수학 및 연습 2 중간고사

(2018년 10월 20일 오후 1:00–3:00)

학번 :	이름 :

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1 [15점] 좌표평면에서 정의된 다음 함수 $f(x,y)$ 에 대해 아래 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) (5점) f 는 원점에서 연속인지 판정하시오.

(b) (5점) 영이 아닌 벡터 $\mathbf{v} = (a,b)$ 에 대하여 $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ 를 구하시오.

(c) (5점) f 는 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

문제 2 [15점] 원점 근방에서 정의된 미분가능함수 $f(x,y)$ 가 다음 성질을 만족한다고 하자.

$$xyf(x,y) = \cos\left(x+y+f(x,y)\right)$$

이때 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 의 값을 구하시오.

문제 3 [15점] 삼차원 좌표공간에 놓인 곡면 $xyz = 2018$ 위의 점 (a,b,c) 에서의 접평면과 xy-평면, yz-평면, zx-평면들로 둘러싸인 사면체의 부피를 구하시오.

문제 4 [15점] 자연수 n 에 대해

$$F_n(x) = \int_2^{2x} (x-t)^n e^{t^2}\,dt$$

라 두자. 이때 $F_n'(1)$ 을 구하시오.

문제 5 [15점] 좌표평면의 영역 $\{(x,y) | \, x > 0\}$ 에서 정의된 다음 함수 f 의 임계점을 구하고, 그 임계점이 극대점, 극소점 혹은 안장점인지 판정하시오.

$$f(x,y) = x - 2y + \log\sqrt{x^2+y^2} + \arctan\frac{y}{x}$$

⟨ 연습용 여백 ⟩

문제 6 [15점] 좌표평면에서 정의된 함수 $f(x,y) = e^{x+y}\sin(xy)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (7점) 원점에서 $f(x,y)$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.

(b) (8점) $\mathbf{v} = (1,2)$ 에 대해 $D_{\mathbf{v}}^3 f(0,0)$ 을 구하시오.

문제 7 [15점] 아래와 같이 주어진 닫힌 영역 S 에서 정의된 함수 $f(x,y,z) = x+y+z$ 의 최댓값과 최솟값이 존재함을 보이고, 그 값을 각각 구하시오.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+4x \le 0,\ x \ge -2\}$$

문제 8 [15점] 다음을 구하시오.

(a) (6점) 일급함수 $G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ 가

$$g_2(x,y) = g_1\big(x^3 - xy^2, x^2y - y^3\big)$$

이고 $g_1(1,0) = 1, D_1g_1(1,0) = 2, D_2g_1(1,0) = 1$ 을 만족할 때, 야코비 행렬 $G'(1,0)$ 을 구하시오.

(b) (9점) 일급함수 $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ 가

$$f_2(x,y) = f_1\big(x^2+y^2, xy\big)$$

이고 f_1 의 편미분계수들이 다음 표의 내용을 만족할 때, 야코비 행렬식 $\det(F \circ G)'(1,0)$ 을 구하시오.

(a,b)	$D_1f_1(a,b)$	$D_2f_1(a,b)$
$(1,1)$	4	2
$(2,1)$	1	3

문제 9 [15점] 밀도함수 $\mu(x,y) = \tan\dfrac{x}{2} + 2e^y$ 에 대한 곡선

$$X(t) = \left(2\arctan t, \log\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

의 질량을 구하시오.

문제 10 [15점] 원점을 제외한 좌표평면에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{(2x-y, x+3y)}{x^2+y^2}$$

을 곡선 $r = e^\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 를 따라 $(1,0)$ 부터 $(e^{2\pi}, 0)$ 까지 적분한 일의 양을 구하시오.

⟨ 연습용 여백 ⟩