2015년도 2학기 수학 및 연습 II 중간고사 모범답안.

1. $$f(x,y)=\frac{xy}{xy-y+2x}$$

• $$D_1 f(x,y)=\frac{y\cdot(xy-y+2x)-xy\cdot(y+2)}{(xy-y+2x)^2}$$

$$=\frac{-y^2}{(xy-y+2x)^2}$$ 5점

• $$D_2 f(x,y)=\frac{x(xy-y+2x)-xy\cdot(x-1)}{(xy-y+2x)^2}$$

$$=\frac{2x^2}{(xy-y+2x)^2}$$ 5점.

$$x^2 D_1 f(x,y)+y^2 D_2 f(x,y)=\frac{x^2y^2}{(xy-y+2x)^2}$$

$$=f(x,y)^2 \quad \square$$ 5점.

* ($f(x,y)$의 분모, 분자를 xy로 나누어

$\frac{1}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}$ 의 형태를 미분한 경우, 정의역이 바뀌므로 −5점.

2(a)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0. \quad (\text{각 5점})$$

* 풀이 과정이 틀렸거나 답만 작성한 경우 0점

2(b)

$\lim_{v\to 0} \frac{|f(v)-f(0)-a\cdot v|}{|v|} = 0$ 인 a가 존재하면 미분가능하다. ┘ (3점)

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{|f(x,y)-f(0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \lim_{(x,y)\to 0} \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \le \lim_{(x,y)\to 0} \left| \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to 0} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$$ (∵ 산술기하 : $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $|x^2-y^2| \le |x^2+y^2|$)

따라서 미분가능하다. ┘ (10점)

* 부등식이 틀렸거나 풀이 과정에 오류가 있을 경우 (3점)만 인정

2(c)

$(x,y)\ne(0,0)$ 인 경우 분모가 0이 아닌 유리함수이므로

이급함수이며, 따라서 $D_1D_2 f(x,y) = D_2 D_1 f(x,y)$ 이다. (3점)

$(x,y)=(0,0)$ 인 경우,

$$D_1D_2 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{D_2 f(x,0) - D_2 f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{x^3y - xy^3}{y(x^2+y^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$D_2D_1 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \lim_{x\to 0} \frac{x^3y-xy^3}{x(x^2+y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

(7점)

따라서 $D_1D_2 f(0,0) \ne D_2D_1 f(0,0)$. * 한쪽만 맞은 경우 3점

∴ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

* $(x,y)\ne(0,0)$ 임을 명시하지 않고 계산하거나 이급함수임을 적지 않으면 점수 없음

#3. (a) grad$f$ 방향이 가장 빨리 증가하는 방향이다.

$\mathrm{grad}f = (ze^x \sin y,\ ze^x \cos y,\ e^x \sin y)$ 이므로, 5

$\mathrm{grad}f(P) = (1, 0, 1)$ 이고 이 방향의 단위벡터 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$가 원하는 벡터이다. 10

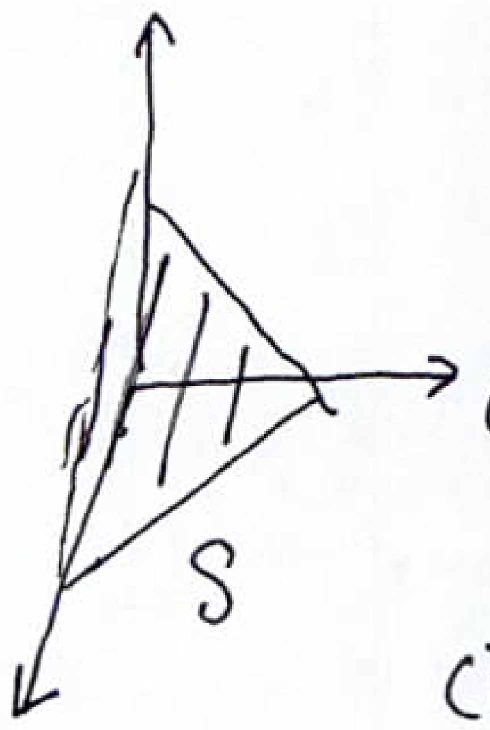
(b) 구하고자 하는 접평면의 법선벡터는 grad$f(P)$이다.

따라서 접평면의 방정식은 $\mathrm{grad}f(P) \cdot (X-P) = 0$. 5 — (*).

$P = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$을 대입하여 정리하면 $x + z = 1$ 이다. 10.

((*) 식의 내용을 쓰지 않은 상태에서 답만 쓴 경우, 답이 틀리면 0점..
$\mathrm{grad}\, f(P) \cdot (X-P) = 1$ 혹은 $(1,0,1) \cdot (x-1, y, z-1) = 0$ 등의
잘못된 식을 사용한 경우 0점.)

4.



S는 유계 닫힌 집합이므로 연속함수 f는 최대값을 가진다. 5

(i) S의 경계에서 (x, y, z 중 하나라도 0인 경우) $f(x,y,z)=0$ 5

(ii) $g(x,y,z) = x+y+z$ 로 두자.

이제 f가 S의 내부 $\{(x,y,z) \mid x+y+z=\pi,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$ 에서 극값 $f(P)$를 가지면, 라그랑즈 승수법에 의해

$$\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P) = \lambda(1,1,1)$$

인 λ가 존재한다. 따라서

$$\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} = 2\lambda$$

에서 $xyz \neq 0$ 이므로

$$x=y=z=\frac{\pi}{3}, \quad f(x,y,z)=\frac{1}{8}$$ 5

(iii) 최대값은 내부의 극값과 경계값중 가장 큰 값이므로

답은 $\frac{1}{8}$ 5

* 라그랑즈를 먼저 쓰는 경우 극점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ — 3점.

$$\left.\begin{array}{l}(\pi,0,0)\\(0,\pi,0)\\(0,0,\pi)\end{array}\right\} - 2점.$$

경계값이 0임을 보임 - 5점.

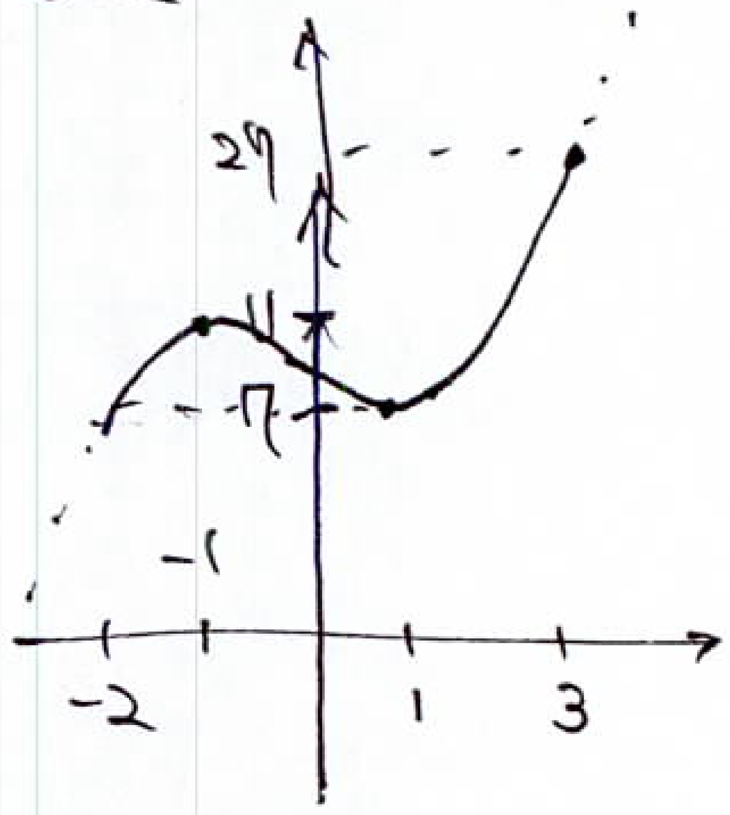
* 극점을 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ 만 구했어도 경계값이 0임을 보였으면 - 10점.

* 최대값이 $\frac{1}{8}$ 임을 보였을 경우 — 5점

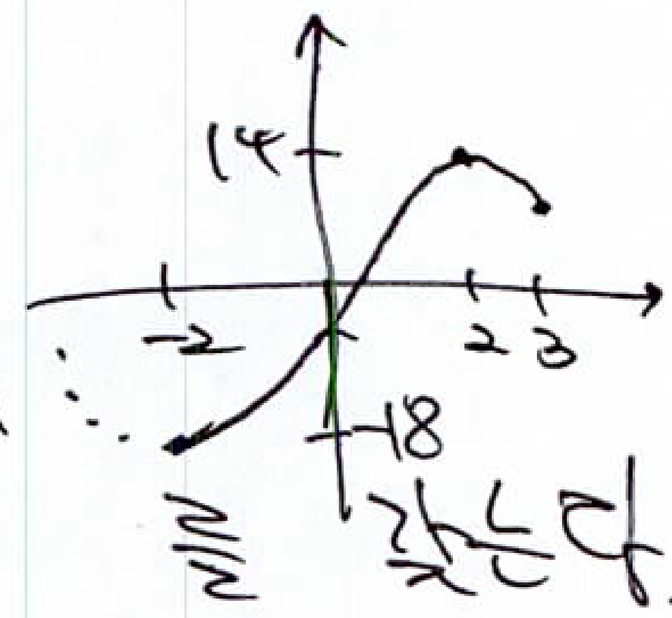
#5.

먼저, 주어진 영역이 유계, 닫힌 집합이고 f가 연속함수이므로
최대·최소 정리에 의해서 최댓값, 최솟값이 존재한다.

i) 내부에서 최대/최소를 갖는 경우.
임계점만 확인하면 충분하다.
$\mathrm{grad}\, f(x,y) = (3x^2-3,\ -3y^2+12) = (0,0)$ 인 점은
$(x,y) = (\pm 1, \pm 2)$ 이고 영역의 내부에 있는 점은 $(-1,2), (1,2)$뿐.
이 때 $f(-1,2) = 18$, $f(1,2) = 14$.



ii) 경계에서 최대/최소를 갖는 경우
① $y=3$, $-2 \le x \le 3$.
$f(x,3) = x^3 - 3x + 9$ 인데 $-2 \le x \le 3$일 때
그래프가 다음과 같고 최댓값 : 27 최솟값 : 7 을 갖는다.



② $x=-2$, $-2 \le y \le 3$
$f(-2,y) = -y^3 + 12y - 2$ 인데 $-2 \le y \le 3$ 일 때
그래프가 다음과 같고 최댓값 : 14 최솟값 : -18 을 갖는다.

③ $-x+y=0$, $-2 \le x \le 3$.
$f(x,x) = 9x$ 이고 $-18 \le f(x,x) \le 27$.

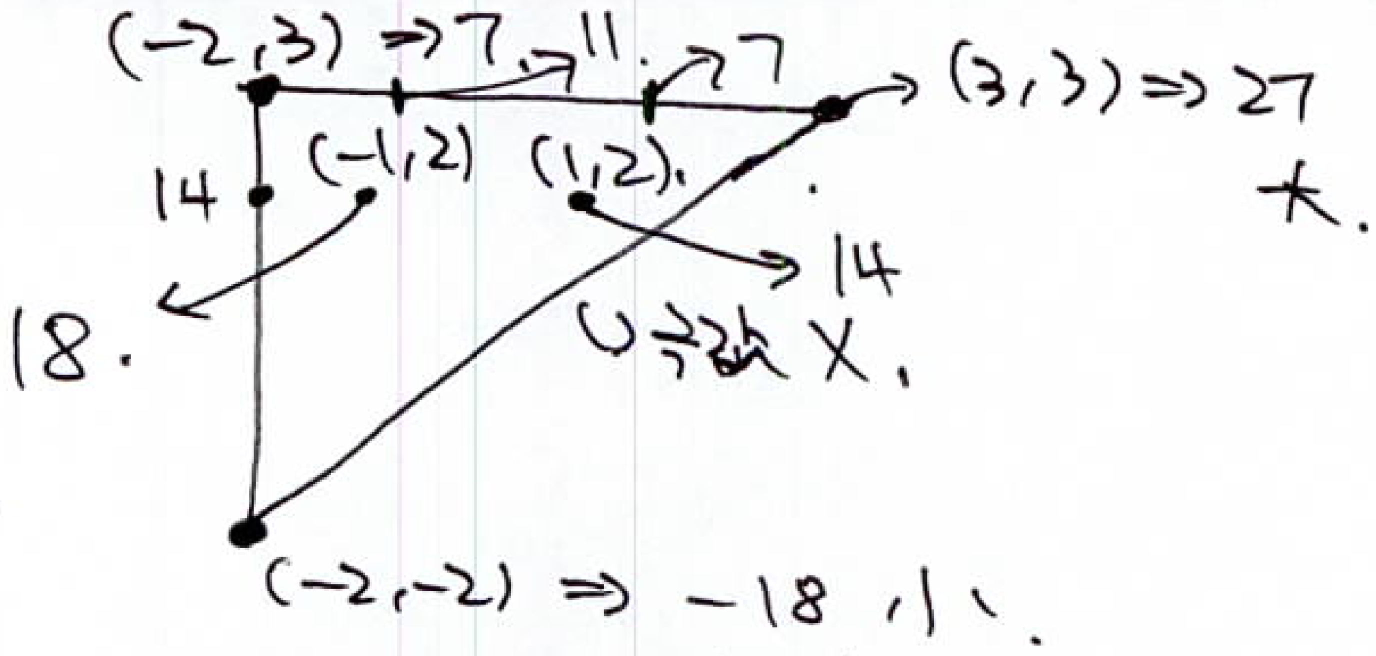
i), ii)를 종합하면 최솟값은 -18, 최댓값은 27이다.

5번

i) 최대·최소 존재에 관한 설명. (2점).

(최대·최소 정리 언급 또는 유계인 닫힌 집합 언급).

↳ 0점 또는 2점. (연속 함수라는 언급 없어도 OK.)



ii). 위 삼각형의 내부에서의 극값을 구하기. (6점)

임계점 4개 모두 구한 뒤, ((−1,2), (1,2), (−1,2), (−1,−2))

⇒ (−1, 2) 와 (1, 2) 가 주어진 영역 안의 점들이라는 것을 명시.

(그렇지 않으면 0점)

그리고 $f((-1,2))$ 와 $f((1,2))$ 값 모두 구해야 함. (각각 3점씩).

(하지만, $f((1,2))$ 가 안장점이라는 사실을 유도했다면, $f(1,2)$ 값 안구해도 맞다고 인정).

((2점)).

iii). 3경우로 나누어 경계에서의 최대, 최소 구하기. ($x=y$, $x=-2$, $y=3$ 각각 4점).

⇒ 각 경계에서 극값 뿐만 아닌, 선분의 끝점 구해서 최대, 최소 구해야 함! (최대, 최소 각각 2점씩).

↳ 그렇지 않을 경우, 해당 경계 구하는 점수 무조건 0점.

↳ 풀이 방법 : 1). 라그랑주로 구할 때, 극값 구하고, 꼭지점 값 구해야 함.

2). (t,t), $(t, 3)$, $(-2, t)$ 에서 구할 때,

1)과 같이 극값 뿐만 아닌 최대 & 최소 구해야 함.

2015. 10. 17 수일연2 중간고사.

#6 모범답안.

(Sol 1) $e^{xy} = 1 + xy + O(xy)$, $\sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + O(y^4)$ 이므로 +5

$f(x,y) = e^{xy}\sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + xy^2 + O((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$ +5

$\Rightarrow$ 테일러 전개의 유일성에 의해 $T_3 f(x,y) = y - \frac{1}{3!}y^3 + xy^2$ +5

* '테일러 전개의 유일성' 언급 X or $O((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$을 다른식으로 쓴 경우 5점 감점
* 답을 정리하는 과정에서 계산이 틀린경우 5점 감점.
* $O((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$ 부분을 '나머지항이 4차 이상이므로'와 같이 표기해도 인정.
* $T_3 f(x,y)$를 $f(x,y)$와 같이 잘못 표기한 경우 5점 감점.

(Sol 2) $T_3 f(x,y) = f(0,0) + D_{(x,y)} f(0,0) + \frac{1}{2!} D^2_{(x,y)} f(0,0) + \frac{1}{3!} D^3_{(x,y)} f(0,0)$

혹은

$= f(0,0) + (xD_1 f(0,0) + yD_2 f(0,0)) + \frac{1}{2!}(x^2 D_1^2 f(0,0) + 2xy D_1 D_2 f(0,0) + y^2 D_2^2 f(0,0))$

$+ \frac{1}{3!}(x^3 D_1^3 f(0,0) + 3x^2 y D_1^2 D_2 f(0,0) + 3xy^2 D_1 D_2^2 f(0,0) + y^3 D_2^3 f(0,0))$

을 쓴 경우 +5.

$T_3 f(x,y) = y + xy^2 - \frac{1}{6}y^3$ 까지 잘 구한 경우 +10

* $T_3 f(x,y)$를 $f(x,y)$와 같이 잘못 표기한 경우 5점 감점.

7. $f(x,y) = \int_0^1 (\sqrt{t} - x - yt)^2 \, dt.$

라이프니츠 정리에 의해,

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \int_0^1 2(x+yt-\sqrt{t})\,dt = 2x+y-\frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \int_0^1 2t(x+yt-\sqrt{t})\,dt = x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{5}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2x+y-\frac{4}{3},\ x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{5}\right)$$ (+5 점)

임계점은 $\nabla f = 0$ 인 점이므로,

$$\begin{cases} 2x+y = \frac{4}{3} \\ x+\frac{2}{3}y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

를 풀면 $(x,y) = \left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right)$ 하나가 나온다. (+5점)

이제 $\left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right)$ 에서 f의 헤세 행렬을 계산하면

$$f''\left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ 이다. (+5 점)

$\det(f''(p)) = \frac{1}{3} > 0$ 이고 $(f''(p))_{(1,1)} = 2 > 0$ 이므로, 헤세 판정법에 의해

$\left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right)$ 는 극솟점이다. (+5점)

◎ ∇f, f'', 그리고 임계점 각각에 대해, 방법에 문제가 없고 답이 올바르면 각 5점.

◎ 임계점 혹은 f'' 이 틀렸다면 극대/극소/안장 판정에 대해 부분점수 없음

8번 모범 답안

$$F' = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix} \qquad G' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F' = e^{2x} \qquad \det G' = 3$$

$$\det(G'\cdot F') = \det G' \cdot \det F' = 3e^{2x}.$$

자코비안 행렬식 계산 : 5점

$\lim_{r\to 0} \dfrac{Area((G\circ F)(D(r)))}{\pi r^2}$ 은 넓이의 순간 변화율이고, $(1,0)$ 에서의 $G\circ F$ 의 자코비안 행렬식의 절대값과 같다.

자코비안 행렬식과 넓이 변화율의 관계 서술 10점
(π를 뺀 경우 −5점)

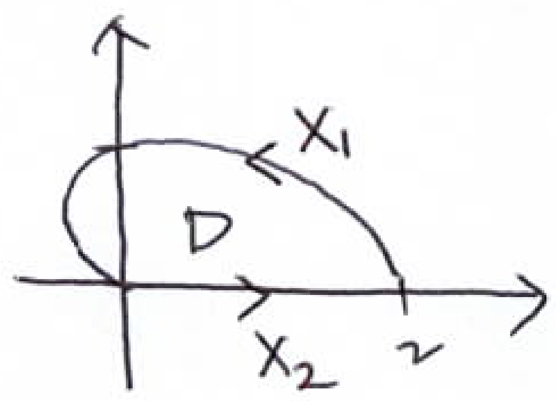
그러므로 $\lim_{r\to 0} \dfrac{Area((G\circ F)(D(r)))}{r^2} = \lim_{r\to 0} \pi \cdot \dfrac{Area((G\circ F)(D(r)))}{\pi r^2}$

$$= \pi \cdot 3e^{2x}\Big|_{x=1}$$

$$= 3\pi e^2$$

$x=1$ 대입한 후
정답 도출 : 5점

9번 주어진영역 D는



풀이1

$$\int_{\partial D} F\cdot d\vec{s} = \int_{X_1} F\cdot d\vec{s} + \int_{X_2} F\cdot d\vec{s}$$

- X_1의 매개화 $X_1(\theta) = (1+\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$ $0 \le \theta \le \pi$ 5점

$$\int_{X_1} F\cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi} ((1+\cos\theta)^2, (1+\cos\theta)\cdot\sin\theta)\cdot(-\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta, \cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\left(-(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta)+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} -2(1+\cos\theta)^2\sin\theta\, d\theta$$

$t = 1+\cos\theta$

$dt = -\sin\theta\, d\theta$

$$= \int_2^0 2t^2\, dt$$

$$= -\frac{16}{3}$$

10점

- X_2의 매개화 $X_2(t) = (t, 0)$ $0 \le t \le 2$

$$\int_{X_2} F\cdot d\vec{s} = \int_0^2 (t^2, 0)\cdot(1,0)\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

5점

$$\therefore \int_{\partial D} F\cdot d\vec{s} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

이 이외 부분점수 없음

9번 풀이2 잠재함수 이용한 풀이

$F_1(x,y)=(x^2,y)$, $F_2(x,y)=(y^2,0)$ 이라고 하면, F_1은 잠재함수 $\varphi(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2$을

갖고, ∂D가 폐곡선이므로 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_{\partial D} F_1 \cdot d\vec{s} = 0$$

5점

이제, $\partial D = X_1 \cup X_2$ 이고

$X_1(\theta) = (1+\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta) \quad 0 \le \theta \le \pi$

5점

$$\int_{X_1} F_2 \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \left(\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)^2,\ 0\right)\cdot\left(-\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta,\ \cdot\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi -\sin^3\theta\,(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\,d\theta$$

$\cos\theta = t$

$\downarrow$ $-\sin\theta\, d\theta = dt$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)(1+t)^2(1+2t)\,dt$$

$$= -\frac{8}{3}$$

5점

$X_2(t) = (t, 0) \quad 0 \le t \le 2$

$$\int_{X_2} F_2 \cdot d\vec{s} = \int_0^2 (0,0)\cdot(1,0)\,dt = 0$$

5점

$$\therefore \int_{\partial D} F \cdot d\vec{s} = \int_{\partial D} F_1 \cdot d\vec{s} + \int_{\partial D} F_2 \cdot d\vec{s} = 0 - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

잠재함수를 갖게 F를 다르게 쪼개도 됨.

이 이외 부분점수 없음

10

(a) ($\Rightarrow$) F가 일급이므로 잠재함수를 가지려면 닫힌벡터장이어야 한다.

따라서 $\begin{cases} D_1F_2 = D_2F_1 \\ D_1F_3 = D_3F_1 \\ D_2F_3 = D_3F_2 \end{cases}$ 로부터 $\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \end{cases}$ 이므로

A는 대칭행렬이어야 한다.

($\Leftarrow$) A가 대칭행렬이므로 $\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \end{cases}$ 로부터 $\begin{cases} D_1F_2 = D_2F_1 \\ D_1F_3 = D_3F_1 \\ D_2F_3 = D_3F_2 \end{cases}$ 이므로

F는 일급닫힌벡터장이다. 한 편, $\mathbb{R}^3$은 열린 볼록집합이므로

푸앙카레 도움정리에 의해 F는 잠재함수를 가진다. ┘+6점.

$\mathrm{grad}\,\varphi(x) = F(x)$ 라 하면,

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x \ y \ z)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + C \quad \text{또는} \quad \varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}a_{11}x^2 + \frac{1}{2}a_{22}y^2 + \frac{1}{2}a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx$$ ┘+4점.

(b) 양수 a를 하나 고정하고 $\varphi(x) = \int_a^{|x|} sf(s)\,ds$ 로 정의하자.

그러면 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = |x| f(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} = f(|x|)\cdot x_i$ ($|x| \neq 0$일 때), $i = 1, \cdots, n$

따라서 φ가 F의 잠재함수이다.

┘+10점.

- (a)에서 필요충분조건을 다 보이지 않은 경우 부분점수 없음.
- (b)에서 $\mathbb{R}^3$나 $\mathbb{R}^2$에 대해서만 증명한 경우 5점 감점.