

수학 및 연습 2 중간고사
(2014년 10월 18일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 다음과 같이 함수 $f(x, y)$ 가 주어져 있다.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) (5점) 함수 f 는 연속함수인가?
- (b) (5점) $D_1f(0, 0), D_2f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (c) (10점) 원점에서 함수 f 의 미분가능성을 판단하시오.

문제 2. [20점] 곡면이 $z = e^x \sin y$ 로 주어져 있을 때, 다음 물음에 답하시오. $\left(\text{단, } -\frac{\pi}{2} \leq x, y \leq \frac{\pi}{2} \right)$

- (a) (10점) 곡면 위의 점 $P\left(\log 3, \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ 에서 접평면의 방정식을 구하시오.
- (b) (10점) 곡면 위의 점 $Q(a, b, c)$ 에서 접평면이 직선

$$x - 1 = y - 3 = \frac{z - 5}{-\sqrt{2}}$$

와 수직이다. 이때, 점 Q 를 구하고, 점 Q 에서의 접평면의 방정식을 구하시오.

문제 3. [20점] 함수 f, g 가 좌표평면에서 정의된 일급함수라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $h(t) = f(tx, ty)$ 라 할 때, $h'(t)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ 가 성립할 때

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 (xf(tx, ty) + yg(tx, ty)) dt$$

라고 하자. 이때 $\text{grad } \varphi(x, y)$ 를 f, g 로 표현하시오.

문제 4. [20점] $x^3 + y^3 + x + y = 4$ 일 때 $x^2 + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 존재 여부를 밝히고, 존재하면 그 값을 구하시오.

문제 5. [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 원점에서 함수 $f(x, y) = (\cos x) \log(1 + y)$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.
- (b) (10점) (a) 를 이용하여 $(\cos 0.1) \log 1.1$ 의 3차 근사값을 구하고, 오차가 4×10^{-4} 이하임을 보이시오.

문제 6. [20점] $n \geq 3$ 일 때, 단위원을 내부에 포함하는 n 각형의 면적의 최솟값을 구하시오.

문제 7. [20점] 두 일급함수 $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 와 두 벡터 $\mathbf{v} = (3, -2)$, $\mathbf{w} = (-2, 1)$ 에 대하여, 점 $P \in \mathbb{R}^2$ 에서의 각각의 방향미분계수가 아래 표와 같다.

$D_{\mathbf{v}}f(P)$	$D_{\mathbf{w}}f(P)$	$D_{\mathbf{v}}g(P)$	$D_{\mathbf{w}}g(P)$
2	0	-3	1

점 P 에서 함수 $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ 의 야코비 행렬을 구하시오.

문제 8. [15점] 평면 위의 점 $(3, 0)$ 에서 출발한 입자가 반원 $y = \sqrt{9 - x^2}$ 을 따라 $(-3, 0)$ 까지 움직인 후에 x -축을 따라 다시 시작점으로 돌아왔다고 하자. 힘 $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 가 이 입자에 가한 일을 구하시오.

문제 9. [20점] 벡터장 $\mathbf{G}(x, y) = \frac{(2x - y, x + 2y)}{x^2 + y^2}$ 를 곡선 $X(t) = (2 \cos 3t, 2 \sin 3t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 를 따라 선적분한 값을 구하시오.

문제 10. [25점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + y^3 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right), & xy \neq 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, y = 0 \\ y^3 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right), & x = 0, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하고 그 이유를 설명하시오.

- (a) (8점) $D_1f(0, 0)$, $D_2f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (b) (8점) 함수 f 는 원점에서 미분가능한가?
- (c) (9점) 함수 f 는 일급함수인가?