선형대수학 과제 2

2017-18570 이성찬

116쪽 추가증명 (나-ii') $[M]^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}} \cdot [L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}} = [M \circ L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{D}}$ 임을 보이면 된다. 정의 5.3.2 에 의하여

$$[L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}} = \big([L(v_1)]_{\mathfrak{C}}, \cdots, [L(v_n)]_{\mathfrak{C}} \big), \quad L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$[M]^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}} = \big([M(w_1)]_{\mathfrak{D}}, \cdots, [M(w_m)]_{\mathfrak{D}} \big), \quad M(w_i) = \sum_{k=1}^{r} b_{ki} u_k, \quad (i = 1, \cdots, m)$$

라고 두면, $[M]^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}} = (b_{ki})$ 이고, $[L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}} = (a_{ij})$ 인 셈이다.

$$\left([M]^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}} \cdot [L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}} \text{ 의 } (k,j)\text{-성분} \right) = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$$

이므로,

$$\left([M]^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}} \cdot [L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}} \text{ 의 } j\text{-번째 column} \right) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) u_k$$

가 된다. 한편, $[M \circ L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{D}}$의 j-번째 column도

$$(M \circ L)(v_j) = M\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} M(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{ki} u_k \right) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) u_k$$

이므로, $[M]^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}} \cdot [L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}} = [M \circ L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{D}}$ 이다.

5.3.6 (가) (Ordered) basis $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$의 원소들을 차례대로 v_1, v_2, v_3, 그리고 w_1, w_2, w_3라고 하자.

(i) $[L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}$

$$L(v_1) = (0,0,0)^{\mathbf{t}} = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3$$
$$L(v_2) = (1,1,2)^{\mathbf{t}} = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3$$
$$L(v_3) = (-1,1,2)^{\mathbf{t}} = a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3$$

를 만족하는 $a_{ij} \in F$를 찾아주면 된다. 계산을 해보면

$$[L]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

이다.

(ii) $[L]^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{B}}$

$$L(w_1) = (1,0,0)^{\mathbf{t}} = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + b_{31}v_3$$
$$L(w_2) = (0,0,0)^{\mathbf{t}} = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + b_{32}v_3$$
$$L(w_3) = (0,2,2)^{\mathbf{t}} = b_{13}v_1 + b_{23}v_2 + b_{33}v_3$$

를 만족하는 $b_{ij} \in F$를 찾아주면 된다. 계산을 해보면

$$[L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

이다.

(iii) $[L^2]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$

$$L^2((x,y,z)^{\mathbf{t}}) = L((x-y,z,2z)^{\mathbf{t}}) = (x-y-z,2z,4z)^{\mathbf{t}}$$

이므로,

$$L^2(v_1) = (0,0,0)^{\mathbf{t}} = c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + c_{31}v_3$$
$$L^2(v_2) = (0,2,4)^{\mathbf{t}} = c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + c_{32}v_3$$
$$L^2(v_3) = (-2,2,4)^{\mathbf{t}} = c_{13}v_1 + c_{23}v_2 + c_{33}v_3$$

를 만족하는 $c_{ij} \in F$를 찾아주면 된다. 계산을 해보면

$$[L^2]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

이다.

5.5.5 **(나)** $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$가 F^3의 basis 이므로 각각 원소 3개를 찾는다. (가)에서 $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ 라 할 때,

$$[I]_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}} = \big([I(v_1)]_{\mathcal{E}}, [I(v_2)]_{\mathcal{E}}, [I(v_3)]_{\mathcal{E}}\big) = A$$

이므로, A의 j-번째 column 이 v_j가 됨을 알 수 있다. 따라서, $\mathfrak{B} = \{(1,1,1)^{\mathbf{t}}, (1,1,0)^{\mathbf{t}}, (1,0,0)^{\mathbf{t}}\}$. 이제 $\mathfrak{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$로 두면 $[L_A]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = I$ 이어야 하므로,

$$L_A(v_1) = (3,2,1)^{\mathbf{t}} = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3$$
$$L_A(v_2) = (2,2,1)^{\mathbf{t}} = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3$$
$$L_A(v_3) = (1,1,1)^{\mathbf{t}} = 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3$$

가 되어 $\mathfrak{C} = \{(3,2,1)^{\mathbf{t}}, (2,2,1)^{\mathbf{t}}, (1,1,1)^{\mathbf{t}}\}$ 임을 알 수 있다.

5.5.18 두 선형사상 L, M의 rank를 r로 두자. V와 W의 기저를 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$라고 할 때, 선형사상에 대응하는 행렬 $[L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$, $[M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$을 생각할 수 있다. 관찰 5.5.15에 의하면

$$[L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \asymp \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \asymp \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

이므로 $\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$에 대응하는 선형사상을 I'이라고 하면 $I' = \psi_L \circ L \circ \varphi_L, I' = \psi_M \circ M \circ \varphi_M$이 되게 하는 bijection $\psi_L, \varphi_L, \psi_M, \varphi_M$이 존재한다. 이제

$$\psi = \psi_M^{-1} \circ \psi_L \qquad \varphi = \varphi_M \circ \varphi_L^{-1}$$

와 같이 두면 $\psi \circ L = \psi_M^{-1} \circ \psi_L \circ L = \psi_M^{-1} \circ \psi_L \circ L \circ (\varphi_L \circ \varphi_L^{-1}) = \psi_M^{-1} \circ (\psi_L \circ L \circ \varphi_L) \circ \varphi_L^{-1}$ $= \psi_M^{-1} \circ (\psi_M \circ M \circ \varphi_M) \circ \varphi_L^{-1} = M \circ \varphi_M \circ \varphi_L^{-1} = M \circ \varphi$ 가 된다.

6.2.15 (가) (Injective) $\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$에 대하여 $\rho_\tau(\sigma_1) = \rho_\tau(\sigma_2)$이면 $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau$ 이고, τ가 transposition 이므로 역원 τ^{-1}이 존재한다. 이 역원을 오른쪽에 합성해주면, 함수의 합성에는 결합법칙이 성립하므로, $\sigma_1 \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = \sigma_2 \circ (\tau \circ \tau^{-1})$ 이고 $\tau \circ \tau^{-1} = id$ 이므로 $\sigma_1 = \sigma_2$.

(Surjective) $A_n \circ \tau$의 정의에 의하면 임의의 $A_n \circ \tau$의 원소 σ_1에 대해 $\sigma_1 = \sigma \circ \tau$인 σ가 A_n에 존재한다.

따라서 ρ_τ는 bijection 이다.

(나) (Disjoint) 우선 A_n의 정의는 $\text{sgn}(\sigma) = 1$인 σ들의 집합이다. 따라서 σ는 짝수개의 transposition 의 합성으로 표현할수 있다. 그런데 이 A_n의 원소 σ들에 transposition τ를 합성한 $A_n \circ \tau$의 원소 $\sigma \circ \tau$들은 홀수개의 transposition의 합성으로 나타내어지므로, $\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = -1$이 된다. 따라서 $A_n \cap (A_n \circ \tau) = \varnothing$.

(Union) 이제 $S_n = A_n \cup (A_n \circ \tau)$임을 보이자. $A_n, A_n \circ \tau$는 정의에 의해 이미 S_n의 부분집합인데다가, S_n의 원소들 중에서 sgn의 값이 1인 모든 원소들은 A_n의 정의에 의해 A_n의 원소가 된다. 그러므로 sgn의 값이 -1인 원소들이 전부 $A_n \circ \tau$의 원소임을 확인하면 된다.

만약 $\text{sgn}(\sigma) = -1$이고 $\sigma \notin A_n \circ \tau$인 $\sigma \in S_n$가 존재한다고 해보자. 그러면 $\text{sgn}(\sigma \circ \tau^{-1}) = 1$ 이므로 $\sigma \circ \tau^{-1} \in A_n$이다. 이제 $\rho_\tau(\sigma \circ \tau^{-1}) = \sigma \circ \tau^{-1} \circ \tau = \sigma \circ id = \sigma$이고 ρ_τ는 bijection 이므로 $\rho_\tau(\sigma \circ \tau^{-1}) = \sigma \in A_n \circ \tau$가 되어 모순이다. 따라서 sgn의 값이 -1인 permutation들은 전부 $A_n \circ \tau$에 있다.

$\therefore S_n = A_n \amalg (A_n \circ \tau)$.

(다) ρ_τ가 bijection 이고, 정의역과 공역(치역)이 유한집합이므로 비둘기집의 원리에 의해 $|A_n| = |A_n \circ \tau|$임을 알수 있고, (나)로부터 $S_n = A_n \amalg (A_n \circ \tau)$ 이므로 $n! = |S_n| = |A_n| + |A_n \circ \tau| = 2\,|A_n|$이다. 따라서 $|A_n| = n!/2$.

6.2.26 보기 6.2.24 (가) 로부터 $[L]_{\mathfrak{B}_\sigma}^{\mathfrak{B}_\sigma} = (I_\sigma)^{-1} \cdot [L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \cdot I_\sigma$ 이므로 $[L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \sim [L]_{\mathfrak{B}_\sigma}^{\mathfrak{B}_\sigma}$ 임을 알 수 있다. 이제 $[L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 일 때, $[L]_{\mathfrak{B}_\sigma}^{\mathfrak{B}_\sigma} = \text{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)})$ 임을 보이면 원하는 결론을 얻는다.

V의 basis를 하나 택하여 $\mathfrak{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$라고 할 때, 다음과 같은 선형사상 $L \in \mathfrak{L}(V, V)$을 생각할 수 있다. (단, $\text{dim}V = n$.) (Linear Extension Theorem)

$$L(v_i) = \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in F \qquad \text{for } i = 1, \cdots, n$$

그러면 $[L(v_i)]_{\mathfrak{B}}$는 i-번째 좌표가 λ_i이고 나머지 좌표들은 0이 되므로, 이 선형사상 L에 대하여

$$[L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

가 됨을 알 수 있다.

이제 주어진 $\sigma \in S_n$에 대하여 $\mathfrak{B}_\sigma = \{v_{\sigma(1)} \cdots, v_{\sigma(n)}\}$으로 두면, $\sigma(j)$ $(j = 1, \cdots, n)$ 는 (permutation의 정의로부터) i가 택할 수 있는 값들 $1, \cdots, n$ 중에 존재하므로

$$L(v_{\sigma(j)}) = \lambda_{\sigma(j)} v_{\sigma(j)} \qquad \text{for } j = 1, \cdots, n$$

이 된다. 그러므로 $\left[L(v_{\sigma(j)})\right]_{\mathfrak{B}_\sigma}$는 j-번째 좌표가 $\lambda_{\sigma(j)}$이고 나머지 좌표들은 모두 0이다. 따라서

$$[L]_{\mathfrak{B}_\sigma}^{\mathfrak{B}_\sigma} = \operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)})$$

가 되고, $[L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \sim [L]_{\mathfrak{B}_\sigma}^{\mathfrak{B}_\sigma}$ 이므로 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \sim \operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)})$ 이라는 결론을 얻는다.

6.4.9 정리 6.4.7 에 의하면 [A is invertible if and only if $\det A \neq 0$] 이고, [A is invertible]과 [A의 행들이 일차독립]인 것은 동치이므로, A의 행들이 일차종속일 필요충분조건은 $\det A = 0$인 것이다. (대우)

(가) 우선 S의 원소들을 차례로 행렬 A의 i-번째 column 이라고 하면,

$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

이므로 $\det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 임을 계산을 통해 알 수 있다.

S가 일차종속

$\iff$ $\det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\iff$ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$

$\iff$ $a+b+c = 0$ or $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$.

(나) (가)에서 더 이어나가면,

$a+b+c = 0$ or $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$

$\iff$ $a+b+c = 0$ or $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = 0$

$\iff$ $a+b+c = 0$ or $a = b = c$ $\quad (\because F = \mathbb{R})$.

6.5.8 (가) 다음과 같이 귀납적으로 정의하자.

$$A_n = \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & & & & \\ \vdots & & & A_{n-1} & \\ 0 & & & & \end{array}\right) \qquad (n \geq 2)$$

그러면, $n \geq 3$일 때,

$$A_n = \left(\begin{array}{c|c|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & -1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이제 첫 번째 행에 대해 전개하면,

$$\det A_n = 2 \cdot \det A_{n-1} - (-1) \cdot \det \left(\begin{array}{c|cccc} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & & & & \end{array}\right)$$

를 얻고, 마지막 항의 행렬식 부분에서 첫 번째 열에 대해 전개하면 $(-1) \det A_{n-2}$ 이므로

$$\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}, \qquad (n \geq 3)$$

직접 계산해 보면 $\det A_1 = 2, \det A_2 = 3$ 임을 알 수 있다.
이 점화식을 풀어주면 $\det A_n = n + 1$ 임을 얻는다.

(나) 우선 $n = 2$ 일때, 행렬식을 직접 계산해 보면 $\det B_2 = 2$이다.
$n \geq 3$일 때, B_n의 마지막 행에 대해 전개하면,

$$\det B_n = -(-1) \det \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & A_{n-2} & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) + 2 \det A_{n-1}$$

을 얻고 첫 항의 행렬식 부분에서 마지막 열에 대해 전개하면 $-2 \det A_{n-2}$이므로,

$$\det B_n = 2 \det A_{n-1} - 2 \det A_{n-2}, \qquad (n \geq 3)$$

임을 알 수 있고, (가)의 결과를 대입하면 $\det B_n = 2$ $(n \geq 2)$ ($n = 2$ 일때도 성립)를 얻는다.

(다) $n = 4$일 때, 행렬식을 직접 계산해 보면 $\det D_4 = 4$ 임을 알 수 있다.
D_n의 마지막 행에 대해 전개하면,

$$\det D_n = 2 \det A_{n-1} + (-1) \det \left(\begin{array}{cccc|cc} & & & & 0 & 0 \\ & A_{n-3} & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

을 얻고 이제 마지막 항의 행렬식을 마지막 열에 대해 전개하면,

$$-(-1)\det\left(\begin{array}{c|c} A_{n-3} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 2 \end{array}\right) = 2\det A_{n-3}$$

이므로,

$$\det D_n = 2\det A_{n-1} - 2\det A_{n-3}, \qquad (n \geq 4)$$

임을 알 수 있고, (가)의 결과를 대입하면 $\det D_n = 4\,(n \geq 4)$를 얻는다.

6.5.11 행렬에 elementary column operation 을 유한 번 시행해도 행렬식의 값은 바뀌지 않는다. 문제에서 행렬식을 구하고자 하는 행렬을 V_n 이라고 하자.

귀납법을 사용한다. $n = 2$ 일때, (좌변)$= a_2 - a_1$, (우변)$= a_2 - a_1$ 이므로 성립한다.

$n-1\,(\geq 1)$일 때, $\det V_{n-1} = \prod_{i \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$ 라고 가정하자.

$$\det V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

에서 $j = 1, \cdots, n$ 에 대해 V_n의 j-번째 column에 V_n의 $(j-1)$-번째 column의 $-a_n$배를 더한다. 그러면,

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & a_1^2 - a_1 a_n & \cdots & a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 - a_n & a_2^2 - a_2 a_n & \cdots & a_2^{n-1} - a_n a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & (a_1 - a_n)a_1 & \cdots & (a_1 - a_n)a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 - a_n & (a_2 - a_n)a_2 & \cdots & (a_1 - a_n)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & (a_1 - a_n)a_1 & \cdots & (a_1 - a_n)a_1^{n-2} \\ a_2 - a_n & (a_2 - a_n)a_2 & \cdots & (a_2 - a_n)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & (a_{n-1} - a_n)a_{n-1} & \cdots & (a_{n-1} - a_n)a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \text{(마지막 행에 대한 전개)}$$

$$=(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(a_k - a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \text{(det 는 linear form)}$$

$$=(-1)^{n-1}\det V_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(a_k-a_n)$$
$$=(-1)^{n-1}\left(\prod_{i\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}(a_k-a_n)\right)=\left(\prod_{i\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)\right)$$
$$=\prod_{i\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$
이 되어 n일 때도 성립한다. 따라서

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

6.5.13 (가) $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 일 때, $a_0f_0 + a_1f_1 + \cdots + a_{n-1}f_{n-1} = 0$ 이라고 하자. 서로 다른 실수 $x_1, \cdots, x_n$을 잡아주면 이는

$$a_0 + x_ia_1 + x_i^2a_2 + \cdots + x_i^{n-1}a_{n-1} = 0, \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

과 같은 식이다. 이 a_i들에 대한 n개의 연립일차방정식은 Vandermonde matrix를 coefficient matrix로 갖는다. 그런데 x_i는 서로 다른 실수들이므로 연습문제 6.5.11에 의하면 coefficient matrix의 행렬식이 0이 아니다. 따라서 coefficient matrix는 invertible 이므로 왼쪽에 역행렬을 곱해주면 우변은 0이므로 모든 i에 대하여 $a_i = 0$이다. 따라서 일차독립이다.

(나) $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 일 때, $a_0g_0 + a_1g_1 + \cdots + a_{n-1}g_{n-1} = 0$ 이라고 하자. 이는 다음과 동치이다.

$$a_0 + a_1\exp(x) + a_2\exp(2x) + \cdots + a_{n-1}\exp((n-1)x) = 0$$

이제 위 식에 $x = 0, 1, 2\cdots, n-1$을 대입하면, 다음 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} 1 & (\exp(0))^1 & (\exp(0))^2 & \cdots & (\exp(0))^{n-1} \\ 1 & (\exp(1))^1 & (\exp(1))^2 & \cdots & (\exp(1))^{n-1} \\ 1 & (\exp(2))^1 & (\exp(2))^2 & \cdots & (\exp(2))^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\exp(n-1))^1 & (\exp(n-1))^2 & \cdots & (\exp(n-1))^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

coefficient matrix가 Vandermonde matrix이고 $\exp(i)$, $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$은 모두 다른 실수이므로 coefficient matrix의 행렬식 값이 0이 아니다. 따라서 invertible 이고 왼쪽에 역행렬을 곱해주면 우변이 0이 되므로 모든 i에 대하여 $a_i = 0$이다. 따라서 일차독립이다.

(다) $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$일 때,

$$a_0f_0 + a_1f_1 + \cdots + a_{n-1}f_{n-1} + b_0g_0 + b_1g_1 + \cdots + b_{n-1}g_{n-1} = 0$$

이라고 하자. 이 식은 x에 대한 항등식이므로, 이 식을 n번 미분하면

$$b_0 g_0 + b_1 g_1 + \cdots + b_{n-1} g_{n-1} = 0$$

을 얻는다. (나)의 결과에 의해 $b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$이어야 한다. 이제 이 b_i의 값들을 미분하기 전 식에 대입해 주면, $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_{n-1} f_{n-1} = 0$이 되고, (가)에 의해 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$이 된다. 따라서 일차독립이다.