

당구의 역학

물리학실험1 (044): 김주만 조교님

실험 1-5 보고서

공과대학 컴퓨터공학부 2017-18570 이성찬

Abstract

이번 실험에서는 두 물체가 탄성 충돌을 할 때 물체의 속도에 어떤 변화가 생기는지 분석해 본다. 충돌 전 후의 속력과 운동에너지를 비교해 본다.

1 Introduction

1.1 실험목적

당구공의 굴림과 충돌 현상을 관찰하여 2차원 운동을 분석하고 공부한다. 충돌 전 후로 두 물체의 운동량과 운동에너지를 조사하여 운동량이 보존되는지, 운동에너지는 보존이 되는지 그 여부를 확인하여 본다. 또, 탄성체에 충돌하는 물체의 운동을 살펴보고, 물체의 운동 에너지와 공기 테이블 벽면의 탄성 퍼텐셜 에너지 사이의 교환을 조사한다. 더불어 벡터 물리량의 처리 방법과 측정 결과 분석 방법도 익혀 본다.

1.2 배경 이론¹⁾

1.2.1 운동량 보존 법칙

물체의 질량을 m , 속도가 \vec{v} 일 때 물체의 운동량(momentum)은 $\vec{p} = m\vec{v}$ 가 된다. 한편 두 물체가 충돌할 때 작용 반작용 법칙으로부터 물체 사이에 작용하는 힘은 크기가 같고 방향이 반대이다.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

뉴턴의 운동 제 2법칙으로부터

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\therefore m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{constant}$$

를 얻을 수 있다. 물체에 외력이 작용하지 않으면 운동량은 보존된다. 이를 운동량 보

존 법칙이라고 한다.

운동량 보존 법칙을 활용하면 2차원 상에서 두 물체의 충돌을 분석할 수 있다.

질량 m_1 인 물체의 충돌 전 후 속도를 각각 \vec{v}_1 , \vec{u}_1 , 질량 m_2 인 물체의 충돌 전 후 속도를 각각 \vec{v}_2 , \vec{u}_2 라고 하면 운동량 보존 법칙으로부터

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

가 성립한다. 이제 벡터의 성분이 같다는 점을 이용하면 x, y 축에 대한 식을 하나씩 얻을 수 있게 된다.

더불어 탄성충돌인 경우에는 운동에너지가 보존되어 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

특히 질량이 같은 두 물체에 대하여 한 물체가 \vec{v} 의 속도로 정지해있는 다른 물체에 탄성 충돌하는 경우 충돌 후 두 물체의 속도를 각각 \vec{v}_1 , \vec{v}_2 라고 하면

운동량 보존으로부터

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

운동에너지 보존으로부터

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

를 알 수 있고 위 식을 양변 제곱하면

$$v^2 = v_1^2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2$$

이고 두 번째 식으로부터

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

이 됨을 알 수 있어 두 물체가 $\pi/2$ 의 각을

1) [참조] Fowles, Analytic Mechanics

이루며 산란됨을 알 수 있다.

1.2.2 반발계수(Coefficient of Restitution)

반발계수는 물체의 충돌 전후의 상대 속도 비로 정의한다.

$$C_R = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

$C_R = 1$ 이면 탄성 충돌,

$0 < C_R < 1$ 이면 비탄성 충돌,

$C_R = 0$ 이면 비탄성 충돌을 한다.

1.2.3 충돌 속의 마찰력에 대한 고려

마찰력이 속력에 비례한다고 가정하자.

$$\vec{f}_r = -b\vec{v}$$

운동방정식으로부터

$$-b\vec{v} = m\vec{a}$$

$\dot{x}(0) = v_0$ 로 두고 양변을 적분하면

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\log v(t) = \log v_0 - \frac{b}{m}t$$

알루미늄 판이 비탄성 충돌을 하여 운동에너지가 충돌 전의 $f(< 1)$ 배가 된다면

$$\frac{1}{2}mv^2 = f\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v = \sqrt{f}v_0$$

그리고 운동량 보존으로부터

$$\sin\theta = \sqrt{f}\sin\theta'$$

1.3 실험 과정

1.3.1 준비물

I-CA System, 공기 테이블, 속이 빈 원판, 알루미늄 원판, 저울, 수평계, 기준자

1.3.2 실험 기본 세팅

공기 Table과 측정 장치를 준비한다. 수평기를 이용하여 테이블의 수평을 조절해야 한다. Air Blower판과 공기 Table을 연결해야 한다. I-CA에서 좌표계를 설정한다.

1.3.3 실험 방법

1) 정지해 있는 원판에 다른 원판을 충돌시킨다. 두 원판은 질량이 같거나 비슷한 것으로 한다. 이 과정을 3회 한다.

2) 원판을 공기 Table의 줄에 충돌시켜 반사되는 과정을 관찰한다. 이 과정은 5회 반복한다.

3) 두 원판이 모두 운동하는 경우 두 원판의 충돌을 관찰한다. 이때는 두 원판의 질량을 다르게 하고 실험한다. 이 과정은 3회 반복한다.

2 Results

2.1 기본 측정값

실험 장치와 준비물의 기본 측정값과 세팅값들이다.

초록색 스티커 원판의 질량: $4.50 \times 10^{-2} \text{kg}$

빨간색 스티커 원판의 질량: $4.45 \times 10^{-2} \text{kg}$

원판의 지름 $7.05 \times 10^{-2} \text{m}$

3번째 실험을 위해 질량을 조정했다.

초록색 스티커 원판의 질량을 $7.20 \times 10^{-2} \text{kg}$ 로 조정했다. 빨간색 스티커 질량은 그대로 하였다.

2.2 측정 결과

2.2.1 실험 1)

실험 1)에 대한 결과이다.

x_i, y_i : 빨간색 원판의 초기 x 축, y 축 속력

x_{f1}, y_{f1} : 빨간색 원판의 충돌 후 x, y 축 속력

x_{f2}, y_{f2} : 초록색 원판의 충돌 후 x, y 축 속력

x_{mr} : 충돌 전/후 x 축 총 운동량의 변화율

y_{mr} : 충돌 전/후 y 축 총 운동량의 변화율

γ : 충돌 전/후 운동에너지의 비

θ_1 : 빨간색 원판의 산란각

θ_2 : 초록색 원판의 산란각

θ : 두 원판의 산란각의 합 ($=\theta_1 + \theta_2$)

속력의 단위는 cm/s , 각도의 단위는 rad 로 하였다.

시행을 3번 한 결과이다.

시행	x_i	y_i	x_{f1}	y_{f1}	x_{f2}	y_{f2}
1	41.3	29.5	-7.37	33.7	-25.1	-11.0
2	-33.3	15.1	-7.79	-9.56	-16.6	19.6
3	-37.9	27.3	3.6	7.07	-35.6	15.7

이 결과로부터 운동에너지 비와 원판의 산란각을 계산해 보면,

시행	x_{mr}	y_{mr}	γ	θ_1	θ_2	θ
1	0.19	0.02	0.75	-1.35	0.41	1.76
2	0.28	0.02	0.60	0.88	-0.86	1.75
3	0.15	0.003	0.72	1.10	-0.41	1.51

x_{mr} - 평균: 0.21, 표준오차: 0.03

y_{mr} - 평균: 0.01, 표준오차: 0.007

γ - 평균: 0.693, 표준오차: 0.04

θ - 평균: 1.68, 표준오차: 0.08

2.2.2 실험 2)

실험 2)에 대한 결과이다.

x_i, y_i : 물체의 초기 x, y 축 속력

x_f, y_f : 충돌 후 물체의 x, y 축 속력

ω : 충돌 후 물체의 각속력

γ : 충돌 전후 물체의 운동에너지 비율
속력의 단위는 cm/s, 각속력은 rad/s이다.

시행은 총 5번 하였다.

시행	x_i	y_i	x_f	y_f	ω	γ
1	-27.0	-50.3	-16.9	47.2	4.49	1.23
2	-38.5	-64.9	-25.2	59.0	6.99	1.28
3	-21.1	-37.6	-14.1	36.6	3.62	1.14
4	-31.6	-59.1	-23.3	56.4	6.40	1.13
5	-16.9	-35.4	-14.8	33.6	3.66	1.07

γ - 평균: 1.17, 표준오차: 0.03

2.2.3 실험 3)

실험 3)에 대한 결과이다.

x_{i1}, y_{i1} : 초록색 원판의 초기 x, y 축 속력

x_{i2}, y_{i2} : 빨간색 원판의 초기 x, y 축 속력

x_{f1}, y_{f1} : 초록색 원판의 충돌 후 x, y 축 속력

x_{f2}, y_{f2} : 빨간색 원판의 충돌 후 x, y 축 속력

x_{mr} : 충돌 전/후 x 축 총 운동량의 변화율

y_{mr} : 충돌 전/후 y 축 총 운동량의 변화율

γ : 충돌 전/후 운동에너지의 비

속력의 단위는 cm/s이다.

시행은 3번 하였다.

시행	x_{i1}	y_{i1}	x_{i2}	y_{i2}	x_{f1}	y_{f1}	x_{f2}	y_{f2}
1	19.5	17.0	16.5	-15.5	20.3	13.4	4.15	-4.56
2	25.7	17.3	23.3	-19.4	29.3	1.55	16.0	11.7
3	35.3	42.4	27.2	-28.2	50.6	20.5	-1.09	13.0

시행	x_{mr}	y_{mr}	γ
1	-0.22	0.10	1.60
2	-0.02	0.09	1.38
3	-0.04	0.06	1.29

x_{mr} - 평균: -0.09, 표준오차: 0.06

y_{mr} - 평균: 0.08, 표준오차: 0.01

γ - 평균: 1.42, 표준오차: 0.09

3 Discussion

3.1 측정 결과

3.1.1 실험 1)

운동량의 변화 비율이 0에 가까운 것으로 보아 운동량이 거의 보존됨을 확인할 수 있었다. 한편 γ 의 값은 0.69 정도 인데, 이는 초기 운동에너지가 회전 운동으로 인한 에너지로 손실된 것으로 볼 수 있다. 또한 배경이론에서 분석했듯이 이 실험 상황에서 두 물체의 질량이 같으면 산란각이 $\pi/2 = 1.57$ 가 되는데, 두 물체의 질량이 같지는 않아 산란각이 $\pi/2$ 보다는 약간 큰 1.68로 관찰되었다.

3.1.2 실험 2)

운동에너지의 비율이 모두 1보다 크다. 즉 충돌 전의 운동에너지가 더 크다는 의미이며, 충돌 과정에서 에너지 손실이 존재했다는 의미이다. 충돌 과정에서 에너지는 소리와, 줄을 진동시키는 에너지로 손실되었을 것이다.

3.1.3 실험 3)

각 축별로 운동량 변화율을 보니 그 값이 0에 가까움을 알 수 있었다. 이로부터 2차원 충돌에서도 운동량이 보존됨을 확인할 수 있다. 한편 충돌 전후 운동에너지의 비율은 평균적으로 1.6임을 확인할 수 있었다. 충돌 과

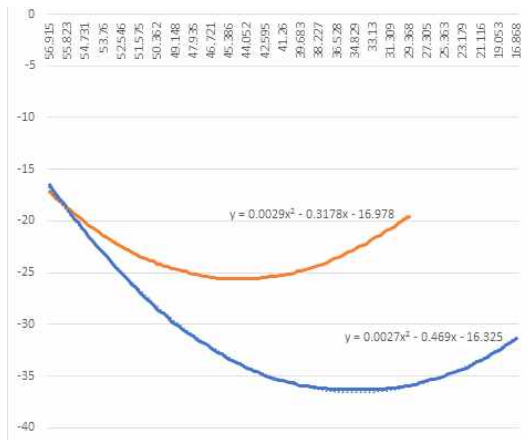
정에서 소리로 에너지가 손실되고, 또 초록색 원판이 바닥에 끌려서 에너지의 손실도 존재한다.

3.2 오차 원인 분석

예상되는 오차원인으로는 다음이 있다.

3.2.1 Air Table의 바람 방향

원판을 매우 살짝 밀었을 때, 수평이 맞는 Air Table 아래에서 나오는 바람의 방향이 일정했다면 원판은 직선 운동을 해야 했을 것이다. 그런데 질량을 살짝 밀었을 때, 운동 궤적이 직선이 아닌 곡선임을 확인하였다. 바람의 세기를 약할 때 한 번, 강할 때 한 번 질량을 살짝 밀어 물체의 운동 경로를 측정해 보았다.



이 그래프는 물체를 살짝 밀었을 때 나타나는 물체의 궤적이다. 직선 형태가 아니라 곡선 형태임을 확인할 수 있다.

주황색은 바람이 셀 때, 파란색은 바람이 약할 때의 운동 궤적이다.

더불어 공기 저항으로 인한 운동에너지의 손실 또한 오차 원인으로 고려할 수 있다.

만약 정말 바람의 방향과 세기가 일정했다면 물체를 가만히 놓았을 때 그 자리에 떠있어야 하는데, 정지에 있는 물체에 충돌시키는 실험을 하는 도중 정지해 있는 물체가 실제로 정지해 있지 못하고 바람을 받아 움직였다. (초기 속도 존재)

3.2.2 충돌 후 회전이 존재

충돌 직후 빨간색 스티커가 붙은 원판 위의 흰 점이 회전함을 관찰할 수 있었다. 흰 점이 회전한다는 것은 충돌하면서 병진 운동 에너지가 회전 운동에너지로 일부 변화했다는 의미이다.

3.2.3 무거운 공

세 번째 실험에서 초록색 스티커가 붙은 원판의 질량을 72g으로 늘렸는데, 조금 무겁다 보니 바람의 세기가 최대인데도 원판이 바닥에 끌리는 현상이 관찰되었다.

3.2.4 한계점

바람의 방향을 분석하면 대체로 위쪽으로 바람이 치우쳐져 있다는 사실을 그래프로부터 알 수 있었으나 이를 물체의 운동 분석에 완벽하게 반영하지는 못하였다. 그리고 무거운 공의 끌림으로 인한 마찰력은 고려하기 어려웠다.

4 Conclusion

이 실험을 통해 2차원 충돌 현상을 직접 관찰하고 분석을 통해 물체의 운동량을 계산해 보고 물체의 운동에너지 변화를 측정해 보며 운동량 보존 법칙을 확인해 보았다. 또 물체의 운동에너지 변화를 보며 물체의 초기 에너지가 마찰과 회전 등으로 손실되는 현상도 관찰할 수 있었다.

* Reference

- 이기영, 대학물리학, 한빛미디어
- Serway, Raymond, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9th Ed., Cengage Learning