선형대수학 2 숙제 #4

2017-18570 컴퓨터공학부 이성찬

14.3.3 (나) $\{w_j\}$ 가 W 의 basis 일 때, $\{\varphi_H^V(w_j)\}$ 가 $\varphi_H^V(W)$ 의 basis 임을 보인다.

$$\overline{c_1}\varphi_H^V(w_1) + \cdots + \overline{c_n}\varphi_H^V(w_n) = 0 \iff \varphi_H^V(c_1w_1 + \cdots + c_nw_n) = 0 \tag{1}$$

이제 $v \in V$ 에서 evaluate 하면,

$$H(v, c_1w_1 + \cdots + c_nw_n) = 0$$

인데 H 가 non-degenerate 이므로 $c_1w_1 + \cdots + c_nw_n = 0$ 이다. $\{w_j\}$ 가 basis 이므로 $c_j = 0$ for all j. (일차독립)
$\varphi_H^V(W)$ 를 생성하는 것은 (1)으로부터 $\{w_j\}$ 가 W 의 basis 이므로 당연하다.

14.3.18 (가) $w \in \ker L^\star \iff L^\star(w) = 0$.

$$0 = \varphi_H^V(L^\star w) = (\varphi_H^V \circ L^\star)(w) = (L^* \circ \varphi_K^W)(w) = \varphi_K^W(w) \circ L$$

Evaluate at $v \in V$.

$$0 = (\varphi_K^W(w) \circ L)(v) = \varphi_K^W(w)(Lv) = K(Lv, w)$$

$\iff w \in (\operatorname{im} L)^\perp$. ($v$ 가 V 전체를 다 움직이면 Lv 는 $\operatorname{im} L$ 전체를 다 움직이므로)

(나) $v \in \operatorname{im} L^\star \iff v = L^\star w$ for some $w \in W$. $x \in \ker L$ 이면,

$$H(x, v) = H(x, L^\star w) = K(Lx, w) = 0$$

따라서 $v \in (\ker L)^\perp$. $\operatorname{im} L^\star \leq (\ker L)^\perp$.
이제 $v \in (\operatorname{im} L^\star)^\perp$ 라고 하면, 모든 $w \in W$ 에 대하여

$$0 = H(L^\star w, v) = K(w, Lv)$$

이고 K 가 non-degenerate 이므로 $Lv = 0$, $v \in \ker L$. $(\operatorname{im} L^\star)^\perp \leq \ker L$. 양변에 $\perp$ 를 취하면 $\operatorname{im} L^\star = (\ker L)^\perp$.

15.2.10 $\det(\alpha U) = 1$ 이 되도록 하는 α 를 찾으면 충분하다. det 는 alternating k-linear form 이므로 $\det(\alpha U) = \alpha^n \det U = 1$, $\alpha^n = 1/\det U$. ($U \in \mathbf{U}(n)$ 이므로 $|\det U| = 1 \neq 0$.) $\alpha = \sqrt[n]{1/\det U} \in \mathbb{C}$ 로 잡으면 성립한다. (복소수 범위에서 n-차 다항식은 n-개의 일차식으로 인수분해가 가능하다.)

15.2.14 A 의 eigenvalue 와 그에 대응하는 서로 수직인 eigenvector 를 찾아주면

$$\lambda_1 = 1 + \mathbf{i}, v_1 = (1, 1)^{\mathbf{t}} \qquad \lambda_2 = 1 - \mathbf{i}, v_2 = (-1, 1)^{\mathbf{t}}$$

이제 $U^{-1}AU = 1/\sqrt{2}\cdot \mathrm{diag}(1+\mathbf{i}, 1-\mathbf{i})$ 로 두고 eigenvector 의 크기가 1이 되도록 한다.

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathbf{i} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{\mathbf{SU}(2)}$$

따라서 $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$.

15.3.9 (가) $J = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ 로 잡고 eigenvalue 를 구하면 $\lambda = 1, 4$. 서로 수직인 두 eigenvector 를 구해 크기가 1 이 되도록 하면

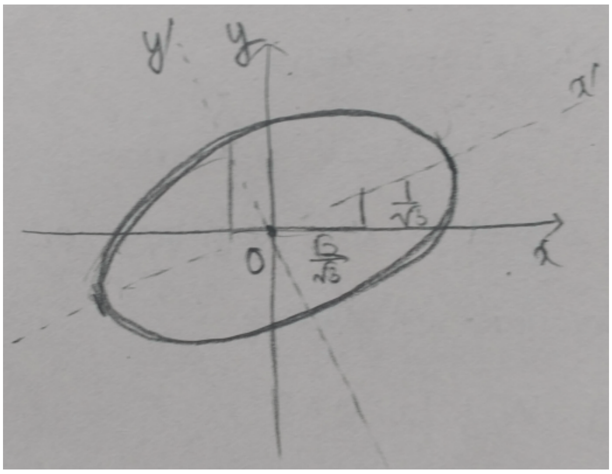
$$\mathfrak{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}, U = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$U^{-1}JU = \mathrm{diag}(1, 4)$$

따라서 $(x, y)^{\mathbf{t}} = U(x', y')^{\mathbf{t}}$ 로 치환하면

$$(x')^2 + 4(y')^2 = 4$$

를 얻는다. 이 이차곡선은 U 의 두 column 들을 각각 x', y'-축으로 하며, 타원이다.

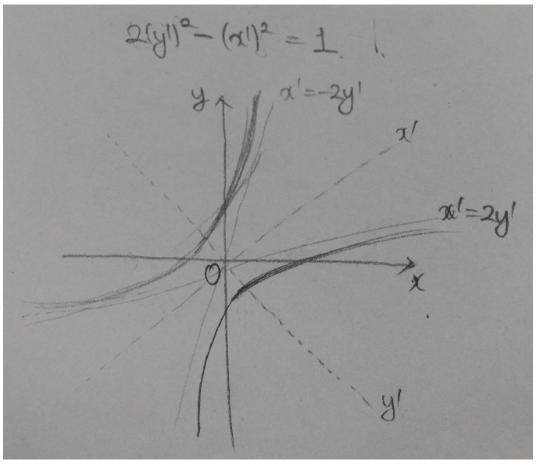


Plot of $2x^2 - 2\sqrt{2}xy + 3y^2 = 4$

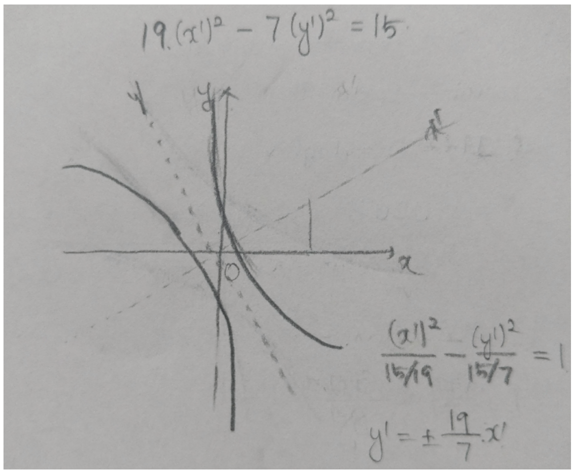
(나) (가)와 과정이 같다.
$J = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 로 잡고 eigenvalue 를 구해주면 $\lambda = -2, 4$ 를 얻는다. 마찬가지로 eigenvector 를 구하면,

$$\mathfrak{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1}JU = \mathrm{diag}(-2, 4)$$



Plot of $x^2-6xy+y^2=1$



Plot of $11x^2+24xy+y^2=15$

마찬가지로 $(x,y)^{\mathbf{t}}=U(x',y')^{\mathbf{t}}$ 로 치환하면

$$2(y')^2-(x')^2=1$$

이 된다. 이 이차곡선은 쌍곡선이다.

(다) (가)와 과정이 같다.
$J=\begin{pmatrix}11 & 12\\ 12 & 1\end{pmatrix}$ 로 잡고 eigenvalue 와 eigenvector 를 구해준다. $\lambda=19,-7$.

$$\mathfrak{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\},U=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$U^{-1}JU=\operatorname{diag}(19,-7)$$

마찬가지로 $(x,y)^{\mathbf{t}}=U(x',y')^{\mathbf{t}}$ 로 치환하면

$$19(x')^2-7(y')^2=15$$

이 된다. 이 이차곡선은 쌍곡선이다.

15.3.11 Let $J=[B]_{\mathfrak{B}}$.
(1) ⇒ (2): J 의 eigenvalue 를 λ, 그에 대응하는 eigenvector 를 v 라고 하자. $J[v]_{\mathfrak{B}}=\lambda[v]_{\mathfrak{B}}$.

$$B(v,v)=([v]_{\mathfrak{B}})^{\mathbf{t}}\cdot J\cdot[v]_{\mathfrak{B}}=([v]_{\mathfrak{B}})^{\mathbf{t}}\cdot\lambda\cdot[v]_{\mathfrak{B}}=\lambda\left\|[v]_{\mathfrak{B}}\right\|^2>0$$

이므로 $\lambda>0$ 인 실수이어야 한다.
(2) ⇒ (1): J 가 real symmetric matrix 이므로 Spectral Theorem 에 의해 J 의 eigenvector 들로 이루어진 V 의 orthonormal basis $\mathfrak{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ 가 존재한다. 이제 $v\in V$ 에 대하여 $v=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$ 으로 적고, $(c_i\in\mathbb{R})$

$$B(v_i,v_j)=([v_i]_{\mathfrak{B}})^{\mathbf{t}}\cdot J\cdot[v_j]_{\mathfrak{B}}=(\mathbf{e}_i)^{\mathbf{t}}\cdot\lambda_j\mathbf{e}_j=\lambda_j\delta_{ij}$$

이므로 $[B]_{\mathfrak{B}} = \big(B(v_i, v_j)\big)_{n\times n} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 이다. (λ_i 는 v_i 에 대응하는 eigenvalue)

$$\therefore B(v,v) = ([v]_{\mathfrak{B}})^{\mathbf{t}} \cdot [B]_{\mathfrak{B}} \cdot [v]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1 c_1^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2 > 0 \qquad (\lambda_i > 0, v \neq 0)$$

15.3.12 15.3.11에 magic bar 만 몇 개 붙이면 된다. Let $J = [H]_{\mathfrak{B}}$.
(1) $\Rightarrow$ (2): J 의 eigenvalue 를 λ, 그에 대응하는 eigenvector 를 v 라고 하자. $J[v]_{\mathfrak{B}} = \lambda [v]_{\mathfrak{B}}$.

$$H(\overline{v}, \overline{v}) = ([v]_{\mathfrak{B}})^* \cdot J \cdot [v]_{\mathfrak{B}} = ([v]_{\mathfrak{B}})^* \cdot \lambda \cdot [v]_{\mathfrak{B}} = \lambda \left\|[v]_{\mathfrak{B}}\right\|^2 > 0$$

이므로 $\lambda > 0$ 인 실수이어야 한다.
(2) $\Rightarrow$ (1): J 가 self-adjoint matrix 이므로 Spectral Theorem 에 의해 J 의 eigenvector 들로 이루어진 V 의 orthonormal basis $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 가 존재한다.[1] 이제 $v \in V$ 에 대하여 $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ 으로 적고, ($c_i \in \mathbb{C}$)

$$H(v_i, v_j) = ([v_i]_{\mathfrak{B}})^{\mathbf{t}} \cdot J \cdot \overline{[v_j]_{\mathfrak{B}}} = (\mathbf{e}_i)^{\mathbf{t}} \cdot \lambda_j \overline{\mathbf{e}_j} = \lambda_j \delta_{ij}$$

이므로 $[H]_{\mathfrak{B}} = \big(H(v_i, v_j)\big)_{n\times n} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 이다. (λ_i 는 v_i 에 대응하는 eigenvalue)

$$\therefore H(v,v) = ([v]_{\mathfrak{B}})^{\mathbf{t}} \cdot [H]_{\mathfrak{B}} \cdot [v]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1 c_1^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2 > 0 \qquad (\lambda_i > 0, v \neq 0)$$

15.4.8 (가) $U^{-1}AU = \operatorname{diag}(1, -1, -1)$ 이 되도록 만들어 본다. $U = \operatorname{diag}(B, 1)$ (B 는 2×2-matrix) 로 생각하면 $U \in \mathbf{SO}(3)$ 가 되기 위해 B 는 rotation 이어야 하므로 R_θ 로 둘 수 있다. 이제 다음 등식을 만족하는 θ 를 찾으면,

$$R_{-\theta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R_\theta = \operatorname{diag}(1, -1)$$

$\cos\theta \sin\theta = 1/2$, $\cos^2\theta = \sin^2\theta$ 로부터 $\theta = \pi/4$ 가 되어 $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 를 얻는다.

---

[1] Spectral Theorem: Positive Definite Hermitian Case 를 증명할 때 λ 가 T 의 eigenvalue 이면 $\overline{\lambda}$ 가 T^* 의 eigenvalue 임을 보이기 위해 positive definite condition 을 사용했었다. 하지만 (2)의 가정의 경우에는 self-adjoint 이므로 T 의 eigenvalue 만 아는 것으로 충분히 Spectral Theorem 을 증명할 수 있다.

(나) 우선 $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$ 이 되도록 한다. 주어진 행렬의 characteristic polynomial 은 $(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$ 이므로 각 eigenvalue 에 대하여 eigenvector 를 구해준다. (중근이므로 각각 2개씩 구한다)

$$\lambda = -1 \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^{\mathbf{t}}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^{\mathbf{t}}$$

$$\lambda = 1 \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)^{\mathbf{t}}, v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^{\mathbf{t}}$$

와 같이 잡으면 eigenvector 로 이루어진 orthonormal basis 가 된다. 그러므로 $U = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ 가 된다.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U^{-1}AU = \mathrm{diag}(-I_2, I_2) \in \mathbf{T}_{\mathbf{SO}(4)}$$