수학 및 연습 2 기말고사

(2016년 7월 27일 11:00-13:00)

모든 문제에 바르고 깨끗한 풀이과정을 쓰시오. (총점 200점)

문제 1. [30점] 아래의 이중적분을 계산하시오.

(a) (15점) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 ye^{-x^2}\, dxdy$

(b) (15점) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{3}|x|}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2+1)^{-\frac{5}{2}}\, dydx$

문제 2. [20점] 삼차원 좌표공간의 한 영역 $D = \{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$ 에서 정의된 아래의 삼중적분을 계산하시오.

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$$

문제 3. [20점] 함수 $G(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$ 와 평면의 한 영역

$$W = \{(x,y)\,|\, -1+\frac{y^2}{4} < x < 1-\frac{y^2}{4},\ 0<y<2\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $G: U \to W$가 일급가역사상이 되도록 하는 W 의 역상 U 를 찾으시오.

(b) (10점) 치환적분법을 이용하여 아래 적분을 u, v 변수에 대한 적분으로 표현하고 그 적분값을 계산하시오.

$$\iint_W \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

문제 4. [20점] 좌표평면의 영역 $D = \{(x,y)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ 에 대하여, 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (x^3+xy^2-\arctan y, -2x^2y+e^{-x^2})$ 가 ∂D 를 빠져나오는 양(flux)을 계산하시오.

문제 5. [20점] 질점이 점 $(-2,0)$ 에서 x축을 따라 점 $(2,0)$ 까지 움직이고, 반원 $y = \sqrt{4-x^2}$ 을 따라 처음으로 돌아온다. 이 때, 이 곡선을 따르는 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (x, x^3+3xy^2)$ 의 일을 구하시오.

문제 6. [20점] 곡선 C 가 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $x+y=1$ 이 이루는 영역 중 1사분면에 있는 영역의 경계일 때 다음을 구하시오. (단, C 의 향은 시계반대방향으로 주어진다.)

$$\int_C (\arctan x - y^2)\, dx + (x^2+\sin y)\, dy$$

문제 7. [20점] 곡면 S 가 평면 $x=0$ 과 $x=3$ 사이에 놓여 있는 원기둥면 $y^2+z^2=1$ 중 제일팔분체 안에 있는 부분이다. 이 곡면에 밀도함수가 $f(x,y,z) = x^2y+z$ 로 주어질 때, 곡면의 질량중심과 평균밀도를 구하시오.

문제 8. [30점] $S := \{(x,y,2) : x^2+y^2 \le 4\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) S 의 원점 O 에서의 입체각을 구하시오.

(b) (15점) 영역 $R = \{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,\ x^2+y^2+z^2 \ge 1\}$ 에 발산정리를 적용하여, 벡터장 $\mathbf{A}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ 의 면적분 $\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, 이 때 향을 정하는 단위 법벡터 $\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$으로 주어진다.)

문제 9. [20점] 함수 $\varphi(x,y,z) := xe^{-y}+ye^{-z}+ze^{-x}$에 대하여, 아래의 곡선

$$C(t) = \left(\frac{\log(1+t)}{\log 2},\ \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right),\ \frac{1-e^t}{1-e}\right)\ (0 \le t \le 1)$$

에서 벡터장 grad φ 의 선적분을 스토크스 정리를 이용하여 구하시오.