2015년도 여름학기 수학 및 연습 2 기말고사 모범답안

#1.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \sqrt{1+y^4}\, dydx &= \int_0^1 \int_0^{y^3} \sqrt{1+y^4}\, dxdy \qquad (\because \text{푸비니 정리}) \\
&= \int_0^1 y^3 \sqrt{1+y^4}\, dy \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{2}\, dt \qquad (t := \sqrt{1+y^4}) \\
&= \frac{2\sqrt{2}-1}{6}
\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 y^2 \sin(y^3-1)\, dydx &= \int_0^1 \int_{x-1}^0 \frac{\sin\theta}{3}\, d\theta dx \qquad (\theta := y^3-1) \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1 (\cos(x-1)-1)\, dx \\
&= \frac{\sin 1 - 1}{3}
\end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \left(\sqrt{1+y^4} + y^2\sin(y^3-1)\right) dydx &= \frac{2\sqrt{2}-1}{6} + \frac{\sin 1 - 1}{3} \\
&= \frac{2\sqrt{2} + 2\sin 1 - 3}{6}
\end{aligned}$$

이다. □

- 푸비니 정리를 써서 적분 영역의 범위를 맞게 나타냈으면 +10점.
- $\sqrt{1+y^4}$ 의 적분 과정과 답이 모두 맞으면 +5점.
- $y^2\sin(y^3-1)$ 의 적분 과정과 답이 모두 맞으면 +5점.
- (부분 점수 없음.)

#2. $G'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$ 이므로, $\det G'(x,y) = -1-2x$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
\iint_{G(A)} f(u,v)\,dudv &= \iint_A f(G(x,y)) \cdot |\det G'(x,y)|\,dxdy \qquad (\text{치환적분법}) \\
&= \iint_A \frac{x+x^2}{\sqrt{1+4(x+x^2)}} \cdot |-1-2x|\,dxdy \\
&= \iint_A (x+x^2)\,dxdy \qquad (1+2x>0) \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x+x^2)\,dydx \qquad (\because \text{푸비니 정리}) \\
&= \int_0^2 (2-x)(x+x^2)\,dx \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

이다. □

- $\det G'$ 를 맞게 구했으면 +5점.
- 치환적분법의 식을 맞게 썼으면 +5점.
- 그 이후 계산이 모두 맞으면 +10점. (사소한 계산 실수 -5점.)

#3. 주어진 영역을 원기둥좌표계를 이용하여 나타내면 다음과 같다:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta, \quad 0 \leq z \leq \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

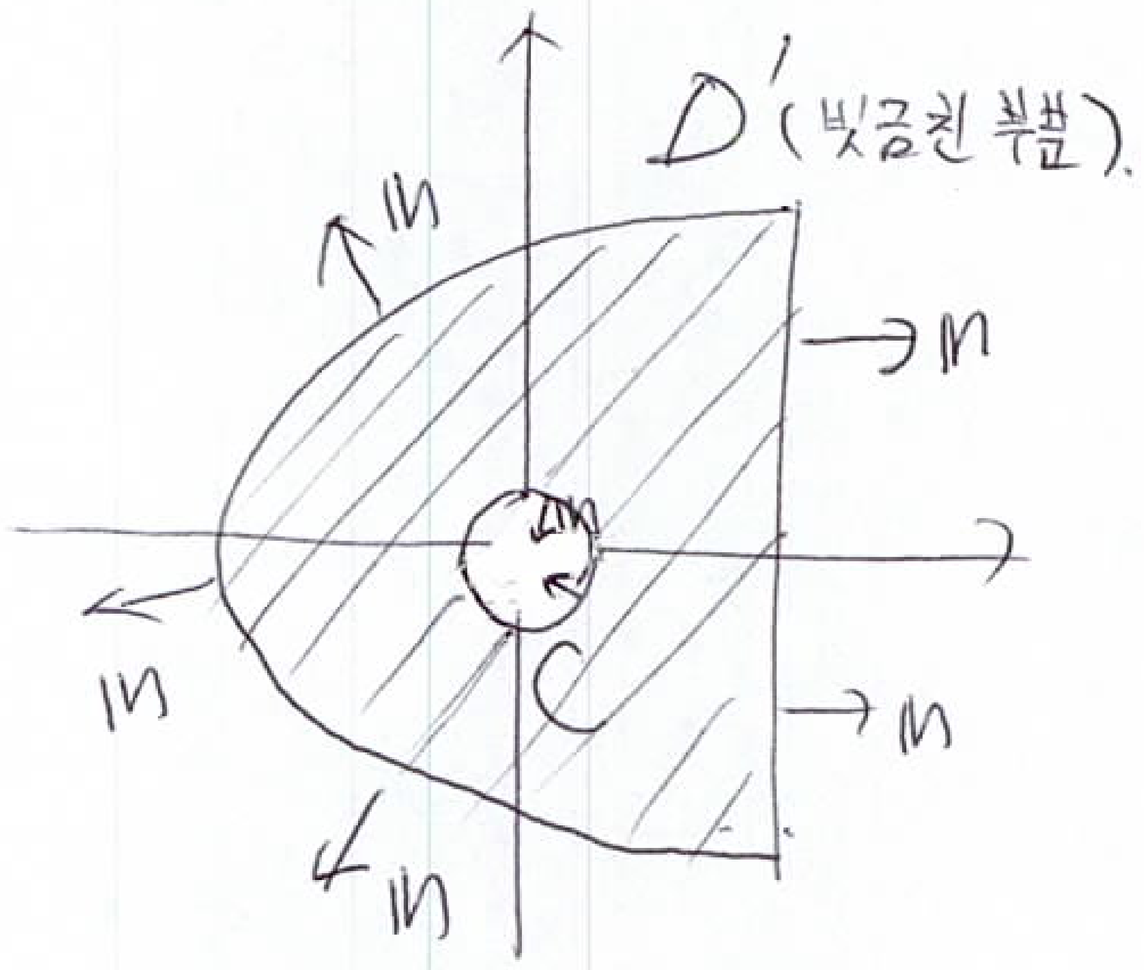
그러므로 영역의 부피는

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}} r\, dzdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}} r\, dzdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \frac{r^2}{\sqrt{3}}\, drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\theta}{3\sqrt{3}}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\theta}{3\sqrt{3}}\, d\theta \qquad (\because \text{적분 영역의 대칭성}) \\
&= \frac{16\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{16\sqrt{3}}{9} \int_0^1 (1-\alpha^2)\, d\alpha \qquad (\alpha := \sin\theta) \\
&= \frac{32\sqrt{3}}{27}
\end{aligned}$$

이다. □

- 적분 영역을 원기둥좌표계로 맞게 나타냈으면 +10점.
- 부피를 구하는 식을 맞게 나타냈으면 +5점.
- 그 이후 계산이 모두 맞았으면 +5점. (부분 점수 없음.)
- (원기둥좌표 변환을 쓰지 않은 경우 과정과 답이 모두 맞지 않으면 점수 없음.)

4. 원점을 중심으로 하는, 반지름의 길이가 r인. (단, r은 충분히 작은 양수) 원을 C라 하자. 이때. C의 향은 반시계 방향으로 준다. $\rfloor +5$. ⋯ ①



그림에서 빗금친 영역을 D'이라고 하면, D'의 경계는 $\partial D \cup C'$ 이고, $\mathbb{F}$는 D'에서 잘 정의된다. 또, $\mathrm{div}\,\mathbb{F} = 0$ 이다.

이제, 발산 정리에 의해,

여기서 n은 영역 D'을 벗어나는 방향.

$$0 = \iint_{D'} \mathrm{div}\,\mathbb{F}\, dV_2$$

$$= \int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot n\, ds + \int_C \mathbb{F}\cdot n\, ds \quad (\text{발산 정리}) \quad \cdots ②$$

$\rfloor +10$.

따라서 구하는 flux는,

$$\int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot n\, ds = -\int_C \mathbb{F}\cdot n\, ds$$

$$= -\int_C \frac{(x-y,\, x+y)}{r}\cdot\left(-\frac{(x,y)}{r}\right) ds$$

$$= \int_C \frac{1}{r}\, ds = 2\pi$$

$\rfloor +5$ ⋯ ③

* $\mathbb{F} = \dfrac{(x,y)}{x^2+y^2} + \dfrac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ 와 같이 나눈 후 가우스 정리를 이용하면,

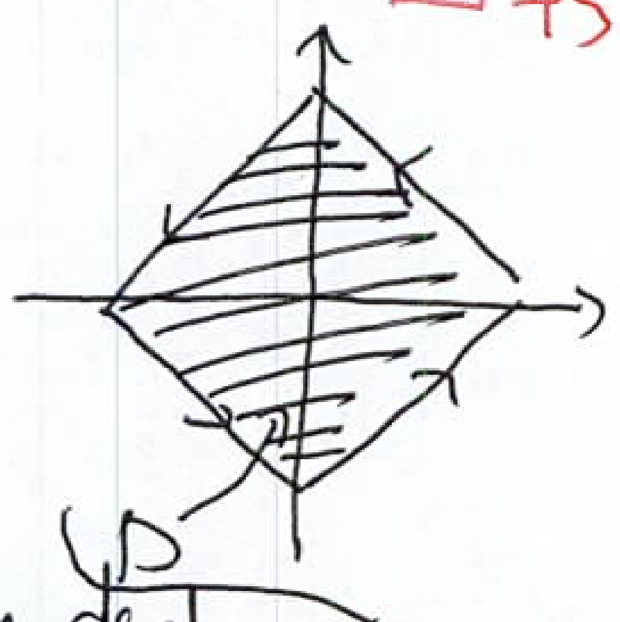
① ⟶ 5점, ② ⟶ 가우스 정리 5점, 발산 정리 계산 5점.

③ ⟶ 5점.

으로 배점함.

5. (a) $\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ +5 $= 2xe^{-y^2} - \arctan y$ +5.

(b) $\int_C \mathbb{F}\cdot ds = \iint_D \mathrm{rot}\,\mathbb{F}\, dV_2$ (그린 정리) D: C로 둘러싸인 영역 +5



$= \iint_{|x|+|y|\le 1} (2x e^{-y^2} - \arctan y)\, dxdy$

$= \int_{-1}^{1}\int_{|y|-1}^{-|y|+1} \underbrace{2x e^{-y^2}}_{\text{기함수}} dxdy - \int_{-1}^{1}\int_{|x|-1}^{-|x|+1} \underbrace{\arctan y}_{\text{기함수}}\, dydx$

x에 대하여

$= \int_{-1}^{1} 0\, dy + \int_{-1}^{1} 0\, dx$

$= 0.$ +5.

* (a)가 틀리면 (b)는 최대 5점.

#6.

$\text{area}(S) := \iint_S 1\, dS$, (곡면을 x, y로 매개화 했다고 가정하자.)

$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy$ // +5점

$\therefore \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \cdot \text{area}(D) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$

// +5점

f를 S위에서 면적분 하면, $\iint_S f\, dS = \iint_D f \cdot \sqrt{2}\, dx\, dy$

$= \int_0^{\pi}\int_0^{x} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{2}\, dy\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2\sqrt{2}$ // +5점

$\therefore$ 답은 $\dfrac{\iint_S f\, dS}{\iint_S 1\, dS} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2} = \dfrac{4}{\pi^2}$ // +5점

- 채점 기준 : - 면적소, 넓이, 함수의 면적분, 평균 각 5점씩

  - 면적소를 잘못 구해도, 넓이, 함수의 면적분을 잘못 구한 값으로 실수없이 계산했다면 5점.

  - 평균값은 정의를 알고 있다고 여겨졌을시 5 점.

  - 평균값 계산시, D에 관한 영역으로 언급했을 시 점수 없음.

#7.

$(x, y, z) = (4\cos\varphi,\ 4\sin\varphi\cos\theta,\ 4\sin\varphi\sin\theta)$ 라 하자. 5점

$dS = 16\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$ (치환적분법) $(0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta < 2\pi)$

$$\therefore (\text{준식}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{16\sin\varphi}{\sqrt{20-16\cos\varphi}}\, d\varphi\, d\theta$$ 5점

$$= \int_0^{2\pi}\int_4^{36} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt\, d\theta \quad \left(\because 20-16\cos\varphi = t,\ 16\sin\varphi\, d\varphi = dt\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\sqrt{t}\right]_4^{36} d\theta = 2\pi(2\cdot 6 - 2\cdot 2) = 16\pi$$ 10점

- 일반적인 구면좌표계와 회전변환으로 (0,0,2)로 옮겨 풀은 경우 논리 오류 없다면 정답 처리
- 반지름을 2로 생각한 치환시 구면좌표계 치환$((r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta))$에 해당하는 5점만 부여. (20점 중)
- 입체각 벡터장을 이용한 풀이에서, $\iint_{S(4)} A_p(x)\cdot p\, dS = 0$ 을 설명하지 않은 경우 10점 감점. (20점에서)

8. <u>방법 1</u>

$$\text{grad}\,(\text{div}\,\mathbb{F}) = \text{grad}\,(3x^2+3y^2+3z^2) = (6x, 6y, 6z) \quad +5$$

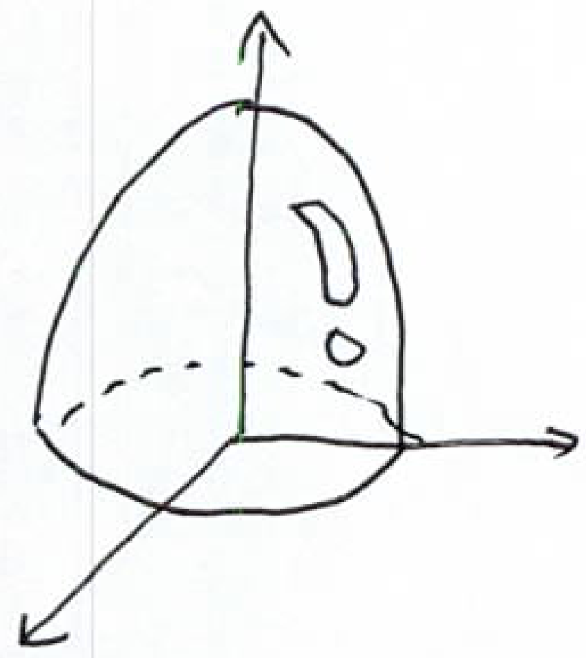
이므로,

$$\iint_{\partial R} \text{grad}\,(\text{div}\,\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S} = \iint_{\partial R} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \iiint_R 18\, dV_3 \qquad (\text{발산 정리}) \quad +10 \quad \cdots (*)$$

$$= 18 \iint_{x^2+y^2\le 4} \int_0^{4-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$

$$= 18 \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$



$$= 144\pi. \quad +5$$

* $\text{div}\,(6x, 6y, 6z) = 18$ 에서 계산을 실수할 경우,
$(*)$ 에서 5점만을 인정한 후, 이후 계산은 점수를 부여하지 않음.

<u>방법 2</u> $\text{grad}\,(\text{div}\,\mathbb{F}) = (6x, 6y, 6z)$ $+5$ 이므로,

S_1 : $z = 4-x^2-y^2$, $0\le z\le 4$.
S_2 : $x^2+y^2\le 4$, $z=0$
S_1, S_2의 합은 R을 덮어내도록.

$$\iint_{\partial R} \text{grad}\,(\text{div}\,\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S} = \iint_{\partial R} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \iint_{S_1} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S} + \iint_{S_2} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (6x, 6y, 6(4-x^2-y^2))\cdot(2x, 2y, 1)\, dx\,dy + \iint_{x^2+y^2\le 4} (6x, 6y, 0)\cdot(0,0,-1)\, dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (24+6x^2+6y^2)\, dx\,dy \quad +5 \quad = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (24+6r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 144\pi. \quad +10$$

9. (a) $\operatorname{curl} \mathbb{F} = (D_2 f_3 - D_3 f_2,\ D_3 f_1 - D_1 f_3,\ D_1 f_2 - D_2 f_1)$ +5

($\mathbb{F} = (f_1, f_2, f_3)$일 때)

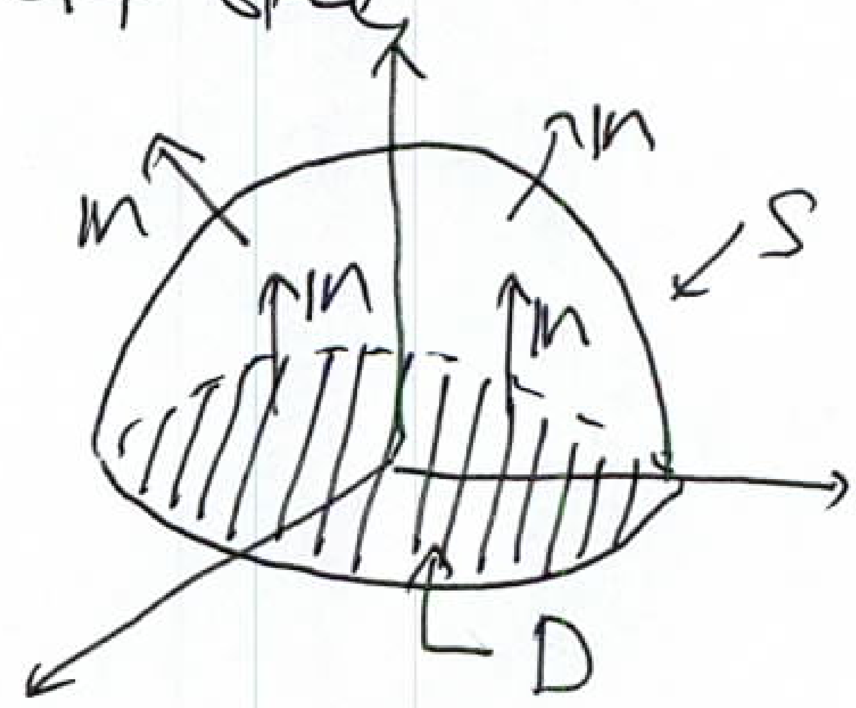
$$= (e^{x+y+z} - x\sin xy - \cos(y+z),$$
$$e^{x+z} - e^{x+y+z} + y\sin xy,$$
$$-3x^2 - 3y^2)$$ +5

(b) (방법 1)

곡면 D: $x^2+y^2 \le 4$, $z=0$ 이라 하고, $\mathbb{n} = (0,0,1)$ 이라 하면

$\partial D = \partial S$ 이고 두 곡선 $\partial D, \partial S$의 향이 일치하므로

스토크스 정리에 의해



$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iint_D \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$ +5

$$= \iint_D \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot \underbrace{\mathbb{n}}_{=(0,0,1)}\, dS$$

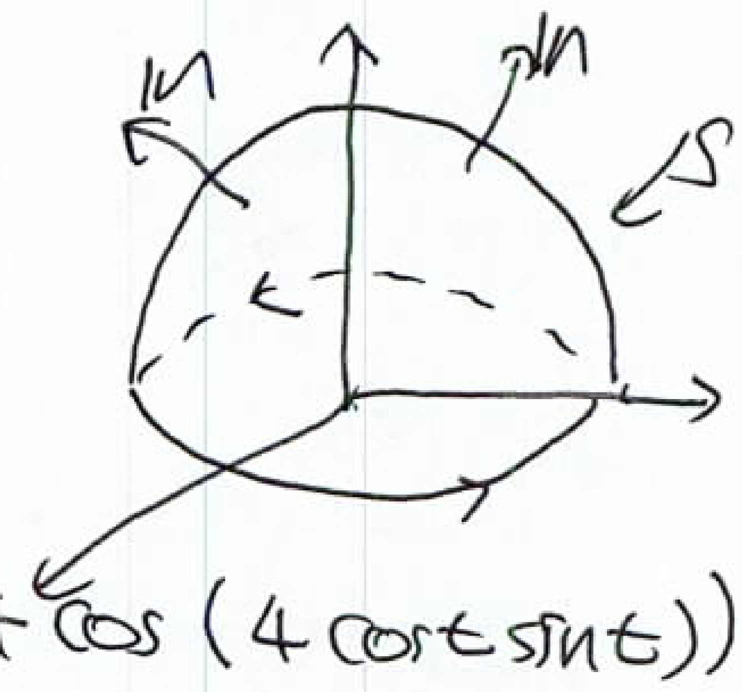
$$= \iint_D (-3x^2 - 3y^2)\, dS$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = -24\pi.$$ +5

* D의 향이 틀리면 2점 감점

(방법 2) ∂S: $x^2+y^2=4$, $z=0$ 의 향은 $(0,0,1)$ 에서 바라볼 때 반시계 방향이므로, ∂S를 매개화하면 $(2\cos t, 2\sin t, 0)$ $0 \le t < 2\pi$.

이제 스토크스 정리에 의해



$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\partial S} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{s}$$ +5

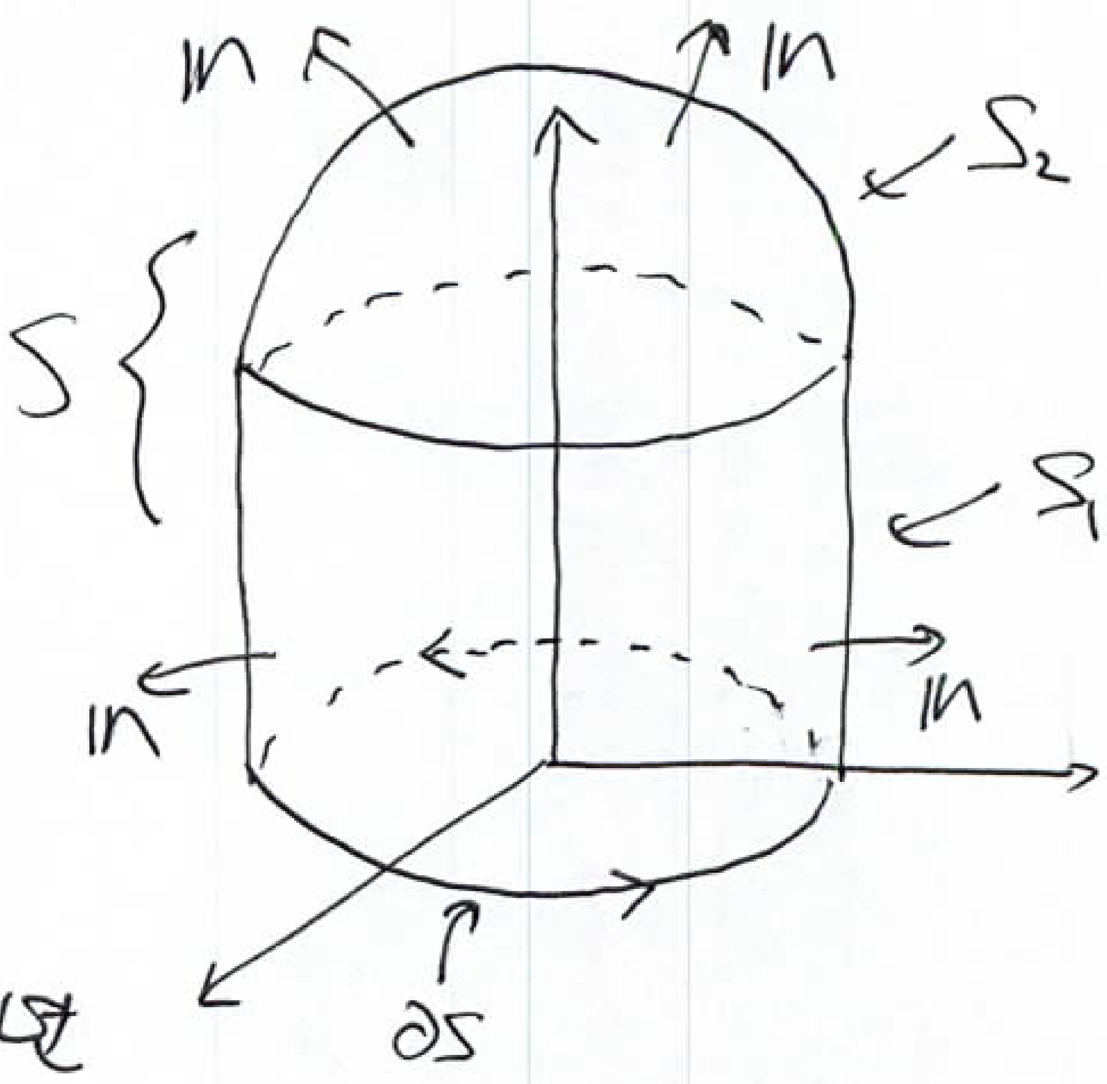
$$= \int_0^{2\pi} (8\sin^3 t + e^{2\cos t},\ \sin(2\sin t) - 8\cos^3 t,\ e^{2\cos t + 2\sin t} + \cos(4\cos t\sin t))$$
$$\cdot (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\, dt$$

$= \cdots$ 열심히 계산 $\cdots = -24\pi.$ +5.

* ∂S의 향이 틀리면 2점 감점

* (a)가 틀리면 (b) 최대 5점.

10. 방법 1.



곡면 S를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

이때 곡선 ∂S : $x^2+y^2=4$, $z=0$

이고, 그 향은 $(0,0,1)$에서 바라보았을 때

반시계 방향이다. 따라서 ∂S를 매개화하면

$(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)$ $\quad 0 \le t < 2\pi$

이다. +5 그러면

$$\iint_S \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{(스토크스 정리)}$$ +5

$$= \int_0^{2\pi} (0,\ 2\sin t,\ 0)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sin t\cos t\, dt = 0.$$ +10

* ∂S의 향이 틀리면 5점 감점.

방법 2. 곡면 D : $x^2+y^2 \le 4$, $z=0$ 이라 하면, D의 향은 $\mathbf{n}=(0,0,1)$

이라 할 때, +5 ∂S와 ∂D가 일치하고 그 향이 같으므로, 스토크스 정리에

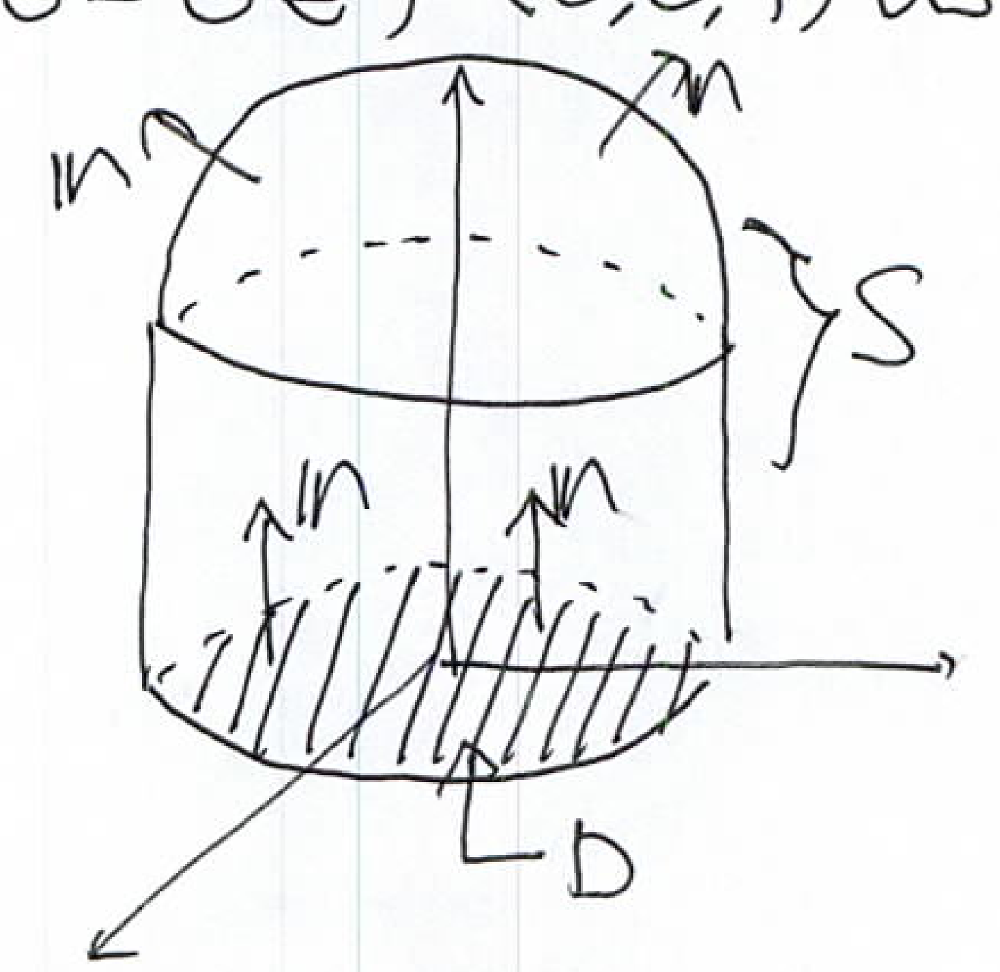
의하여 $\iint_S \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 이다. +5 이때

$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} = (\ ,\ ,\ y\sin z - ze^y)$ 이므로,

$$\iint_D \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_D (\ ,\ ,\ y\sin 0 - 0e^y)\cdot(0,0,1)\, dS$$

$$= \iint_D 0\, dS = 0.$$ +10



* D의 향이 틀리면 5점 감점.