선형대수학 과제 4

2017-18570 이성찬

7.4.7 (Cayley-Hamilton Theorem 첫 번째 증명) 교재에서와 마찬가지로

$$\phi_T(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I) = 0$$

을 보이면 된다. 위 식에서 왼쪽의 $k(\leq n)$개 항을 곱해 얻은 행렬의 왼쪽 k개의 column 이 zero column 임을 보이면 충분하다. 수학적 귀납법을 활용한다.

(i) $k = 1$ 일 때, $T - \lambda_1 I$의 첫 번째 column 은 zero column 이다. 그리고 이 행렬은 upper-triangular 이다.

(ii) $k\ (< n)$ 일 때, $A = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_k I)$ 의 왼쪽 k개의 column 이 zero column 이라고 가정하자. 연습문제 1.1.7 (가)에 의하면 두 upper-triangular matrix의 곱은 upper-triangular matrix 이기 때문에, $A = (a_{ij})$ 는 upper-triangular 이다. $B = T - \lambda_{k+1} I = (b_{ij})$ 로 두고 $AB = (c_{ij})$ 가 upper-triangular 이고 왼쪽 $k + 1$개의 column 들이 모두 zero column 임을 보이면 된다. $j \leq k + 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} c_{ij} = \sum_{x=1}^{n} a_{ix} b_{xj} &= \sum_{x=1}^{k} a_{ix} b_{xj} + \sum_{x=k+1}^{n} a_{ix} b_{xj} \\ &= \sum_{x=1}^{k} 0 \cdot b_{xj} + \sum_{x=k+1}^{n} a_{ix} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

($a_{ix} = 0$ for $x \leq k$, 그리고 $b_{x,k+1} = 0$ for $k + 1 \leq x \leq n$)

따라서 $k + 1$ 일 때도 성립한다. 그러므로 $\phi_T(T)$의 왼쪽 n개의 column 들은 전부 zero column 이므로 $\phi_T(T) = 0$.

8.1.8 $m_T(t)$는 $p_i(t)$ 들을 최소한 한 번씩은 포함해야 한다. 따라서 각 기약다항식 $p_i(t)$ 마다 가질 수 있는 지수는 $1, \cdots, e_i$ 이므로 가능한 경우의 수는 $\prod_{i=1}^{k} e_i$.

8.2.12 (가) Let $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$. $T|_W$를 행렬로 생각하면

$$f(T|_W) = a_n (T|_W)^n + \cdots + a_1 T|_W + a_0 I$$

이다. 이제 $f(T|_W)$ 와 $f(T)|_W$ 를 $w \in W$ 에서 evaluate 한 값이 같음을 보이면 된다. W가 T-invariant subspace 임을 이용하면 $(T|_W)^n w = T^n w$ 이므로,

$$\begin{aligned} f(T|_W) w &= a_n (T|_W)^n w + \cdots + a_1 T|_W w + a_0 w \\ &= a_n T^n w + \cdots + a_1 T w + a_0 w = (a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 I) w \\ &= f(T)|_W w \end{aligned}$$

가 되어 성립한다.

(나) W가 T-stable 인 것은 8.2.10 (나) 로부터 알 수 있다. $\forall w \in W$, $g(T)w = 0$ 이어야 한다. $g(T)|_W w = g(T)w = 0$ 이며, (가)에 의해 $g(T)|_W = g(T|_W)$ 이므로 $g(T|_W)w = 0$. 따라서 $g(T|_W) = 0$ 이며, minimal polynomial $m_{T|_W}(t)$ 는 당연히 $g(t)$를 나눠야 한다.

8.3.8 (가) Characteristic polynomial 의 정의로부터 $\phi_A(t) = \det(\lambda I - A)$ 를 계산한다.

$$\begin{vmatrix} t & -4 & 0 & 2 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -2 & t-1 & 0 \\ 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ t-2 & 0 & 0 \\ -2 & t-1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= t^4 - 6t^3 + 13t^2 - 12t + 4 = (t-1)^2(t-2)^2$$

그리고 minimal polynomial 은 $t-1, t-2$ 를 인수로 가져야 하므로, $(t-1)(t-2)$ 로 놓고 계산을 해보면 0 이 아니다. 인수를 하나씩 키워가며 계산을 해보면 $m_A(t) = (t-1)^2(t-2)$ 이 됨을 알 수 있다.

(나) Minimal polynoimal 이 중근을 가지므로 diagonalizable 하지 않다.

(다) $F^4 = \ker(A-2I)^2 \oplus \ker(A-I)^2$ 으로 decompose 할 수 있다. 직접 basis 를 계산해 보면,

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A-2I)^2 = \langle (1,1,-2,1)^{\mathbf{t}}, (1,0,0,-1)^{\mathbf{t}} \rangle$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A-I)^2 = \langle (0,0,1,-1)^{\mathbf{t}}, (2,0,-1,0)^{\mathbf{t}} \rangle$$

을 얻는다. 이제 각 basis 의 vector 들에 A를 곱하면 차례대로 $\ker(A-2I)^2$ 의 basis vector 들은 $(2,2,-4,2)^{\mathbf{t}}, (2,0,0,-2)^{\mathbf{t}}$, $\ker(A-I)^2$ 의 basis 들은 $(2,0,1,-2)^{\mathbf{t}}, (0,0,-1,1)^{\mathbf{t}}$ 가 되어

$$
\begin{aligned}
(2,2,-4,2)^{\mathbf{t}} &= 2(1,1,-2,1)^{\mathbf{t}} \\
(2,0,0,-2)^{\mathbf{t}} &= 2(1,0,0,-1)^{\mathbf{t}} \\
(2,0,1,-2)^{\mathbf{t}} &= 2(0,0,1,-1)^{\mathbf{t}} + (2,0,-1,0)^{\mathbf{t}} \\
(0,0,-1,1)^{\mathbf{t}} &= -(0,0,1,-1)^{\mathbf{t}}
\end{aligned}
$$

따라서 구하는 행렬 표현은

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

8.4.5 (가) Block matrix 로 생각하자. $n \times 1$ vector X, Y를 생각하여 다음과 같이 두자.

$$
\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
$$

그러면 $Y = \lambda X, X = \lambda Y$ 로부터 가능한 λ의 값은 ± 1 뿐이다. 각 eigenvalue 에 대하여 일차독립인 eigenvector 를 n개 잡을 수 있으므로, (X를 F^n의 basis $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$로 두면 Y가 자동으로 결정된다) $\dim E_1 = n, \dim E_{-1} = n$ 이라는 결론을 얻는다. 이로부터 eigenspace decomposition $F^{2n} = E_1 \oplus E_{-1}$ 을 얻으므로 (관찰 7.6.4) A는 diagonalizable 이며, $A \sim \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$ ($1, -1$이 각각 n개).

(나) 대각행렬의 characteristic polynomial 과 minimal polynomial 은 구하기 쉽다. $\phi_A(t) = (t-1)^n(t+1)^n, m_A(t) = (t-1)(t+1)$ 임을 알 수 있다. (diagonalizable 이므로 $t-1, t+1$의 지수는 1 이어야 한다).

8.4.6 (가) 우선 L의 eigenvalue 를 찾아보자. $LX = \lambda X$, 즉 $X + X^{\mathbf{t}} = \lambda X$ 인 λ 를 찾아주면 된다. By inspection, X가 symmetric 일 때와 skew-symmetric 일 때 확인해 준다.

먼저 X가 symmetric 일 경우에는 $X = X^{\mathbf{t}}$ 이므로 $2X = \lambda X$가 되어 가능한 eigenvalue 는 2 뿐이다. 이 eigenvalue 에 대하여 가능한 eigenvector 는 symmetric matrices 이고, $\dim \mathfrak{Sym}_n(F) = n(n+1)/2$ 임을 알고 있으므로 $n(n+1)/2$ 개의 eigenvector 들을 잡아줄 수 있다.

X가 skew-symmetric 일 경우에는 $X = -X^{\mathbf{t}}$ 이므로 $X + X^{\mathbf{t}} = X - X =$

$0X = \lambda X$ 가 되어 가능한 eigenvalue 는 0 이다. 이 eigenvalue 에 대하여 가능한 eigenvector 는 skew-symmetric matrices 이고, $\dim \mathfrak{Alt}_n(F) = n(n-1)/2$ 임을 알고 있으므로, $n(n-1)/2$ 개의 eigenvector 들을 잡아줄 수 있다.

$\dim \mathfrak{Sym}_n(F) + \dim \mathfrak{Alt}_n(F) = n^2 = \dim \mathfrak{M}_{n,n}(F)$ 인 것과, $\mathfrak{Sym}_n(F) \cap \mathfrak{Alt}_n(F) = 0$ 으로부터, 관찰 7.6.4에 의해 우리는 eigenspace decomposition $\mathfrak{M}_{n,n}(F) = E_0 \oplus E_2$ 를 얻는다. 따라서 L은 diagonalizable.

(나) (가)의 결과로부터 L을 대각화 하면 $L \sim \mathrm{diag}(2, \cdots, 2, 0, \cdots, 0)$ 임을 알 수 있다. (2 는 $n(n+1)/2$ 개, 0 은 $n(n-1)/2$ 개) 그리고 diagonalizable 이므로 minimal polynomial 은 일차식의 곱이며 중근이 없어야 한다. 따라서

$$\phi_L(t) = t^{\frac{n(n-1)}{2}}(t-2)^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad m_L(t) = t(t-2)$$

8.4.8 (가) 우선 $T^3 = T$ 로부터 $t^3 - t \in \mathcal{I}_T$ 임을 알 수 있다. $m_T(t)$는 $t^3 - t$ 의 약수여야 하는데, $t^3 - t = t(t+1)(t-1)$ 으로부터 $t^3 - t$ 의 약수들은 일차식의 곱으로 인수분해 되며 중근을 갖지 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서 T는 diagonalizable.

(나) Dimension theorem 으로부터 $\dim V = \dim \mathrm{im}\, T + \dim \ker T$ 이다.

이제 $\mathrm{im}\, T \cap \ker T = 0$ 을 보이자. $v \in \mathrm{im}\, T \cap \ker T$ 라고 할 때, $Tu = v$ 인 $u \in V$ 가 존재하며, $Tv = 0$ 이다. $T^2 u = Tv = 0$ 이므로,

$$0 = T(0) = T(T^2 u) = T^3 u = Tu = v$$

가 되어 $\mathrm{im}\, T \cap \ker T$ 의 원소들은 전부 0 이다. 따라서 $V = \mathrm{im}\, T \oplus \ker T$.

이제 $\mathrm{im}\, T = E_1 \oplus E_{-1}$ 임을 보이자. $v \in \mathrm{im}\, T$ 이면, $v = T^2 v + (v - T^2 v)$ 로 쓸 수 있으므로, $V = \mathrm{im}\, T \oplus \ker T$ 로부터 $v - T^2 v = 0$ 이어야만 한다. ($T(v - T^2 v) = 0$ 이므로 $v - T^2 v \in \ker T$). T의 $\mathrm{im}\, T$ 위로의 restriction U를 고려하면, $\forall v \in \mathrm{im}\, T$ 에 대하여 $v - T^2 v = 0$ 이므로 $U^2 = I$ 이다. $Uv = \lambda v$ 라고 할 때, $U^2 v = \lambda U v = \lambda^2 v$ 이므로 가능한 eigenvalue 는 ± 1 뿐이다. 또 U의 minimal polynomial 이 ($t^2 - 1$ 의 약수) 일차식의 곱이고 중근이 존재할 수 없으므로, U 는 diagonalizable 이며 eigenspace decomposition 으로 $\mathrm{im}\, T = E_1 \oplus E_{-1}$ 을 갖는다.

8.5.10 (가) 우선 $f(T) = 0$ 인 다항식 $f(t)$ 는 존재하므로, $\mathcal{I}_w \neq \{0\}$. 이제 $m_w(t)$가 최저 차수의 monic polynomial 임을 보여야 한다. $m_w(t) = m_{T|_W}(t)$ 이므로 $m_{T|_W}(t)$ 를 살펴보자. ($W = F[t]w$) $m_{T|_W}(t)$ 는 $\mathcal{I}_{T|_W}$ 의 원소들 중에서 최소의 degree

를 갖는 monic polynomial 이므로, $m_w(t)$ 가 monic 임은 당연하다. $\mathcal{I}_{T|_W}$ 의 정의는 $\{g(t) \in F[t] \mid g(T|_W) = 0\}$ 이고 W가 T-invariant subspace 이므로 $g(T|_W) = g(T)|_W$ (연습문제 8.2.12) 으로부터 $\mathcal{I}_{T|_W} = \{g(t) \in F[t] \,|\, g(T)|_W = 0\}$. w에 대하여 $g(T)|_W w = 0$ 이므로 $\mathcal{I}_{T|_W} \subseteq \mathcal{I}_w$.
이제 T-cyclic subspace of V generated by w, $F[t]w$ 를 고려하자. $W = F[t]w$ 는 $(T|_W)$-cyclic 이며 $f(t) \in F[t]$ 에 대해 $f(T|_W)w = 0$ 이면 $f(T|_W) = 0$ (연습문제 8.5.3) 이므로 $\mathcal{I}_w \subseteq \mathcal{I}_{T|_W}$. 따라서 $\mathcal{I}_w = \mathcal{I}_{T|_W}$. Minimal polynomial 의 정의로부터 우리가 원하는 결론을 얻는다.

(나) $f(t)$를 $m_w(t)$로 나는 몫을 $q(t)$, 나머지를 $r(t)$ 라고 하자. 그러면 $f(t) = m_w(t)q(t) + r(t)$ 이고 이를 $T|_W$에서 evaluate 하면,

$$f(T|_W) = m_w(T|_W)q(T|_W) + r(T|_W) = r(T|_W)$$

이므로 $0 = f(T|_W)w = r(T|_W)w = r(T)w$ 가 되어 $r(t) \in \mathcal{I}_w$ 이다. $m_w(t)$가 minimal polynomial 이라는 것에 모순되지 않으려면 $r(t) = 0$ 이어야 한다. 따라서 $f(t)$는 $m_w(t)$의 배수이다.

8.5.14 연습문제 8.2.4의 $\{f(T)v \in F^2 \mid f(t) \in F[t]\} = \langle v, Tv, T^2v, \cdots \rangle$ 를 이용한다.
$A = I_2$ 일 때,

(가) $\langle v, Tv, \cdots \rangle = \langle v \rangle$ 이고, 임의의 $v \in F^2$ 에 대하여 $\langle v \rangle = F^2$ 이게 할 수 없다.

(나) $\langle v, Tv, \cdots \rangle = \langle v \rangle$ 을 W로 두면, $A(W) = W$ 이므로 W는 A-invariant subspace 이고, W의 정의로부터 A-cyclic 이다. 따라서 W는 A-cyclic subspace of V generated by v. $U_1 = \langle (1,0)^{\mathbf{t}} \rangle, U_2 = \langle (0,1)^{\mathbf{t}} \rangle$ 으로 둘 때, $F^2 = U_1 \oplus U_2$ 이다. (표준단위벡터를 생각)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때,

(가) 임의의 $(a,b)^{\mathbf{t}} \in F^2$ 에 대하여, $v = (1,1)^{\mathbf{t}}$ 로 잡으면 $f(t) = (b-a)t + 2a - b \in F[t]$ 에 대하여 $f(T)v = (a,b)^{\mathbf{t}} \in F^2$ 가 되어 F^2는 A-cyclic space 이다.

(나) $U_1 = \langle (1,0)^{\mathbf{t}} \rangle, U_2 = \langle (0,1)^{\mathbf{t}} \rangle$ 으로 둘 때, $F^2 = U_1 \oplus U_2$ 이다. U_1, U_2 모두 A-cyclic subspace 인 것은 계산을 통해 확인할 수 있다.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때,

(가) 임의의 $(a,b)^{\mathbf{t}} \in F^2$ 에 대하여, $v = (1,1)^{\mathbf{t}}$ 로 잡으면 $f(t) = (a-b)t + 2b - a \in F[t]$ 에 대하여 $f(T)v = (a,b)^{\mathbf{t}} \in F^2$ 가 되어 F^2는 A-cyclic space 이다.

(나) $\phi_A(t) = m_A(t) = (t-1)^2$ 이므로, cyclic decomposition theorem 에 의하면, $2 = f = r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_h = 1$ 이고 $r_1 + r_2 + \cdots + r_h = e = 2$ 이므로 $r_1 = 2$ 로만 decompose 가능하다. $F^2 = \langle (1,0)^{\mathbf{t}}, (0,1)^{\mathbf{t}} \rangle$ 로 쓸 수 있다.

8.7.6 (가) $N = \mathrm{J}_{(e)} - \lambda I_e$ 으로부터, N은 $e \times e$ matrix 이고,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & \mathbf{0} & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

이고, 실제로 거듭제곱을 해 보면, 1 들이 오른쪽 위로 평행이동 됨을 확인할 수 있다. $N^k = (a_{ij})$, $a_{ij} = 1$ if $j = i+k$, 0 otherwise. 이를 귀납법으로 보이자. $k = 1$ 일 때에는 자명하다. k 일때 성립함을 가정하고 $N^{k+1} = (c_{ij})$ 을 계산해 보자. $N^k = (a_{ij})$ 라고 하고, $N = (b_{ij})$ 로 두자.

$c_{ij} = \sum_{x=1}^{e} a_{ix} b_{xj}$ 인데, $j = i+k+1$ 인 경우, $x = i+k$ $(< e)$ 일 때만 summand 가 1 이고 나머지 x 에 대해서는 0 이다. $j \neq i+k+1$ 인 경우에는 $x = i+k$ $(< e)$ 일 때에도 $b_{xj} = 0$ 이 되어 결과적으로 0 이다. 따라서 $k+1$ 인 경우에도 성립한다.

(나) $\left(\mathrm{J}_{(e)}\right)^m = (\lambda I_e + N)^m = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (\lambda I_e)^{m-r} N^r = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \lambda^{m-r} N^r$ 이므로 ($N^0 = I$ 로 이해한다), 따라서

$$\left(\mathrm{J}_{(e)}\right)^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \binom{m}{3}\lambda^{m-3} & \cdots & \binom{m}{r-1}\lambda^{m-r+1} \\ & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \cdots & \binom{m}{r-2}\lambda^{m-r+2} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ & & & & & \lambda^m \end{pmatrix}$$

이고, $r - 1 > m$ 인 경우에는 binomal coefficient 를 0으로 이해한다.

8.7.7 (가) Block diagonal matrix 의 charateristic polynomial 은 block 들의 characteristic polynomial 의 곱이며, minimal polynomial 은 각 block 의 minimal polynomial 의 최소공배수 임을 이용한다.

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$ 의 minimal polynomial 은 $(t-\lambda)^3, (t-\lambda)^2, t-\lambda$ 이므로, $\mathrm{J}_{(3,3,1)}, \mathrm{J}_{(3,2,2)}$ 의 minimal polynomial 은 $(t-\lambda)^3$ 이다. (Characteristic polynomial 은 $(t-\lambda)^7$) 이제 $\dim E_\lambda$ 를 계산해 보자. 각 행렬에서 λI_7 을 빼 보면 1의 개수가 4 임을 알 수 있다. 따라서 두 행렬 모두 $\dim E_\lambda = 4$. 두 행렬이 similar 하지 않은 것은 (나)의 결과로부터 알 수 있다.

(나) Dimension theorem 으로부터, $7 = \dim \mathrm{im}\, (A - \lambda I)^2 + \dim \ker (A - \lambda I)^2$, $\dim \ker (A-\lambda I)^2 = 7 - \mathrm{rk}(A - \lambda I)^2$. $\mathrm{J}_{(3,3,1)}$ 에 대해 $(\mathrm{J}_{(3,3,1)} - \lambda I)^2$ 를 계산해 보면, $(1,3), (4,6)$-성분만 1 이다. 일차독립인 row 의 개수는 2개 이므로 $\mathrm{J}_{(3,3,1)}$ 의 경우에는 5. $\mathrm{J}_{(3,2,2)}$ 에 대해 $(\mathrm{J}_{(3,2,2)} - \lambda I)^2$ 를 계산해 보면, $(1,3)$-성분만 1 이다. 일차독립인 row 의 개수는 1개 이므로 $\mathrm{J}_{(3,2,2)}$ 의 경우에는 6. (따라서 두 행렬은 similar 하지 않다.)