[2013년 2학기 수학 및 연습 2 중간고사 모범답안]

#1 (1) $\left| \frac{\sin(x^2y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} \right|$

$\underset{\substack{\text{산술기하} \\ x^2y \leq \frac{1}{2}(x^4+y^2)}}{\leq} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$

$\therefore f(x,y)$ 는 원점에서 연속

※ $\left| \frac{\sin(x^2y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} \right| \leq \left| \frac{\sin(x^2y)\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2y} \right|$ 과 같이

분모가 0 인 경우를 고려하지 않으면 3점 감점

※ 특정한 경우에 대해서만 0으로 수렴함을 보이면 0점

(2) $D_1f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$

$D_2f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$

※ 정의만 쓰면 2점.

(3) $\displaystyle\lim_{|V|\to 0} \frac{|f(V) - f(0) - \mathrm{grad} f(0,0)\cdot V|}{|V|}$ ┘ 3점

$\displaystyle = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \left| \frac{\dfrac{\sin(a^2b)\sqrt{a^2+b^2}}{a^4+b^2}}{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{1}} \right|$

$\displaystyle = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{|\sin(a^2b)|}{a^4+b^2}$

$b=a^2$의 경로를 따라 이동하면, 극한값은 ┘ 5점

$\displaystyle \lim_{a\to 0} \frac{|\sin a^4|}{2a^4} = \frac{1}{2}$

이므로 미분가능하지 않다. ┘ 10점

※ 정의만 쓰면 3점.

#2-(a)

f가 미분가능하므로 $D_v f(p) = \text{grad} f(p) \cdot v$ 가 성립하고

따라서. 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향 v는 $\text{grad} f(p)$

와 나란한 방향이다. 따라서, $\text{grad} f(p) = \lambda(1,1,-1)$ $(\lambda > 0)$

이라고 두면, // +3

① $\underbrace{2\sqrt{2} = D_{(1,1,-1)} f(p)}_{(*)} = \lambda(1,1,-1)\cdot(1,1,-1) = 3\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ // +3

② 따라서 구하려는 값 $\underbrace{D_{(1,1,0)} f(p)}_{(**)} = \text{grad} f(p) \cdot (1,1,0)$

$= 2\lambda = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ // +4

(채점기준) • $(*)$를 $D_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)} f(p)$로 생각하고 푼경우

①, ② 각각 1점씩 부여

• $(**)$를 $D_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)} f(p)$로 생각하고 푼 경우 ②에 해당하는

점수 없음.

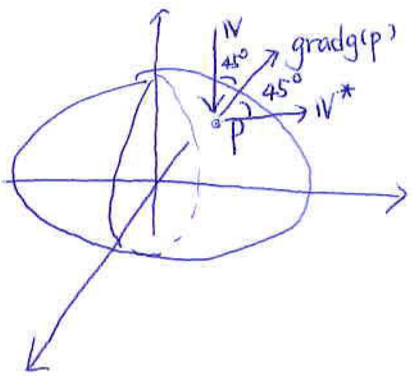
• $\lambda = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$로 구한 경우 ①, ②에 해당하는 점수 없음.

• $D_{(1,1,0)} f(p) = |\text{grad} f(p)| \cdot |(1,1,0)| \cos\theta$를 활용하여 푼 경우

계산이 정확해야 ①, ②에 해당하는 점수를 받을수 있음.

• 계산 실수에 대한 부분점수 없음

2(b)



풀이 1. $\mathbb{v}^* = \mathbb{v} - 2\dfrac{\mathbb{n}\cdot\mathbb{v}}{\mathbb{n}\cdot\mathbb{n}}\mathbb{n}$ $\left(\mathbb{n} = \mathrm{grad}\, g(p)\right)$

$$D_{\mathbb{v}^*} g(p) - D_{\mathbb{v}} g(p) = \mathrm{grad}\, g(p)\cdot\left(-2\frac{\mathbb{n}\cdot\mathbb{v}}{\mathbb{n}\cdot\mathbb{n}}\mathbb{n}\right)$$ 5점

$$= -2\,\mathbb{n}\cdot\mathbb{v}$$

$(*)$ $$= -2\,\|\mathbb{n}\|\cdot\|\mathbb{v}\|\cdot\cos\frac{3}{4}\pi$$

$$= -2\cdot\sqrt{56}\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{7}$$ 10점

$(*)$ $\mathbb{v}^*\cdot\mathbb{v} = 0$ 이므로

$$0 = \mathbb{v}^*\cdot\mathbb{v} = \|\mathbb{v}\|^2 - 2\frac{(\mathbb{n}\cdot\mathbb{v})^2}{\mathbb{n}\cdot\mathbb{n}}$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{(\mathbb{n}\cdot\mathbb{v})^2}{56} \Rightarrow \mathbb{n}\cdot\mathbb{v} = -2\sqrt{7}$$

($\because$ $\mathbb{n}$과 $\mathbb{v}$는 둔각을 이루므로).

풀이 2. $\mathbb{v}^* - \mathbb{v} \,/\!/\, \mathrm{grad}\, g(p)$ 이고 (grad g(p)와 같은 방향)

$\mathbb{v} \perp \mathbb{v}^*$ 이므로 $\mathbb{v}^* - \mathbb{v}$는 크기가 $\sqrt{2}$ 인 벡터

따라서 $$D_{\mathbb{v}^*} g(p) - D_{\mathbb{v}} g(p) = \mathrm{grad}\, g(p)\cdot(\mathbb{v}^* - \mathbb{v})$$ 5점

$$= \mathrm{grad}\, g(p)\cdot\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{grad}\, g(p)}{\|\mathrm{grad}\, g(p)\|}$$

$$= \sqrt{2}\,\|\mathrm{grad}\, g(p)\| = 4\sqrt{7}$$ 10점

* 답을 벡터로 적으면 0점

#3. 점 P 에서

$f''(p) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로, $D_1^2 f(p) = 3$, $D_1 D_2 f(p) = D_2 D_1 f(p) = -2$,

$D_2^2 f(p) = 1$ 이다.

5점 (*)

따라서, $v = (a, b)$, $w = (c, d)$ 일때,

$$D_v D_w f(p) = ((aD_1 + bD_2)(cD_1 + dD_2) f)(p)$$

$$= ac D_1^2 f(p) + bc D_2 D_1 f(p) + ad D_1 D_2 f(p) + bd D_2^2 f(p)$$

$$= 3ac - 2(bc + ad) + bd.$$

15점

※ ① $D_v D_w f(p) = (aD_1 f(p) + b D_2 f(p)) \cdot (cD_1 f(p) + d D_2 f(p))$ 는 틀린 풀이

② 특수한 f에 대해서 문제를 푼 경우,

예) $\text{grad} f = (3x - 2y + C, -2x + y + C)$ 등 ∴ 틀린 풀이

③ $D_v D_w f(p) = (a \ \ b) \, f''(p) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 로 쓰지 않고

틀린 행렬 표현으로 쓴경우, 부분점수 없음.

※ ①, ② 번의 경우, (*) 이 맞은 경우, 부분점수 5점

채점 기준

#4 (a) (1) $T_3 f(x,y) = f(p) + D_v f(p) + \frac{1}{2} D_v^2 f(p) + \frac{1}{3!} D_v^3 f(p)$

(where $P=(0,0)$, $v=(x,y)$) 의 정의를 이용하는 경우

- $T_3 f$의 정의를 알고 있는 경우 (+5점)
- 답까지 맞은 경우 (+5점)

(2) 테일러 전개의 유일성을 이용하는 경우

- 답이 틀린 경우 0점.
- 답이 맞더라도.

$T_3 f(x,y) = y - \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3 + o(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3})$ 임을 명확히 밝히지 않거나, 테일러 전개의 유일성에 대해 언급하지 않으면 5점 감점

모범답안 : $f(x,y) =$ 테일러 전개의 유일성에 의해,

$\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)\right)$

$= y - \frac{y^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 y + o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$

(b) 3차 근사값 $10^{-2} - 2\times10^{-6} - \frac{1}{6}\times10^{-6}$ 을 맞게 구한 경우 (+5점)

3차 잉여항 $|f(x,y) - T_3 f(x,y)| \le \frac{M_4}{4!}(|x|+|y|)^4 \quad \cdots (*)$

where $M_4 := \mathrm{Max}\{|D_{i_0}\cdots D_{i_3} f(P+tv)| \;\big|\; 1 \le i_0, i_1, i_2, i_3 \le 2,\ 0 \le t \le 1\}$ 의 정의를 바르게 쓴 경우 (+5점) 조금이라도 틀리면 5점 감점.

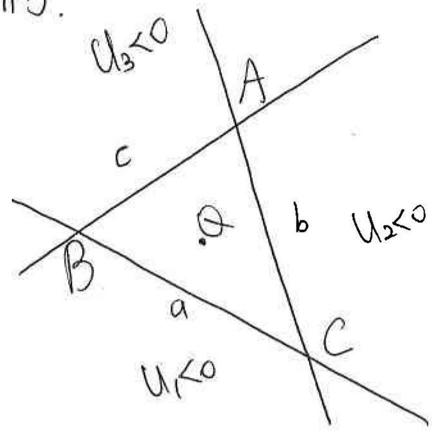
오차가 $\frac{M_4}{4!}(0.02+0.01)^4 \le \frac{1}{4!}\times 81\times10^{-8} < 4\times10^{-8}$

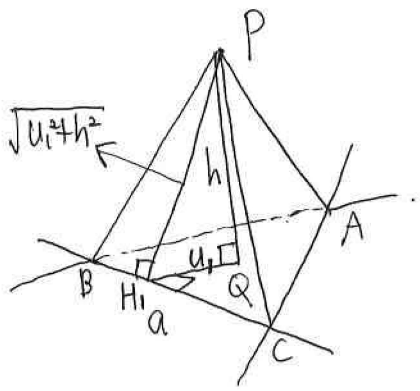
임을 맞게 보이되 $M_4 \le 1$ ($\because |D_{i_0 i_1 i_2 i_3} f(x,y)| = |\sin x \cos y|$ 꼴 / $|\sin x \sin y|$ / $|\cos x \sin y|$ / $|\cos x \cos y|$) 인 이유를 명확히 밝혔으면 (+5점)

$M_4 \le 1$ 인 이유가 없으면 5점 감점.

(*) 공식이 틀려 틀린 오차 범위를 구한 경우 역시 5점 감점.

#5.





$\overline{PQ}=h$ 라 할 때, P-ABC의 부피가 일정하므로, 높이인 h는 일정하다.

u_1, u_2, u_3를 Q에서 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 까지 이르는 거리로 설정하되, 음수인 값까지 갖도록 정의하자.

(★ 예를들어 u_1의 경우 $\overleftrightarrow{BC}$ 에 대하여 (Q가 A와 같은 쪽에 있으면 $u_1>0$ / Q가 A와 반대쪽에 있으면 $u_1<0$ / Q가 $\overleftrightarrow{BC}$ 위에 존재하면 $u_1=0$) 으로 설정.)

$$f(u_1,u_2,u_3) = a\cdot\sqrt{u_1^2+h^2} + b\sqrt{u_2^2+h^2} + c\sqrt{u_3^2+h^2}$$

$$g(u_1,u_2,u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3$$

라 하면,

$f(u_1,u_2,u_3) = (\text{옆면의 넓이의 합})\times 2$, $g(u_1,u_2,u_3) = (\triangle ABC\text{의 넓이})\times 2$ (∵★) $= \text{Const.}$

따라서, $\left(\begin{array}{l} (u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3 \\ g(u_1,u_2,u_3)=\text{const} \end{array} \right)$ 에 대하여 $f(u_1,u_2,u_3)$ 의 극점을 구하면 된다.

① +10

$$\text{grad}\, g(u_1,u_2,u_3) = (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

$$\text{grad}\, f(u_1,u_2,u_3) = \left(\frac{au_1}{\sqrt{u_1^2+h^2}}, \frac{bu_2}{\sqrt{u_2^2+h^2}}, \frac{cu_3}{\sqrt{u_3^2+h^2}} \right)$$

$$\text{grad}\, f(u_1,u_2,u_3) = \lambda\, \text{grad}\, g(u_1,u_2,u_3) \iff \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+h^2}} = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2+h^2}} = \frac{u_3}{\sqrt{u_3^2+h^2}} = \lambda.$$

② +10

∴ u_1, u_2, u_3 의 부호가 같아야하고, ★에의해 $u_1, u_2, u_3 \leq 0$ 인 경우는 없으므로 $u_1, u_2, u_3 > 0$.

한편, $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{h}{x})^2}}$ 은 $x>0$ 에서 증가함수 이므로 $u_1=u_2=u_3$. ∴ Q는 내심

③ +5

※ 채점기준

- ① 에서 - ㊍ 과 같은 설명등으로 경계조건을 정확히 설명했을 경우에만 +10점.
  - 경계조건을 그냥 $au_1+bu_2+cu_3 = const$, $u_1, u_2, u_3 \geq 0$ 등으로 서술한 경우에는 +5점.
  - 최소값을 구해야하는 함수나 경계조건이 틀린경우 +0점 (이후점수 없음)
- ② 에서 grad 계산이 정확한 경우 +10점.
  계산 실수등 사소한 문제 있을경우 +5점 (이후점수 없음)
- ③ 에서 특별한 계산 없이 $\mathrm{grad} f = \lambda \, \mathrm{grad}\, g$ 의 식에서 바로 $u_1 = u_2 = u_3$ 를 얻은 경우 0점.
- 라그랑지 승수법 이외의 방법을 사용하여 풀이한 경우 정확히 맞아야 +25점.
  (산술기하, 코시슈바르츠 등의 부등식을 사용한 경우 등등...) (부분점수 없음).

문제 6.

$$f(x, y) = y\sin x + xy^2 - y^2$$

$$\mathrm{grad} f(x, y) = (y\cos x + y^2,\ \sin x + 2xy - 2y)$$

x축 위에 있는 임계점은 $(n\pi, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}$ (정수)) 5점

안장점임을 확인하기 위해 헤세 행렬을 구해 보면

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -y\sin x & \cos x + 2y \\ \cos x + 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}$$

$$f''(n\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ (-1)^n & 2n\pi - 2 \end{pmatrix}$$

$$\det f''(n\pi, 0) = -1 < 0$$

헤세 판정법에 의해 안장점은 $(n\pi, 0)$ (n은 정수) 15점

* 임계점을 잘못 구했더라도 헤세 판정법을 알고 있다고 판단되는 경우 5점

* 임계점을 구하는 과정은 정확히 했으나 헤세 판정을 하는 과정에서 사소한 계산 실수를 한 경우 −5점.

* 답을 $(0, n\pi)$로 적은 경우 −5점.

#17.

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(t,r,s)} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,r,s)}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^2 & -e^z\cos y & -e^z\sin y \\ e^z\sin x & 3y^2 & -e^z\cos x \\ -y & -x-3 & 3z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & 2r & 0 \\ r & t & \frac{1}{1+s^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

if $(t,r,s) = (0,0,0) \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(t,r,s)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad -①$$

15점

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

20점

* 채점기준

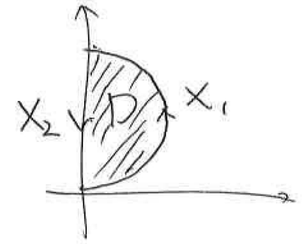
· det 언급시에는 5점 감점

· ① 식에서 2개 component 까지는 틀려도 계산실수로 간주해서 5점 감점

· $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$ 처럼 direct로 계산했을 시에는 최종답안이 맞아야 답안 인정 (2개 component 만 다를 경우에는 5점 감점)

· 정의를 잘못 알고있는 경우 0점 (ex. transpose)

8.



영역 D에 대한 그림은 왼쪽과 같다. 영역 D의 경계는 X라 하자. 이때, 원의 일부에 해당하는 곡선을 X_1이라 하고, y축 위에 있는 선분을 X_2라 하자.

① X_1 위에서의 선적분.

극좌표 변환을 이용하여 $X_1: \alpha(t) = (\cos t \sin t,\ \sin^2 t) = \left(\frac{\sin 2t}{2}, \frac{1-\cos 2t}{2}\right)$.

($\because$ $r(t) = \sin t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ 이므로 $\alpha(t) = (r(t)\cos t,\ r(t)\sin t) = (\cos t \sin t,\ \sin^2 t)$). (5점)

이때, $\alpha'(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t,\ 2\sin t\cos t) = (\cos 2t, \sin 2t)$.

$$\int_{X_1} y\,dx - x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2t}{2},\ -\frac{\sin 2t}{2}\right) \circ (\cos 2t, \sin 2t)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos^2 2t - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right) dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\right) dt = \left[\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{\pi}{4}. \quad (5점)$$

※ D를 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 인 원의 내부의 일부로 보고,

$X: \beta_1(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t\right)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ 로 잡거나,

$\beta_2(t) = \left(\frac{1}{2}\sin t,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t\right)$ $(0 \le t \le \pi)$ 로 잡아도 점수 인정.

② X_2 위에서의 선적분.

X_2는 $(0,1)$에서 $(0,0)$까지의 선분이므로

$X_2: \gamma(t) = (1-t)(0,1) + t(0,0) = (0, 1-t)$ $(0 \le t \le 1)$. (5점)

이때, $\gamma'(t) = (0,-1)$

$$\int_{X_2} y\,dx - x\,dy = \int_0^1 (1-t, 0) \circ (0,-1)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0. \quad (5점)$$

※ 선분의 방향이 틀리거나 t의 범위를 잘못 잡으면 −5.

①과 ②에 의해,
$$\int_X y\,dx - x\,dy = \int_{X_1} y\,dx - x\,dy + \int_{X_2} y\,dx - x\,dy$$
$$= -\frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{4}.$$

9. $\varphi(x, y, z) = e^z \sin(xy) + x^2 + z\cos y + C$ 라 하자. (C는 상수) ⌋ 10점

그러면 $\operatorname{grad}\varphi = \vec{F}$ 가 된다.

(즉, φ는 $\vec{F}$의 잠재함수)

선적분의 기본정리에 의하여

일의 양 : $\int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \varphi(X(2\pi)) - \varphi(X(0))$ ⌋ 5점

$= \varphi(1, 0, 2\pi) - \varphi(1, 0, 0)$

$= 2\pi$ ⌋ 5점.

* · 잠재함수를 잘못 구한경우 선적분의 기본정리를 써서 답이 맞아도 5점.

$\boxed{\text{별해}}$

$$\int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_X F(X(t)) \cdot X'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ e^t \cos\left(\tfrac{1}{2}\sin 2t\right) \cdot \cos 2t + e^t \sin\left(\tfrac{1}{2}\sin 2t\right) - \sin 2t - t\cos t \sin(\sin t) + \cos(\sin t) \right\} dt$$

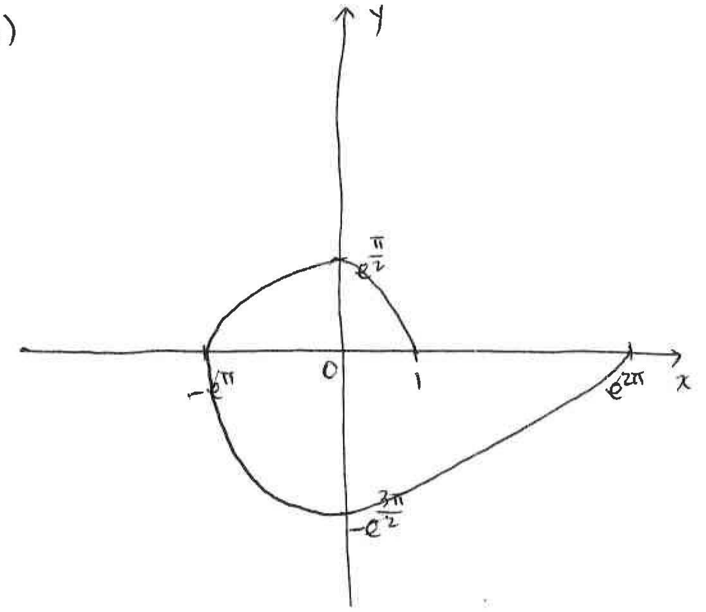
$$= \left[e^t \sin\left(\tfrac{1}{2}\sin 2t\right) + \tfrac{1}{2}\cos 2t + t\cos(\sin t) \right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= 2\pi$$

* 별해로 푼 경우 계산을 마치지 못하면 5점.

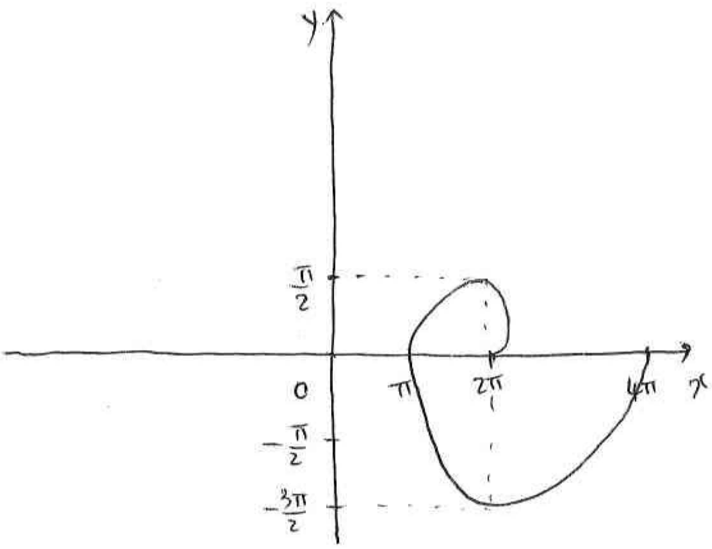
10.

(a)



답: 2π

(b)



답: 0.

채점기준:

1. 그래프 각 5점,

2. 답 각 5점.

단, 답이 맞았으나 그래프가 틀릴 경우에는 0점.

그래프가 틀린 경우:

(1) 절편을 잘못 표기한 경우.

(2) 시점과 종점을 잘못 표기한 경우.

(3) 개형을 "심각하게" 잘못 그린 경우.

ex)