

관성모멘트 측정

물리학실험1 (044): 김주만 조교님

실험 1-2 보고서

공과대학 컴퓨터공학부 2017-18570 이성찬

Abstract

이 실험에서는 물체에 힘을 주어 물체를 직접 회전시키고 물체의 운동을 분석하여 물체의 관성모멘트를 측정한다. 또, 각 물체의 종류에 따라 관성모멘트가 달라짐을 확인해 본다. 먼저 회전 장치의 관성모멘트를 구한 다음 회전 장치에 물체를 올리고 관성모멘트를 구해 이 값에서 회전 장치만의 관성모멘트를 빼는 방법으로 물체의 관성모멘트를 측정한다. 예상 오차 원인으로는 추가 받는 초기 속도와 공기저항 및 실 감은 횟수에 따른 장력의 차이를 짚었다.

1 Introduction

1.1 실험목적

뉴턴의 운동법칙에 의하면 $F=ma$ 이다. 이는 일반적으로 성립함이 알려져 있으며, 주로 직선 운동을 분석할 때 쓰이는 공식이다. 반면, 물체의 회전 운동을 분석할 때에는 비슷하면서도 다른 공식을 사용한다. 바로

$$\tau = I\alpha$$

라는 식이다.

여기서 τ 는 토크(돌림힘)이고 비유하자면 일종의 힘이고, α 는 각가속도로 회전각의 가속도를 나타낸다. 여기서 I 에 주목하면, I 는 관성모멘트로, $F=ma$ 에서 질량인 m 에 비유된다. 즉, 관성모멘트는 회전 운동에서 질량의 역할을 하는 물리량이다. 이 관성모멘트를 직접 확인하며 계산해 보고, 관련된 물리법칙인 평행축 정리 등을 실험을 통해 확인하고자 한다.

1.2 배경 이론¹⁾

1.2.1 토크(Torque)

토크($\vec{\tau}$)는 회전축으로부터 힘의 작용점까지의 거리 벡터(\vec{r})와 힘 벡터(\vec{F})의 외적으로 정의된 물리량이다. 식으로 표현하면

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

이다. 단위는 $N \cdot m$ 이다.

1.2.2 관성모멘트(Moment of Inertia)

질량이 m 인 물체가 어떤 회전축을 중심으로 회전한다고 하자. 이 물체를 매우 작은 조각으로 나눠 그 질량을 m_i 라 하고, 각 조각으로부터 회전축까지의 수직거리를 r_i 라고 하면, 관성모멘트(I)는 다음과 같이 정의된 물리량이다.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \text{ (이산)} \quad I = \int r^2 dm \text{ (연속)}$$

관성모멘트는 물체가 자신의 회전 운동 상태를 유지하려는 정도를 나타낸다. 마치 직선 운동에서 '질량'에 대응한다.

몇 가지 주요 물체들의 관성모멘트를 식으로 나타내 보면 다음과 같다. (질량: m)

1) 회전축으로부터 수직거리 r 인 물체의 관성모멘트: $I = mr^2$

2) 반지름 r 인 고리 혹은 파이프. 물체의 중심점을 지나며 고리에 수직인 회전축으로 회전시킬 때: $I = \frac{1}{2}mr^2$

3) 가득 찬 반지름 r 의 구를 구의 중심을 지나는 회전축으로 회전시킬 때: $I = \frac{2}{5}mr^2$

4) 반지름 r 인 구 껍질을 구의 중심을 지나는 회전축으로 회전시킬 때: $I = \frac{2}{3}mr^2$

1) [참조] 대학물리학, 이기영 저, 한빛미디어

5) 가로 a , 세로 b 인 직사각형 판을 직사각형의 무게중심을 지나고 판에 수직인 축으로 회전시킬 때: $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

1.2.3 평행축 정리

경우에 따라 물체의 관성모멘트를 계산하기가 매우 어려울 수도 있다. 이 때 이용할 수 있는 정리가 바로 평행축 정리이다. 질량이 m 인 물체의 질량 중심점을 중심으로 하는 회전축에 대한 관성모멘트가 I_{com} 일 때, 그 축에 평행이고 거리가 h 만큼 떨어진 다른 회전축에 대한 관성모멘트 I 는 다음과 같다는 정리이다.

$$I = I_{com} + mh^2$$

1.2.4 실험 장치에서 각가속도 구하기

추가 자유 낙하하며 받는 힘은 mg 이고 장력은 T 이므로, $F_{net} = ma = mg - T$ 가 된다. 한편 $a = R\alpha$ (α 는 각가속도) 이므로,

$$mg - T = mR\alpha$$

토크는 $\tau = I_0\alpha = RT$ 이므로 T 를 소거하여 α 에 대해 정리하면,

$$\therefore \alpha = \frac{mgR}{mR^2 + I_0}$$

한편 이를 I_0 에 대해 정리하면,

$$I_0 = \frac{mgR}{\alpha} - mR^2$$

1.3 실험 과정

1.3.1 준비물

CCD Camera, 컴퓨터, 추, 사각 원판, 원환 시료, I-CA 시스템, 버니어캘리퍼스, 전자저울이 필요하다.

1.3.2 실험 기본 세팅

기본적인 세팅을 잘 해두어야 결과가 이론값에 가깝게 나온다. 특히, 회전 장치가 테이블과 수평이 되도록 하는 것과 좌표를 올바르게 설정하는 것은 매우 중요하다.

1) 버니어캘리퍼스를 이용하여 실험장치의 회전축 반경 및 시료의 길이를 측정한다.

2) 전자저울로 시료의 질량을 측정한다.

3) 실험장치가 테이블과 수평이 되도록 하여 고정한다.

4) 추를 매달고 실의 길이를 조절하거나 도르래의 높이를 조절하여 추가 바닥에 닿지 않도록 한다.

5) I-CA 프로그램을 사용하여 카메라에서 초점, 밝기를 조절하고 추를 떨어뜨려 보며 회전판이 회전함을 관찰하고 카메라가 정상적으로 작동하는지 확인.

6) 회전판의 중심을 원점으로 하는 좌표계를 설정한다. 회전판의 중앙으로부터 색상 인식 스티커까지의 길이로 축척을 잡는다.

1.3.3 회전 장치 자체의 관성모멘트

회전 장치도 자체적으로 회전하기 때문에 관성모멘트가 존재하며, 이 값은 추후의 실험을 통해 얻은 물체의 관성모멘트 값에서 빼주어야 하므로, 측정해야 한다.

1) 회전 장치에 아무것도 올려놓지 않은 상태에서 화면 녹화를 시작하고 추를 떨어뜨린다. 여기서 추가 다시 올라오기 전에 녹화를 중단해야 하며, 녹화된 동영상을 프레임 기준으로 분석한다.

2) 회전 장치 자체의 각가속도 α 를 구하고 회전 장치의 관성모멘트 I_0 를 구한다.

3) 위 과정을 3번 반복하여 회전 장치 자체의 관성모멘트 값을 확정한다.

1.3.4 기타 시료들의 관성모멘트 측정

이 실험에서는 다양한 물체들의 관성모멘트를 측정한다. 사각 판, 원판, 원환 시료에 대하여 다음 과정을 반복한다.

1) 회전 장치에 시료를 올려두고 추를 낙하시킨다. 추가 다시 올라오기 전에 녹화를 중단하고, 동영상을 분석한다. 이 과정을 3번 반복한다.

2) 3번의 시행을 통해 얻은 데이터에서 회전 장치 + 시료의 관성모멘트를 구하고, 이

값에서 회전 장치의 관성모멘트 값을 빼주면
시료의 관성모멘트를 얻는다.

2 Results

2.1 기본 측정값

실험 장치 및 시료에서 측정한 값들이다.

회전 장치 반경(R): $4.32 \times 10^{-2} \text{ m}$

회전판의 중심~스티커: $1.05 \times 10^{-1} \text{ m}$

추의 질량: $5.2 \times 10^{-2} \text{ kg}$

사각 판의 질량: $6.42 \times 10^{-1} \text{ kg}$

사각 판의 가로 길이: $1.80 \times 10^{-1} \text{ m}$

사각 판의 세로 길이: $9.1 \times 10^{-2} \text{ m}$

원판의 질량: $6.02 \times 10^{-1} \text{ kg}$

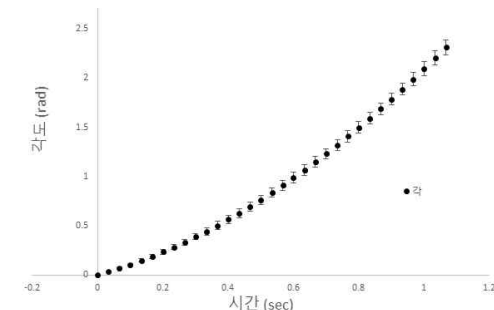
원판의 반지름: $9.035 \times 10^{-2} \text{ m}$

원환의 질량: $6.08 \times 10^{-1} \text{ kg}$

원환의 긴반지름: $9.035 \times 10^{-2} \text{ m}$

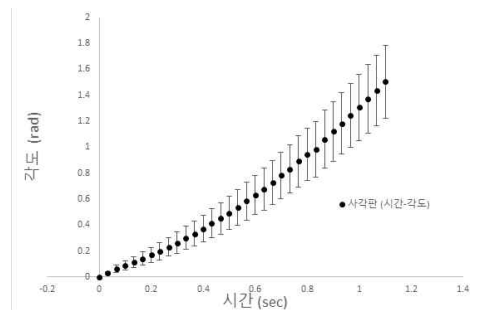
원환의 짧은반지름: $7.95 \times 10^{-2} \text{ m}$

2.2 회전 장치 측정 결과



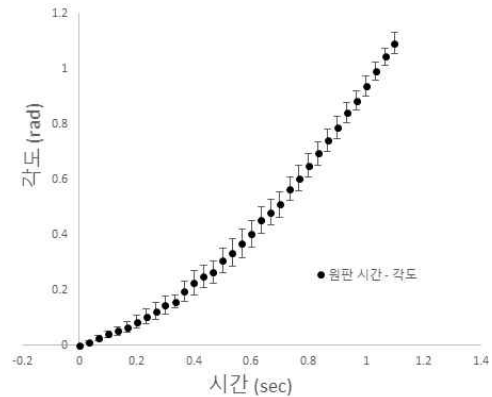
그래프 1: 시간에 따른 회전 장치의 회전각
Mathematica Fitting 결과: $\theta = 1/2 \cdot 3.626t^2$

2.3 사각 판을 올렸을 때 측정 결과



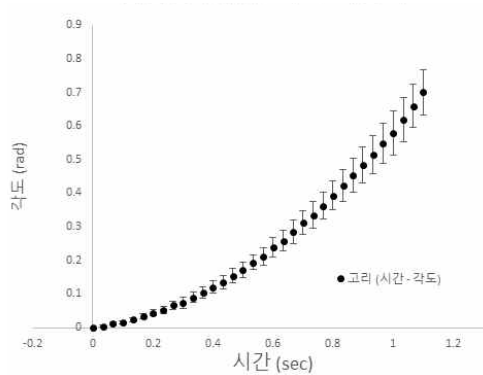
그래프 2: 사각 판을 올렸을 때 시간에 따른 회전 장치의 회전각, Fitting 결과 $\theta = 1/2 \cdot 2.57t^2$

2.4 원판을 올렸을 때 측정 결과



그래프 3: 원판을 올렸을 때 시간에 따른 회전 장치의 회전각
Fitting 결과: $\theta = 1/2 \cdot 2.46t^2$

2.5 원환을 올렸을 때 측정 결과



그래프 4: 원환을 올렸을 때 시간에 따른 회전 장치의 회전각
Fitting 결과: $\theta = 1/2 \cdot 1.995t^2$

3 Discussion

3.1 회전 장치의 관성모멘트

추세선 으로부터 얻은 각가속도의 값은 3.626 rad/s^2 이다. 이 각가속도 값을 1.2.4에서 구한 마지막 식의 α 에 대입해 주면 I_0 의 값을 찾을 수 있고,

$$I_0 = 5.97 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

라는 결론을 얻는다.

3.2 사각 판의 관성모멘트

질량이 m 이고 가로 길이 a , 세로 길이 b 인 사각 판을 사각 판의 무게 중심을 지나고 판에 수직인 회전축으로 회전 시킬 때

관성모멘트는 $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ 이므로, 측정

값을 대입해 보면

$$I = \frac{1}{12} \times 6.42 \times 10^{-1} \text{ kg} \times \{ (1.80 \times 10^{-1} \text{ m})^2 + (9.1 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \} = 2.1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

로 이론적인 관성모멘트 값을 얻는다.

그래프 2에서 얻게 되는 각가속도의 값은 이차항의 계수의 2배인 2.57 rad/s^2 이며 이 값을 1.2.4에서 구한 마지막 식에 대입하면 회전 장치와 사각 판의 관성모멘트 합은

$$I = 8.47 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

를 얻는다. 이 값에서 회전 장치의 관성모멘트 값인 I_0 를 빼주면

$$I_{\text{사각}} = 2.49 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

를 얻으며, 이는 참 값과 비교할 때 오차율 18%의 값이다.

3.3 원판의 관성모멘트

반지름이 r , 질량이 m 인 원판을 원판의 중심을 지나고 원판에 수직인 축으로 회전시킬 때의 관성모멘트가 $I = \frac{1}{2}mr^2$ 이므로, 측정값을 대입하면 원판의 관성모멘트는

$$I = \frac{1}{2} \times (6.02 \times 10^{-1} \text{ kg}) \times (9.035 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

이 값을 이론적으로 알 수 있다.

그래프 3에서 얻게 되는 각가속도의 값은 2.46 rad/s^2 이다. 이제 이 값을 1.2.4에서 구한 마지막 식에 대입하면 원판과 회전 장치 전체의 관성모멘트 값을 구할 수 있다.

$$I = 8.85 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

를 얻으며 여기서 I_0 를 빼면

$$I_{\text{원판}} = 2.87 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

를 얻는다. 참값과 비교할 때 오차율은 10%.

3.4 원환의 관성모멘트

짧은반지름이 r_1 , 긴반지름이 r_2 이고 질량이 m 인 원환의 관성모멘트는 다음과 같다.

$$I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$$

측정한 값들을 대입하여 계산하면, 원환의 관성모멘트 값은

$$I = \frac{1}{2} \times (6.08 \times 10^{-1} \text{ kg}) \times \{ (7.95 \times 10^{-2} \text{ m})^2 + (9.035 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \} = 4.4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

임을 알 수 있다.

그래프 4에서 얻게 되는 각가속도의 값은 1.995 rad/s^2 이므로 이를 대입하면 원환과 회전 장치 전체의 관성 모멘트 값은

$$I = 1.09 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

여기서 I_0 를 빼주면

$$I_{\text{원환}} = 4.93 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

를 얻는다. 참값과 비교할 때 오차율은 12%이다.

3.5 오차 원인 분석

예상되는 오차원인으로는 다음이 있다.

3.5.1 추의 초기 속도의 존재 및 공기 저항

I-CA 프로그램에서 촬영 시작을 누른 후 손으로 회전 장치를 놓았기 때문에 완벽한 추의 자유낙하가 될 수 없다. 더불어 추가 낙하하면서 공기 저항도 분명 존재했을 것이다. 이 점들이 실험 장치에 영향을 주었을 것이다. 초기 속도를 0으로 만들어 추를 자유낙하 시키려고 노력했으나 다소 어려운 부분이 있었다. 데이터에서 초기 속도에 영향을 받게 될 초기 부분을 잘라내고 중간 부분부터 분석하면 더욱 정확해 질 것이다.

3.5.2 정확하지 않은 원점 설정

실험 결과에서 얻은 x 좌표와 y 좌표를 제공해서 더해보니, 값들이 일정하지 않았다. 실제 실험 장치에서 회전판의 중심과 스티커까지의 거리가 10.5 cm라는 것을 측정했지만 실제 I-CA의 분석 결과 데이터에서는 $x^2 + y^2 = 10.5^2$ 을 만족하지 않았다. 실험 당시 원점을 정확하게 잡으려고 노력했으나 스

티커의 정확한 중앙이 원점으로 잘 잡히지 않아 원점을 잡는데 어려움이 있었다.

4 Conclusion

이 실험에서는 회전 장치와 추를 사용하여 다양한 물체들의 관성모멘트를 측정해 보았다. 먼저 회전 장치의 관성모멘트를 측정하고, 물체를 올린 다음 전체의 관성모멘트를 측정하여 회전 장치의 관성모멘트를 빼주면 원하는 물체의 관성모멘트 값을 얻을 수 있다는 사실을 알았다.

실제로 사각 판은 $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$,

원판은 $I = \frac{1}{2}mr^2$,

원환은 $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ 이 관성모멘트임을 실험을 통해 확인하였다.

* Reference

- Analytic Mechanics, Fowles & Cassiday, Cengage Learning
- 대학물리학, 이기영, 한빛미디어
- Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Serway/Jewett, Cengage Learning