선형대수학 1

2018. 4. 21.

1. (10점) $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F),\ B \in \mathfrak{M}_{n,m}(F)$ 일 때, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ 임을 보여라.

2. (10점) $V \times W$ 는 V 와 isomorphic 한 subspace 를 갖는 것을 보여라.

3. (10점) $U = \{(x,y,z)^{\mathbf{t}} \in F^3 \,|\, 2x - y + 4z = 0\}$ 이고 $W = \{(x,y,z)^{\mathbf{t}} \in F^3 \,|\, 5y - 3z = 0\}$ 일 때, $\dim(U + W)$ 를 구하라.

4. (10점) $L \in \mathfrak{L}(F^n, F^n)$ 이고 $X_1, \ldots, X_n \in F^n$ 일 때, 만약 $\{L(X_1), \ldots, L(X_n)\}$ 이 일차독립이면, L 은 isomorphism 임을 보여라.

5. (10점) Rank Theorem 을 증명하라.

6. (10점) $L \in \mathfrak{L}(F^n, F^m)$ 일 때, $L_{[L]} = L$ 임을 보여라. (단, $[L] = [L]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ 는 표준기저에 관한 L 의 행렬.)

7. (10점) $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F),\ B \in \mathfrak{M}_{n,r}(F)$ 일 때, 만약 $AB = 0$ 이면, $\mathrm{rk}\,(A) + \mathrm{rk}\,(B) \le n$ 임을 보여라.

8. (10점) $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$ 일 때, homogeneous linear equation $(*)\ AX = 0$ 이 trivial solution 만을 가지면 A 는 invertible 임을 설명하는 우리의 'story'를 써라. (행 간소 사다리 꼴 이용 불허.)