자이로스코프

물리학실험1 (044): 김주만 조교님
실험 1-4 보고서
공과대학 컴퓨터공학부 2017-18570 이성찬

Abstract

이번 실험에서는 자이로스코프를 활용하여 물체의 회전운동에 대해 실험해 본다. 토크와 각운동량을 이해하고 자이로스코프의 세차운동 및 장동운동을 관찰하고 분석한다.

1 Introduction

1.1 실험목적

물체가 일반적으로 운동할 때, 질점이 운동할 수도 있다. 하지만 강체의 경우에는 질점의 병진 운동 뿐만 아니라 자체의 회전축에 의한 회전운동도 고려해 주어야 한다. 이렇게 회전운동에서 주요한 물리량인 토크와 각운동량을 이해하여 쉽게 관찰할 수 있는 자이로스코프의 운동에 대해 논한다. 특히 자이로스코프의 세차운동과 장동운동을 관찰하여 분석하는 것을 목표로 한다.

1.2 배경 이론[1)]

1.2.1 토크(Torque)

토크($\vec{\tau}$)는 물체에 작용하여 물체를 회전시키는 원인이 되는 물리량이다. 회전축으로부터 힘의 작용점까지의 거리 벡터($\vec{r}$)와 힘 벡터($\vec{F}$)의 외적으로 정의된다. 이를 수식으로 표현하면

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

이다. 단위는 N・m 이다.

1.2.2 각운동량(Angular Momentum)

회전 운동에서의 운동량을 나타내 주는 물리량이다. 선운동량이 $\vec{p} = m\vec{v}$ 일 때, 각운동량 $\vec{L}$은 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

1) [참조] Fowles, Analytic Mechanics

1.2.3 토크와 각운동량의 관계

병진운동에서 선운동량의 시간에 대한 변화량은 알짜 힘이었다. 즉,

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

이었다. 회전운동에서도 마찬가지이다.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

와 같이 적을 수 있다.

한편 $\vec{p}$의 정의로부터

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$$

를 얻게 되어 $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$이 되어

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{net} = \vec{\tau}_{net}$$

를 얻게 된다. 즉 각운동량의 시간에 대한 변화량은 알짜 토크가 된다.

1.2.4 각운동량과 관성모멘트

강체의 한 부분의 각운동량 L_i는 그 부분의 질량 m_i, 회전축으로부터의 거리 r_i, 회전 각속도를 ω_i라고 할 때,

$$\begin{aligned} \vec{L_i} &= \vec{r_i} \times \vec{p_i} = \vec{r_i} \times m\vec{v_i} \\ &= \vec{r_i} \times m_i(\vec{r_i} \times \vec{\omega_i}) = m_i r_i^2 w_i \hat{\omega} \end{aligned}$$

이며, $m_i r_i^2$은 그 부분의 관성모멘트 이므로 I_i라고 둘 수 있으므로,

$$L = \sum_i L_i = \sum_i I_i w_i = Iw$$

와 같이 표현할 수 있게 된다.

1.2.5 자이로스코프의 세차운동

자이로스코프의 세차운동을 분석해 보자.

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{r} \times \vec{F}_{net}$$

자이로스코프에 작용하는 알짜 힘은 중력 $M\vec{g}$와 수직항력 $\vec{n}$뿐이다. 대입하면

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{r} \times \vec{F}_{net} = \vec{r} \times M\vec{g}$$

dt의 시간동안 $d\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \vec{\tau}_{net}dt$ 이고 여기서 $|L_f| = |L_i|$ 이므로 $d\vec{L} \parallel \vec{\tau}_{net}$

ϕ를 자이로스코프의 회전각이라고 하자. $dL = Ld\phi$로부터

$$d\phi = \frac{\vec{\tau}_{net}dt}{L} = \frac{Mgrdt}{L}$$

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgr}{L} = \frac{Mgr}{I\omega}$$

를 얻는다. ω_p는 세차운동의 각속력이다. 즉 각운동량 L_i이 존재하면 토크가 항상 작용하기 때문에 $d\vec{L}$이 존재하며 그 방향은 $\vec{\tau}$와 같다. 회전축이 운동하면서 $\vec{\tau}$의 방향이 바뀌고, $d\vec{L}$의 방향도 변하게 된다.

회전축의 이러한 운동을 세차운동이라고 한다. 한편 이 식은 $\omega_p \ll \omega$일 때 성립하는 식이다. 이 경우가 아니라면 자이로스코프의 운동은 훨씬 복잡해진다.

1.2.6 장동운동 (Nutation)

$\vec{L}$이 평면상에서 움직인다고 가정했으나 실제로는 수직 성분도 존재하게 된다.

$\omega_p \ll \omega$인 경우에는 이를 무시할 수 있으나 그렇지 않으면 운동이 복잡해진다. 회전축 또한 각운동량의 수직 성분에 의해서 위 아래로 움직이게 되고 두 각 θ_1, θ_2 사이를 왔다 갔다 하는 것처럼 보이게 된다.

1.3 실험 과정

1.3.1 준비물

자이로스코프 실험 App. 질량(100g, 200g, 300g), 컴퓨터, 와이어, 도르래, 지지대, 버니어캘리퍼스, 전자저울

1.3.2 실험 기본 세팅

자이로스코프의 운동을 관찰할 때, tilt 값의 영점 조절에 유의한다. 또한, 자이로스코프에 질량을 올리기 전에 균형추를 활용하여 수평을 맞추고, 수평이 맞는지 꼭 확인한다. 실험 장치를 연결하고 좌표계를 기본적으로 설정한다.

1.3.3 실험 방법

질량을 바꿔가며, 돌림힘의 작용점을 바꾸어 가며 자이로스코프의 운동을 관찰한다. 기본적인 세팅이 된 상황에서

1) 바퀴를 회전시킨다.
2) 토크를 가하고 세차운동을 관찰한다. $\omega_p \ll \omega$이 유지되어야 하므로 바퀴를 계속 회전시켜야 한다.
3) 장동운동도 관찰하여 본다.
4) 질량을 바꾸어가며, 무게의 작용점을 바꾸어 각각 3번씩 실험한다.

2 Results

2.1 기본 측정값

실험 장치 및 준비물에서 측정한 값이다.

자이로스코프 바퀴 지름: $2.55 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$

자이로스코프 바퀴 두께: $2.2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$

자이로스코프 바퀴 질량: $1.3876\,\mathrm{kg}$

추의 질량: $100\,\mathrm{g}$, $200\,\mathrm{g}$

추 위치 간격 $2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$

RPM 센서 부분 반지름: $3.1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$

2.2 측정 결과

다음 표는 각 경우별로 측정한 판의 평균 각속도와 세차운동 각속도이다. 순서쌍의 의미는 (질량, 작용점 위치, 횟수)이다.

	평균 각속도	세차운동 각속도
$(100, 1, 1)$	14.686	0.893
$(100, 1, 2)$	16.215	0.782
$(100, 1, 3)$	16.932	0.781
$(100, 2, 1)$	17.313	0.901
$(100, 2, 2)$	18.397	0.786
$(100, 2, 3)$	17.409	0.870

$(100, 3, 1)$	17.983	0.902
$(100, 3, 2)$	19.957	0.873
$(100, 3, 3)$	18.384	0.844
$(100, 4, 1)$	20.509	0.983
$(100, 4, 2)$	18.411	0.963
$(100, 4, 3)$	22.091	0.864
$(200, 1, 1)$	20.576	1.205
$(200, 1, 2)$	22.710	1.131
$(200, 1, 3)$	22.017	1.228
$(200, 2, 1)$	23.588	1.291
$(200, 2, 2)$	22.142	1.279
$(200, 2, 3)$	24.215	1.376
$(200, 3, 1)$	21.623	1.510
$(200, 3, 2)$	21.661	1.615
$(200, 3, 3)$	23.817	1.498
$(200, 4, 1)$	22.733	1.625
$(200, 4, 2)$	21.793	1.700
$(200, 4, 3)$	24.349	1.551

표 1: $\overline{\omega}$와 ω_p. 단위는 rad/s

3 Discussion

3.1 측정 결과

측정한 평균 각속도 값들을 바탕으로 다음 식에 대입하여 보았다.

$$\omega_p = \frac{Mgr}{I\omega}$$

대입한 결과의 ω_p와 측정된 ω_p를 비교하면 된다.

	이론 ω_p	측정 ω_p
$(100, 1, 1)$	0.887	0.893
$(100, 1, 2)$	0.773	0.782
$(100, 1, 3)$	0.740	0.781
$(100, 2, 1)$	0.859	0.901
$(100, 2, 2)$	0.772	0.786
$(100, 2, 3)$	0.855	0.870
$(100, 3, 1)$	0.883	0.902
$(100, 3, 2)$	0.833	0.873
$(100, 3, 3)$	0.863	0.844
$(100, 4, 1)$	0.896	0.983
$(100, 4, 2)$	0.953	0.963
$(100, 4, 3)$	0.832	0.864
$(200, 1, 1)$	1.218	1.205
$(200, 1, 2)$	1.104	1.131
$(200, 1, 3)$	1.193	1.228
$(200, 2, 1)$	1.204	1.291
$(200, 2, 2)$	1.283	1.279
$(200, 2, 3)$	1.229	1.376
$(200, 3, 1)$	1.468	1.510
$(200, 3, 2)$	1.536	1.615
$(200, 3, 3)$	1.397	1.498
$(200, 4, 1)$	1.544	1.625
$(200, 4, 2)$	1.610	1.700
$(200, 4, 3)$	1.441	1.551

표2: ω_p의 이론값과 측정값 비교. 단위: rad/s

3.2 오차 원인 분석

예상되는 오차원인으로는 다음이 있다.

3.2.1 정확하지 못한 RPM 측정

상식적으로, 처음 돌리기 시작한 이후 시간이 지날수록 마찰로 인해 에너지가 손실되어 RPM이 감소해야 한다. 반면, 센서가 측정한 결과 처음에는 낮은 RPM이다가 2~3초 지난 뒤에는 RPM 값이 갑자기 뛰는 측정 결과가 도출되었다.

3.2.2 사람이 회전판을 돌렸다

회전판도 회전축과 마찰이 존재한다. 또한 회전축에 수평방향으로 초기속도를 주었다. 주지 않을 경우에는 지나치게 각도의 폭이 큰 장동운동이 존재하여 분석이 어려웠다.

3.2.3 장동운동의 존재

각운동량의 수직성분이 애초에 존재했기 때문에 $\omega_p = \frac{Mgr}{I\omega}$라는 식이 정확하지 않을 수도 있다.

장동운동 분석에는 에너지 식이 이용되기도 한다. 마찰이 없는 상황이라면 다음과 같이 $E = T_{rot} + V$로 둔다.

$$E = \frac{1}{2}\left(I\omega_{x'}^2 + I\omega_{y'}^2 + I_s\omega_{z'}^2\right) + mgl\cos\theta = constant$$

Eulerian angles를 활용하면

$$E = \frac{1}{2}\left(I\dot{\theta}^2 + I\dot{\phi}^2\sin^2\theta + I_sS^2\right) + mgl\cos\theta$$

그리고 다음 식으로부터

$$I\dot{\phi}\sin^2\theta + I_sS\cos\theta = L_z = constant$$

$\dot{\phi}$에 대한 식을 얻을 수도 있다.

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - I_sS\cos\theta}{I\sin^2\theta} = \frac{L_z - L_{z'}\cos\theta}{I\sin^2\theta}$$

3.2.4 한계점

장동운동을 완벽하게 분석해내지 못한 점이 한계점이다.

4 Conclusion

이 실험에서는 자이로스코프의 운동을 관찰하며 돌림힘과 각운동량의 관계에 대해 살펴보고 실제로 자이로스코프의 세차운동과 장동운동을 관찰해 보았다.

세차운동에서는 $\omega_p \ll \omega$가 되어야

$$\omega_p = \frac{Mgr}{I\omega}$$

라는 식을 잘 만족시킴을 확인하였다.

또, 회전축이 수평이 아닌 상하로 움직이는 장동운동도 관측해 보았는데, 완벽하게 분석하지는 못했으나, 자이로스코프의 각운동량에 수직 성분이 존재하여 이러한 운동이 나타남을 관찰해 보았다.

* Reference

-Fowles & Cassiday, Analytic Mechanics, Cengage Learning

-이기영, 대학물리학, 한빛미디어

-Serway, Raymond, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9^{th} Ed., Cengage Learning