수학 및 연습 1 기말고사

(2014년 7월 28일 19:00-21:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점)**.** $\mathbb{R}^3$ 상의 벡터 $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ 가 일차독립일 때, 선형변환 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 가 다음과 같이 주어져 있다.

$$T(X) = (\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3}) \times X, \quad X \in \mathbb{R}^3$$

이때, 선형변환 T에 의한 상 $T(\mathbf{a_1}), T(\mathbf{a_2}), T(\mathbf{a_3})$ 도 일차독립인지 판정하시오.

문제 2 (20점)**.** 세 점 $(2,1,0), (0,1,-2), (5,-1,2)$ 를 지나는 평면 P 상의 점 $(2,1,0)$ 에서 $(1,1,1)$ 방향으로 진행하던 빛이 평면 $x-2y-z=5$ 에 반사되어 다시 평면 P 에 맺히는 상을 구하시오.

문제 3 (20점)**.** 공간 속의 점 $(1,-1,2)$ 에서 두 평면 $x-2y+4z=2$ 와 $x+y-2z=5$ 의 교선에 내린 수선의 발을 구하시오.

문제 4 (10점)**.** 3×3 행렬 A 가

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

를 만족할 때, A의 행렬식을 구하시오.

문제 5 (20점)**.** n-치환 σ 에 대하여, $L_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 다음과 같이 정의될 때 물음에 답하시오.

$$L_\sigma : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

(a) (10점) L_σ 가 선형사상임을 보이시오.

(b) (10점) 3-치환 σ 가 다음과 같을 때 L_σ 에 대응되는 행렬 A 를 구하고, A 의 행렬식을 구하시오.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

문제 6 (20점)**.** 네 점 $O(0,0,0)$, $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,4)$, $P_3(1,3,9)$ 와 행렬

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 2 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

에 대응되는 선형사상 L_A 에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 네 점 O, P_1, P_2, P_3 를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

(b) (10점) 네 점 $L_A(O), L_A(P_1), L_A(P_2), L_A(P_3)$ 를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

문제 7 (20점)**.** 공간에서 점 $P=(1,0,-1)$ 에 힘 $\mathbf{f}=(0,2,1)$ 를 가하였다.

(a) (10점) 원점 O 에 대한 P 의 회전력과 회전이 일어나는 평면의 식을 모두 구하시오.

(b) (10점) 점 P 에 힘 $\mathbf{f}$ 와 같은 크기의 힘 $\mathbf{g}$ 을 가하여, 회전이 일어나는 평면과 회전하는 방향은 모두 **(a)** 의 경우와 같지만 회전력의 크기는 가장 크게 하고자 한다. 위의 모든 조건을 만족하는 힘 $\mathbf{g}$ 를 구하시오.

문제 8 (30점). 점 $A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ 와 점 $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ 까지의 거리의 곱이 $\frac{1}{2}$ 인 점들의 자취곡선을 X 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) 곡선 X 를 극좌표로 매개화 하시오.

(b) (15점) 실수 $0 \le s < 1$ 에 대하여, 제 1 사분면 위에 있는 곡선 X 의 점들 중에서 원점 O 에서의 거리가 s 인 점을 $P(s)$ 라 하자. $P(0)$ 에서 $P(s)$ 까지의 곡선의 길이를 $l(s)$ 라고 하면

$$l(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$$

임을 보이시오.

문제 9 (20점). 평면곡선 $X(t) = (2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))\,(0 \le t \le 2\pi)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) X 를 호의 길이로 재매개화 하시오.

(b) (10점) X 의 곡률반경을 $R(t) := \frac{1}{\kappa(t)}$ 라고 하면, $\sin\frac{t}{2} = \frac{3}{8}R(t)$ 임을 보이시오.

문제 10 (20점). 사이클로이드 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)\,(0 \le t \le 2\pi)$ 위의 $t = \pi$ 일 때의 점 P 에서의 접촉원의 중심을 구하시오.