2015년 계절학기 수학및연습 I 기말 모범답안

#1

$$a(1,0,1,2)+b(0,-1,-1,2)+c(1,1,1,3)=(0,0,0,0) \quad (a,b,c\in\mathbb{R})$$

이라 두면, $\begin{cases} a+c=0 \\ -b+c=0 \\ a-b+c=0 \\ 2a+2b+3c=0 \end{cases}$ 이므로 $\begin{matrix} a=-c \\ b=c \end{matrix}$ 이고, 따라서 $a=b=c=0$ 이다.

위의 방정식의 해가 $(a,b,c)=(0,0,0)$ 뿐이므로 세 벡터는 일차독립.

- 풀이와 답을 정확히 쓴 경우에만 20점.
- 답은 맞았으나 풀이가 정확하지 않은 경우 10점

#2

$$|x\mathbb{V}_1+y\mathbb{V}_2+z\mathbb{V}_3|^2=(x\mathbb{V}_1+y\mathbb{V}_2+z\mathbb{V}_3)\cdot(x\mathbb{V}_1+y\mathbb{V}_2+z\mathbb{V}_3)$$
$$=x^2|\mathbb{V}_1|^2+y^2|\mathbb{V}_2|^2+z|\mathbb{V}_3|^2$$
$$=x^2+4y^2+9z^2$$ 이다. 5점.

$$x^2+4y^2+9z^2=(x^2,y^2,z^2)\cdot(1,4,9)$$
$$\underset{CBS}{\le}\sqrt{x^4+y^4+z^4}\cdot\sqrt{1+16+81}=\sqrt{98}$$ 이고,

$(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{98^{1/4}}(1,2,3)$ 이 $\begin{cases} x_0^4+y_0^4+z_0^4=1 \\ x_0^2+4y_0^2+9z_0^2=\sqrt{98} \end{cases}$ 을 만족하므로

$|x\mathbb{V}_1+y\mathbb{V}_2+z\mathbb{V}_3|$의 최댓값은 $98^{1/4}$ 이다. 20점

※ 최댓값계산이 틀렸거나 CBS 부등식의 등호성립조건을 언급하지 않은 경우 각각 −5점.

#3 $L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 이다.

벡터 V_1, V_2, V_3 이 이루는 평행육면체 R의 부피를 Vol(R) 이라 하면

$$Vol(R) = \left| \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = |1-18+12+6-4-9| = 12.$$

L(R)은 평행육면체 R의 선형사상 L에 의한 상이므로 L(R)의 부피는

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 으로 두었을 때

$Vol(L(R)) = |\det A|\, Vol(R)$ 이다.

$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} = -10-3+0-1-0-0 = -14$ 이므로

$Vol(L(R)) = |\det A|\, Vol(R) = |-14|\cdot 12 = 14\times 12 = 168$

따라서 L(R)의 부피는 168이다.

<채점기준>

- L에 대응하는 행렬 A를 구한 경우 ····· +5점
- R의 부피를 정확히 구한 경우 ···· +5점
- detA를 정확히 구한 경우 ···· +5점
- L(R)의 부피를 정확히 구한 경우 ···· +5점.

#4.

(a)

$\det A = 0 + x^2 + 6 - 5 - 0 + 3x$

$= x^2 + 3x + 1$ ┘ 5점

$\det(A^{2015}) = (\det A)^{2015}$ 이므로

$\det(A^{2015}) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ┘ 10점

(b)

$\det((A^{-1})^t) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ ┘ 5점

$\frac{1}{\det A} = \frac{1}{5^2 + 3 \cdot 5 + 1} = \frac{1}{41}$ ┘ 10점

#5.

(a) 평면의 법선 벡터 $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$을 먼저 구하자.

$\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -1)$ $\overrightarrow{PR} = (-2, 2, 2)$

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (6, 0, 6)$.

즉, 직선의 방정식은 $x-1 = z$, $y = -1$ 이다.

또는 $(1+s, -1, s)$ $s \in \mathbb{R}$ 이다.

※ 부분 점수 없음.

(b) 삼각형의 넓이 $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$ 이다.

(a)에서 $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (6, 0, 6)$ 임을 계산하였으므로.

넓이 $= \frac{1}{2} |(6, 0, 6)| = 3\sqrt{2}$.

※ 부분 점수 없음.

#6.

For $y, z \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
L(y+cz) &= a \times (b \times (y + cz)) \\
&= a \times ((b \times y) + b \times (cz)) \\
&= a \times (b \times y) + a \times (b \times (cz)) \\
&= a \times (b \times y) + c(a \times (b \times z)) \\
&= L(y) + c\,L(z)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ L은 선형사상이다. 10점

For $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
L(y) &= (1,1,0) \times ((-2,0,0) \times (y_1, y_2, y_3)) \\
&= (1,1,0) \times (0,\ 2x_3,\ -2x_2) \\
&= (-2x_2,\ 2x_2,\ 2x_3)
\end{aligned}
$$

$\therefore L(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

따라서 L을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 이다.

20점

* 단, L을 나타내는 행렬만 구한 경우 10점.

#17. (a) $x'(t) = \left(\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t} \right)$ $|x'(t)| = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{t^2}} = \frac{1}{t}$

곡선의 길이 $= \int_1^{\pi} |x'(t)|\, dt$

$= \int_1^{\pi} \frac{1}{t}\, dt$] 5점

$= \log \pi$] 5점

(b) 곡선의 길이 $= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)}\, d\theta$] 5점

$= \int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$] 5점

#8. (a) $X'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t,\ e^t \sin t + e^t \cos t,\ e^t)$

접선의 매개변수 방정식 $\ell(s) = X(0) + sX'(0) = (1, 0, 1) + s(1, 1, 1)$

(b) $X''(t) = (-2e^t \sin t,\ 2e^t \cos t,\ e^t)$

접촉평면의 방정식 : $(X'(0) \times X''(0)) \cdot ((x, y, z) - X(0)) = 0$

$\Rightarrow (-1, -1, 2) \cdot (x-1, y, z-1) = 0$

$\therefore x + y - 2z + 1 = 0$

(c)

$$s = \int_0^t |X'(u)|\, du$$

$$= \int_0^t \sqrt{3e^{2u}}\, du$$

$$= \sqrt{3}\,(e^t - 1)$$

5점

$$\therefore t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

호의 길이로 재매개화 : $\tilde{X}(s) = X(t(s)) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\sin\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), \frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$

5점

⊛ (a), (b) 부분점수 없음

9.

직교 좌표계를 이용하여 $x \ge 0,\ y \ge 0$ 인 영역의 데카르트 곡선을 표현하면 $r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 이다.

$r \neq 0$ 이면 $r = \dfrac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$ 이다.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2\, d\theta$$ 5

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^6\theta + \sin^6\theta + 2\cos^3\theta\sin^3\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{1 + 2\tan^3\theta + \tan^6\theta}\, d\theta$$ 10

$u = \tan^3\theta$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + 2u + u^2}\, du$$

$t = u+1$
$$= \frac{3}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty}$$

$$= \frac{3}{2}.$$ 20

※ 별해 인정.

10 a) $\vec{k} = \frac{1}{|X'|}\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'$ (곡률벡터)

$$= \frac{1}{|X'|}\left(\frac{X''|X'| - X'|X'|'}{|X'|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{|X'|}\left(\frac{X''|X'| - X'\left(\frac{X'\cdot X''}{|X'|}\right)}{|X'|^2}\right)$$

$\because |X'|' = \frac{X'\cdot X''}{|X'|}$

$$= \frac{1}{|X'|^4}\left(X''|X'|^2 - X'(X'\cdot X'')\right)$$

5

곡률 k는 다음과 같다.

$$k = |\vec{k}| = \frac{1}{|X'|^4}\left|X''|X'|^2 - X'(X'\cdot X'')\right|$$

$$= \frac{1}{|X'|^4}\sqrt{|X''|^2|X'|^4 - 2(X'\cdot X'')^2|X'|^2 + |X'|^2(X'\cdot X'')^2}$$

$$= \frac{1}{|X'|^3}\sqrt{|X''|^2|X'|^2 - (X'\cdot X'')^2}$$

$$= \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3}$$

5

$\left(\because |X'\times X''| = \sqrt{|X'|^2|X''|^2 - (X'\cdot X'')^2}\right)$

b) $X(t) = (\log(1+t), \sinh(t), \cosh t)$

$X'(t) = \left(\frac{1}{1+t}, \cosh(t), \sinh(t)\right)$ $X'(0) = (1, 1, 0)$

$X''(t) = \left(-\frac{1}{(1+t)^2}, \sinh(t), \cosh(t)\right)$ $X''(0) = (-1, 0, 1)$

$t=0$ 에서 곡률은

$$k = \frac{|X'(0) \times X''(0)|}{|X'(0)|^3} = \frac{|(1,1,0) \times (-1,0,1)|}{|(1,1,0)|^3}$$

$$= \frac{|(1,-1,1)|}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

10

부분점수 ~~x~~ 인정 안함