

뉴턴의 사과 및 포물선 운동

물리학실험1 (044): 김주만 조교님

실험 1-1 보고서

공과대학 컴퓨터공학부 2017-18570 이성찬

Abstract

이 실험에서는 물체를 자유낙하 시켜보며, 혹은 지면과 일정한 각도를 이루도록 발사하여 시간에 따른 물체의 위치 변화를 분석하고, 이를 바탕으로 중력 가속도를 측정한다. 또, 물체에 부력이 작용하는 경우 가속도의 값이 작아짐을 확인한다. 실험을 할 때마다 중력 가속도의 값이 약간씩 달랐는데, 예상되는 오차 원인으로 올바르게 못했던 측의 설정을 짚었다.

1. 뉴턴의 사과 - Introduction

1.1 실험목적

뉴턴은 자연 현상을 설명하기 위해 ‘힘’이라는 개념을 도입했다. ‘힘’은 물체의 모양이나 운동 상태를 변화시키는 요인으로 자연에는 4가지의 기본적인 힘이 존재한다. 이 중 우리와 가장 밀접하게 연관되어 있는 것은 바로 중력(gravity)이다. 지구에서 운동하는 모든 물체는 지구의 중력장 안에 존재하여, 지구의 질량에 의한 중력을 받게 된다.

이번 실험에서는 이 중력이라는 힘에 어떤 규칙이 있는지 확인하며, 중력 가속도의 값을 측정해 보고자 한다.

1.2 배경 이론¹⁾

1.2.1 뉴턴의 운동 제 2법칙

힘 \vec{F} 는 운동량의 변화량이다.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

1.2.2 등가속도 직선 운동 공식

a 의 일정한 가속도로 운동하는 물체의 초기 속도를 v_0 라 하면, 시간 t 에서 물체의 속도 $v(t)$ 와 변위 $s(t)$ 는 다음과 같다.

$$v(t) = v_0 + at, \quad s(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

1.2.3 중력, 중력 가속도

뉴턴은 만유인력의 법칙을 발견했다. 이 법칙에 의하면 모든 물체 사이에는 서로 잡아당기는 방향으로 힘이 작용하며 그 크기는 두 물체의 질량 m_1, m_2 에 비례하고 물체 사이의 거리 r 의 제곱에 반비례한다.

비례상수 G 는 만유인력 상수로 불리며, 그 값은 $6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg}$ 이다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

특히, 지구의 중력에 의해 낙하하는 물체는 일정한 가속도를 갖고 운동하는데, 이를 중력 가속도라고 하고 g 로 나타낸다.

지표 부근에 질량이 m_2 인 물체가 있고 중력을 받아 g 의 가속도로 운동한다고 하자. r 은 지구의 반지름, m_1 은 지구의 질량이라고 하면 뉴턴의 운동 제 2법칙에 의해

$$F = m_2 g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

이고, g 에 대해 정리하면 다음을 얻는다.

$$g = G \frac{m_1}{r^2} = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

1.3 실험 과정

1.3.1 준비물

CCD Camera, 컴퓨터, 기준자, 추, 공기

1) [참조] 대학물리학, 이기영 저, 한빛미디어

풍선, 헬륨 풍선, 실타래, 가위가 필요하다.

1.3.2 실험 1

이 실험에서는 자유 낙하하는 추의 운동을 분석하여 중력 가속도를 측정한다.

- 1) I-CA 프로그램을 사용하여 카메라에서 초점, 밝기를 조절하고 물체를 떨어뜨려 보며 카메라가 정상적으로 작동하는지 확인.
- 2) 화면 녹화를 시작하고 추를 떨어뜨린다. 녹화된 동영상을 프레임 기준으로 분석.
- 3) 분석된 데이터를 저장.
- 4) 위 과정을 3번 반복.

1.3.3 실험 2

이 실험에서는 자유 낙하하는 물체에 부력이 작용할 때 실험 1과는 어떻게 운동이 다른지 살펴본다.

- 1) 공기 풍선과 헬륨 풍선을 준비한다. 풍선 자체에 의한 공기 저항을 알아보기 위한 대조군으로 공기 풍선을 준비한 것이다. 그러므로 두 풍선의 부피는 같아야 한다.
- 2) 각 풍선을 추와 연결하고 실험1의 과정을 반복한다.

2. 뉴턴의 사과 - Results

시행 시간	Drop 1	Drop 2	Drop 3
0	0	0	0
0.033	-0.464	-0.113	-0.563
0.067	-2.043	-1.126	-2.702
0.1	-4.743	-2.928	-5.63
0.133	-8.465	-5.968	-9.909
0.167	-13.083	-10.021	-15.201
0.2	-18.951	-15.201	-21.507
0.233	-25.711	-21.507	-29.163
0.267	-33.717	-28.939	-37.946
0.3	-42.394	-37.496	-47.855
0.333	-52.079	-47.856	

표 12): 시간(sec)에 따른 추의 위치(cm)

2.1 실험 1의 결과

추를 각각 다른 높이에서 3번 자유 낙하시킨 결과, 표 1과 같은 결과를 얻었다.

$\Delta t = 0.033$ 으로 두고, 등가속도 운동의 공

식을 활용해 각 구간에서의 가속도를 구한 결과는 다음과 같다.

시행 구간	Drop 1	Drop 2	Drop 3
1~2	-10.23	-8.26	-14.47
2~3	-10.29	-7.24	-7.24
3~4	-9.38	-11.36	-12.40
4~5	-8.22	-9.30	-9.30
5~6	-11.47	-10.34	-9.31
6~7	-8.19	-10.33	-12.39
7~8	-11.44	-10.33	-10.34
8~9	-6.16	-10.33	-10.33
9~10	-9.25	-16.55	
평균	-9.40	-10.45	-10.72
표준편차	1.70	2.61	2.27

표 2: 구간3)에 따른 추의 가속도(cm/s^2)

2.2 실험 2의 결과

실험 1을 분석한 것과 마찬가지로 했다.

시행 시간	헬륨	공기	시행 구간	헬륨	공기
0	0	0	1~2	-6.19	-10.33
0.033	-0.676	-1.689	2~3	-10.33	-10.33
0.067	-2.027	-4.504	3~4	-6.20	-8.27
0.1	-4.504	-8.445	4~5	-9.31	-13.44
0.133	-7.657	-13.287	5~6	-13.43	-6.19
0.167	-11.824	-19.593	6~7	-7.23	-14.48
0.2	-17.454	-26.574	7~8	-9.31	-7.23
0.233	-23.872	-35.132	8~9	-10.33	
0.267	-31.304	-44.478	9~10	-9.32	
0.3	-39.861		평균	-9.07	-10.04
0.333	-49.433		σ	2.29	3.08

표 3: 시간(sec)에 따른 추의 위치(cm) 및 구간에서 추의 가속도(m/s^2)

3. 뉴턴의 사과 - Discussion

3.1 실험 1

알려진 중력가속도의 값과 대략 비슷한 결과를 얻었다. 예상했던 것보다는 오차가 컸는데, 오차의 원인으로는 다음이 있다.

우선 추가 낙하할 때 x 축 변화가 있었다. 이는 카메라의 수평이 충분히 맞지 않았던 것으로 해석할 수 있다. 또한, 추를 사람이 떨어뜨렸기 때문에 추의 낙하는 완벽한 자유 낙하는 아니다. 공기 저항도 있으며, 관찰되지 않았으나 추 자체의 회전 운동도 분명

2) 편의상 떨어뜨리는 기준점을 원점으로 잡았다.

3) k 구간은 $(k-1)\Delta t$ 초부터 $k\Delta t$ 까지의 시간을 의미한다.

있었을 것이다.

3.2 실험 2

풍선 자체로 인한 부력 때문에 가속도의 값이 작아짐을 확인할 수 있었다. 헬륨으로 인한 부력이 공기보다 크므로, 추에 헬륨 풍선을 달아 낙하했을 때가 공기 풍선을 달아 낙하했을 때보다 가속도의 크기가 작다.

한편, 풍선보다 추가 굉장히 무거워 낙하 과정에서 풍선의 방향이 불규칙하게 변하였기 때문에, 공기 저항이 계속 달라진다. 즉, 작용하는 힘의 크기가 계속 변하고, 가속도 또한 변한다. 이로 인해 풍선을 달고 낙하한 실험의 가속도의 표준편차가 그냥 추를 자유 낙하했을 때보다 크게 된다.

4. 포물선 운동 - Introduction

4.1 실험 목적

역학은 물리학의 가장 오래된 학문으로, 물체의 운동을 연구한다. 이번 실험에서는 위의 뉴턴의 사과 실험과 같은 1차원 운동과는 달리 2차원 평면상에서 운동하는 포물선 운동을 알아보고, 물체의 궤적을 시간에 대한 함수로 구해본다. 2차원 운동이기 때문에 두 개의 좌표에 대해 시간에 따른 위치 정보를 기술해본다. 더불어, 이 운동 속에서 중력 가속도의 값 또한 구해본다.

4.2 배경 이론

물체를 v_0 의 속력으로, 지면과 θ 의 각도를 이루도록 처음 위치 (x_0, y_0) 에서 던진다.

4.2.1 공기 저항이 없는 포물선 운동

초기의 속도 벡터는 다음과 같다.

$$\vec{v} = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$$

시간에 따른 물체의 x 좌표, y 좌표를 각각 $x(t)$, $y(t)$ 라 하고 운동방정식을 풀면,

$$x(t) = x_0 + (v_0 \cos \theta)t$$

$$y(t) = y_0 + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

를 얻고, 여기서 시간 t 를 소거하면 물체의

궤적인

$$y = y_0 + \tan \theta (x - x_0) - \frac{1}{2}g \frac{(x - x_0)^2}{(v_0 \cos \theta)^2}$$

를 얻는다.

$y(t) = 0$ 을 풀면 비행시간인

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{(v_0 \sin \theta)^2}} \right)$$

를 얻고, 이를 $x(t)$ 에 대입하여 정리하면 수평 도달 거리를 얻게 된다.

4.2.2 공기 저항이 있는 포물선 운동⁴⁾

공기 저항으로 인한 마찰력은 $f = bv$ 로 둘 수 있다. (b 는 상수) 이를 반영하여 운동방정식을 세우고 미분방정식을 풀어주면

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{k}t + \frac{g + kv_0 \sin \theta}{k^2} (1 - e^{-kt})$$

를 얻는다. 단, $k = b/m$ 으로 두었다.

4.3 실험 과정

4.3.1 준비물

컴퓨터, CCD Camera, 기준자, 발사장치, 구슬이 필요하다.

4.3.2 실험 방법

이 실험에서는 포물선 운동의 궤적을 분석하여 중력 가속도의 값을 찾아낸다.

- 1) 카메라의 위치를 조절한다.⁵⁾
- 2) 다양한 각도로 구슬을 발사하고 I-CA 프로그램을 사용하여 궤적을 추적한다.
- 3) 분석된 데이터를 저장한다.

5. 포물선 운동 - Results

$15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 의 각도로 각각 1번씩, 총 5번을 측정하였다. 얻은 결과 값들을 그래프로 나타낸 결과가 그림 16)에 있는

4) [참조] Analytical Mechanics, Fowles & Cassiday, Cengage Learning

5) 공이 제일 멀리 날아가는 45° 로 발사했을 때 떨어진 지점과 발사위치의 중간에 카메라를 설치하면 편하다.

6) 그래프의 축에 단위가 없는데 이는 뒤에서 설명한다.

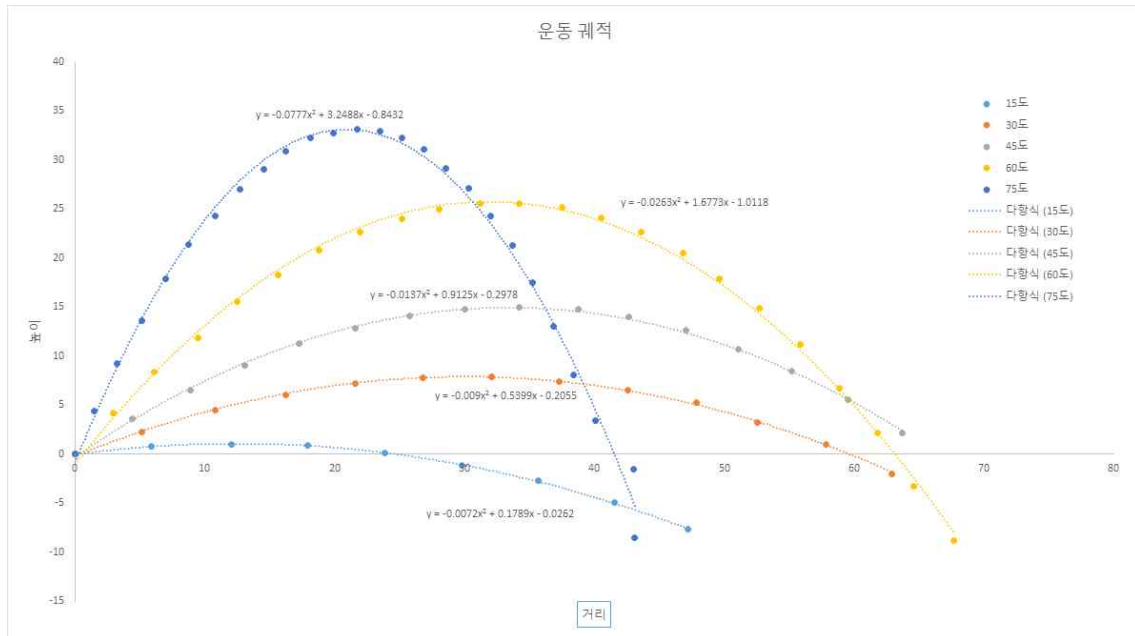


그림 1: 발사 각도에 따른 물체의 궤적과 궤적의 방정식

결과 값들이다. 두 점 사이의 시간 간격은 0.033초 이다.

결과 값들이 지나치게 긴 관계로 각 발사 각도에 대하여 각 시간 구간에서의 x 축 방향 속력들의 평균값들과 y 축 방향 가속도들의 평균값들만 기술한다.

각도	15°	30°	45°	60°	75°
x 축 속력	1.78	1.58	1.28	0.93	0.52
표준편차	0.04	0.06	0.05	0.04	0.01
y 축 가속도	-4.57	-4.41	-4.57	-4.23	-4.3
표준편차	1.31	2.17	1.26	2.69	4.23

표 4: 각도에 따른 결과 값들

6. 포물선 운동 - Discussion

6.1 결과 분석

우선 x 축 방향 속력을 살펴보자. 지면과 θ 의 각도로 속력 v_0 로 쏘아올린 물체의 경우 x 축 방향의 속력은 $v_0 \cos \theta$ 가 된다. $\cos \theta$ 함수는 θ 가 $[0, \pi/2]$ 일 때 감소하는 함수이므로, 이론적으로 θ 가 커질수록 x 축 방향 속력은 감소해야 한다. 표 4를 보면 실제 측정 결과 θ 가 증가할수록 x 축 방향 속력도 감소한다.

또한 이론상으로 x 축 방향으로의 운동은 등속도 운동이기 때문에, x 축 방향 속력이

거의 일정해야 한다. 실제로 표 4를 보면, x 축 방향의 속력들은 표준편차가 매우 작아 값이 거의 일정했다는 의미가 된다.

이제 y 축 방향 가속도를 살펴보자. 총 5번을 측정하였는데, 가속도가 $-4.2 \sim -4.5$ 의 값으로 나왔다. 대략 실제 값의 $1/2.2$ 정도에 해당한다. 대체로 균일한 것으로 보아 실험 자체에는 문제가 없었던 것 같다.

6.2 오차 원인 분석

y 축 가속도에 해당하는 값들이 실제 값들과 너무 많이 차이가 나는데 이 이유는 뉴턴의 사과 실험 후 카메라를 뒤쪽으로 끌어 조정했기 때문이다. 뒤쪽으로 끌어 조정하면서 카메라의 축 설정과 축척에 문제가 생겨서 값들이 이렇게 나왔을 것이라고 추측한다.

이 문제를 해결하기 위한 방법은 다음과 같다. 같은 위치에 카메라를 다시 두고 자를 촬영하여 축척을 구한다. 그리고 그 축척 값 만큼 실험값들에 곱해주면 새로운 데이터를 얻게 될 것이고, 이를 바탕으로 중력 가속도를 다시 계산하면 참값에 가까워질 것이다.

7. Conclusion

이 실험에서는 물체를 자유낙하하고, 포사체를 일정한 각도에서 발사함으로써 중력 가속도의 값을 측정하였다.

지구에서 자유낙하는 물체는 일정한 가속도 $g = 9.806\,65\text{ m/s}^2$ 로 운동하며, 부력이 작용할 때에는 가속도의 값이 작아진다.

포물선 운동에서는 발사 각도가 커질수록 포사체의 x 축 방향 속력이 작아짐을 확인했으며, 분석 결과 x 축 방향 운동은 등속도 운동임을 확인하였다. 그리고 y 축 방향으로의 운동은 가속도가 g 인 등가속도 운동임을 확인하였다.

* Reference

Analytic Mechanics, Fowles & Cassiday,
Cengage Learning