선형대수학 2 (2018. 12. 8.)

0. 아래의 모든 벡터공간은 유한차원이라고 가정한다.

1. (10점) (V, B) 가 quadratic space 이고 $\mathfrak{B}$ 가 V 의 기저일 때, 왜 "B 의 행렬 $[B]_{\mathfrak{B}}$ 가 B 에 관한 모든 정보를 갖고 있다"고 말할 수 있는가?

2. (10점) (가) $\mathbf{O}(1,1)/\mathbf{SO}(1,1) \approx \mu_2$ 임을 보여라.
(나) $\mathbf{O}(1,1)$ 은 $\mathbf{O}(3,1)$ 의 subgroup 과 isomorphic 함을 보여라.

3. (10점) (가) $L \in \mathfrak{L}(V, W)$ 의 dual map L^* 의 정의를 써라.
(나) $L^{**} = L$ 의 뜻을 설명하고 증명하라.

4. (10점) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 이 non-degenerate quadratic space (V, B) 의 기저일 때, 다음

$$B(v_i, w_j) = \delta_{ij}, \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

을 만족시키는 V 의 "*dual basis*" $\{w_1, \ldots, w_n\}$ 이 존재함을 보여라.

5. (10점) (V, B) 와 (W, C) 가 non-degenerate quadratic space 일 때,
(가) $L \in \mathfrak{L}(V, W)$ 의 transpose map $L^{\mathbf{t}}$ 의 정의를 써라.
(나) 모든 $v \in V, w \in W$ 에 대해 $C(Lv, w) = B(v, L^{\mathbf{t}}w)$ 임을 증명하라. *(이 (나)항을 이용해 (가)항에서 $L^{\mathbf{t}}$ 를 정의하는 꼼수 금지.)*

6. (10점) $J = \mathrm{diag}(1, -1)$ 일 때, quadratic space $\left(\mathbb{R}^2, B_{\mathcal{E}}^J\right)$ 에서 $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 를

$$L\big((x, y)^{\mathbf{t}}\big) = (x + y, x - y)^{\mathbf{t}}, \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

로 정의하자. $L^{\mathbf{t}}\big((x, y)^{\mathbf{t}}\big) \in \mathbb{R}^2$ 를 구하라.

7. (10점) V 가 inner product space over $\mathbb{C}$ 일 때, 모든 normal operator $L \in \mathfrak{L}(V, V)$ 는 대각화 가능함을 (**간략히**) 설명하라.

8. (10점) $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ 이 symmetric matrix 이면, A 의 real eigen-value 가 존재함을 보여라.

9. (10점) (V, B) 가 quadratic space over $\mathbb{R}$ 이고, $\mathfrak{B}$ 는 V 의 기저일 때, 다음 조건
(1) $B(v, v) \geq 0$ for all $v \in V$.
(2) $[B]_{\mathfrak{B}}$ 의 모든 eigen-value 는 non-negative real number.
(3) $[B]_{\mathfrak{B}} = A^{\mathbf{t}} \cdot A$ 인 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ 존재.
은 동치임을 보여라.

10. (10점) State the "Spectral Theorem for $\mathbf{O}(n)$". (증명 필요 없음.)