

용수철 흔들이의 운동

물리학실험1 (044): 김주만 조교님

실험 1-7 보고서

공과대학 컴퓨터공학부 2017-18570 이성찬

Abstract

이번 실험에서는 용수철 흔들이를 이용하여 용수철 및 진자의 진동 운동에 대해 알아보고 운동 궤적과 운동의 주기에 대해 조사한다.

1 Introduction

1.1 실험목적

평형 상태로 가려는 복원의 특성을 갖는 계들이 있다. 역학계에서 이런 복원 특성은 용수철 같은 경우 복원력으로 나타난다. 또한 질량이 있는 모든 물체는 관성을 갖고 있다. 이 복원력과 관성이 함께 나타나면 Simple Harmonic Motion이 나타난다.

이 실험에서는 용수철을 이용해 vertical oscillator와 진자에 대하여 각각 조사한다. 그리고 운동하는 물체에 힘을 주는 방법에 따라 진동자는 더욱 다양한 운동 상태/궤적을 갖게 된다. 이 다양한 운동 상태들은 여러 가지 운동 상태의 결합으로 나타나게 된다. 운동 상태들이 결합되는 방식에 대해 공부해 본다.

1.2 배경 이론¹⁾

1.2.1 중력장에서의 vertical oscillator

편의를 위해 용수철의 질량을 무시하고 용수철의 추를 질점으로 간주하고 생각하자.

천장에 한쪽 끝이 고정된 용수철 상수 k 인 용수철이 있다. 여기에 질량 m 인 추를 달아준다. 이때 늘어난 길이를 x 라고 하면 Hooke's Law에 의하여 용수철의 복원력은 $F = -kx$ 로 나타난다.

중력장 안에 있으므로 중력까지 고려하면, 질점에 대한 운동방정식은

$$F_{net} = mg - kx = m\ddot{x}$$

이며, 이 방정식의 일반해는

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

이고, 진폭 x_m 과 위상 ϕ 는 초기 조건으로부터 구해낼 수 있게 된다.

정밀한 분석을 위해 용수철의 질량 또한 고려하고 용수철의 추 또한 질점이 아니라고 하자. 용수철은 균일하며 질량이 M 이고 늘어지기 전의 길이는 L 이다.

용수철에 질량 m 인 추를 매달면 용수철이 늘어난 길이는 위치에 따라 달라진다. 용수철 한쪽 끝이 매달린 곳으로부터의 거리를 y 라고 하면, 늘어난 길이는 다음과 같다.

$$x(y) = \frac{g}{k} \left(m + \frac{M(L-y)}{L} \right)$$

이를 질량이 0이지만 위치에 따라 용수철 상수 k 의 값이 변하는 용수철로 바꾸어 생각하면 이 용수철의 용수철 상수 $k'(y)$ 는

$$k'(y) = \frac{km}{m + \frac{M(L-y)}{L}} \left(= \frac{mg}{x(y)} \right)$$

이므로 평균 용수철 상수 k_{avg} 는

$$k_{avg} = \frac{1}{L} \int_0^L k'(y) dy = k \frac{m}{M} \ln \left(1 + \frac{M}{m} \right)$$

이고 $M \ll m$ 이면 테일러 전개로부터

$$k_{avg} \approx k \left(1 - \frac{M}{2m} \right)$$

과 같이 근사할 수 있다.

새로운 용수철 상수로 운동방정식을 세우

고 계산하면 $\omega' = \sqrt{\frac{k_{avg}}{m}} \approx \sqrt{\frac{k}{m + M/2}}$ 이

1) [참조] Fowles, Analytic Mechanics

고, 특히 이 운동의 주기는 다음과 같다.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m+M/2}{k}}$$

1.2.2 공기 저항을 고려한 진동

Vertical oscillator가 속력에 비례하는 저항($-cv$)을 받는다고 하자. 운동방정식은

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - mg = 0$$

$$\frac{c}{2m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{이라 하면 위 식은}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = g$$

이고 이 식의 해는 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 의 해에 g 를 더한 것이다.

미급 감쇠 ($\gamma^2 < \omega_0^2$)인 경우에는 $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ 으로 정의하며, 오일러의 정리를 적절히 이용하면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \theta_0)$$

이 운동의 주기는 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ 다.

1.2.3 2차원 조화 진동(리사주 도형)

$\vec{F} = -k\vec{r}$ 와 같은 2차원 진동자에서 x, y 축으로 분리하여 운동방정식을 세우면

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

와 같은 식을 얻으며, 풀어주면

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \alpha), \quad y(t) = B \cos(\omega_0 t - \beta)$$

와 같은 결과를 얻게 된다. α, β 는 초기 위상에 관한 항인데, 위상에 따라 운동 궤적이 달라진다. $\delta = \alpha - \beta$ 라 하면,

$$\delta = \pm \pi/2 \text{ 이면 } \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (\text{타원})$$

$$\delta = 0 \text{ 이면 } y = \frac{B}{A}x \quad (\text{직선})$$

$$\delta = \pm \pi \text{ 이면 } y = -\frac{B}{A}x \quad (\text{직선})$$

과 같은 결과를 얻는다.

일반적으로 x, y 축 방향으로 각진동수가 같을 필요는 없다. 이 경우에는

$$x(t) = A \cos(\omega_x t - \alpha), \quad y(t) = B \cos(\omega_y t - \beta)$$

가 되며, δ 값에 따라 운동 궤적이 다양한 모양이 되는데, 이 곡선을 리사주 도형(Lissajous Curve) 이라고 한다.

1.2.4 단진자의 운동

길이가 l 인 실의 한쪽 끝을 천장에 고정시키고 질량 m 인 추를 달아 실이 연직과 θ_0 의 각을 이루는 상태에서 놓는다. 복원력이

$$F = -mg \sin \theta$$

이므로 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

주로 $\theta \ll 1$ 이라 두고 $\sin \theta \approx \theta$ 로 근사하여 주기를 $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ 로 많이 쓰지만, 일반적인 각에 대해서도 구해본다. $\dot{\theta} = u$ 로 치환하여 미분방정식을 풀어주면,

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

$$\sin u = \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_0}{2} \text{로 치환하면,}$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du, \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

무한급수를 활용하여 주기를 근사적으로 구하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right]$$

$\sin \theta$ 의 급수를 이용해 2차항까지 전개하면

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right)}$$

1.3 실험 과정

1.3.1 준비물

용수철, 스탠드, 컴퓨터, CCD Camera, 추 받침, 각종 질량의 추, 실타래

1.3.2 실험 기본 세팅

실험 장치가 지면과 수직이 되도록 하고, 흔들리지 않도록 잘 조절해야 한다. 그리고 추를 떨어냈을 때 용수철이 원래 길이로 돌아가는지 확인해야 한다. I-CA의 기본 세팅에 유의하고, 공에 초점을 맞추고 카메라의 수평/수직에 유의한다.

1.3.3 실험 방법

1) 우선 추의 무게에 따른 용수철의 길이

변화를 측정하여 k 의 값을 찾아낸다.

2) 추의 질량을 바꾸어 가며 추의 상하 운동을 관찰하고 주기를 구한다. 측정된 데이터로 그래프를 그리고, 주기의 이론값과 실험값을 비교한다.

3) 2차원 진동운동으로 리사주 도형을 관찰

4) 단진자의 주기를 측정한다. 적당한 각도에서 떨어뜨리고 실의 길이에 대해서도 변화를 주며 측정한다.

2 Results

2.1 기본 측정값

실험 장치와 준비물의 기본 측정값과 세팅 값들이다.

용수철 초기 길이 $1.48 \times 10^{-1} \text{ m}$

용수철의 질량 $1.05 \times 10^{-2} \text{ kg}$

추 통의 질량 $6.45 \times 10^{-2} \text{ kg}$

2.2 측정 결과

2.2.1 용수철 상수 측정

질량 $3.15 \times 10^{-1} \text{ kg}$ 인 추를 달았을 때 용수철의 길이가 $6.62 \times 10^{-1} \text{ m}$ 가 되었다.

$kx = mg$ 로부터 $k = 4.67 \text{ N/m}$ 임을 구했다.

2.2.2 용수철 진자의 주기 측정

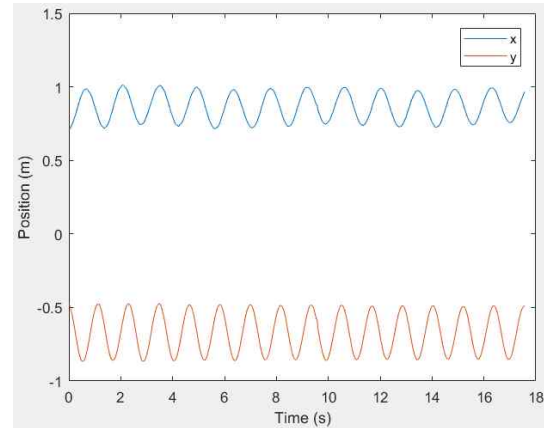
5, 20, 40, 50, 100 g의 추로 모두 각각 3회씩 측정하였다. 측정 결과는 모두 MATLAB을 이용하여 Curve Fitting하였다. 공기에 의한 감쇠 효과도 고려하여 $Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) - B$ 의 형태로 Fitting 하였다. ω 의 값으로부터 주기 T 를 알 수 있게 된다. ω_{avg} 의 단위는 rad/s , 주기의 단위는 s이다.

이론에 의한 주기는 $T_1 = 2\pi \sqrt{(m + M/2)/k}$ 아래의 결과는 질량에 따른 평균 각진동수와 주기 T 이며, T_1 은 이론값이다.

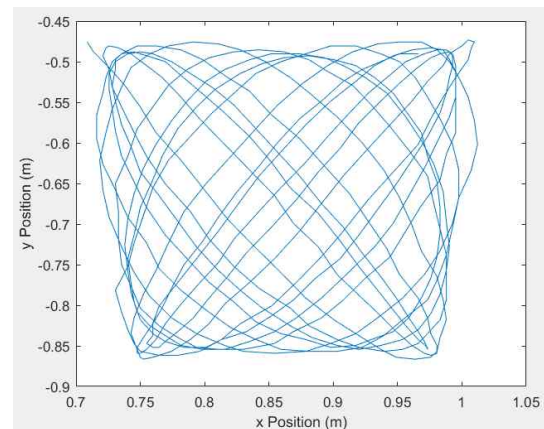
질량	ω_{avg}	S.E.	T	T_1
5 g	8.51	0.05	0.738	0.794
20 g	7.53	0.01	0.834	0.871
40 g	6.82	0.07	0.921	0.963
50 g	6.45	0.003	0.975	1.01
100 g	5.39	0.001	1.17	1.20

2.2.3 리사주 도형 관찰

아래 그래프는 x , y 축의 운동을 각각 따로 그래프로 나타낸 것이다.



아래 그래프는 추의 운동 궤적을 좌표평면에 점으로 찍고 선분으로 연결한 것이다.



2.3.4 단진자의 주기 측정

길이와 각을 변화시켜가며 진자의 운동을 측정해 보았다. Curve Fitting을 통해 ω 값을 알아내어 주기 T 를 알 수 있게 된다.

$\theta \ll 1$ 일때는 $T_1 = 2\pi \sqrt{l/g}$ 이고, 1.2.4을 바탕으로 $T_2 \approx 2\pi \sqrt{l/g \cdot (1 + \theta_0^2/16)}$ 라 하자.

ω 의 단위는 rad/s , 초기 각 θ_0 의 단위는 rad , 주기들의 단위는 모두 s이다.

길이	ω	θ_0	T	T_1	T_2
0.52m	4.25	0.454	1.48	1.45	1.47
0.56m	4.10	0.844	1.53	1.50	1.52

0.52m 일 때 표준오차: 0.03

0.56m 일 때 표준오차: 0.01

3 Discussion

3.1 측정 결과

3.1.1 용수철 진자의 주기 측정

추의 질량이 증가할수록 ω_{avg} 의 값이 감소한다는 것을 확인하였다. 실제로 $\omega^2 = k/m$ 이니 이론과 일치한다.

반면 95%에서 추정된 T 의 신뢰구간에 T_1 이 들어가는 경우가 40g로 실험한 경우 밖에 없었다.

3.1.2 리사주 도형 관찰

x, y 축이 각각 주기가 다르게 진동하고 있음을 확인할 수 있었고, 이 운동들의 합성이 리사주 도형으로 나타남을 확인하였다.

3.1.3 단진자의 주기 측정

실의 길이가 길어지면 주기 또한 길어지는 경향성을 볼 수 있었고, 길이가 같을 때 초기 각이 클수록 주기 또한 길어지는 경향을 확인할 수 있었다.

반복 실험에서 실의 길이가 같으면 T_1 은 모두 값이 같아지지만, 초기 각 θ_0 를 고려해 주면 주기의 값이 달라진다는 것을 알 수 있었고, 실험값과 이론값의 오차는 T_1 일 때보다 T_2 일 때가 더 작다. 오차율을 비교했을 때, T_2 가 T_1 보다 약 1.4%가량 작아 T_2 로 근사했을 때는 오차율이 0.6%가 되었다. T_2 공식의 근사가 더 정확할 것이다.

3.2 오차 원인 분석

예상되는 오차원인으로는 다음이 있다.

3.2.1 용수철 상수 k 측정의 어려움

용수철 상수를 측정할 때에는 용수철을 수평면에 두고 용수철과 물체를 실로 연결하여 물체가 중력을 받도록 한 후 늘어난 길이를 측정하는 방법을 택해야 한다. 하지만 물체가 중력을 받으며 가만히 있는 상태에서 용수철의 늘어난 길이를 자유롭게 조절할 수 있는 문제가 생겨 어쩔 수 없이 연직방향에

매달고 용수철 상수를 측정했다.

3.2.2 운동의 측면

실험값들을 계산할 때에는 모두 평면 상에서 일어나는 운동으로 간주했지만, 실제로는 3차원에서 일어나는 운동이기에 오차가 생길 것이다. 더불어 추가 진동 과정에서 자체적인 흔들림 또한 존재할 것이다.

3.2.3 측정의 측면

진자의 주기를 측정하는 실험에서 추를 스탠드에 실로 연결했는데, 이 실이 약해 실이 끊어지기도 하였다. 실험 중간에 길이가 늘어난 경우도 존재할 것이다.

실의 길이를 측정할 때, 실이 스탠드에 고정된 점으로부터 추를 담는 통의 무게중심까지를 재야하는데 통의 무게중심이 명확하지 않아 실의 길이가 정확하지 못하다.

4 Conclusion

이 실험을 통해서 용수철의 진동 운동에 대해 살펴보았다. 용수철의 질량을 고려하여 진동의 주기를 계산하여 그 결과를 확인하였고, 2차원 평면상의 진동을 통해 리사주 도형을 관찰하였다. 관찰을 통해 복잡한 형태의 운동이 x, y 방향의 진동의 합성으로 이루어짐도 확인하였다.

마지막으로 진자의 주기를 측정해 보았다. $\sin\theta \approx \theta$ 를 이용해 주기를 $2\pi\sqrt{l/g}$ 이라고 했을 때와 무한급수로 보다 더 정확하게 근사했을 때 각각 실험값에 대한 오차를 계산하여 후자의 식이 오차가 적다는 것을 알 수 있었다.

* Reference

- 이기영, 대학물리학, 한빛미디어
- Serway, Raymond, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9th Ed., Cengage Learning
- Fowles, Cassiday, Analytical Mechanics
- Thornton, Marion, Classical Dynamics