pi),(1,\pi)$ 

이며, 이를 다시 직교좌표계로 나타내면  $(\sqrt{2},\sqrt{2}), (-1,0)$ 이다. +3점

# [모범답안2]

각 식의 양변에 r을 곱하면,  $r^2 = r + \sqrt{2}r\sin\theta = 2r + r\cos\theta - r\sin\theta$ .

이를 직교좌표계로 바꾸면  $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2}y=2\sqrt{x^2+y^2}+x-y$ .

오른쪽 식을 정리하면  $-x + (1 + \sqrt{2})y = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

양변을 제곱하면  $x^2 - (2 + 2\sqrt{2})xy + (3 + 2\sqrt{2})y^2 = x^2 + y^2$ .

 $\therefore -(2+2\sqrt{2})xy + (2+2\sqrt{2})y^2 = 0. \ \constraints -xy + y^2 = 0$ 이므로, y=0 또는 y=x이다.

… +7점

y=0을 두번째 등식에 대입하면  $x^2=|x|=2|x|+x$ 이고, 따라서 x=0,-1이다. y=x을 두번째 등식에 대입하면  $2x^2=\sqrt{2}|x|+\sqrt{2}x=2\sqrt{2}|x|$ 이고, 따라서  $x=0,-\sqrt{2}$ 이다.

종합하면,  $(0,0), (-1,0), (\sqrt{2},\sqrt{2})$ 이다. 이 중 x=y=0이면 r=0이 되는데 두번째 곡선에서 r>0이므로 성립하지 않는다. 따라서  $(-1,0), (\sqrt{2},\sqrt{2})$ 가 답이 된다.+3점

# [참고 사항]

- 1. 답만 맞았을 경우에도 부분점수 3점은 부여할 수 있음.
- 2. 그래프만 사용하였을 경우 풀이에 관한 부분점수 7점을 부여하지 않음.
- 3. 식 전개상 비약이 심할 경우 풀이에 관한 부분점수 7점을 부여하지 않음.
- 4. 답안 2에서 y = 0 또는 y = x을 명시하지 않고 " $xy y^2 = 0$ "과 같이 썼을 경우 풀이에 관한 부분점수 7점을 부여하지 않음.
- 5. 교점을 "y = x 위의 모든 점"과 같이 서술하였을 경우 전체 0점 부여.
- 6. 교점 하나의 좌표만 구했을 경우 부분점수 없음.

#f ZZ 13 ON ZZO 92 2 4 SIT (\*)

 $z = \rho \sin \phi \cos \theta$   $y = \rho \sin \phi \sin \theta$   $z = \rho \cos \phi = chelicide ... (*)
<math display="block">\rho \cos \phi = \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{3}}$   $\gamma + \delta \cos \phi = \frac{\rho \cos \phi}{\sqrt{3}}$   $\phi = \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{3}}$   $\phi = \frac{\rho \cos \phi}{\sqrt{3}}$   $\phi = \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{3}}$   $\phi = \frac{\rho \cos \phi}{\sqrt{3}}$   $\phi = \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{3}}$   $\phi = \frac{\rho \cos \phi$ 

(4)을 잘 대왕하면 5점 OS (1) < 중 가 잘 내와면 5점 부피 = TT 가 나와면 5점.

7世五五四 4年 07 HAIDE 0점

9. 미적분학 1+ p.163. 기본연습문제에 의해  $Q_n = [n (n: 활)]$ -2n (n: 작수)

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_k} : \ddagger \dot{\exists} \ddot{u} \circ \dot{u},$$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

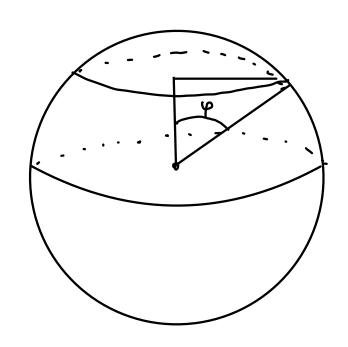
$$\frac{CC|2lM}{n+\infty} \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{\Omega_n} \cdot \frac{CC}{2} \frac{\partial l}{\partial l} + \frac{ll}{2} \frac{ll}{$$

- \* 사소한 실수 :- 2 점.
- \* 위 사은 절대수업 한지 않으므로 재배열이 수열성을 비끌수 있습니다.

(단, 7HUH열한 식을 적었으나 실질적으로 사용하지 않는 75우에는 -2건만 함)

\* On 是 空空 产于 一号 OLP 对于 OTS 好完

10世.



$$\int_{n}^{\infty} 2\pi (Sin \varphi = \frac{2\pi}{n}) 6\pi dx$$
  
 $\frac{1}{n} = \frac{2\pi}{2^{n}} = \frac{2\pi}{n} \frac{1}{n \cdot 2^{n}} = \frac{1}{n$ 

한편 
$$\frac{1}{1-n}$$
 =  $\frac{8}{2}$   $2^{n}$   $(1x_{1}(1)^{n})^{-1}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{1-n}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1$ 

- ① 子对对于对于 4年世 我们 此对 当时 台門 是 完 27年 34 24 22 22 22
- (1) मह्याद्व दुनेश निर्धायन एटमा १६०० २५ द्वारा
- 一①의 化乳 建光 儿童 이용하지 岩湖 岩岬 과정의 구视으로 13 정
- 2) -In((1-x1)=|+ 農力xn (「x14) 3 M代部を入 「n((1-x1)= 農力xn (「x(c) コア 34人 半計 半班 程 3千