

**2021** □ □ □ 1 □ □ □ □ □ 1

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

1. (a)

(풀이 1)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$  이라 하자.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$  이므로 비율판정법에 의해

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 은 수렴 절대값수가 수렴하므로  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  역시 수렴한다.

(풀이 2)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$  이라 하자.  $\forall n$   $|a_n a_{n+1}| < 0$  이고 유한개의  $n$ 을 제외하고  $|a_{n+1}| < |a_n|$ 이

성립한다. 또한,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0$  이므로 고대급수판정법에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

(\*) ① 비율판정법 적용시 양항는수 조건 고려안하면 -2

② 고대급수판정법 조건 부족시 개당 -1

③ 비율판정법이나 고대급수판정법 등 판정법을 언급하지 않으면 -1

④ 수렴값을 직접 구하는 경우 수렴값이 틀리면 -1

⑤ 수학적으로 틀린 표현이 있을 시 개당 -1

문제 1 - (b).

예시답안). 주어진 급수는  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2}$  의 수렴성과 같다.

$$\frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2} < \frac{1}{n(1+\log n)^2} \quad (n \geq 3).$$

이므로,  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(1+\log n)^2}$ 이다.

$$f(x) = \frac{1}{x(1+\log x)^2} \quad (x \geq 3) \quad \text{을 생각하면},$$

$f$  는 양수이고 감소하는 연속함수이다.

$$\int_3^{\infty} f(x) dx = \int_{\log 3}^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

$$= \left[ -\frac{1}{1+t} \right]_{\log 3}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1+\log 3} < \infty$$

이므로 정부분정법에 의해  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(1+\log n)^2}$  이 수렴한다.

비교판정법에 의해  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+\log n)^2}$  이 수렴한다.

따라서 주어진 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(1+\log(n+2))^2}$  이 수렴한다. □.

체점기준) • 부른점수 없음.

• 사소한 실수로 점수가 다르게 나온 경우 5점.

### 1(c) 모범 답안

주어진 급수를 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n}.$$

이 급수는 다음을 만족하므로,

$$1. \ (-1)^n \arcsin \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{n+1} < 0$$

$$2. \ \arcsin \frac{1}{n} \geq \arcsin \frac{1}{n+1}$$

$$3. \ \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{n} = 0,$$

교대 급수 정리에 따라 수렴함을 알 수 있다.

#### 별해 1.

$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 이므로, 평균값 정리에 의해  $\frac{\arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2n+\alpha})^2}}$  을 만족하는  $\alpha \in (0, 1)$ 이 존재한다. 이를 이용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}} = 1 \quad (1)$$

임을 알 수 있다.  $\sum \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) < \infty$ 이므로, 원 급수는 극한비교판정법에 의해 수렴. (식 (1)의 값이 1이 되는 것에 대한 논리적인 설명이 없거나 틀리면 5점. 채점기준 3번 항목 참조)

#### 별해 2.

$\arcsin x$ 가  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가함수이므로  $\arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1} \leq \arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+2}$ 이다. 그런데  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{2n+2} = 0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+2} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

으로 수렴한다. 따라서 원 급수도 비교판정법에 의해 수렴.

## 채점기준

1. 결론이 맞고, 방향성이 맞는 풀이이며 중간에 결정적인 오류가 없으면 기본적으로 5점을 부여한다.
2. 교대급수정리를 이용한 풀이의 경우 기본 골조가 맞으면 8점을 부여하고, 정리의 조건과 정리의 이름을 제대로 인용한 경우 10점을 부여한다.
3. 이외 풀이의 경우 틀리지는 않지만 풀이의 핵심 논리에 비약이 있거나 빠져 있는 경우 최대 5점을 부여하고, 판정법 사용 시 염밀하지 않은 등의 사소한 문제만 있는 경우 8점을 부여한다. 예를 들어, 별해 1의 경우 (1)을 보이지 않고 그냥 사용했다면 최대 5점을 받을 수 있다.
4. 결론이 틀릴 경우 (즉 급수가 발산한다고 주장한 경우), 중간 과정과 관계없이 0점.
5.  $\arcsin \frac{1}{2n}$  을  $\frac{1}{2n}$  과 비교하고  $\arcsin \frac{1}{2n+1}$  을  $\frac{1}{2n+1}$  과 비교하는 식으로 항별로 따로따로 논증한 경우는 중대한 비약이므로 0점 처리함.
6. 미분계수의 범위나 평균값 정리를 이용하지 않고, 단지  $x \in (0, 1)$ 에서  $x < \arcsin x < \frac{\pi}{2}x$ 라는 것만을 이용해

$$\arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

등으로 논증하려고 한 경우도 근본적으로 잘못된 논리이므로 0점.

2번

거짓인 명제이다.

$a_n = \frac{1}{n+1}$  이면 모든 자연수  $n$ 에 대해  $a_n > 0$

$$n+1 > 1 \text{ 이므로 } (n+1)^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \boxed{①} +10\text{점}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ 은 발산.} \quad \boxed{②} +5\text{점}$$

\* 주어진 명제가 성립하지 않는 다른 반례를 논리적으로 옳게 제시 했다면 만점.

\* 모든 자연수  $n$ 에 대해  $\sqrt[n]{a_n} < 1$ 이 성립하지 않는 경우 (ex.  $a_n = \frac{1}{n}$ )  
(유한한 값에 대해서는 상관없다는 언급이 있으면  
①에서 -2점. 강점 없음)

\*  $\sum a_n$ 이 발산하는 것만 보이면 ②에서 5점. (①은 부분정수 없음)

\* 참이라고 답했을 경우 0점.

\* ①에서 비약이 있을 경우 -2점.

\* 수명하는 예시를 들면 0점.

\* 예시가 발산함을 제대로 된 근거를 대서 증명하지 않으면 0점.  
(옳은 예시를 들었어도)

### 문제 3.

(Sol)  $F(x)$ 가  $|x| < r$ 에서 수렴하도록  $xF(x)$  또한  $|x| < r$ 에서 수렴하도록.

$$F(x) - xF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} = s_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n$$

따라서,  $f(x) = |x| < r$ 에서 수렴한다.

### 접수 분석

(5점)  $a_n = s_n - s_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ . 수렴성과 관계없이

(5점)  $f(x) = (1-x)F(x)$  을 보임.

단,  $\frac{1}{1-x}$ 을 이용하여 보임을 경우, 수렴반경  $r$ 이 (보다 큰 경우)

고려하지 않으므로 부적절.

하지만, 단순대수적으로 보였을 경우 접수를 부여했음.

(10점)  $f(x)$ 의 수렴성을 잘 보임.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(4점)

각 항마다 원금화기 원칙을  
풀이에서 이것을 이해하고  
잘 사용하고 있으면 4점 부여

①

거듭제곱근을 기본 정리에 의해 다음과 같이

$$x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(x-1) e^x + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2) \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+2}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+2}}{(n+2)!} + (e^x - 1 - x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+2}}{(n+2)!} = (x-2)e^x + x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{(n+2)!} = e^3 + 5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+2)!} = \frac{e^3 + 5}{9}$$

(17<sub>2B</sub>)

②

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\})$$

$$\left( \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right)' = \frac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)x^{n-3}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{(n+2)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)e^x + x+2}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+2)!} \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\})$$

$$\Rightarrow \frac{e^3 + 5}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+2)!} \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\})$$

(72점)

$$\begin{aligned}
 ③ \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)-2 \cdot 3^n}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)!} \\
 & = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+2)!} \\
 & = \frac{1}{3} \left( e^3 - 1 - \frac{3}{1!} \right) - \frac{2}{9} \left( e^3 - 1 - \frac{3}{1!} - \frac{3^2}{2!} \right) \\
 & = \frac{1}{9} e^3 + \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

(72점)

①, ② 와 같이  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  을 변형해서  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+2)!}$  에 관한식을 구하거나 ③처럼 풀이하는 경우 기본적으로 7점을 뿐여라.  
 $\sum$  일의 index를 실수하거나 (직분을 이용하여 구현다면) 적률상수값을 실수를 경우 2점수로 옮겨라. | 징수 쪽 강점

특히 ②와 같이 풀었을 때  $x=0$ 인 경우 급수의 수렴여부가 관찰 언급이 요구된다면 추가로 1점 쪽 강점

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+2)!} = \frac{e^3 + 5}{9}$$

(4점)

답을 최종적으로 바꾸기 구현다면 4점부여

#5

$$f'(x) = 2\cosh 2x + \frac{1}{1+x^2}$$

$f'(x) > 0$  이므로  $f(x)$ 는 역함수를 가진다  $\boxed{J+5}$

$$f(0)=0 \Rightarrow g(0)=0 \quad \boxed{J+3}$$

$$g'(y) = -\frac{1}{f'(x)} \quad \boxed{J+2}, \quad f'(x) = 2\cosh 2x + \frac{1}{1+x^2} \quad g'(0) = \frac{1}{3} \quad \boxed{J+2}$$

$$g''(y) = -\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^3} \quad \boxed{J+2}, \quad f''(x) = 4\sinh 2x + \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad g''(0) = 0 \quad \boxed{J+2}$$

$$g'''(y) = \frac{3(f''(x))^2 - f''(x)f'(x)}{\{f'(x)\}^5} \quad \boxed{J+3}, \quad f'''(x) = 8\cosh 2x + \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$g'''(0) = -\frac{2}{27} \quad \boxed{J+2}$$

$g(x)$ 의 3차 근사 다항식은  $\frac{1}{3}x - \frac{1}{81}x^3$ 이다  $\boxed{J+2}$ .

여기서 관계식을  $f(g(x))=x$  를 반복적으로 미분해서 나타내도 강점 X

역함수 가진을 보일때 그래프의 개형을 이용해도 강점 X

우연히 계산만 맞은 경우 0점 (특히  $g''(0)=0$ )

$f'$  을 잘못 구한경우 역함수 존재성 0점

$f'(x) \geq 0$  으로 전운 경우 0점

## 6번

**풀이 1**  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 로부터 거듭제곱급수의 기본정리에 의해,  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$ 을 얻는다.  $f(0.1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} (0.1)^{2n+1}$ 가 교대급수이므로 아래와 같은 부등식이 성립한다.

$$\left| f(0.1) - \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{10} \right)^3 \right) \right| \leq \frac{1}{5 \cdot 2!} \left( \frac{1}{10} \right)^5 = 10^{-6}$$

따라서,  $f(0.1)$ 의 근삿값은  $0.1 - (0.1)^3/3$ 이다.

- i)  $f(x)$  혹은  $f(0.1)$ 의 거듭제곱급수를 잘 구하면 5점.(적분할 때 거듭제곱급수의 기본정리를 언급하지 않으면 1점 감점.)
- ii) 올바른 부등식으로 오차를 잘 구하면 5점.(부등식이 교대급수의 성질에 의해서 구해진다는 언급이 없으면 2점 감점.)
- iii) 마지막으로  $f(0.1)$ 의 근삿값을 잘 구하면 5점. (단, 위의 i)과 ii)를 잘 구했으면 근삿값을 잘 구했다면 다소 계산 실수가 있어도 5점.)
- iv)  $e^{-x^2}$ 의 근사다항식을 구하고, 그 근사다항식을 적분해서  $f(0.1)$ 의 근삿값을 구한 경우, 적분을 했을 때도 오차가  $10^{-6}$ 이하로 유지된다는 언급이 없으면 5점 감점.

**풀이 2** 먼저, 다음을 계산하자.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(x) &= e^{-x^2}, \quad f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -2xe^{-x^2}, \quad f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= (-2 + 4x^2)e^{-x^2}, \quad f'''(0) = -2 \\ f^{(4)}(x) &= (12x - 8x^3)e^{-x^2}, \quad f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) &= (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2} \end{aligned}$$

테일러 정리에 의해,

$$M_{n+1} = \left\{ \max \left| f^{(n+1)}(t) \right| : t \in [0, x] \right\}$$

라고 두면,

$$|f(x) - T_n f(x)| < M_{n+1}(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

가 성립한다.

$[0, 0.1]$ 에서  $f^{(5)}(x)$ 는  $x = 0$ 일 때,  $f^{(5)}(0) = 12$ 를 최댓값으로 가지므로,

$$|f(0.1) - T_4 f(0.1)| \leq M_5(0.1) \frac{|0.1|^5}{5!} = 10^{-6}$$

따라서,  $f(0.1)$ 의 근삿값은

$$T_4 f(0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3}$$

이다.

- i)  $f(x)$ 를 5번 미분한 것까지 잘 구하면 5점.(하나라도 계산 실수하면 0점.)
- ii) 테일러 정리에 의해 오차를 잘 구하면 5점.(왜  $x = 0$ 일 때  $f^{(5)}(x)$ 가 최댓값을 갖는지에 대한 설명이 없으면 2점 감점.)
- iii) 마지막으로 근삿값을 잘 구하면 5점.(단, 위의 i)과 ii)를 잘 구했으면 근삿값을 잘 구했다면 다소 계산 실수가 있어도 5점.)

$$7. \quad r = \frac{4}{3+\sqrt{5}\cos\theta}, \quad r = \frac{\sqrt{5}}{\sin\theta - \cos\theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$\textcircled{1} \quad 3r = 4 - \sqrt{5}r\cos\theta$$

$$\Rightarrow 9r^2 = (4 - \sqrt{5}r\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow 9(x^2 + y^2) = 5x^2 - 8\sqrt{5}x + 16$$

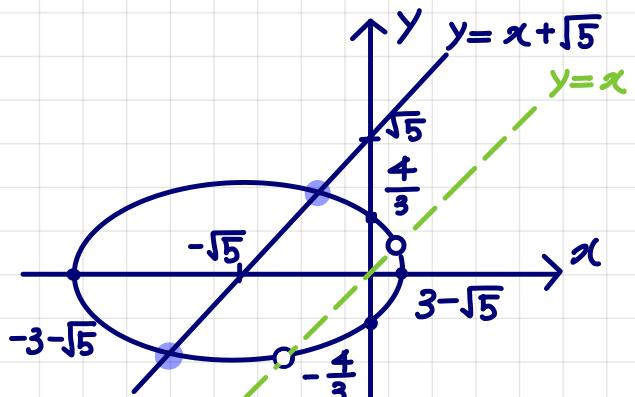
$$\Rightarrow 4(x + \sqrt{5})^2 + 9y^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{(x+\sqrt{5})^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad ; \text{타원}$$

$$\textcircled{2} \quad rsin\theta - rcos\theta = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow y = x + \sqrt{5}; \quad \text{직선}$$

\textcircled{3}



$$\textcircled{4} \quad \text{교점: } \left(\frac{6}{\sqrt{13}} - \sqrt{5}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right), \left(-\frac{6}{\sqrt{13}} - \sqrt{5}, -\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

\* 타원의 개형 + 4점, 직선의 개형 + 4점

- 개형의 좌표가 틀린 경우 각 -4점
- 타원과 직선을 함께 그린 경우 직선의 x절편이 타원의 안에 위치해 있다면  
직선개형 점수 없음.
- 그 외 개형에 대한 논리적 설명이 없는 경우 점수 없음

\* 표점 12점

- 표점을 구하는 과정에 논리의 비약이 없고 표점을 찾기 구한 경우 12점
- 타원의 식을 잘못 구한 경우 -4점
- 직선의 식을 잘못 구한 경우 -4점
- 표점을 잘못 구한 경우 -4점

\* 타원에서  $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$  조건을 고려하지 않아도 강점없음

문제 8 = (1) 5점 + (2) 5점 + (3) 5점

$$(1) x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$$

(\*)에 의하면

$$\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + (\rho \cos \varphi - 1)^2 \leq 1 \quad \boxed{2/5}$$

이를 정리하면,

$$\rho^2 \leq 2\rho \cos \varphi \quad \boxed{4/5}$$

이 때,  $\rho \geq 0$  이므로

$$\therefore \rho = 0 \text{ 또는 } 0 < \rho \leq 2\cos \varphi \quad (\text{즉 } 0 \leq \rho \leq 2\cos \varphi) \quad \boxed{5/5}$$

$$(2) z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

(\*)에 의하면

$$\rho \cos \varphi \geq \sqrt{3\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} \quad \boxed{2/5}$$

$z \geq 0$  이므로,  $\rho \cos \varphi \geq 0$ ,  $\rho \neq 0$  이면  $\cos \varphi \geq 0$ .

따라서  $\rho = 0$  또는  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . --- (\*\*\*)

위의 부등식을 정리하면

$$\rho^2 \cos^2 \varphi \geq 3\rho^2 \sin^2 \varphi$$

$$\rho^2 \geq 4\rho^2 \sin^2 \varphi$$

따라서  $\rho = 0$  또는  $-\frac{1}{2} \leq \sin \varphi \leq \frac{1}{2}$  --- (\*\*\*\*)

(\*\*\*)와 (\*\*\*\*)에 의하여

$$\therefore \rho = 0 \text{ 또는 } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \quad \boxed{5/5}$$

$$(3) yz \geq 0$$

1) 풀이 1

$$y \geq 0, z \geq 0 \text{ 또는 } y \leq 0, z \leq 0$$

$$\downarrow \sin \varphi \geq 0 \text{ 이므로} \quad \downarrow$$

$$\left( \begin{array}{l} \sin \theta \geq 0 \\ \cos \varphi \geq 0 \end{array} \right) \text{ 또는 } \left( \begin{array}{l} \sin \theta \leq 0 \\ \cos \varphi \geq 0 \end{array} \right) \text{ 또는 } \rho = 0$$

2) 풀이 2

(\*)에 의해

$$\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \geq 0 \quad \boxed{2/5}$$

$$\rho = 0 \text{ 또는 } \sin 2\varphi \sin \theta \geq 0$$

(+)(+) (+)(-)  
(-)(-) (-)(+)

$$\therefore \rho = 0 \text{ 또는 } \left[ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, \pi \leq \theta \leq 2\pi \right] \quad \boxed{5/5}$$

구면좌표계 ... (\*)

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$(\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

따라서, (1), (2), (3) 식을 모두 만족하는 경우의 구면좌표계 표현은  
 $\therefore \rho = 0$  또는  $0 < \rho \leq 2\cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \theta \leq \pi.$

### 문제 8번 채점 기준

(1), (2), (3) 각 5점 부여, 직교좌표계를 구면좌표계로 변환을 틀거나 한 경우  
각 항목 당 2점의 부분점수 부여.

(1), (2), (3) 각각에 대해서만 계산한 경우도 점수 인정.

(1), (2), (3)의 교집합에 해당되는 구면좌표계 표현을 틀거나 제시한 경우도  
점수 인정.

- $\rho = 0$  을 따로 쓰지 않고 (1)  $0 \leq \rho \leq 2\cos \varphi,$   
(2), (3)은  $\rho = 0$  을 누락해도 만점 부여.
- $\rho, \varphi, \theta$  모두 교재에 제시된 범위를 벗어나게 쓰면 각 2점만 부여.
- 부등호가 아닌 등호만 쓰면 2점 부여
- 풀이 없이 답만 쓴 경우 점수 없음
- 그림을 그려서 푼 경우 풀이와 답이 맞으면 점수 인정.
- (3)에서 (1), (2)의 범위를 사용하여  $0 \leq \theta \leq \pi$ 라고 적은 경우도 점수  
인정.