선형대수학 I. 기말고사. (2018. 6. 9)

1.
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\alpha_B"', "S"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "S"', "\alpha_C"] \\ F^n \arrow[r, "L_A"'] & F^m \end{tikzcd}$$

에서 B, C는 각각 V와 W의 기저이고 $A = [L]^B_C$ +10

㊟ A에 대한 적절한 설명이 없으면 5점 감점

2. A_n의 마지막 두 행에 대하여 생각해보면:

$$\det A_n = \left|\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{A_{n-2}} & \multicolumn{2}{c}{\begin{smallmatrix} & 0 \\ -1 & \end{smallmatrix}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\begin{smallmatrix} 0 & -1 \end{smallmatrix}} & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{array}\right| = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}.$$ +5

$\therefore \det A_n - \det A_{n-1} = \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$

$\vdots$

$= \det A_2 - \det A_1 = 1.$

$\therefore \det A_n = \det A_{n-1} + 1.$

초기값을 고려하면 $\det A_n = n+1.$ +5

3. Eigenvector를 구하여 대각화하면,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.88 \end{pmatrix}$$ +5

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.88 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} A^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\because (0.88)^m \longrightarrow 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$ +5.

4. A가 nilpotent 이기 때문에 $A^m = 0$ 인 자연수 m이 존재
즉, 다항식 t^m이 annihilator ideal의 원소이므로 A의 minimal polynomial 역시 t^r 꼴이다.
$\therefore \phi_A(t) = t^n.$ +10.

㊟ 삼각화를 이용하여도 무방 (맨 뒤 별해참고)

5. Minimal polynomial은 annihilator ideal 원소 중에서
monic이고 최저차항인 다항식이다. +4

(유일성 증명). Annihilator ideal 에서 monic 이고 최저차항인
서로 다른 다항식 $m_1(t)$, $m_2(t)$가 있다고 가정하자.
(Division algorithm) $\Rightarrow m_1(t) = p(t)m_2(t) + q(t)$, $\deg q(t) < \deg m_1(t)$
한편, $m_1(T) = p(T)m_2(T) + q(T)$ 이므로. or $q(t) = 0$.
$q(t)$ 역시 annihilator ideal의 원소이다.
$\therefore q(t) \neq 0$ 이라면, $\deg q(t) < \deg m_1(t)$ 이고 이는 $m_1(t)$가 최저 차수를
갖는 사실에 모순이다.
$\therefore q(t) = 0 \Rightarrow m_1(t) = p(t)m_2(t)$ 즉, $m_2(t) \mid m_1(t)$.

$m_1(t)$ 와 $m_2(t)$의 역할을 바꿔서 생각하면, 마찬가지로 $m_1(t) \mid m_2(t)$.
차수가 같은 monic 다항식이 서로 나누고 있으므로 $m_1(t) = m_2(t)$. +6.

6. $\dim E_\lambda^A = \dim \ker(\lambda I - A)$
$= n - \dim \operatorname{im}(\lambda I - A)$ (by dimension theorem)
$= n - \dim \operatorname{im}(\lambda I - A^t)$ (by rank theorem)
$= \dim \ker(\lambda I - A^t)$
$= \dim E_\lambda^{A^t}$ +10.

7. e_j를 F^{2n}의 표준단위벡터라 하자.
$x_j = e_j + e_{j+n}$ $(1 \leq j \leq n)$ 이라 하면,
$y_j = e_j - e_{j+n}$

$Ax_j = x_j$, $Ay_j = -y_j$

위 벡터들은 일차독립이므로,
$F^{2n} = \langle x_1, \dots x_n \rangle \oplus \langle y_1 \dots y_n \rangle$
$= E_1^A \oplus E_{-1}^A$ +3
이고 $\phi_A(t) = (t-1)^n(t+1)^n$ +3, $m_A(t) = (t-1)(t+1)$ +4.

8. 먼저 A의 minimal polynomial을 구해보면 $m_A(t) = (t-1)^3$.

∴ A의 Jordan canonical form의 후보는

$J_{(3,3)}$, $J_{(3,2,1)}$, $J_{(3,1,1,1)}$ 이다. +4

한편, $\begin{cases} rk(A-I) = 4. \\ rk(J_{(3,3)} - I) = 4 \\ rk(J_{(3,2,1)} - I) = 3 \\ rk(J_{(3,1,1,1)} - I) = 2 \end{cases}$

이므로 답은 $J_{(3,3)}$. 즉, A의 Jordan canonical form은

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & 0 & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$ +6

9. 행렬 $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$을 아래와 같이 정의

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N_j} & \text{if } i \neq j \text{ and } j \to i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{단, } N_j = |\{k \mid j \to k\}|)$$ +3

(보정1) 만약 A에 zero column이 있으면 이를 ${}^t(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$으로 대체한다.

(보정2) Google matrix G를

$G = dA + \frac{1-d}{n}\mathbb{1}$ 로 정의. 단 $d \fallingdotseq 0.85$. +7

4(별해). A를 삼각화하여

$A \sim B = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \; a_n \end{pmatrix}$ 라 하자.

B역시 nilpotent 인데 $B^m = \begin{pmatrix} a_1^m & & * \\ & a_2^m & \\ 0 & \ddots & a_n^m \end{pmatrix}$ 이므로,

$a_1 = \cdots = a_n = 0$ 임을 얻는다.

한편 $\phi_A(t) = \phi_B(t) = \det\left(tI - \begin{pmatrix} 0 & \ddots & * \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= t^n$.