선형대수학 1 HW 1

공과대학 컴퓨터공학부
2017-18570 이성찬

1.1.7

(나)

$A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 으로 두자.

$$AB = (c_{ij})_{n \times n} \text{ where } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n.$$

A, B가 strictly upper-triangular 이므로,

$i \ge j$ 일 때,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0.$$

따라서 $c_{ij} = 0$ for $i \ge j$ 이므로, AB는 strictly upper-triangular matrix 이다.

A, B가 unipotent upper-triangular 인 경우에는,

$i > j$인 경우,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + a_{ii} b_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + 0 + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0$$

$i = j$ 인 경우,

$$c_{ij} = c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{ki} + 1 + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 1$$

따라서 $i > j$인 경우 $c_{ij} = 0$, $i = j$인 경우 $c_{ij} = 1$이므로

AB는 unipotent upper-triangular matrix 이다.

(다)

연습문제 2.3.14를 이용하여 수학적 귀납법으로 보인다.

$n = 1$일 때 주어진 명제가 성립한다고 하자. $A \in M_{1,1}(F)$ 이다.

A가 strictly upper-triangular matrix이므로 $A^1 = 0$ 이어야 한다.

$n = k$일 때, $A \in M_{k,k}(F)$가 strictly upper-triangular 이면 $A^k = 0$이라고 가정하자.

다음과 같은 행렬 $B = \begin{pmatrix} A & | & v \\ - & + & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}_{(k+1) \times (k+1)}$ 을 생각하자. v는 임의의 $k \times 1$ 행렬이다.

A가 strictly upper-triangular 이므로 B도 strictly upper-triangular 이다.

이제 $B^k = \begin{pmatrix} A^k & | & A^{k-1} v \\ -- & + & ---- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ 임을 수학적 귀납법으로 보이자. (단, $A^0 = I_k$)

$k = 1$일 때는 당연히 성립한다. k 일 때 성립한다고 가정하면,

$$B^{k+1}=B^kB=\begin{pmatrix} A^k & | & A^{k-1}v \\ -- & + & ---- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & | & v \\ -- & + & -- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{k+1} & | & A^kv \\ -- & + & ---- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

가 되어 $k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 B^{k+1}의 일반항으로부터 $A^{k+1}=0$이고 $A^kv=0v=0$ 이므로 $B^{k+1}=0$ 이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 성립하므로 원하는 결론을 얻는다.

1.1.16

(마)

도움정리. 두 $n\times n$ 행렬 A, B에 대하여 $(AB)^t=B^tA^t$이다.

증명. $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 이라고 두자.

$$AB=(c_{ij})_{n\times n} \text{ where } c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

그러므로 $(AB)^t$의 (i,j) 성분은 전치행렬의 정의에 의하여 $c_{ji}=\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$ 이다.

$A^t=(x_{ij})_{n\times n}$, $B^t=(y_{ij})_{n\times n}$이라고 하면 전치행렬의 정의에 의해 $x_{ij}=a_{ji}$, $y_{ij}=b_{ji}$.

또한 $B^tA^t=(z_{ij})_{n\times n}$ 이고 $z_{ij}=\sum_{k=1}^n y_{ik}x_{kj}$ 이다.

$$z_{ij}=\sum_{k=1}^n y_{ik}x_{kj}=\sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$$

이며 이 값은 c_{ji}와 같다.

따라서 $(AB)^t=B^tA^t$ 이다.

이제 주어진 정리를 증명하자.

주어진 $n\times n$ 행렬 A에 대해 A가 가역행렬이므로, A^{-1}가 존재한다.

$$A^t(A^{-1})^t=(A^{-1}A)^t=I_n^t=I_n$$

$$(A^{-1})^tA^t=(AA^{-1})^t=I_n^t=I_n$$

이로부터 A^t의 역행렬이 $(A^{-1})^t$임을 알 수 있다.

따라서 A^t의 역행렬이 존재하고, $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ 이다.

1.3.11

행의 개수 n에 관한 귀납법을 사용하자. A는 $n\times m$ 행렬이라고 두자.

$n=1$일 때, $A=(a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\cdots a_{1m})$ 이라고 하자.

우선 A가 zero row 이면 끝이므로 zero row가 아닌 경우를 생각하자.

A에서 0이 아닌 모든 성분들 a_{1i}에 대하여, 각 열에 $1/a_{1i}$를 곱하는 elementary column operation을 시행한다. 그러면 모든 성분들이 0 또는 1이 된다. A의 성분들 중에서 열의 좌표가 가장 작은 열이 k열이라면 k열과 1열을 바꾸어 준다. 그리고 남은 A의 1들에 대해서는 A의 첫 번째 열을 빼주면 $A=(1\,0\,0\cdots 0)$을 얻게 되어 $A=(I_1\,0)$의 형태를 얻을 수 있다.

따라서 $n=1$일 때 가능하다.

이제 행의 개수가 k일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하고 $k+1$개의 행에 대해서도 마찬가지로 할 수 있음을 보이자.

A의 k개의 행 r_1, r_2, $\cdots$, r_k에 대하여 elementary operation을 수행하여,

(i) 0 이 얻어졌다면 A의 $k+1$ 번째 행에 $1\times m$ 행렬 r_{k+1}을 붙인 행렬 B에 대해서도 같은 elementary operation을 시행하여 $\begin{pmatrix} 0 \\ r_{k+1} \end{pmatrix}$ 을 얻을 수 있고 A'의 1행과 r_{k+1}을 바꾸고 $n=1$인 경우를 적용하여 $\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ 나 0을 얻을 수 있다.

(ii) $\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이 얻어졌다면 A의 $k+1$ 번째 행에 $1\times m$ 행렬 r_{k+1}을 붙인 행렬 B에 대해서도 같은 elementary operation을 시행하여 $A' = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{k+1} & \end{pmatrix}$ 을 얻을 수 있다.

$r_{k+1} = (a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_m)$ 이라고 하자.

이제 모든 $i=1,2,\cdots,t$에 대하여 A'의 $(m+1)$번째 행에 i번째 행의 $-a_i$ 배를 더하면 r_{k+1}의 1열부터 t열 까지는 전부 0이 된다. a_{t+1}, $\cdots$, a_m에 대해서는 각 성분에 대해 같은 열에 있는 다른 행들의 성분이 전부 0이므로 행이 1개인 $n=1$인 경우와 마찬가지로 elementary operation을 시행한다. 만약 r_{k+1}이 전부 0이 된다면, 끝난 것이다.
그렇지 않다면 r_{k+1}의 $t+1$열 좌표가 1, 나머지는 0이 되도록 할 수 있다. 이제 A'의 $t+1$열과 r_{k+1}을 바꿔주면 $\begin{pmatrix} I_{t+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이 되어 원하는 결론을 얻을 수 있다.

2.2.7

(가)

$W=\bigcap_{i\in I} W_i$ 로 두자.

(i) $\forall i$, $W_i \subseteq V$ 이므로 W_i의 교집합인 W 또한 V의 부분집합이다. $W\subseteq V$ 이다.

(ii) $w_1, w_2 \in W$ 이면 W의 정의에 따라 $\forall i$, $w_1, w_2 \in W_i$ 이고 $W_i \le V$ 이므로, $\forall i$, $w_1+w_2 \in W_i$ 이다.
따라서 $w_1+w_2 \in W$ 이어야 한다.

(iii) $a\in F$, $w\in W$ 이면, W의 정의에 따라 $\forall i$, $w\in W_i$ 이고 $W_i \le V$ 이므로, $\forall i$, $aw\in W_i$ 이다. 따라서 $aw \in W$ 이다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 $W=\bigcap_{i\in I} W_i \le V$ 이다.

(나)

$W=\sum_{i=1}^{k} W_i$ 로 두자.

(i) V는 연산 $+$에 대하여 닫혀있고 W의 정의로부터 $x\in W$이면 $x\in V$ 이므로
$W\subseteq V$이다.

(ii) 임의의 $w_{1i} \in W_i,\ i=1,2,\cdots,k$ 에 대하여 $x=\sum_{i=1}^{k} w_{1i}$ 로 두면 $x \in W$ 이다.

그리고 임의의 $w_{2i} \in W_i,\ i=1,2,\cdots,k$에 대하여 $y=\sum_{i=1}^{k} w_{2i}$ 로 두면 $y \in W$ 이다.

$x+y=\sum_{i=1}^{k}(w_{1i}+w_{2i})$ 이고 모든 i에 대해 $W_i \le V$ 이므로 $w_{1i}+w_{2i} \in W_i$ 이다.

따라서 W의 정의에 의해 $x+y \in W$ 이다.

(iii) $a \in F$에 대하여 $ax=a\sum_{i=1}^{k} w_{1i}=\sum_{i=1}^{k} aw_{1i}$ (분배법칙) 이고 $W_i \le V$ 이므로 모든 i에 대하여 $aw_{1i} \in W_i$ 이다. 따라서 W의 정의로부터 $ax \in W$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $W=\sum_{i=1}^{k} W_i \le V$ 이다.

2.3.10

(가)

관찰 2.2.2를 활용한다.

①

(i) V'의 임의의 원소 x에 대하여 $x=(a,0),\ a \in V$ 라 하면 $a \in V,\ 0 \in W$ 이므로 $(a,0) \in V \times W$ 이다. $\therefore V' \subseteq V \times W$

(ii) $x,y \in V'$에 대하여 $x=(v_1,0),\ y=(v_2,0),\ (v_1,v_2 \in V)$ 라고 두자.

$x+y=(v_1,0)+(v_2,0)=(v_1+v_2,0)$ 이고 $v_1+v_2 \in V$ (V는 벡터공간) 이므로 $x+y \in V'$.

(iii) $a \in F$ 에 대하여 $ax=a(v_1,0)=(av_1,0)$ 이고 $av_1 \in V$ 이므로 $ax \in V'$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $V' \le V \times W$ 이다.

②

(i) W'의 임의의 원소 x에 대하여 $x=(0,a),\ a \in W$ 라 하면 $a \in W,\ 0 \in V$ 이므로 $(0,a) \in V \times W$ 이다. $\therefore W' \subseteq V \times W$

(ii) $x,y \in W'$에 대하여 $x=(0,v_1),\ y=(0,v_2),\ (v_1,v_2 \in W)$ 라고 두자.

$x+y=(0,v_1)+(0,v_2)=(0,v_1+v_2)$ 이고 $v_1+v_2 \in W$ (W는 벡터공간) 이므로 $x+y \in W'$.

(iii) $a \in F$ 에 대하여 $ax=a(0,v_1)=(0,av_1)$ 이고 $av_1 \in W$ 이므로 $ax \in W'$.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $W' \le V \times W$ 이다.

(나)

$V' \cap W' = \{(v,w) \in V \times W \mid v=0, w=0\}$ 이다. 이 집합의 원소는 $(0,0)$뿐이다.

임의의 $v \in V' \cap W'$ 에 대하여 $v+(0,0)=(0,0)+(0,0)=(0,0)=v$ 이므로 $(0,0)=0$ 이다.

$\therefore V' \cap W' = 0.$

$V'+W'$의 원소인 모든 x는 V'의 임의의 원소 $(a,0)$과 W'의 임의의 원소 $(0,b)$의 합이다. $x=(a,0)+(0,b)=(a,b)$.

$a \in V$ 이고 $b \in W$ 이므로 $x=(a,b) \in V \times W$ 이다.

모든 $x \in V'+W'$에 대하여 $x \in V \times W$ 이므로 $V'+W' \subseteq V \times W$ 이다.

임의의 $y \in V \times W$ 에 대하여 $y = (a, b)$ 라고 두자. $(a \in V,\ b \in W)$.
$y = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$로 표현할 수 있고 $(a, 0) \in V'$, $(0, b) \in W'$ 이므로 $y \in V' + W'$.
따라서 $V \times W \subseteq V' + W'$.
이상으로부터 $V' + W' = V \times W$.

(다)
다음과 같은 $\varphi_1 : V \to V'$ 를 생각하자.

$$\varphi_1(v) = (v, 0) \text{ for } v \in V$$

φ_1이 bijection임을 보이자.
Surjection: $\forall y = (b, 0) \in V'$에 대하여 $y = \varphi_1(v)$가 되는 $v \in V$는 $v = b$ 로 존재한다.
Injection: 임의의 $x_1, x_2 \in V$에 대하여 $\varphi_1(x_1) = \varphi_1(x_2)$ 이면 $(x_1, 0) = (x_2, 0)$ 이므로 $x_1 = x_2$ 임을 알 수 있다.
$x, y \in V$에 대하여 $\varphi_1(x) + \varphi_1(y) = (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) = \varphi_1(x + y)$.
$a \in F$, $x \in V$에 대하여 $\varphi_1(ax) = (ax, 0) = a(x, 0) = a\varphi_1(x)$
따라서 φ_1는 isomorphism 이다. 따라서 $V \approx V'$.

다음과 같은 $\varphi_2 : W \to W'$ 을 생각하자.

$$\varphi_2(w) = (0, w) \text{ for } w \in W$$

φ_2가 bijection 임을 보이자.
Surjection: $\forall y = (0, b) \in W'$에 대하여 $y = \varphi_2(x)$가 되는 $x \in W$가 $x = b$로 존재한다.
Injection: 임의의 $x_1, x_2 \in W$에 대하여 $\varphi_2(x_1) = \varphi_2(x_2)$ 이면 $(0, x_1) = (0, x_2)$ 이므로 $x_1 = x_2$임을 알 수 있다.
$x, y \in W$에 대하여 $\varphi_2(x) + \varphi_2(y) = (0, x) + (0, y) = (0, x + y) = \varphi_2(x + y)$.
$a \in F$, $x \in W$에 대하여 $\varphi_2(ax) = (0, ax) = a(0, x) = a\varphi_2(x)$.
따라서 φ_2는 isomorphism 이므로 $W \approx W'$.

(라)
(가), (다)로부터 $V \approx V'$ 이고 $V' \le V \times W$. 또한 $W \approx W'$ 이고 $W' \le V \times W$이므로 $V \times W$는 V, W를 사실상의 부분공간으로 갖는다.

2.3.13
$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, $g(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j t^j$, $a_i, b_j \in F$ for all i, j 로 두자.
(가)
$k = \max(n, m)$이라 하자.
$a_i = 0$ for $i > n$, $b_j = 0$ for $j > m$ 으로 두면 $(f+g)(t) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) t^i$ 이다.

$$(f+g)(A) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) A^i = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i + \sum_{i=0}^{k} b_i A^i = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i + \sum_{j=0}^{m} b_j A^j = f(A) + g(A).$$

(나)

$(cf)(t)=\sum_{i=0}^{n} ca_i t^i$ 이므로, $(cf)(A)=\sum_{i=0}^{n} ca_i A^i = c\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = cf(A)$

(다)

$(fg)(t)=\sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{\substack{j+k=i \\ 0\le j\le n,\, 0\le k\le m}} a_j b_k\right)t^i$ 이므로,

$$(fg)(A)=\sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{\substack{j+k=i \\ 0\le j\le n,\, 0\le k\le m}} a_j b_k\right)A^i=\sum_{i=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} A^i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j A^{i+j}$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{n} a_i A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j A^j\right)=f(A)g(A)$$

2.3.14

$A=(a_{ij})_{(m+n)\times(m+n)}$, $A'=(a'_{ij})_{(m+n)\times(m+n)}$, $B=(b_{ij})_{m\times m}$, $B'=(b'_{ij})_{m\times m}$,
$C=(c_{ij})_{n\times n}$, $C'=(c'_{ij})_{n\times n}$, $D=(d_{ij})_{m\times n}$, $D'=(d'_{ij})_{m\times n}$ 로 두자.

(가)

$AA'=(x_{ij})_{(m+n)\times(m+n)}$ 이라고 두자.

(i) $i\le m, j\le m$ 일 때,

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{m+n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}a'_{kj}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}b'_{kj}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{ik}\cdot 0=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}b'_{kj}$$

이고 이는 BB'의 (i,j) 성분이다. $i\le m, j\le m$ 이고 BB'는 $m\times m$ 행렬이므로 이 영역은 BB'이다.

(ii) $i>m, j\le m$ 일 때,

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{m+n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}a'_{kj}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} 0\cdot a'_{kj}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{ik}\cdot 0=0$$

따라서 이 영역에서는 0이다.

(iii) $i\le m,\ j>m$ 일 때,

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{m+n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}a'_{kj}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}d'_{k(j-m)}+\sum_{k=m+1}^{n} d_{ik}c'_{k(j-m)}$$

이므로, A의 (i,j) 성분에는 $(i\le m,\ j>m)$ $BD'+DC'$의 $(i,j-m)$ 성분이 들어간다.

(iv) $i>m,\ j>m$ 일 때,

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{m+n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}a'_{kj}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m} 0\cdot a'_{kj}+\sum_{k=m+1}^{n} c_{(i-m)(k-m)}c'_{(k-m)(j-m)}$$

이므로 A의 (i,j) 성분에는 $(i>m,\ j>m)$ CC'의 $(i-m,j-m)$ 성분이 들어간다.

따라서 $AA' = \left(\begin{array}{c|c} BB' & BD'+DC' \\ \hline 0 & CC' \end{array}\right)$.

(나)

$A^n = \left(\begin{array}{c|c} B^n & * \\ \hline 0 & C^n \end{array}\right)$ 임을 보이자. * 영역은 신경 쓰지 않아도 된다. (가)를 활용하면,

$n=1$ 때는 $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ 이므로 참이다. $n=k$일 때 성립한다고 가정하자.

그러므로 $A^k = \left(\begin{array}{c|c} B^k & * \\ \hline 0 & C^k \end{array}\right)$ 이다.

$A^{k+1} = A^k A = \left(\begin{array}{c|c} B^k & * \\ \hline 0 & C^k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B^{k+1} & * \\ \hline 0 & C^{k+1} \end{array}\right)$ 이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 성립한다.

$f(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$ 이라고 하자. ($A^0 = I_n$ 으로 두었다)

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\begin{array}{c|c} B^i & * \\ \hline 0 & C^i \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \sum_{i=0}^{n} a_i B^i & * \\ \hline 0 & \sum_{i=0}^{n} a_i C^i \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} f(B) & * \\ \hline 0 & f(C) \end{array}\right)$$

(다)

A^{-1}가 존재한다고 가정했으므로, $A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right)$로 두자.

이때 X, Y, Z, W는 각각 $m\times m$, $m\times n$, $n\times m$, $n\times n$ 행렬이다.

$$AA^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} BX+DZ & BY+DW \\ \hline CZ & CW \end{array}\right) = I_{m+n} = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$

Componentwise 비교하면, $BX+DZ=I_m$, $BY+DW=0$, $CZ=0$, $CW=I_n$.

임의의 C에 대하여 $CZ=0$ 이어야 하므로, $Z=0$이다.

따라서 $BX=I_m$, $CW=I_n$ $\cdots$(*).

만약 B^{-1}와 C^{-1}가 존재하지 않는다면, $BB'=I_m$을 만족하는 B'이 존재하지 않고, $CC'=I_n$을 만족하는 C'이 존재하지 않아 (*)를 만족하는 행렬 X, W가 존재하지 않아 A^{-1} 또한 존재할 수 없다. 이는 가정에 모순이다.

따라서 $X=B^{-1}$, $W=C^{-1}$. 이를 $BY+DW=0$에 대입하면 $Y=-B^{-1}DC^{-1}$.

$\therefore A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ \hline 0 & C^{-1} \end{array}\right)$ 이다. $A^{-1}A = AA^{-1} = I_{m+n}$이 됨을 또한 확인할 수 있다.

3.1.7

명제 3.1.6에 의하면 $S \subseteq V$ 이면, $\langle S \rangle$는 [S의 linear combination 전체의 집합]과 같다.

임의의 $s \in \langle S \rangle$, $t \in \langle T \rangle$에 대하여 $s = \sum_{i=0}^{n} a_i s_i$, $t = \sum_{i=0}^{m} b_i t_i$, $s_i \in S$, $t_i \in T$, $a_i, b_i \in F$ 가 존재한다.

$s + t = \sum_{i=0}^{n} a_i s_i + \sum_{i=0}^{m} b_i t_i$ 이고 $s_i, t_i \in S \cup T$ 이므로 $s + t \in \langle S \cup T \rangle$.

임의의 $x \in \langle S \cup T \rangle$에 대하여 $x = \sum_{i=0}^{n} a_i s_i + \sum_{i=0}^{m} b_i t_i$ 인 $s_i \in S$, $t_i \in T$, $a_i, b_i \in F$ 가 존재한다. $\sum_{i=0}^{n} a_i s_i \in \langle S \rangle$, $\sum_{i=0}^{n} b_i t_i \in \langle T \rangle$ 이므로 $x \in \langle S \rangle + \langle T \rangle$.

$\langle S \cup T \rangle \subseteq \langle S \rangle + \langle T \rangle$, $\langle S \rangle + \langle T \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle$ 이므로 $\langle S \cup T \rangle = \langle S \rangle + \langle T \rangle$ 이다.

3.2.8

(나)

Need to show: $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_1 f(x) + t_2 g(x) + t_3 h(x) = 0$ only if $t_1 = t_2 = t_3 = 0$.

$t_1 f(x) + t_2 g(x) + t_3 h(x) = 0 \Rightarrow t_1 + t_2 e^x + t_3 e^{2x} = 0$

$x = 0$을 대입하면 $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

$x = 1$을 대입하면 $t_1 + t_2 e + t_3 e^2 = 0$

$x = 2$을 대입하면 $t_1 + t_2 e^2 + t_3 e^4 = 0$

t_1과 t_2를 소거하여 이 연립방정식을 풀면, $t_1 = t_2 = t_3 = 0$.

반대로 $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ 이면 $t_1 f(x) + t_2 g(x) + t_3 h(x) = 0$ 이 성립한다.

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$는 일차독립이다.

3.3.13

(가)

($\Rightarrow$) $\{[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n\}$이 일차독립이므로, $AX = \sum_{i=1}^{n} x_i [A]^i = 0$ 이면 $x_i = 0$ for all i.

따라서 $X = 0$이다.

($\Leftarrow$) $AX = 0$이 자명한 해만 가지므로 $\sum_{i=0}^{n} x_i [A]^i = 0$에서 $x_i = 0$ for all i 이다. 따라서 $\{[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n\}$은 일차독립이다.

(나)

($\Rightarrow$) $\langle [A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n \rangle = F^m$ 이면 명제 3.1.6에 의하여 $\langle [A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n \rangle$의

linear combination 전체의 집합이 F^m과 같으므로, $\sum_{i=1}^{n} x_i [A]^i = B \in F^m$ 을 만족하는 x_i가 모든 i에 대하여 존재한다. 따라서 $AX = B$는 solution을 갖는다.
($\Leftarrow$) $AX = \sum_{i=1}^{n} x_i [A]^i = B \in F^m$가 solution을 가지면 $[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n$의 linear combination으로 임의의 $B \in F^m$을 표현할 수 있다. 따라서 $[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n$의 linear combination 전체의 집합인 $\langle [A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n \rangle$은 F^m이다.

(다)
($\Rightarrow$) $\{[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n\}$이 F^m의 기저이면 관찰 3.3.2에 의하여 $\{[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n\}$의 linear combination $\sum_{i=1}^{n} x_i [A]^i$으로 임의의 $B \in F^m$을 표현하는 방법은 유일하다. 따라서 X는 unique solution을 갖는다.
($\Leftarrow$) 임의의 B에 대하여 $AX = B$가 unique solution을 가지면, 임의의 $B \in F^m$에 대하여 $\sum_{i=1}^{n} x_i [A]^i = B$ 를 만족하는 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$는 유일하다. 즉 F^m의 임의의 B는 $\{[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n\}$의 linear combination으로 유일하게 표현되므로 관찰 3.3.2에 의하여 $\{[A]^1, [A]^2, \cdots, [A]^n\}$는 F^m의 기저이다.