수학 및 연습 2 중간고사

(2013년 10월 19일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 좌표평면에서 정의된 함수 $f(x, y)$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 y)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (5점) $f(x, y)$ 가 원점에서 연속인지를 판정하시오.

(b) (5점) $D_1 f(0, 0)$ 와 $D_2 f(0, 0)$ 을 구하시오.

(c) (10점) 원점에서 $f(x, y)$ 의 미분가능성을 판정하시오.

문제 2 (20점). 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 미분가능한 함수 f 가 점 P 에서 $(1, 1, -1)$ 방향으로 가장 빨리 증가하고 그 때의 방향 변화율은 $2\sqrt{2}$ 이다. 점 P 에서 함수 f 의 $(1, 1, 0)$-방향미분계수를 구하시오.

(b) (10점) 타원면 $g(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ 과 그 위의 점 $P = (1, 1, 1)$ 이 있다. 이 타원면 바깥의 어떤 점에서 점 P 를 향하여 단위벡터 $\mathbf{v}$ 방향으로 발사된 빛이 타원면에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 $\mathbf{v}^*$ 라 하자. 벡터 $\mathbf{v}$ 와 벡터 $\mathbf{v}^*$ 가 서로 수직일 때,

$$D_{\mathbf{v}^*} g(P) - D_{\mathbf{v}} g(P)$$

의 값을 구하시오.

문제 3 (15점). 평면에서 정의된 이급 함수 $f(x, y)$ 와 정의역의 원소 P 에 대해

$$f''(P) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

이라고 한다. $\mathbf{v} = (a, b)$, $\mathbf{w} = (c, d)$ 일 때, $D_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{w}} f(P)$ 를 a, b, c, d 에 관한 식으로 나타내시오.

문제 4 (25점). 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 원점에서 함수 $f(x, y) = \cos x \sin y$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.

(b) (15점) (a)를 이용하여 $\cos 0.02 \sin 0.01$ 의 3차 근삿값을 구하고, 오차가 4×10^{-8} 이하임을 보이시오.

문제 5 (25점). 서로 다른 세 점 A, B, C 가 xy-평면에 주어져 있다. 삼각형 ABC 를 밑면으로 하고 xy-평면에 있지 않은 점 P 를 꼭지점으로 하는 삼각뿔 $P - ABC$ 에 대하여 P 가 이 삼각뿔의 부피가 일정하도록 움직인다. 이 때, 삼각뿔 $P - ABC$ 의 옆면의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 꼭지점이 존재한다. 그 점을 $\bar{P}$ 라고 할 때 $\bar{P}$ 의 xy-평면으로의 수선의 발 Q 가 밑면 삼각형 ABC 의 내심이 됨을 증명하시오.

힌트) 점 Q 에서 밑면 삼각형의 변까지의 길이를 각각 u_1, u_2, u_3 라 두고 $u_1 = u_2 = u_3$ 임을 보이면 된다.

문제 6 (15점). 함수 $f(x, y) = y \sin x + xy^2 - y^2$ 의 안장점 중, x 축 위에 있는 점들을 모두 구하시오.

문제 7 (20점).

$$u = x^3 - e^z \sin y,\ v = y^3 - e^z \cos x,\ w = z^3 - xy - 3y,$$
$$x = t^2 + r^2,\ y = \arctan s + tr,\ z = t + r + s.$$

일 때, $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(t, r, s)}(0, 0, 0)$ 의 값을 구하시오.

문제 8 (20점)**.** 극좌표계로 주어진 평면의 영역 D 는

$$D = \left\{(r, \theta) | \ 0 \le r \le \sin\theta, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

로 주어진다. 영역 D 의 경계를 반시계방향으로 매개화한 곡선을 $X(t)$ 라고 할 때,

$$\int_X ydx - xdy$$

의 값을 구하시오.

문제 9 (20점)**.** 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^z\cos(xy) + 2x, xe^z\cos(xy) - z\sin y, e^z\sin(xy) + \cos y)$$

의 곡선 $X(t) = (\cos t, \sin t, t), (0 \le t \le 2\pi)$ 를 따르는 일의 양을 구하시오.

문제 10 (20점)**.** 각원소 벡터장 $\mathbf{a} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ 를 다음 곡선을 따라 적분한 값 $\int_X \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. (그래프의 개형을 그리고 답만 쓰시오.)

(a) (10점) $X(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) (10점) $X(t) = (t\cos t, t\sin t) + (2\pi, 0)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$