2014년 1학기 수학 및 연습 1 모범답안

문제 1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right)$ 은 수렴한다. → 10pt

(별해) 충분히 큰 $N \in \mathbb{N}$ 이 있어서, 모든 $n \ge N$ 에 대해

$\sin^2\frac{1}{n} \ge \frac{1}{2^n}$ 이 성립한다. → 5pt

이때 $\sin^2\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}$ 은 양항수열이므로

$\sum_{n\ge N}^{\infty}\left(\sin^2\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) \le \sum_{n\ge N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ 과 비교판정법에서

$\sum_{n\ge N}^{\infty}\left(\sin^2\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) < \infty$ $\quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) < \infty$ → 10pt

(※) 틀린 부등식 (ex) $\sin x \le \frac{2}{\pi}x$)을 사용한 경우
무조건 0점

문제1 (b) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$.

① $a_n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$ 이라 하면, $a_n \geq 0$ 이고

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e > 1$$

이므로, 멱근판정법에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 은 발산한다. ┘10

② $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2} \geq \sum_{n=2}^{\infty} 1^{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} 1 = \infty$ 이므로

비교판정법에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$은 발산한다. ┘10.

* 채점기준.

- 위의 ①, ② 풀이 이외에 비율판정법이나 일반항 판정법을 사용한 경우도 풀이가 올바른 경우 10점.
- 극한을 계산할 때 이유가 불충분한 경우 5점 감점.

  (ex) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n^2} \neq 0$ ...).
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^2}{n-1}} = \infty$ 라고 푼 경우 0점.

  ($\because$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 이면, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right) = \alpha^{\beta}$. 이다.

  그러나, 일반적인 경우에 대해서는 성립하지 않는다.

  예를들면, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$).
- 수렴한다고 한 경우는 0점.

(문1-(c)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!-3^n+2014}$ 의 수렴, 발산을 판정하여라. **[모범답안]**

수학적 귀납법 이용!

Sol1) 「Claim: $n! \geq 2\times 3^n$ for all $n \geq 7$. (∵ $n=7$이면, $7! \geq 2\times 3^7$ ∴ $n=7$일때 성립.

$(n+1)\times n! \geq (n+1)\times 2\times 3^n \geq 3\times 2\times 3^n = 2\times 3^{n+1}$. $n+1$일 때도 성립

∴ $n! \geq 2\times 3^n$ for all $n\in\mathbb{N}$ 」

$\therefore n!-3^n+2014 \geq n!-3^n \geq (2\times 3^n)-3^n = 3^n$ for all $n\geq 7$

$\therefore \frac{e^n}{n!-3^n+2014} \leq \frac{e^n}{3^n}$ for all $n\geq 7$. $\sum_{n=7}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n < \infty$ (∵ 기하급수)

비교판정법에 의해, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!-3^n+2014} < \infty$

Sol2) $a_n = \frac{e^n}{n!-3^n+2014}$ 라 하자. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!-3^{n+1}+2014}}{\frac{e^n}{n!-3^n+2014}}\right| =$

$$= e\left|\frac{n!-3^n+2014}{(n+1)!-3^{n+1}+2014}\right| = e\left|\frac{1-\frac{3^n}{n!}+\frac{2014}{n!}}{n+1-\frac{3^{n+1}}{n!}+\frac{2014}{n!}}\right| \to 0 \text{ as } n\to\infty.$$

(∵ $\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}\right| = \left|\frac{3}{n+1}\right| \to 0$ as $n\to\infty$. ∴ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} < \infty$ by 비율판정법.

∴ $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0$ by 일반항 판정법.)

비율판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!-3^n+2014} < \infty$

10점: 부등식의 오류 없이 적절한 판정법을 이용하여 위 급수가 수렴함을 보인 경우.

5점: $n! \geq 2\times 3^n$ 이 $(n\geq 7)$ 또는 충분히 큰 n에 대해 성립함을 명시 안한 경우.

- (부등식이 틀렸지만 유한개를 제외한 $n\in\mathbb{N}$에 대해 성립하는 경우
- $\frac{3^n}{n!} \to 0$ as $n\to\infty$ 인 이유를 단지 $3^n < n!$ 이기 때문이라고 서술한 경우

0점: 발산이라고 답한 경우, 비교판정법을 음수로 bound 한 경우 (ex) $a_n < \frac{-e^n}{3^n}$)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{e}{3}$ as $n\to\infty$ 을 유도한 경우, $\frac{e^n}{n!-3^n+2014} < \frac{e^n}{n!}$ 을 이용한 경우

(단, $\frac{e^n}{n!-3^n+2014} < \frac{2e^n}{n!}$ for sufficiently large n 은 허용)

1. (d) $f(x) := \arcsin x - x, \quad 0 \le x \le 1$

$f(0) = 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 > 0, \quad \forall x \in (0,1)$

이므로 $f(x) \ge 0$, 즉 $\arcsin x \ge x, \quad 0 \le x \le 1$

$n \ge 2$에 대하여 $\dfrac{\arcsin \frac{1}{n}}{\log n} \ge \dfrac{\frac{1}{n}}{\log n} = \dfrac{1}{n \log n}$ ⌟3

이제 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$ 임을 보이면, 비교판정법에 의하여

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\log n} = \infty.$$

$g(x) = \dfrac{1}{x \log x}, \quad x \ge 3$ 으로 두면,

$\begin{cases} g(x) > 0, \ \forall x \ge 3 \\ g\text{는 감소} \\ g\text{는 연속} \end{cases}$ 이므로 적분판정법에 의하여

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n} < \infty \iff \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \log x} < \infty$$

그런데, $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{b \to \infty} [\log \log x]_3^b = \infty$ 이므로

$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$. 따라서 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$. ⌟10

채점기준 :

- $\arcsin x \geq x$ 인 이유를 기술하지 않으면, -3점

- 비교판정에 사용되는 수열을 잘못 설정할 경우, 0점

- 적분판정법을 적용할 때 필요한 조건들 중 하나라도 기술하지 않을 경우, -2점

- 적분범위, 계산 등의 실수가 있을 경우, -1점

- 극한비교판정법을 이용하여 풀 때, 극한값 계산과정을 명시하지 않은 경우, -3점

- arcsin의 멱급수 전개를 이용하여 $\arcsin \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$ 임을 명확히 보이면 $+3$점. 그렇지 않을 경우 -3점

- 로피탈 정리를 이용하여 일반항 판정법으로부터 결과를 도출하면, 0점 ($\because \frac{0}{\infty}$ 꼴)

2.

방법①

$a_n = \frac{n-\sqrt{n-1}}{2n^s+1}$ $b_n = \frac{1}{n^{s-1}}$

㉠ $s>0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 2$ 이므로 극한 비교판정법에 의해

$\sum a_n$의 수렴성 과 $\sum b_n$의 수렴성은 같다.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{s-1}}$ 은 $s-1>1$ 인 경우에 수렴, $s-1\le 1$ 인 경우에 발산 하는것이

알려져있다. 따라서 $\sum a_n$은 $s>2$ 에서 수렴, $s\le 2$ 에서 발산한다.

㉡ $s\le 0$

$s\le 0$ 이면

$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$ 이므로

일반항판정법으로 발산.

방법②

(*) $\frac{n-\sqrt{n-1}}{2n^s+1} \le \frac{n}{2n^s} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{s-1}}$, $\frac{n-\sqrt{n-1}}{2n^s+1} > 0$

(**) $\frac{\frac{1}{2}n}{3n^s} \overset{s\ge 0}{\le} \frac{n-\sqrt{n-1}}{2n^s+1}$ ($\because \frac{1}{2}n > \sqrt{n-1}$ 이 충분히 큰 n에 대해 성립)

㉠ $s>2$

$s>2$ 이면 $\sum \frac{1}{n^{s-1}}$가 수렴하므로 비교판정법에 의해 $\sum \frac{n-\sqrt{n-1}}{2n^s+1}$ 수렴 (by (*))

㉡ $0\le s\le 2$

$s\le 2$ 이면 $\sum \frac{1}{n^{s-1}}$가 발산하므로 비교판정법에 의해 $\sum \frac{n-\sqrt{n-1}}{2n^s+1}$ 발산 (by (**))

㉢ $s<0$

$s<0$ 이면 $\lim a_n \ne 0$ 이므로 일반항 판정법에 의해 발산.

2. (채점기준)

* 크게 ① $s>2$ 수렴부분과 ② $s\le 2$ 발산부분이 각 10점입니다.

* 각 ①, ②에 대해서 작은 범위의 수렴 또는 발산을 보이면 최대 각 5점.

* ②에서 일반항 판정법을 이용한 경우 $\lim a_n \neq 0$ 명시 않거나 $\lim a_n$ 계산이 틀린 경우 인정하지 않음.

* 부등식이나 수렴/발산 판정에서의 논리적 오류가 발생시 −5점 (①. ②에 각각 적용)

* 사소한 기호, 계산 실수는 생략 (ex) s 대신 n으로 쓰거나. ($n>2$ 면 수렴...))
$s-1>1 \Rightarrow s<2$

* "$\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n + b_n)$" 만을 이용하여 주어진 급수의 수렴범위를 구하는 경우 점수의 최대값은 10점.

* $\sum \frac{1}{x^{s-1}}$ 의 수렴범위에 대한 실수는 이 부분을 모르다고 생각하여 (−5점)

* 극한 비교판정법을 사용한 경우에 $s\le 0$ 인 경우를 따로 생각하지 않았을 시 (−5점)
혹은 부등식 (**)을

문제 3. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$

① $a_n := (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ $\quad \rho := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right| = 1$$

∴ 수렴반경 $r = \frac{1}{\rho} = 1$. ┘ 4점

② $x=1$ 인 경우

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \quad \left(b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)$$

$b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = b_{n+1}$

교대급수 정리에 의해 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ 은 수렴. ┘ 3점

③ $x=-1$ 인 경우

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{k\to\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{0}) = \infty \text{. 발산}$$

∴ 수렴하는 x의 범위는 $-1 < x \le 1$. ┘ 3점

1. ①을 수렴반경이 아닌, 범위를 나눠서 구한경우
   $-1 < x < 1$ 에서 수렴, $|x| > 1$ 에서 발산을 정확히
   모두 보여야 4점.

2. ② $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 에 1점, b_n 감소수열에 2점
   (이유가 없으면 점수 없음)

3. ③을 설명할때 $\lim_{k\to\infty}$ 을 빼먹는 등 표기가 정확하지 않으면 점수
   없음.

#3-(b) $a_n = 1-\cos\frac{1}{n}$ 이라 두자. $a_n > 0$ 이므로

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{1-\cos\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{(n+1)^2}\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{-\left(\frac{1}{n}\right)^2\sin\frac{1}{n}}$$

로피탈정리

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\cdot\frac{n^3}{(n+1)^3}\right]$$

$$= 1\cdot1\cdot1 = 1$$

따라서 급수의 수렴반경은 1 이다. ⌟ 4

(i) $x=1$ 일때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)$ 이고

$0 \leq 2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) \leq 2\cdot\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} < \infty$ 이므로

비교판정법에 의해 주어진 멱급수는 $x=1$ 에서 수렴 ⌟ 7

(ii) $x=-1$ 일때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > a_{n+1}$ 이므로

교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 은 수렴 ⌟ 10

※ 채점기준

① 수렴반경이 1이라는 결론에 이르는 극한계산과정이 정확하면 4점

→ 극한식을 전개하는 과정에서 계산이 틀린 경우 (하지만 극한값은 맞게 나온 경우) 2점 감점

→ 로피탈의 법칙을 사용할때 $-\frac{1}{(n+1)^2}$, $-\left(\frac{1}{n}\right)^2$ 을 쓰지 않고 전개한 경우에는 점수없음.

→ 그 외 사소한 실수 (반각공식을 수렴성의 지장이 없는 내에서 잘못 쓴 경우) 2점 감점

② $x=1$ 일때 급수가 수렴한 것을 얻어내면 추가 3점

→ 부분점수 없음

→ 비교 판정을 사용한 경우, 사용한 부등식이 잘못된 경우 점수 없음

→ 극한 비교 판정을 사용한 경우, 기준 함수를 명확히 제시해야 점수부여

③ $x=-1$ 일때 급수가 수렴하는 것을 얻어내면 추가 3점

→ 교대급수 판정법을 사용하여 수렴성을 보이면 3점

→ '절대수렴하는 급수는 수렴한다'는 사실을 이용하여 보이는 경우

②의 과정이 맞아야 점수 부여 (②와 ③을 합쳐 6점)

④ 멱근 판정을 시도한 경우 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$ 임을 보여주지

않으면 ①에 대한 점수 ×

⑤ 직접 x의 범위를 나누어 수렴·발산성을 조사한 경우

→ $|x|>1$ 일때 발산함을 설명하고

$|x|<1$ 일때 수렴함을 오류없이 설명해야 4점] → ①에 해당하는 점수

→ $x=\pm1$ 에서 조사가 잘 되면 각 3점씩 부여

→ $|x|\le 1$ 일때 수렴한다는 것만으로는 수렴 반경이 1인지

모르므로 수렴반경에 대한 점수 없음!!

#4.(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$

(Sol) ① $a_n := \sqrt{n}$ 이라 두면, $\rho := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$ 이므로,

준 멱급수의 수렴반경은 $\frac{1}{\rho} = 1$ 이다.

+3

② $x=1$ 일 때, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \infty$ 이므로 일반항판정법에 의해 준 멱급수는 발산. +1

③ $x=-1$ 일 때, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \sqrt{n} \neq 0$ 이므로 일반항판정법에 의해 준 멱급수는 발산. +1

∴ 수렴 범위는 $-1 < x < 1$ 이다.

* 수렴반경을 구할 때, 비율판정법 등을 이용한 경우,

- $|x| > 1$ 에서 준 멱급수가 발산함을 명확히 밝히지 않으면 -1 점.
- (절댓값을 취하지 않고) 양항급수가 아닌 급수에 판정법 적용시 -1 점.
- ③ 에서 "교대급수판정법"에 의해 발산한다고 한 경우, 옳지 않으므로 ③에 대한 점수없음.

#4. (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n^2}$.

$\boxed{\text{풀이1}}$ $a_n := |nx^{n^2}|$ 이라 두면, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} |x|^n$ 이고,

이때 $|x|<1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ 로부터 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ 임을 얻는다.

곧 $|x|<1$ 일 때 $\sum_{n=0}^{\infty} |nx^{n^2}|$ 은 수렴한다. ($\because$ 멱근 판정법)

곧 $|x|<1$ 일 때 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n^2}$ 이 절대수렴하므로, 수렴한다.

$|x| \geq 1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} nx^{n^2} \neq 0$ 이므로, 일반항판정법에 의해 준 급수는 발산.

$\therefore$ 수렴범위는 $-1 < x < 1$ 이다.

* 채점기준. ① $|x|<1$ 에서의 수렴 여부를 맞게 판단하면 +4점.

단 (절댓값을 취하지 않고) 양항급수가 아닌 급수에 판정법을 적용하거나,

x가 양수일 때의 수렴 여부만 판단한 경우 −1점.

② $x=1$, $x=-1$ 일 때의 수렴여부를 맞게 판단하면 각 +2점.

③ $|x|>1$ 에서의 수렴 여부를 맞게 판단하면 +2점. (명확한 언급이 있어야함!)

$\boxed{\text{풀이2}}$ ① $t=n^2 (\geq 0)$ 으로 두면, $n=\sqrt{t}$ 이므로 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n^2} = \sum_{n=0,\, t=n^2}^{\infty} \sqrt{t}\, x^t$ 이다.

$\sum_{n=0,\, t=n^2}^{\infty} |\sqrt{t}\, x^t| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\sqrt{n}\, x^n|$ 이고, (a)와 같은 논의로 $|x|<1$ 일 때 $\sum_{n=0}^{\infty} |\sqrt{n}\, x^n|$ 이

수렴하므로; $|x|<1$ 일 때 $\sum_{n=0,\, t=n^2}^{\infty} \sqrt{t}\, x^t$ 는 절대수렴, 곧 수렴한다.

곧 $|x|<1$ 일 때 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n^2}$ 은 수렴한다. +4

② 한편 $x=\pm 1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} nx^{n^2} \neq 0$ 이므로, 준 급수는 발산한다. ($\because$ 일반항판정법) +4 (각 2점)

③ 멱급수의 성질로부터 $|x|>1$ 일 때 준 급수는 발산한다. +2 $\therefore$ 수렴범위는 $-1<x<1$.

* $a_t = \sqrt{t}$ 로 두고 $\lim_{t\to\infty} \left|\frac{a_{t+1}}{a_t}\right| = 1$ 을 이용, $\sum_{n=0,\, t=n^2}^{\infty} \sqrt{t}\, x^t$ 의 수렴반경 구한경우,

① 에 대한 점수 없음. ($\because$ $t=n^2$ 일 때만 정의되므로 $\left|\frac{a_{t+1}}{a_t}\right|$ 의미없음)

* 잘못된 치환법 적용시 (ex→ $y=x^n$), 0점.

5. (풀이 1) $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^5).$ ⌋ 5점

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$ ⌋ 5점

$f(x) = e^{-x^2}\sin x$

$$= \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)$$

$$= x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{27}{40}x^5 + o(x^5)$$

근사다항식의 정의 및 유일성에 의해,

$T_5 f(x) = x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{27}{40}x^5.$ ⌋ 5점

① $o(x^n)$을 이용하지 않거나 틀린 경우, 근사다항식의 유일성을 언급하지 않은 경우 5점 감점.

② e^{-x^2}과 $\sin x$의 멱급수 전개나 근사다항식을 구할 때 5차 이하의 항의 계수를 정확히 구한 경우에만 점수 부여

(풀이 2) $f(x) = e^{-x^2}\sin x$

$f'(x) = -2x e^{-x^2}\sin x + e^{-x^2}\cos x$

$f''(x) = (4x^2-3) e^{-x^2}\sin x - 4x e^{-x^2}\cos x$

$f^{(3)}(x) = (-8x^3+18x) e^{-x^2}\sin x + (12x^2-7) e^{-x^2}\cos x$

$f^{(4)}(x) = (16x^4-72x^2+25) e^{-x^2}\sin x + (-32x^3+56x) e^{-x^2}\cos x$

$f^{(5)}(x) = (-32x^5+240x^3-250x) e^{-x^2}\sin x + (80x^4-280x^2+81) e^{-x^2}\cos x$

$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f^{(3)}(0)=-7,\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=81.$ ①

10점

그러므로,

$$T_5 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$= x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{27}{40}x^5.$$

5점

※ ①에서 계산과정이 완벽하지 않은 경우 0점.

6. $f'(x) = e^x + 2e^{2x} > 0$, $x \in \mathbb{R}$ 이므로.

역함수 정리에 의해서, $f(x)$ 의 역함수가 존재한다. +5

$f(x) = e^x + e^{2x}$ 의 치역이 $y > 0$ 이므로,

역함수 $x = g(y)$ 의 정의역이 $y > 0$ 이다.

$f(0) = 2$, $g(2) = 0$.

$$\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \rightarrow g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$ +5

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \rightarrow g''(2) = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = -\frac{5}{27}$$ +5

$$T_2^2 g(y) = g(2) + g'(2)(y-2) + \frac{g''(2)}{2!}(y-2)^2$$ +3

$$= \frac{1}{3}(y-2) + \left(-\frac{5}{54}\right)(y-2)^2$$ +2

* 역함수 정리를 사용하지 않아도, 역함수를 직접 올바르게 구한경우 역함수의 존재성을 인정.

* 역함수를 직접 구해서 $g'(2)$, $g''(2)$ 를 계산한 경우도 계산 값이 올바르면 점수 인정.

#7 $\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n \quad (|x|<1)$ //5pts

← 수렴반경 빠지면 -1점

$\int_0^t \frac{1}{1+x^4}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} t^{4n+1} \quad (|t|<1)$ //2pts

적분 틀릴시 이 아래로 점수 없음

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{1}{1+x^4}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{4n+1}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^5 + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^9 - \frac{1}{13}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{13} + \cdots\cdots$$

교대급수의 성질에 의해

$$\left|\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{1}{1+x^4}dx - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{4n+1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{4n+1}\right)\right| \le \left|\frac{(-1)^{n+1}}{4n+5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{4n+5}\right|$$

$n=2$ 일때 오차의 한계는: $\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{10^{13}} < \frac{1}{10^{10}}$ //5pts

따라서 구하는 근사값은 $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^5 + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^9$. //3pts

- 교대급수의 성질 이용 시 절대값이 없을시 -1점
- 오차가 $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{4n+5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{4n+5}\right|$ 보다 작아진다는 것을 이용하지 않고 바로 $\frac{1}{10^{10}}$보다 작다고만 쓴 경우 -2점 ($|$오차$| \le \frac{1}{10^{10}}$ 꼴 또는 $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{4n+5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{4n+5}\right| \le \frac{1}{10^{10}}$)

8. $f(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots$ 로 두자.

① $x \geq 0$ 일때

$f(x) \geq 1$ 이므로 근이 없다. ┘ 5점.

② $x < 0$ 일때

$x = -t^2$ 으로 두면

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t$ ┘ 5점

$t = n\pi + \frac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ 일때.

$\cos t = 0$ 이므로

$x = -(n\pi + \frac{\pi}{2})^2$ 일때 $f(x) = 0$ ┘ 5점.

* $f(x)$를 $\cosh\sqrt{x}$ 의 멱급수 전개로 보고 근이 없다고 한 경우

$x>0$ 인 경우에 해당하므로 5점

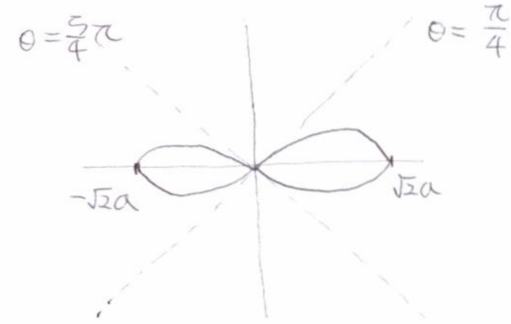
* ②에서 $\cos x$의 멱급수 전개를 이용하여 답은 찾았지만 정확한 계산으로 표현되지 않는 경우 5점 감점

* ②에서 $\cos x$의 멱급수 전개를 잘못적은 경우 혹은 계산과정에서 잘못된 멱급수 전개가 나온 경우 0점.

* ① 에서 $f(x)$가 양수인 명확한 이유가 없으면 0점.

9. (a) $r^2 = 2a^2\cos 2\theta \Rightarrow r = \pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$ (단, $\cos 2\theta \geq 0$)

곡선의 개형 :



$\theta = \frac{5}{6}\pi$; $r^2 = 2a^2\cos\frac{5}{3}\pi = 2a^2\cos\frac{1}{3}\pi = a^2 \Rightarrow r = \pm a$.

A, B$(-a,0)$, C$(a,0)$는 반지름이 a, 중심이 원점인 원위에 있고,

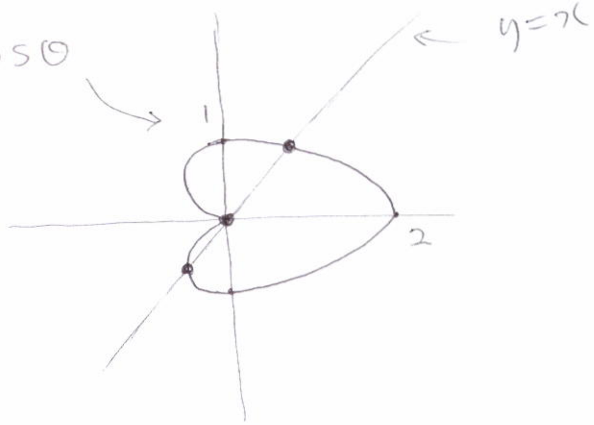
$\overline{BC} = 2a$: 지름이므로 원주각의 성질에 의해 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.

* 곡선의 개형이 맞으면 5점. (x절편, 점근선 등은 채점하지 않음).

아니면 0점.

* $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 와 풀이과정이 모두 맞으면 5점 (부분점수 없음).

(b) $r = 1 + \cos\theta$



$\theta = \frac{\pi}{4}$; $r = 1 + \cos\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = r\cos\theta = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = y$

$\theta = \frac{5}{4}\pi$; $r = 1 + \cos\frac{5}{4}\pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = r\cos\theta = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = y$.

$\theta = \pi$; $r = 0$, $x = y = 0$.

$\therefore (0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)$

* 답 3개를 정확히 쓰면 10점.

안쓰거나 틀린 것 1개 5점

〃 2개↑ 0점.

10. 와선 위의 한 점 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 에 대해

$r = e^{\theta}$ 이므로 $x = e^{\theta}\cos\theta$, $y = e^{\theta}\sin\theta$ 이고,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{e^{\theta}(\cos\theta + \sin\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \quad ①$$

점 (x, y) 위의 접선과 x축의 양의 방향이 만나는 각도를

α 라고 하면 $\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$ 이므로

$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\theta} \quad ② = 1$$

따라서 $\alpha - \theta = \frac{\pi}{4}$. 두 직선이 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

* ① 까지 구한 경우 10점. 틀렸을 경우 부분점수 없음.

* ①을 얻은 후 구하는 각도를 ②, 내적, arctan, $\tan(\theta + \frac{\pi}{4})$ 등을 이용하여 표현하면 15점.

* 계산 실수 없이 결과값 $\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi$ 까지 구하면 20점.

* 로그 와선의 성질을 증명 없이 이용하여 한 점에서만 구한 경우 이 부분에 대한 점수 없음.