시지프스의 고민

물리학실험1 (044): 김주만 조교님
실험 1-3 보고서
공과대학 컴퓨터공학부 2017-18570 이성찬

Abstract
이번 실험에서는 물체의 자유낙하를 관찰하며 물체의 역학적 에너지가 보존됨을 확인해 본다.

1 Introduction

1.1 실험목적

두 물체 사이에는 힘이 작용하며, 질량을 가진다면 반드시 그렇다. 지구와 우리들도 질량을 갖기에 서로 간에 당기는 힘이 작용한다. 지구 내에서 우리는 이 힘을 중력이라고 한다.

힘이 작용한 방향으로의 이동거리와 힘을 곱한 물리량을 우리는 일이라고 하는데, 지구 내의 중력장에서 물체들은 중력의 작용으로 운동하게 되기도 한다. 이렇게 물체가 중력을 받아 일을 받게 되면 받은 일 만큼 일을 할 수 있는 능력이 생기는데, 우리는 이를 에너지라고 한다. 물체가 운동을 할 때 갖는 에너지를 역학적 에너지라 정의하며, 이는 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지의 합으로 나타내어진다. 이번 실험에서는 이 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지의 관계를 알아보고, 에너지의 보존에 관하여 논의해 본다.

1.2 배경 이론[1)]

1.2.1 에너지

에너지란 일을 할 수 있는 능력을 말한다. 이번 실험에서는 중력장에서 물체의 운동을 관찰하므로 역학적 에너지를 고려한다. 이하 내용에서는 모두 변위에 비례하는 힘에 대한 내용들이다. 즉,

$$\overrightarrow{F}(x) = m\ddot{x}$$

인 상황에서 고려한 내용들이다.

1.2.2 운동 에너지(Kinetic Energy)

Chain Rule에 의해,

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

임을 알 수 있다. 따라서 힘은

$$F = m\ddot{x} = mv\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

와 같이 표현된다. 이 때

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

이며 이 물리량을 운동에너지라고 정의한다.

한편, 일-에너지 정리는

$$W = \int_{x_0}^{x}\overrightarrow{F}(x)\cdot d\overrightarrow{x} = [T]_{x_0}^{x} = T - T_0$$

로부터 얻을 수 있다.

1.2.3 퍼텐셜 에너지 (Potential Energy)

다음과 같은 함수를 정의하자.

$$-\frac{dV(x)}{dx} = F(x)$$

이러한 $V(x)$를 퍼텐셜 에너지라 한다.

특히 중력장에서는 $F = -mg$ 이므로,

$$V(x) = mg(x - x_0)$$

가 된다. (x_0는 기준 위치)

또한 일을 고려하면,

$$W = \int_{x_0}^{x} F dx = -\int_{x_0}^{x} dV = -V(x) + V(x_0)$$

가 된다. 퍼텐셜 에너지가 변화한 만큼 일을 할 수 있다는 의미이다.

1) [참조] Fowles, Analytic Mechanics

1.2.4 역학적 에너지

역학적 에너지는 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합, $E=T+V$로 정의한다.

위에서 일 W를 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 관점에서 구했는데, 이로부터

$$T-T_0=W=-V(x)+V(x_0)$$

를 얻는다. 정리하면

$$T+V(x)=T_0+V(x_0)=(\text{상수})$$

가 되어 외력이 없을 때 역학적 에너지는 보존됨을 알 수 있다.

1.2.5 강체의 운동과 회전 운동 에너지

구름 운동에서는 질량 중심의 병진 운동뿐만 아니라, 강체 자체의 회전축으로 인한 운동도 존재하게 된다.

질량 m, 질량 중심이 v의 속력으로 운동하고, 물체의 회전축에 대한 관성 모멘트가 I, 각속도를 ω라 할 때, 회전 운동 에너지는 $\frac{1}{2}I\omega^2$으로 정의되며, 물체의 총 운동 에너지는 병진 운동 에너지와 회전 운동 에너지의 합이 되어 다음과 같이 표현된다.

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

1.2.6 실험 상황에 대한 이론적 분석

높이 h에서 질량 m, 반지름 r인 구를 떨어뜨린다. 이때 $V_0=mgh$

떨어지는 중 높이 x에서의 속력을 v라 하면 역학적 에너지 보존으로부터

$$mgx+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=mgh$$

$$mgx+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2=mgh$$

$$\therefore\ v=\sqrt{\frac{10}{7}g(h-x)}$$

(미끄러짐이 없다고 가정한다)

빗면의 경사각을 θ라고 하면,

$$v=-\csc\theta\frac{dx}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dt}=-\sin\theta\sqrt{\frac{10}{7}g(h-x)}$$

이 미분방정식을 풀기 위해 특정 시간 구간 Δt에서 양변을 적분하면,

$$2\left(\sqrt{h-x_2}-\sqrt{h-x_1}\right)=\sqrt{\frac{10}{7}g}\,\sin\theta\,\Delta t$$

x_1, x_2는 Δt동안 통과하는 높이의 처음과 나중 지점들이다. 이 식은 역학적 에너지의 보존을 가정하고 세운 식이므로, 역학적 에너지가 보존된다면 다음이 성립한다.

$$\Delta t=\sqrt{\frac{14}{5g}}\,\csc\theta\left(\sqrt{h-x_2}-\sqrt{h-x_1}\right)$$

1.3 실험 과정

1.3.1 준비물

CCD Camera, 컴퓨터, 직선 궤도, 원형 궤도, 공, 자, 공을 받을 그릇, 직선 궤도용 스탠드, I-CA 시스템, 버니어캘리퍼스, 전자저울이 필요하다.

1.3.2 실험 기본 세팅

카메라와 기준자의 설정에 유의한다. 공의 운동이 한 평면상에서 일어나도록 해야 에너지가 다른 축의 성분으로 분산되는 것을 막아 데이터를 온전히 측정할 수 있다.

1.3.3 실험 방법

높이 h에서 구르기 시작한 공이 두 지점을 통과하는데 걸리는 시간 Δt를 높이 h에 대한 함수로 측정하여 이론과 비교한다.

1) h를 정하고 공을 굴리며 분석한다. 한 h에 대해 5번 실험하여 Δt의 평균과 표준편차를 구하고 5가지 이상의 h에 대해서도 조사한다.

2) 측정 결과로부터 구슬의 운동에너지 증가량과 퍼텐셜에너지의 감소량 사이의 관계를 분석한다.

3) 질량이 다른 구슬 으로도 실험해 본다.

4) 궤도의 마찰력과 공의 유효반지름을 고려해 본다.

2 Results

2.1 기본 측정값

실험 장치 및 준비물에서 측정한 값이다.

직선 궤도 경사각 $\pi/4\,\mathrm{rad}$

작은 공의 반지름: $1.60\times10^{-2}\mathrm{m}$

큰 공의 반지름: $1.91\times10^{-2}\mathrm{m}$

작은 공의 질량: $3.05\times10^{-2}\mathrm{kg}$

큰 공의 질량: $5.40\times10^{-2}\mathrm{kg}$

궤도의 한쪽 끝에서 다른 쪽 끝까지의 수직 거리: $3.2\times10^{-2}\mathrm{m}$

궤도 한쪽의 두께: $9\times10^{-3}\mathrm{m}$

자의 눈금이 각각 0, 5, 10, 15, 20인 지점에서 작은 공을 낙하했고 각각 5번씩 실험하였다. 유효반지름 r_{eff}를 계산해 보면

큰 공의 유효 반지름: $1.72\times10^{-2}\mathrm{m}$

유효 반지름을 적용하여 Δt에 대한 식을 다시 세우면 다음과 같다.

$$\Delta t=2\left(\sqrt{h-x_2}-\sqrt{h-x_1}\right)\csc\theta\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\frac{r^2}{r_{\mathrm{eff}}^2}\right)}$$

2.2 측정 결과

다음 표는 눈금 별로 각 지점을 통과하는데 걸린 시간의 평균과 표준편차이다.

	평균 시간	표준편차
0	4.30×10^{-2}	1.05×10^{-2}
5	4.00×10^{-2}	1.08×10^{-2}
10	4.09×10^{-2}	7.86×10^{-3}
15	4.00×10^{-2}	6.35×10^{-3}
20	4.05×10^{-2}	9.08×10^{-3}

표 1: Δt의 평균과 표준편차, 단위 (sec)

3 Discussion

3.1 측정 결과

I-CA가 물체를 트래킹하는 기본 단위 시간이 3.33×10^{-2}인 것을 고려하면 이 값들과 표 1의 평균 시간 값들을 비교해 보면 퍼센트 오차가 최대 29.1%, 최소 20.1%가 됨을 알 수 있다.

3.2 오차 원인 분석

예상되는 오차원인으로는 다음이 있다.

3.2.1 공의 초기 속도 존재와 위치의 부정확

사람이 손으로 공을 높았기 때문에 놓는 순간 공에게 회전 운동 에너지가 존재할 수도 있다.

또한 궤도의 경사각이 $\pi/4$였는데, 궤도가 경사져 있어서 공을 매번 놓을 때 눈금을 정확히 읽는 데에 어려움이 있었다.

즉, 처음 역학적 에너지가 정확히 mgh는 아니었을 것이다. 이로 인한 오차를 최대한 줄이기 위해서는 실험을 정밀하고 조심스럽게 진행해야 할 것이다.

3.2.2 눈금의 붉은 색으로 인한 트래킹 오류

직선 궤도에 붙어있는 자의 눈금에는 10의 단위마다 붉은색으로 칠해져 있다. 이 색을 I-CA가 물체로 인식하여 트래킹 오류가 발생하여 물체의 정확한 위치 측정이 실패한 데이터들이 존재한다. I-CA 상에서 수정하려고 시도했으나 완벽하게 정정하지는 못했다.

3.2.3 궤도와의 마찰

궤도와의 마찰도 무시할 수 없을 것이다. 공이 궤도에서 미끄러지기 때문에 운동 마찰계수를 μ_k라고 둘 수 있을 것이다.

질량중심의 병진운동을 고려하면

$$m\ddot{x}=mg\sin\theta-\mu_k mg\cos\theta$$

그리고 회전 운동 방정식은

$$I\dot{\omega}=\mu_k mgr\cos\theta$$

임을 알 수 있다. 이를 풀어주면

$$\dot{x}=g(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)t$$

$$\omega=\dot{\phi}=g\left(\mu_k\frac{r\cos\theta}{k^2}\right)t$$

(k:Radius of gyration about center of mass, 균일한 구이므로 $\frac{2}{5}r^2$)

를 얻게 되는데, 이로부터 $\dot{x}=\gamma r\omega$로 둘 수 있으며 이 때,

$$\gamma=\frac{k^2}{r^2}\left(\frac{\tan\theta}{\mu_k}-1\right)$$

이다. 이 관계식을 이용하면 운동 마찰 계수를 알 때, v와 t를 더욱 정확하게 구할 수 있게 될 것이며, 마찰에 의한 손실도 고려할 수 있게 될 것이다.

4 Conclusion

이 실험에서는 직선 궤도에서 공을 자유낙하 시키고, 높이에 따른 시간 변화량을 측정하였다. 그리고 역학적 에너지가 보존된다고 가정하고 얻어낸 이론값과 비교하여 실제로 역학적 에너지가 보존되는지 확인하였다.

이론상으로는 외력이 존재하지 않으면 역학적 에너지는 보존된다. 하지만 실험에서 궤도와 공 사이의 마찰이 존재하므로, 에너지의 손실이 발생한다. 또한 낙하 과정에서 퍼텐셜 에너지가 감소하면서 감소한 량이 마찰로 인한 에너지와 물체의 운동에너지를 증가시킴을 확인하였다.

* Reference

-Fowles & Cassiday, Analytic Mechanics, Cengage Learning

-이기영, 대학물리학, 한빛미디어

-Serway, Raymond, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9^{th} Ed., Cengage Learning