

# 수학 및 연습 1 기말고사

(2016년 7월 27일 11:00-13:00)

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 원점에서  $(1, 1, 1)$  방향으로 발사된 빛이 평면  $x + y - z = 3$  에 위치한 거울에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 구하시오.

문제 2. [20점] 다음 세 벡터가 일차종속이 되는 실수  $t$  의 값을 구하시오.

$$(t, 2, 5), \quad (-1, 1, 0), \quad (1, 3, 4)$$

문제 3. [20점] 영이 아닌 벡터  $\mathbf{a} = (a, b, c)$ 에 대해 사상  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을

$$L(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

와 같이 정의하자.  $L$ 이 선형사상임을 보이고 이에 대응하는 행렬을 구하시오.

문제 4. [20점] 다음과 같이 주어진 선형사상  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대응하는 행렬을 구하시오. 그리고  $L$ 의 역사상이 존재함을 보이시오.

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

문제 5. [20점] 다음과 같이 주어진 행렬  $A$ 에 대하여  $\det(I - A^{2016})$ 의 값을 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

문제 6. [20점] 다음과 같이 주어진 행렬  $A$ 에 대하여 행렬  $xI - A$ 가 가역행렬이 아닌  $x$ 의 값들을 모두 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

문제 7. [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 곡선  $X(\theta) = (2 \sin \theta \cos^2 \theta, 2 \sin^2 \theta \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  의 개형을 좌표평면에 그리고, 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

(b) (10점) 극좌표계로 주어진 곡선

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

의 개형을 좌표평면에 그리고, 곡선의 길이를 구하시오.

문제 8. [20점] 나선  $X(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  에 대하여 곡률벡터  $\kappa(t)$  를 구하시오. (단,  $a$ 와  $b$ 는 0이 아닌 상수이다.)

문제 9. [20점] 곡선의 접촉평면은 매개화에 따라 변화하지 않음을 보이시오.

문제 10. [20점] 이급 정규곡선  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  에 대하여, 다음을 물음에 답하시오.

(a) (10점)  $\frac{d}{dt}|X'| = \frac{X' \cdot X''}{|X'|}$  이 성립함을 증명하시오.

(b) (10점) ((a)번의 결과를 이용하여) 곡률이 다음 식을 만족함을 증명하시오.

$$\kappa = \frac{\sqrt{|X'|^2 |X''|^2 - (X' \cdot X'')^2}}{|X'|^3}.$$