

수학 및 연습 2 기말고사

(2017년 7월 28일 11:00-13:00)

학번: _____ 이름: _____

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 좌표공간에 있는 두 원기둥

$$x^2 + z^2 \leq R^2, \quad y^2 + x^2 \leq R^2$$

의 공통부분의 부피를 구하시오.

문제 2. [20점] 영역 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2 + y^2 < 9, x > 0, y > 0\}$ 에서 함수

$$f(x, y) = \frac{(\log(x^2 + y^2))^2}{4\sqrt{x^2 + y^2}}$$

의 중적분 값을 구하시오.

문제 3. [10점] 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin(\log(x^2 + 1))}{x^2 + 1} dx dy$$

문제 4. [30점] 평면에서 영역 D 가 극좌표계로

$$D: 1 + \sin \theta \leq r \leq 4$$

로 주어졌다고 하자.

(a) [15점] 영역 D 의 기하학적 중심을 (\bar{x}, \bar{y}) 라 할 때 \bar{y} 를 구하시오.

(b) [15점] $\mathbb{R}^2 - \{(0, 3)\}$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(x^3 + \frac{3}{2}xy^2 + e^x \sin y + \frac{x}{x^2 + (y-3)^2}, \frac{1}{2}y^3 + e^x \cos y + \frac{y-3}{x^2 + (y-3)^2} \right)$$

에 대하여, $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ 를 구하시오. (단, \mathbf{n} 은 표준 단위법벡터장이다.)

문제 5. [20점] 좌표평면에서 주어진 폐곡선 $C: (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad (x \geq 0)$ 에 대하여, 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C (y^2 - x^2 y) dx + (x + xy^2) dy$$

문제 6. [20점] 좌표평면의 제일사분면에서 데카르트 곡선 $C: x^3 + y^3 = 3xy$, x 축 그리고 y 축으로 둘러싸인 영역 D 의 넓이를 구하시오. (Hint : 곡선은 $y = tx$ 를 이용한 매개화를 생각해보자.)

문제 7. [20점] 매개화된 곡면

$$S: X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

의 밀도함수가 $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ 일 때, S 의 질량을 구하시오.

문제 8. [20점] 곡면 $X: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1 \leq z \leq 2)$ 에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = x^2 z$ 의 평균값을 구하시오.

문제 9. [20점] 공간의 제일팔분체에 있는 두 구면 사이의 영역

$$R: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

에 대하여, 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ 가 경계면 ∂R 에서 빠져나오는 플럭스를 구하시오.

문제 10. [20점] 반타원면 $S: x^2 + y^2 + 4z^2 = 4, z \geq 0$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{x+z} - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - \cos(yz))\mathbf{j} + (\sin(xz) - e^{x+y-z})\mathbf{k}$$

에 대하여 $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, S 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 되도록 정한다.)