선형대수학 2 (2018. 10. 27.)

1–4. F^n 에는 dot product 가 주어져 있다고 가정한다.

1. (10점) $\mathbb{R}^2$의 두 벡터 $Y = \left(-3, \sqrt{3}\right)^{\mathbf{t}}$, $Z = (-3, -\sqrt{3})^{\mathbf{t}}$에 대하여,
(가) 두 reflection S_Y, S_Z 에 $S_Y \circ S_Z$ 는 $\mathbb{R}^2$ 의 rotation 임을 보여라.
(나) $S_Y \circ S_Z = R_\theta$ 인 θ 를 구하라.

2. (10점) (가) $W = \left\langle (-1,1,0)^{\mathbf{t}}, (1,0,-1)^{\mathbf{t}} \right\rangle < \mathbb{R}^3$ 일 때, Gram-Schmidt Orthogonalization Process 를 이용하여 W 의 orthonormal basis $\mathfrak{C} = \{X_1, X_2\}$ 를 구하라.
(나) $\mathfrak{C}$ 를 포함하는 $\mathbb{R}^3$ 의 orthonormal basis $\mathfrak{B} = \{X_1, X_2, X_3\}$ 를 구하라.
(다) $Y = (2,3,4)^{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^3$ 와 가장 가까운 W 의 vector 를 구하라.

3. (10점) $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 reflection 이면, $\det S = -1$ 임을 보여라.

4. (10점) $\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ 은 $\mathbb{R}^4$ 의 reflection 인가? Rotation 인가?

5. (10점) $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F)$ 일 때, $\mathrm{rk}(A^* \cdot A) = \mathrm{rk}(A)$ 임을 보여라.

6. (10점) $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(F)$ 일 때, $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathbf{t}} \cdot \overline{B})$ 로 정의하자.
(가) $\langle\ ,\ \rangle$ 는 $\mathcal{M}_{2,2}(F)$ 의 inner product 임을 보여라.
(나) 위에서 정의한 inner product space $\left(\mathcal{M}_{2,2}(F), \langle\ ,\ \rangle\right)$ 와 dot product 가 주어진 F^4 가 inner product space 로서 isomorphic 함을 구체적인 isomorphism 을 통하여 증명하라.

7. (10점) $\mathbf{V}_n(F) = \left\{(a_{ij}) \in \mathbf{GL}_n(F) \,|\, a_{ij} = 0 \text{ if } i > j, a_{ii} = 1 \text{ for all } i\right\}$ 라고 표기할 때, F^3 가 $\mathbf{V}_3(F)$ 와 isomorphic 한 group 이 되도록 F^3 에 이항연산을 정의하라. (증명 필요 없음.)

8. (10점) Cayley's Theorem 을 쓰고 증명하라.

9. (10점) $N \trianglelefteq G$ 일 때, quotient group G/N 의 이항연산을 정의하고, 이 연산이 well-defined 되어 있음을 보여라.

10. (10점) First Isomorphism Theorem 과 '학부 대수학의 반'을 이용하여, cyclic group 을 (모두) 분류하라.