선형대수학 1

2018. 6. 9.

1. (10점) 임의의 $L \in \mathfrak{L}(V, W)$ 에 대한 Dimension Theorem 은 $L_A \in \mathfrak{L}(F^n, F^m)$ 의 경우에만 증명하면 충분하다 (단, V, W는 f.d.v.s. 이고, $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F)$). 그 이유를 설명하는 commutative diagram 을 그려라. (증명 불필요.)

2. (10점) $n \geq 1$ 일 때, $A_n = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$ 가 $a_{ij} = \begin{cases} 2 & (\text{if } i = j) \\ -1 & (\text{if } |i-j| = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ 으로 주어졌을 때, $\det(A_n)$ 을 구하라.

3. (10점) $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.02 \\ 0.1 & 0.98 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ 을 대각화하고, $\lim_{m\to\infty} A^m$ 을 구하라.

4. (10점) $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$ 가 nilpotent 이면, $\phi_A(t) = t^n$ 임을 보여라.

5. (10점) $T \in \mathfrak{LM}$ 의 minimal polynomial $m_T(t)$ 를 정의하고, 그의 유일성을 보여라. (존재성 증명 불필요.)

6. (10점) $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$ 이고, $\lambda \in F$ 일 때, $\dim E_\lambda^A = \dim E_\lambda^{A^{\mathfrak{t}}}$ 임을 보여라 (단, E_λ^A 는 eigen-space of A with eigen-value λ).

7. (10점) $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n,2n}(F)$ 일 때, A 의 eigen-space decomposition 을 구하라. 또, $\phi_A(t)$ 와 $m_A(t)$ 를 구하라.

8. (10점) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 의 Jordan canonical form 을 구하라.

9. (10점) Google matrix 의 정의를 써라. (Google matrix 는 positive Markov.)