

2018년 1학기 수학 및 연습 1 중간고사 예시 답안

1. 급수의 수렴여부 판정

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, a_n > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{3^n n!}{n^n} = 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

비율 판정법의 따름정리에 의해 급수는 발산한다

」 5

* $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ 이 모든 n 에 대해 성립하므로

$$3 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \text{ 이 모든 } n \text{에 대해 성립.}$$

비율판정법에 의해 발산한다고 해도 정답

* 극한값을 정확히 구해야 함.

부분정수 없음

$$\# 1 -(b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\arctan \frac{1}{n})}{\log n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin(\arctan \frac{1}{n})}{\log n}}{\frac{1}{n \log n}} = 1 \quad \text{이므로} \quad \text{극한비로 판정법에 의해}$$

준수의 수렴성은 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ 이 수렴성과 같다.

이는 적분판정법에 의해 발산

】 5

(채정기준)

$$\begin{aligned} \sin x &\geq \frac{2}{\pi} x \\ \arctan x &\geq \frac{\pi}{4} x \end{aligned} \quad) \quad x \in [0, 1]$$

임을 이용한 경우 부등호의 상수가 틀릴 경우 2점 감점 (-2)

#1 - cc)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\left(1 - \frac{1}{n^{2018}} \right)^{n^{2019}} \right)$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^{2018}} \right)^{n^{2019}} \text{ 이면 하면}$$

$$0 < a_n < 1 \quad \text{이므로}$$

$$\sin a_n \leq a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^{2018}} \right)^{n^{2018}} = \frac{1}{e} < 1$$

이므로 거듭제곱근 판정법의 따옴 정리에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n < \infty$ 15

X. 부등식을 정확히 쓰고 $\sum a_n < \infty$ 임을 밝히면 5점.
부분 сумму 없음

문제 2

$a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ 이라고 하자.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \geq 0 \quad \text{OICL}$$

① $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

② $a_n \geq a_{n+1}$ (n 과 $\sqrt{n^2+1}$ 이 증가수열 이므로) +5

따라서 고대급수 판정법에 의해

수렴한다. +5

$$\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+3n^2} = 2n \quad \text{임므로}$$

$$a_n \geq \frac{1}{3n} > 0 \quad \text{이고} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \quad \text{이 발산하므로}$$

비교 판정법에 의해 $\sum a_n$ 도 발산한다.

따라서 주어진 급수는 조건 수렴한다. +5

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

* 고대급수 판정법의 조건중 하나를 안보이면 → 2점

* 조건을 보이는 과정에서 사소한 계산실수 → 2점

* 절대수렴을 판정할 사소한 계산 실수 → 2점

* (절대수렴 별해 1)

$b_n = \frac{1}{n}$ 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 극한 비교판정법에 의해 발산.

* (절대수렴 별해 2)

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ 가 감소함수 이므로

적분판정법 적용.

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_\alpha^\infty \cosh^2 t - \cosh t \cdot \sinh t dt \\ &= \int_\alpha^\infty \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} \right]_\alpha^\infty = \infty \\ & (\sinh \alpha = 1) \end{aligned}$$

#3. $a_n = \frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 이다 하자. ($a_n > 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\log(n+1)} - 2^{\log(n+1)}}{3^{\log n} - 2^{\log n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log(n+1)}}{3^{\log(n+1) - \log n} - 2^{\log(n+1) - \log n} \cdot 3^{\log n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log(n+1)}}{3^{\log(1+\frac{1}{n})} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log n} \cdot 2^{\log(1+\frac{1}{n})}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(1+\frac{1}{n}) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\log n} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \text{ 이므로 } \sum a_n x^n \text{의 수렴반경은 } 1$$

i) $x=1$ 일 때 :

충분히 큰 n 에 대하여 $3^{\log n} - 2^{\log n} = n^{\log 3} - n^{\log 2} > \frac{1}{2} n^{\log 3}$ 이고

$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{n^{\log 3}}$ 은 p-test에 의하여 수렴한다.

$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{n^{\log 3}}$ 이고 유한 개의 합은 급수의 수렴성에

영향을 미치지 않으므로 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 은 수렴

ii) $x=-1$ 일 때

① $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 이 수렴하므로 주어진 급수가 절대수렴하고

따라서 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 은 수렴한다.

② $f(x) = 3^{\log x} - 2^{\log x}$ 라 하면 $f'(x) = \frac{\log 3 \cdot 3^{\log x} - \log 2 \cdot 2^{\log x}}{x}$ > 0 이므로 $f(x)$ 는

증가함수이고 $\left| \frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}} \right| > \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^{\log(n+1)} - 2^{\log(n+1)}} \right|$ 이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}} = 0$ 이므로

교대급수 정리에 의하여 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 은 수렴한다.

∴ 수렴범위는 $-1 \leq x \leq 1$

- 채점 기준
- 수렴 반경 +5점
 - $x=1$ 일 때 수렴 +5점
 - $x=-1$ 일 때 수렴 +5점

* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 구할 때 식으로 보여주지 않으면 0점

$$\textcircled{ex} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\log 3} - n^{\log 2}}{(n+1)^{\log 3} - (n+1)^{\log 2}} = 1. \text{처럼 식으로 보일 때만 정수 부여.}$$

* 수렴 반경을 틀리게 구하면 이후 과정 점수 부여 없음

* $x=1$ 일 때 논의가 틀리고 $x=-1$ 일 때 절대수렴이면 수렴을 쓴 경우
둘 다 0점 부여

* $\frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 이 강소함수임을 설명 없이 쓴 경우 0점

* $x=1$ 일 때 "충분히 큰 n 에 대하여"라는 언급 없이 부등호를 이끌어낸 경우
0점 부여

문제 4

[방법 1] $f(x) = \log(1+x^3) - \log(1+x)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{3n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1) \quad \text{이제}$$

$$T_4 f(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad \text{이제}$$

$$\begin{aligned} |f(0.1) - T_4 f(0.1)| &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (0.1)^{3n+3} - (0.1)^3 \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (0.1)^{n+1} - \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{n+1} (0.1)^n \right| \\ &\leq \frac{1}{2}(0.1)^6 + \frac{1}{5}(0.1)^6 < 10^{-5} \quad \text{이제} \end{aligned}$$

따라서 근사값은 $T_4 f(0.1)$. 이다.

[방법 2] $f(0.1) = \log(1-0.09) \quad \text{이제} \quad g(x) = \log(1-x) \quad \text{이제}$

$$g(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1) \quad \text{이제} \quad T_4 g(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \quad \text{이제}$$

$$\begin{aligned} |g(0.09) - T_4 g(0.09)| &= \left| \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n+1} (0.09)^{n+1} \right| \leq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5} (0.09)^{n+1} \\ &= \frac{20}{91} (0.09)^5 < 10^{-5} \quad \text{이제} \end{aligned}$$

따라서 근사값은 $T_4 g(0.09)$. 이다.

[점수]

1. $\log(1-x+x^3)$ 또는 $\log(1-x)$ 의 테일러급수 혹은 $T_4 f(x)$ 를 구한 경우 (+5)

2. 오차가 10^{-5} 이내임을 보이고 올바른 답을 구한 경우 (+10)
(단, 오차가 10^{-5} 이내임을 보였으나 답이 틀린 경우 (+1))

$$\#5. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n \quad (0 \leq x < 1)$$

(a) 위 증수의 수렴반경이 1 이외이므로.

거듭제곱급수 기본정리에 의해

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \quad (0 < x < 1) \text{ 이 성립한다.}$$

고정된 x 에 대하여 $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1}$

이라 하면. (a_n) 은 고급수 정의의 조건들을 만족하고.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{x}{2} \text{ 이므로}$$

$$1 - \frac{x}{2} < f'(x) < 1 \text{ 이 성립한다.}$$

$$0 < x < 1 \text{ 이므로. } \frac{1}{2} < 1 - \frac{x}{2} < f'(x) < 1 \text{ 이다.}$$

(b)

비교급수정리에 의해

$$\frac{f(\sin \frac{1}{n})}{\sin \frac{1}{n}} = f'(c_n) \text{ 인 } c_n \in (0, \sin \frac{1}{n}) \text{ 이므로.}$$

4

모든 자연수 n 에 대하여

$$f(\sin \frac{1}{n}) > \frac{1}{2} \sin \frac{1}{n} > 0 \text{ 이 성립하며}$$

$$\sum \frac{1}{2} \sin \frac{1}{n} = \infty \text{ 이므로. 비교판정법에 의해}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\sin \frac{1}{n}) \text{는 발산이다.}$$

4

참고. $0 < x < 1$ 일 때

$$f'(x) = \frac{\log(1/x)}{x}$$

임을 놓고 이를 바탕으로 $\frac{1}{2} < f'(x) < 1$ 임을

보여도 마찬가지로 3점. (필요한 계산 과정은 생략하면 안됨)

거듭제곱수의 미분 계산 때

"거듭제곱수 기본정리에 의해"라는 말이

있으면 4점 중 2점 깎음.

$$\sum \frac{1}{2} \ln \frac{1}{n} = \infty \quad \text{임을 설명할 때.}$$

잘못된 부등식을 이용하면 점수 없음.

6(2) $y = \sinh^{-1}x$ 로 뜻면 $\frac{dy}{dx} = \cosh x > 0$ 이다. 역함수 정리에 의하여

$$h(y) = \frac{d\sinh^{-1}y}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

채점 기준: 역함수 정리를 옳게 적용하면 +4점.

$h(y)$ 를 y 에 대한 식으로 잘 정리하면 +3점.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} : +3\text{점} \quad \frac{y + \sqrt{1+y^2}}{1+y^2 + y\sqrt{1+y^2}} : +3\text{점} \quad \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}y)} : 0\text{점} \right)$$

(다른 풀이) $y = \sinh^{-1}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 로 봄지 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ 을 얻는다.

근의 공식에 의해 $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ 이고, $e^x > 0$ 이므로

$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, 따라서 $x = \sinh^{-1}y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ 이다.

$$\text{따라서 } h(y) = \frac{d\sinh^{-1}y}{dy} = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}}{y + \sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

채점 기준: 역함수를 옳게 구하면 +4점.

$h(y)$ 를 y 에 대한 식으로 잘 정리하면 +3점 (부와 동일)

6(b) $f(x) = (x+x^2)\sinh^{-1}(x-x^2)$ 의 5차 근사항식을 구하기 위하여

$\sinh^{-1}x$ 의 4차 근사항식을 구해보도록 하자. $g(x) = \sinh^{-1}x$ 로 뜻지.

(2)의 결과로부터 $g'(x) = h(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 임을 알고,

$$g''(x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad g'''(x) = -(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$g^{(4)}(0) = 9x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} - 15x^3(1+x^2)^{-\frac{7}{2}} \text{이므로},$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad g''(0) = 0, \quad g'''(0) = -1, \quad g^{(4)}(0) = 0 \text{ 이고}$$

$T_4 g(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ 이다. 이제 근사항식의 유일성에 의하여

$$(x+x^2)((x-x^2) - \frac{1}{6}(x-x^2)^3 + O(x^4)) = x^2 - \frac{7}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + O(x^5) \text{이므로}$$

$$T_5 f(x) = x^2 - \frac{7}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^5 \text{이다.}$$

채점 기준: 논리적인 방법으로 $T_5 f(x)$ 를 옳게 구하면 +8점.

$\sinh^{-1}x$ 나 $\sinh^{-1}(x-x^2)$ 의 4차 근사항식을 옳게 구했으나 답이 틀리면 +6점.
그 외 부분점수 없음.

$$\#7. \quad |x| < 1 \text{에서} \quad \int_2 \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{이므로} \quad \boxed{5}$$

멱급수 기본정리에 의하여

$$\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{이다.} \quad \boxed{10}$$

(*)

$$\text{따라서} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{3^k} = \sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \quad \text{이다.} \quad \boxed{15}$$

채점기준 : (*)에서 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}x$ 로 적분상수를 두각
하거나, $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ 를 쓰는 등의 오류가 있는 경우

2점 추가 감점

#8

$$x > 0, \quad f(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow T_n f^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$|R_n f(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$M_{n+1}(x) = \max \{ |f^{(n+1)}(x^*)| : 0 \leq x^* \leq x \} = e^x$$

$$\underline{n \geq 4} \rightarrow |R_n f(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{5! 2^5} < \frac{2}{5! 2^5} < 10^{-3}$$

+ 10

$$\therefore \sqrt{e} \approx T_4 f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! 2^2} + \frac{1}{3! 2^3} + \frac{1}{4! 2^4}$$

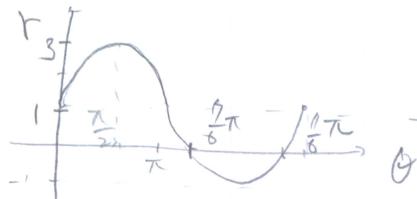
$$= \frac{211}{128}$$

+ 5

- 답은 구했지만 $\frac{M_{n+1}(x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ 을 잘못 구하거나 // $< 10^{-3}$ 을 잘못 보인 경우 (-5)

- $n < 4$ 에 대해 $T_n f\left(\frac{1}{2}\right)$ 구한 경우, $\frac{M_{n+1}(x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ 을 잘 구한 경우에만 총 점 5점 부여.

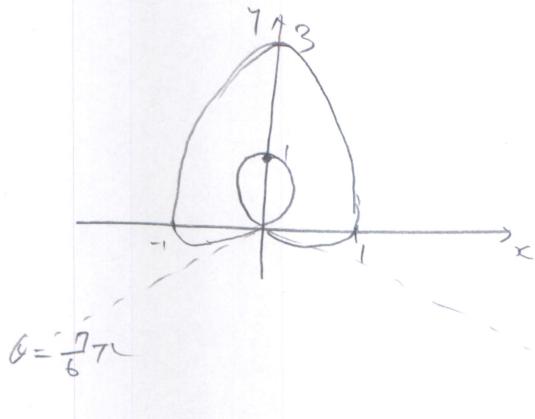
$$9. (a) r = 1 + 2 \sin \theta$$



$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \Rightarrow r = 0$$

$$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi \Rightarrow r < 0$$

곡선의 개형은 다음과 같다.



* 개형이 맞지 그려졌으면 7점
아니면 0점

$$(b) r^2 = \sin(3\theta + \frac{\pi}{2}) \iff r^2 = \cos 3\theta$$

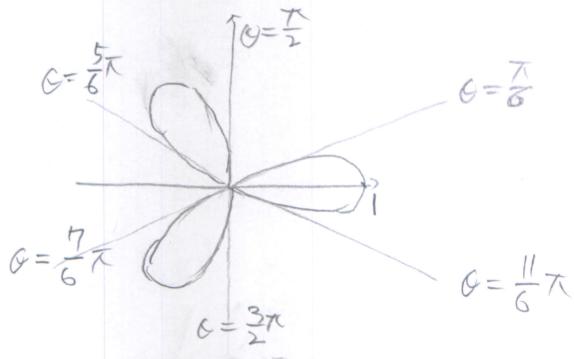
$$\iff \cos 3\theta \geq 0 \quad \& \quad r = \pm \sqrt{\cos 3\theta}$$

$\cos 3\theta \geq 0$ 인 θ 의 범위는. ($\theta \in [0, 2\pi]$)

$$[0, \frac{\pi}{6}], [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}], [\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}], [\frac{11\pi}{6}, 2\pi] \text{ 이고}$$

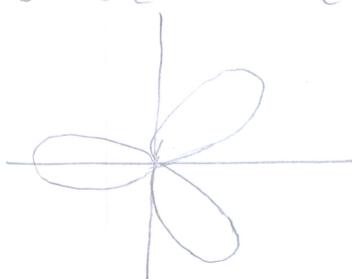
경계에서 $\cos \theta = 0$ 이다.

$$i) r = \sqrt{\cos 3\theta}$$



$$ii) r = -\sqrt{\cos 3\theta}$$

왼쪽의 그래프를 원점에 대칭 대칭변환을 시켜 얻는다.

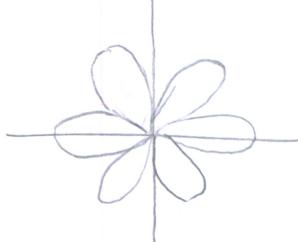


$\therefore r^2 = \sin(3\theta + \frac{\pi}{2})$ 의 그래프는

* 개형이 맞지 그려졌으면 8점

혹은 : 4점

그 외 0점



문제 10. 곡면 A를 직교좌표계로 변환하면 $x^2+y^2=\frac{1}{1-4z}$ 이다.

곡면 B를 직교좌표계로 변환하면 $2\sqrt{x^2+y^2+z^2}+2z=1$ 이다. $\Rightarrow 4(x^2+y^2+z^2)=1-4z+4z^2$

$$\Rightarrow 4(x^2+y^2)=1-4z$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{1-4z}=1-4z \Rightarrow 4=(1-4z)^2 \Rightarrow 1-4z=\pm 2 \quad \therefore z=-\frac{1}{4} \text{ or } z=\frac{3}{4}.$$

i) $z=-\frac{1}{4}$ 이면, $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. \Rightarrow 중심이 $(0,0,-\frac{1}{4})$, 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 원 +10점

ii) $z=\frac{3}{4}$ 이면, $x^2+y^2=-\frac{1}{2}$. $\Rightarrow x^2+y^2=-\frac{1}{2}$ 을 만족하는 실수 x,y가 존재하지않음.

\therefore 곡선의 길이는 $\sqrt{2\pi}$ 이다.

+5점

* 채점기준

1. $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{4}$ 이거나 이에 준하는 식을 작성하면 +10점. (즉, $z=-\frac{1}{4}$ 은 채점에 영향이 없음.)

2. 곡선의 길이를 알게 구하면 +5점

3. 너무 빠약해보이는 풀이과정은 부분점수없음