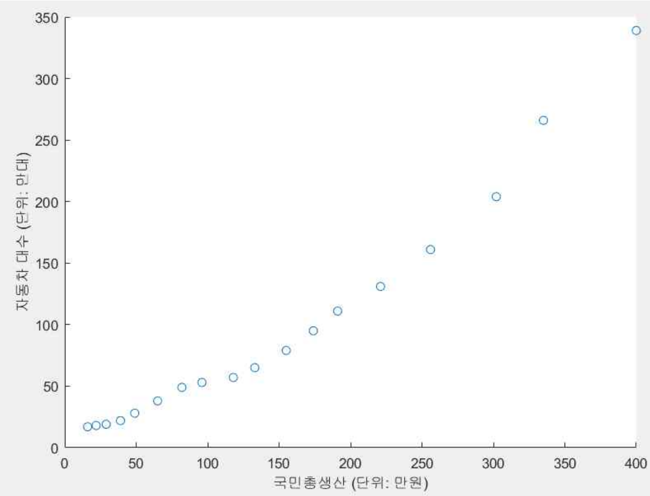
일반통계학(009) 3차 과제

8장 5번

(a)



(b)

$$r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}=\frac{\sum_{i=1}^{18}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{18}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{18}(y_i-\bar{y})^2}}=0.9748$$

(c)

이변량 정규 모집단을 가정했으므로, 검정통계량

$$t=\sqrt{n-2}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

는 귀무가설 H_0하에서 $t(16)$을 따른다.

관측값은 17.478이며 유의수준 1%에서 기각역은

$$t_{0.01}(16)=2.583\le t$$

이므로 관측값이 기각역에 포함되어 귀무가설을 기각한다. $\rho>0$이라고 할 만한 근거가 충분하다.

8장 9번

(a)

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\overline{x_1})(y_i-\bar{y})=2.0678$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\overline{x_2})(y_i-\bar{y})=17.0822$$

후자의 값이 더 크다.

(b) $\hat{y}=70.29+1.076x$ 로 회귀할 수 있다.

① $\hat{\beta}\pm t_{0.025}(8)\cdot\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}}=1.076\pm2.306\cdot\frac{2.268}{11.9541}$

$=(0.6385, 1.5135)$

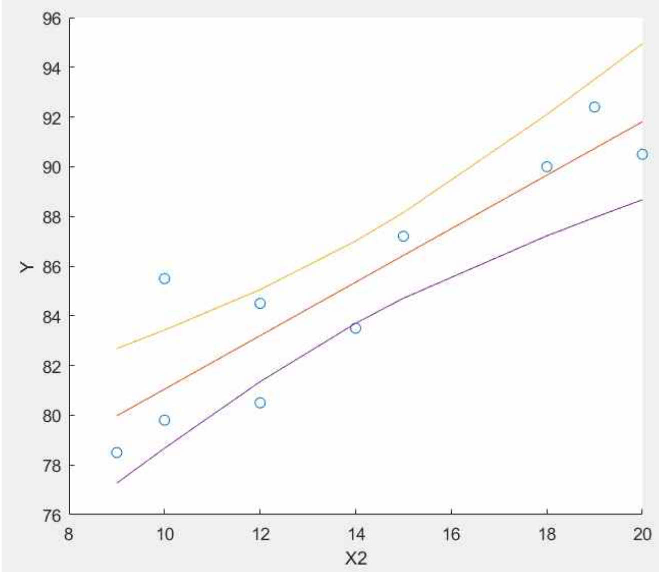
② 검정통계량은 귀무가설 하에서 $t(8)$분포를 따른다.

관측값은 $\frac{\hat{\beta}-1.0}{\hat{\sigma}/\sqrt{S_{xx}}}=0.4006$ 으로, 기각역인

$$t\ge t_{0.025}(8)=2.306$$

에 포함되지 않으므로 H_0를 기각할 수 없다.

③



(c)

다음 연립방정식을 푼다. ($\sum$는 $i=1$ to 10)

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{21} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum y_i\\ \sum x_{1i}y_i\\ \sum x_{2i}y_i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 36 & 139 \\ 36 & 132.72 & 513.7 \\ 139 & 513.7 & 2075 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}852.4\\ 3087.25\\ 12002.1\end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0=65.0152\,,\ \hat{\beta}_1=2.2852\,,\ \hat{\beta}_3=0.8632$$

$$\therefore\ \hat{y}=65.0152+2.2852x_1+0.8632x_2$$

분산분석표:

요인	제곱 합	자유도	평균 제곱	f값	유의확률
회귀	175.2407	2	87.6204	19.5751	0.001
잔차	31.3328	7	4.4761		
계	206.5735	9			

$R^2=1-\frac{SSE}{SST}=0.8483$ 이다.

9장 1번

우선, $\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})=(y_{i1}+y_{i2}+\cdots+y_{\in})-n\bar{y}_{i.}=0$

$$y_{ij}-\bar{y}_{..}=(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})+(y_{ij}-\bar{y}_{i.})$$

의 양변을 제곱하여 $\sum$ $i=1$ to k, $j=1$ to n를 하면

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$
$$+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{i.})$$

우변의 마지막 항이 0임을 보이자.

(마지막 항)$=2\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})=0$

또, 우변의 첫 번째 항은

(첫 번째 항)$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2=n\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$

따라서

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2$$

9장 8번

반복이 있는 이원배치법 모형을 사용한다.

모형 가정: $Y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+e_{ijk}$, $i=1,2,3,4$,

$j=1,2,3$, $k=1,2$

잔차는 선형성, 등분산성, 독립성, 정규성을 갖는다.

$$e_{ijk}\sim_{i.i.d.}N(0,\sigma^2)$$

$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum_{j=1}^{3}\beta_j=0$ 이며, $\sum_{i=1}^{4}\gamma_{ij}=\sum_{j=1}^{3}\gamma_{ij}=0$ 이다.

검정①: $H_0:\gamma_{ij}=0$ for $\forall i,j$ vs. H_1: not H_0

검정②: $H_0:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ vs. H_1: not H_0

검정③: $H_0:\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$ vs. H_1: not H_0

요인	제곱 합	자유도	평균 제곱	f값	유의확률
인자 A	3.33667	3	1.112222	10.11111	0.001323
인자 B	0.16583	2	0.082917	0.753788	0.491613
교호작용	2.570833	6	0.428472	3.895202	0.021548
잔차	1.32	12	0.11		
계	7.393333	23			

인자 A(성형온도) 에 대해서만 유의미한 차이가 존재한다. 또한, 교호 작용이 존재한다.