1장 급수 Additional Problems

문제 1.1. [12Q1]

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^3}$ 은 발산함을 보이시오.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \frac{1}{n^3}$ 의 수렴여부를 판정하시오.

문제 1.2. [16Q1] 다음 급수의 수렴·발산을 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^n}{n! e^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(n^2+3)}{n^2(n+1)(n^2+2)}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(2n)^n}$

문제 1.3. [17Q1] 수열 $\{a_n\}_{n\geq 1}$이 다음과 같이 주어져 있을 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴 혹은 발산 여부를 확인하시오.

(1) $a_n = \frac{1}{3n^2 - 20}$

(2) $a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$

문제 1.4. [17Q1] 다음 급수가 수렴함을 증명하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & n\text{은 3의 배수} \\[2ex] -\dfrac{1}{n}, & n\text{은 3의 배수가 아닌 자연수} \end{cases}$$

문제 1.5. [17Q1]

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 그래프를 이용하여 임의의 자연수 n에 대해

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

임을 확인하시오.

(2) 위의 결과를 사용하여 극한값

$$\delta := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)$$

이 존재함을 보여라.

문제 1.6. [18Q1] 다음 급수의 수렴·발산을 판정하라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\sin n\right)^{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sin n$

문제 1.7. [18Q1] 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 2^{n}}{(n+\sqrt{n})^{n}}$$

의 수렴·발산을 판정하라.

문제 1.8. [18Q1] 급수 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n^{-n}$ 의 수렴·발산을 판정하라. 단,

$$a_n := \int_{1}^{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

이다.

문제 1.9. [19Q1] 다음 급수의 수렴·발산을 판정하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{(2.7)^{n}n!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{(\log n)^2}$

문제 1.10. [19Q1] 자연수 n에 대하여

$$s_n = \int_1^n \frac{\sin \pi x}{x} dx$$

일 때, 수열 (s_n) 이 수렴함을 보이시오.

문제 1.11. [19Q1] 피보나치 수열 (f_n) 은 점화식 $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ 으로 주어진다. 이 때 급수 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{f_n}}$ 의 수렴·발산을 판정하시오.

문제 1.12. [19Q1] 급수 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n$ 가 수렴하는 양수 a 의 범위를 구하시오.

문제 1.13. [19Q1] 급수 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 의 수렴여부를 판정하고 또 절대수렴 하는지 판정하시오.

문제 1.14. [19Q1] 다음 급수의 수렴·발산을 판정하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(1+\tan\frac{1}{n})^{n\cot\frac{1}{n}}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)\cdots\left(\sqrt{5}-n\right)}{(n+1)!\cdot\sqrt{5}^n}$

문제 1.15. [19Q1] 특이적분 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{5^x}{x^x}\,dx$ 가 존재함을 보이시오.

문제 1.16. [19Q1] 자연수 n 에 대하여, $a_n := \begin{cases} \dfrac{2}{n} & (n:\ 3\text{의 배수}) \\ -\dfrac{1}{n} & (n:\ 3\text{의 배수가 아닌 수}) \end{cases}$ 라고 할 때, 수열 $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{3n} a_k\right)_{n=1}^{\infty}$ 은 수렴함을 보이시오.

문제 1.17. [1] 다음 급수가 수렴하도록 하는 실수 p 의 범위를 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \cdot (\log\log n)^p}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$

문제 1.18. [1] 양항급수 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $\sum b_n < \infty$ 이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 이면 $\sum a_n < \infty$ 임을 보여라.

(2) $\sum b_n = \infty$ 이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ 이면 $\sum a_n = \infty$ 임을 보여라.

문제 1.19. [1] 수열 a_n $(a_n > 0)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$ 이면 $\sum a_n$ 은 발산함을 보여라.

(2) $\sum a_n < \infty$ 이면 $\sum \log(1+a_n) < \infty$ 임을 보여라.

(3) $\sum a_n < \infty$ 이면 $\sum \sin(a_n)$ 은 수렴하는지 조사하여라.

문제 1.20. [1] 양항급수 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 이 모두 수렴하면 $\sum a_n b_n$ 이 수렴하는지 조사하여라.