

수학 및 연습 2 중간고사
(2016년 10월 22일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y} & , y \neq -x^2 \\ 0 & , y = -x^2 \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 원점에서 함수 f 의 모든 방향미분계수가 존재함을 보이시오.
- (b) (10점) 원점에서 함수 f 의 미분가능성을 조사하시오.

문제 2. [15점] 함수 $f(x, y, z) = x + y^2$ 가 주어져 있다. 등위면 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + xy + xyz = 3\}$ 위의 점 $P = (1, 1, 1)$ 에서의 단위접벡터 \mathbf{v} 에 대하여 $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 의 최댓값을 구하시오.

문제 3. [10점] 좌표평면의 표준 직교좌표계 (x, y) 와 극좌표계 (r, θ) 에 대하여 $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ 를 r 과 θ 로 표현하시오.

문제 4. [15점] 함수

$$f(x) = \int_{2/\sqrt{x}}^{3/\sqrt{x}} \frac{1}{y} e^{xy^3} dy \quad (x > 0)$$

의 도함수를 구하시오.

문제 5. [10점] 함수 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 의 임계점을 모두 구하고 그것이 극대점인지 극소점인지 혹은 안장점인지 판정하시오.

문제 6. [15점] 함수 $f(x, y) = e^{x \cos y}$ 와 점 $P(1, 0)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 벡터 $\mathbf{v} = (a, b)$ 에 대하여 $D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$ 를 구하고, 점 P 에서 \mathbf{v} 방향으로 함수 f 가 (아래로) 볼록인 (a, b) 영역을 그리시오.
- (b) (5점) 점 P 에서 함수 f 의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 7. [15점] 함수 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 에 대하여 라그랑주 승수법을 이용하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y = 2\}$ 에서 f 의 최솟값을 구하시오.
- (b) (10점) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3x - 3y = 4\}$ 에서 f 의 최솟값을 구하시오.

문제 8. [10점]

$$u = e^x \cos y + yz, \quad v = xz - e^x \sin y, \quad w = xy + z, \\ x = t^2 - r, \quad y = 4s, \quad z = t^2$$

일 때, $\det \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)}(1, 0, 1) \right)$ 을 구하시오.

문제 9. [15점] 극좌표 $r = 1 + \theta^2$ ($0 \leq \theta \leq 1$) 로 표현되는 곡선 X 를 반시계 방향으로 따르는 다음 벡터장 $\mathbf{F}(x, y)$ 의 선적분 값을 구하시오.

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(-y, x)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

문제 10. [15점] 곡선 $X(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 를 따라 각원소 벡터장 $\mathbf{a} = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$ 를 선적분한 것을 이용하여 다음 적분을 구하시오. (단, a 와 b 는 0이 아닌 상수)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

문제 11. [15점] 벡터장 $\mathbf{G}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$ 를 곡선 $X(t) = (1 - t, -\sqrt{2}t, \sqrt{2}t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 를 따라 선적분한 값을 구하시오.