선형대수학 과제 3

2017-18570 이성찬

7.2.4 (가) A가 nilpotent이고 diagonalizable 이므로, $A = UDU^{-1}$ 인 diagonal matrix $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$, invertible matrix $U \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$가 존재하고, $A^r = 0$ 인 $r \geq 1$이 존재한다.

$$A^r = (UDU^{-1})^r = UD^rU^{-1} = 0$$

이고 $D^r = 0$ 이 된다. 그런데 diagonal matrix의 거듭제곱은 그 대각성분들의 거듭제곱과 같으므로, D의 모든 대각 성분들은 0이어야 한다. 그러므로 $D = 0$ 이 되어 $A = 0$ 이라는 결론을 얻을 수 있다.

(나) A가 unipotent 이므로 $A - I$가 nilpotent 이다. 이제 $A - I$가 diagonalizable 임을 보이면, (가)에 의해 $A - I = 0$ 이므로 $A = I$임을 보일 수 있다. A가 diagonalizable 이므로 $A = UDU^{-1}$ 인 diagonal matrix $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$, invertible matrix $U \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$가 존재한다.

$$A - I = UDU^{-1} - I = U(D - I)U^{-1}$$

이 되고 $D - I$는 당연히 diagonal matrix 이므로 $A - I$는 diagonalizable matrix 이다. 따라서 (가)에 의해 $A = I$.

7.2.5 (가) Eigenvalue 가 $\lambda^2 - 1 = 0$ 으로부터 $\lambda = \pm 1$이므로 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이다. Eigenvector를 구하면 $\lambda = 1$일 때 $(1,1)^{\mathbf{t}}$, $\lambda = -1$일 때 $(1,-1)^{\mathbf{t}}$ 이고 서로 독립이므로 두 벡터는 F^2의 basis가 된다. 따라서 $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(나) $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ 이므로 eigenvalue는 $-1, 3$이다. 각각 대응하는 eigenvector를 구해주면 -1일 때 $(1,-1)^{\mathbf{t}}$, 3일 때 $(1,1)^{\mathbf{t}}$이다.
따라서 $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(다) $\det(\lambda I - A) = 0$ 으로부터 eigenvalue 는 $1, 1/4$이다. 각각 대응하는 eigenvector를 구해주면 1일 때 $(1,1)^{\mathbf{t}}$, $1/4$일 때 $(-1,2)^{\mathbf{t}}$이다. 따라서, $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

7.2.12 (가) R_θ의 characteristic polynomial을 구하면 $\phi_{R_\theta}(t) = \det(tI - R_\theta) = t^2 - 2t\cos\theta + 1$이다. 그런데 $R_\theta \neq \pm I$이므로 $\theta \neq 0, \pi$. 즉 $\cos\theta \neq \pm 1$ 이다. 그러면 ϕ_{R_θ}의 판별식은 $D/4 = \cos^2\theta - 1$ 이고 $\cos^2\theta \neq 1$이므로 $D/4 < 0$이 되어 characteristic polynomial이 $\mathbb{R}$에서 실근을 갖지 않는다. 그림으로 설명하자면, $R_\theta v = \lambda v$인 $v \in \mathbb{R}^2$ 로부터 - v를 θ만큼 회전변환 했을 때, 그 결과가 v의 λ(상수)배가 되게하는 λ가 존재하는가? - 와 동치이다. 회전변환이므로 v의 길이는 변할 수 없다. 따라서 $|\lambda| = 1$이어야 한다. 그런데 $R_\theta \neq \pm I$ 이므로, 실수 범위 내에서는 불가능하다. 따라서 $\mathbb{R}$에서는 not diagonalizable.

(나) $\mathbb{C}$에서 $t^2 - 2t\cos\theta + 1 = 0$의 해를 구해보면, $t = \cos\theta \pm i\sin\theta$ 이다. 각 eigenvalue에 대응하는 eigenvector를 구해주면 $\cos\theta + i\sin\theta$일 때 $(i, 1)^{\mathbf{t}}$, $\cos\theta - i\sin\theta$일 때 $(-i, 1)^{\mathbf{t}}$이 되어 대각화 가능하다.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

7.2.22 $\phi_A(t) = t^2 - bt - a$ 의 서로 다른 두 근 λ, μ에 대하여, 각각 대응하는 eigenvector를 구해주면 $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ 가 됨을 알 수 있고, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ 로부터 A^n에 $U \cdot \mathrm{diag}(\lambda^n, \mu^n) \cdot U^{-1}$ 대입해 주면,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

를 얻는다. 주어진 Fibonacci Sequence 에서는 $a = b = 1$ 이고 $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2, \mu = (1 - \sqrt{5})/2$ 이므로 대입해 계산해 주면,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} \mu\lambda^n - \lambda\mu^n & -\lambda^n + \mu^n \\ \mu\lambda^{n+1} - \lambda\mu^{n+1} & -\lambda^{n+1} + \mu^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

따라서 $x_{n+2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\{\mu\lambda(\lambda^n - \mu^n)x_1 + (-\lambda^{n+1} + \mu^{n+1})x_2\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\lambda^n - \mu^n)x_1 + (\lambda^{n+1} - \mu^{n+1})x_2\}$.

7.3.8 (가) $(\Rightarrow)$ $T \in \mathfrak{LM}$ 이 nilpotent 이면 따름정리 7.3.6의 증명에 의해 모든 eigenvalue 가 0이 된다. $(\Leftarrow)$ $T \in \mathfrak{LM}$ 의 모든 eigenvalue 가 0 이면, $F = \mathbb{C}$ 이므로 T를 triangularize 하면 $T = UDU^{-1}$ 인 upper-triangular matrix D와 가역 사상 U가 존재하며, D의 대각 성분들은 전부 0이 된다. 그러므로 D는 strictly upper-triangular 이다. 이제 연습문제 1.1.7 (다)에 의하면, D가 nilpotent 이다. $D^r = 0$ for some $r \geq 1$ 이라고 하면, $T^r = (UDU^{-1})^r = UD^rU^{-1} = 0$ 이 되어 T가 nilpotent 이다.

(나) $(\Rightarrow)$ T가 unipotent 이면 $T - I$가 nilpotent 이다. T를 $\mathbb{C}$ 위에서 triangularize 하면, $T - I$의 eigenvalue 는 전부 0 임을 알 수 있다. (따름정리 7.3.6) $T - I$와 similar 한 strictly upper-triangular matrix가 존재하며, $T - I = UDU^{-1}$ (단, U는 가역) 라고 하면, $T = UDU^{-1} + I = U(D + I)U^{-1}$이 되고, $D + I$ 는 upper-triangular 이며, 대각성분이 전부 1 이다. 따라서 $D + I$의 모든 eigenvalue 는 1 이다. 서로 similar 한 matrix 는 characteristic polynomial 이 같으므로 eigenvalue 도 같다. $T \sim (D + I)$ 이므로 T의 eigenvalue 도 전부 1 이다.

($\Leftarrow$) T의 모든 eigenvalue 가 1 이면, T를 triangularize 하여 $T = UDU^{-1}$인 대각 성분이 전부 1인 upper-triangular matrix D와 가역인 U가 존재한다. 이제 $D = D' + I$ 로 쓰면, (D'은 strictly upper-triangular) $T - I = UD'U^{-1}$ 이고 D'은 nilpotent 이므로 $D'^r = 0$ for some $r \geq 1$ 이라 하면, $(T-I)^r = 0$이 되어 $T - I$는 unipotent 이다.

7.4.2 연습문제 1.1.20 (가)에 의해 $T, U \in \mathfrak{LM}$ 이고 U가 가역일 때, $m \geq 0$이면, $(U^{-1}TU)^m = U^{-1}T^mU$ 임을 적극적으로 이용한다. $f(t) = a_nt^n + \cdots + a_1t + a_0$ (단, $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in F$) 라고 하면,

$$\begin{aligned} f(U^{-1}TU) &= a_n(U^{-1}TU)^n + \cdots + a_1(U^{-1}TU) + a_0I \\ &= a_n(U^{-1}T^nU) + \cdots + a_1(U^{-1}TU) + a_0(U^{-1}IU) \\ &= U^{-1}(a_nT^n + \cdots + a_1T + a_0I)U = U^{-1}f(T)U \end{aligned}$$

이다. 따라서 $T \sim S$ 이면, $T = USU^{-1}$인 가역 사상 U가 존재하므로, $f(T) = f(USU^{-1}) = Uf(S)U^{-1}$ 이므로 $f(T) \sim f(S)$.

7.5.8 주어진 세 행렬들을 차례대로 A, B, C라고 두자. 각각 characteristic polynomial을 구하면, $\phi_A(t) = \phi_B(t) = \phi_C(t) = (t-1)^3$로 전부 같다. characteristic polynomial 만으로 판정이 되지 않으므로, minimal polynomial 을 구해보자. 이를 위해 $(t-1)^3$의 약수만을 조사해주면 된다. (관찰 7.5.4 (나)). $m_A(t) = t - 1$ 인 것은 당연하고, B의 경우에는 $B - I$가 0이 아니므로, $m_B(t) = (t-1)^2$이 됨을 확인할 수 있다. 마지막으로 C는 $C - I \neq 0, (C-I)^2 \neq 0$ 이므로 $m_C(t) = (t-1)^3$이다. (직접 계산을 통해 확인할 수 있다.) 관찰 7.5.7의 대우를 생각하면, minimal polynomial이 모두 다르므로, 세 행렬은 similar 하지 않다.

7.5.10 (가) $\phi_A(t) = \det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} tI - B & -D \\ 0 & tI - C \end{pmatrix} = \det(tI - B)\det(tI - C) = \phi_B(t)\phi_C(t)$. (6.5.9 (가)를 이용한다)

(나) 연습문제 2.3.14 (나)를 이용하자. $0 = m_A(A) = \begin{pmatrix} m_A(B) & m_A(D) \\ 0 & m_A(C) \end{pmatrix}$ 이므로, $m_A(B) = m_A(C) = m_A(D) = 0$ 이다. 따라서 $m_A(t)$는 $\mathcal{I}_B, \mathcal{I}_C$ 의 원소이다. 관찰 7.5.3 에 의해 $m_A(t)$는 $m_B(t)$와 $m_C(t)$의 배수가 되어, $m_A(t)$는 $m_B(t)$와 $m_C(t)$의 공배수이다. $m_B(t), m_C(t)$의 최소공배수의 배수는 곧 $m_B(t), m_C(t)$의 공배수이므로, 우리가 원하는 결론을 얻는다.

(다) (나)로부터 우리는 $m_A(t)$가 $\mathrm{lcm}(m_B(t), m_C(t))$의 배수임을 알았다. 이제 $\mathrm{lcm}(m_B(t), m_C(t))$를 $L(t)$로 두고 $D = 0$일 때, $L(A) = 0$을 보이면 $m_A(t) = \mathrm{lcm}(m_B(t), m_C(t))$가 될 수밖에 없다. $L(A) = \begin{pmatrix} L(B) & 0 \\ 0 & L(C) \end{pmatrix}$ 인데, $L(t)$는 각각 $m_B(t), m_C(t)$의 배수이므로, $L(B) = L(C) = 0$ 이다. 따라서 $L(A) = 0$이 되어 $m_A(t) = \mathrm{lcm}(m_B(t), m_C(t))$ 이다.

7.5.12 T가 unipotent 이므로 $(T-I)^n = 0$ for some $n \geq 1$ 이라고 하자. 그러면 $f(t) = (t-1)^n \in \mathcal{I}_T$ 이고, $T^m = I$인 자연수 m이 존재하므로, $g(t) = t^m - 1 \in \mathcal{I}_T$ 이다. 한편, $\mathcal{I}_T$의 모든 원소들은 $m_T(t)$의 배수이므로, $f(t), g(t)$의 공약수 중 $m_T(t)$가 반드시 존재해야 한다. $f(t), g(t)$의 공약수는 이 둘의 최대공약수의 약수이므로 최대공약수를 구하기 위해 $g(t)$를 인수분해 하면 $(t-1)(t^{m-1} + \cdots + 1)$ 이므로 최대공약수는 $t - 1$임을 알 수 있다. 따라서 $m_T(t)$는 $t - 1$의 약수여야 한다. 그런데 minimal polynomial 의 정의로부터 $\deg(m_T) \geq 1$ 이므로 $m_T(t) = t-1$이 되며, $m_T(T) = T - I = 0$에서 $T = I$라는 결론을 얻는다.

7.5.13 $\phi_A(t) = \det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & -1 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} = t \det \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & t & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & t \end{pmatrix}$

$= t^4 - 1$ 이다. 이제 이를 인수분해하면 $(t-1)(t+1)(t-i)(t+i)$를 얻는다. 이 인수들을 적절히 택하여 A를 대입했을 때 0이 되는지 확인해 보면, 모두 택해야 가능함을 알수 있다. 따라서 $m_A(t) = t^4 - 1. F = \mathbb{R}$이면 diagonalizable 하지 않지만, $\mathbb{C}$에서는 다음과 같이 할 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5i & 0.5i \\ -0.5 & -0.5 & 0.5i & -0.5i \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5i & 0.5i \\ -0.5 & -0.5 & 0.5i & -0.5i \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^{-1}$$

7.6.24 **(가)** $\phi_A(t) = \det(tI - A) = \det(tI - A)^{\mathbf{t}} = \det(tI - A^{\mathbf{t}}) = \phi_{A^{\mathbf{t}}}(t)$ (By 따름정리 6.3.7, 연습문제 1.1.8 (가).) 따라서 $A, A^{\mathbf{t}}$가 같은 eigenvalue 를 갖는 것은 당연하다.

(나) 연습문제 1.1.8 (라) 항을 이용하면 $(A^n)^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^n$ 임을 알 수 있다. 정의에 의해 $m_A(A) = 0$ 이므로 양변을 transpose 하면, $(m_A(A))^{\mathbf{t}} = 0$ 이다. $m_A(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \quad (a_i \in F)$ 이라고 두었을 때,

$$\begin{aligned} 0 = (m_A(A))^{\mathbf{t}} &= (a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I)^{\mathbf{t}} = (a_n A^n)^{\mathbf{t}} + \cdots + (a_1 A)^{\mathbf{t}} + (a_0 I)^{\mathbf{t}} \\ &= a_n (A^{\mathbf{t}})^n + \cdots + a_1 A^{\mathbf{t}} + a_0 I = m_A(A^{\mathbf{t}}) \end{aligned}$$

가 되어 A의 minimal polynomial 은 $m_{A^{\mathbf{t}}}(t)$의 배수이다. 같은 방법으로 하면 $A^{\mathbf{t}}$의 minimal polynomial이 $m_A(t)$의 배수임을 보일 수 있다. 서로가 서로를 나누는 두 monic polynomial은 서로 같을 수밖에 없다. 따라서 $m_A(t) = m_{A^{\mathbf{t}}}(t)$.

(다) Dimension Theorem 으로부터, $\dim E_\lambda^A = \dim \ker(A - \lambda I) = \dim L_{A-\lambda I} - \dim \operatorname{im}(A - \lambda I) = n - \dim \operatorname{im}(A - \lambda I)$. 마찬가지로 $\dim E_\lambda^{A^{\mathbf{t}}} = \dim \ker(A^{\mathbf{t}} - \lambda I) = n - \dim \operatorname{im}(A^{\mathbf{t}} - \lambda I)$. 이제 $A - \lambda I$와 $A^{\mathbf{t}} - \lambda I$의 rank 가 같음을 보이면 원하는 결론을 얻는다. 두 행렬은 서로 transpose 이고, $A - \lambda I$의 row rank는 $A^{\mathbf{t}} - \lambda I$의 column rank 이므로, Rank Theorem 으로부터 $A - \lambda I$ 와 $A^{\mathbf{t}} - \lambda I$의 rank는 같다. 따라서 $\dim E_\lambda^A = \dim E_\lambda^{A^{\mathbf{t}}}$.