2018년 여름계절 수학및연습 1 기말고사

1. (풀이 1.) 점 $(a.b.c) \in \mathbb{R}^3$ 의 평면 $\alpha : 2x - y + 3z = 0$
에 대한 대칭점을 $(a'.b'.c')$이라 하면,

$\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}\right) \in \alpha$ 이므로.

$2\frac{(a+a')}{2} - \frac{(b+b')}{2} + \frac{3}{2}(c+c') = 0$. 이다.

벡터 $(a'-a.\ b'-b,\ c'-c)$은 평면 α의 법벡터
$\vec{n} = (2, -1, 3)$ 과 평행하므로,
$(a'-a,\ b'-b,\ c'-c) = k(2, -1, 3)$, k는 실수. 5점.

$a' = a+2k, \quad b' = b-k, \quad c' = c+3k$

$2(a+a+2k) - (b+b-k) + 3(c+c+3k) = 0$ 에서

$$k = \frac{-2a+b-3c}{7}.$$

$$a' = a + \frac{-4a+2b-6c}{7} = \frac{3a+2b-6c}{7}.$$

$$b' = b - \frac{-2a+b-3c}{7} = \frac{2a+6b+3c}{7}$$

$$c' = c + \frac{-6a+3b-9c}{7} = \frac{-6a+3b-2c}{7}.$$

이는 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 을 만족한다.

즉, 사상 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 는 행렬에 대응되므로 선형사상이다.

또한, L에 대응되는 행렬은 $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ 이다.

20점.

(풀이 2.) $X = (a, b, c)$ 라 하면,

$L(X) = X - 2\frac{X \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n}$ 이다.

5점.

$X, Y \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$에 대해

$$L(X + cY) = X + cY - 2\frac{(X + cY)\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

$$= X - \frac{2X\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} + c\left(Y - \frac{2Y\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right)$$

$$= L(X) + cL(Y).$$

따라서 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 는 선형 사상이다.

10점.

$L(\vec{e_1}) = \frac{(3, 2, -6)}{7}$, $L(\vec{e_2}) = \frac{(2, 6, 3)}{7}$, $L(\vec{e_3}) = \frac{(-6, 3, -2)}{7}$.

L 에 대응되는 행렬을 A 라 하면,

$$A = \left[\, L(\vec{e_1}) \quad L(\vec{e_2}) \quad L(\vec{e_3}) \,\right]$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

20점.

※ (풀이 1)에서 L이 선형사상이 되는 이유에 대한 서술이 없으면 5점 감점

(답안 예시 : (1) 함수 L은 행렬이 되는데, 선형사상은 행렬에 대응된다.

(2) (a', b', c')이 a, b, c의 상수배, 덧셈으로 표현된다.).

2번.

상수 a, b, c 에 대하여 $au + bv + cw = 0$ ① 이라고 하자.

$\Rightarrow A(au + bv + cw) = au + 2bv + 3cw = 0$ ⋯ ②.

$\Rightarrow A(au + 2bv + 3cw) = au + 4bv + 9cw = 0$ ⋯ ③.

①, ②, ③ 을 연립하면 $au = bv = cw = 0$.

u, v, w 가 0이 아니므로 $a = b = c = 0$. $\therefore$ u, v, w : 일차독립.

* 일차독립의 정의를 적었으면 부분점수 5점.

3. $A\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 5 점

만약 $\det A \neq 0$ 이라면 A^{-1} 가 존재하고

$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$ 으로 모순.

따라서 $\det A = 0$ 이다.

20 점

다른 성질들을 이용해도
논리적으로 문제가 없으면 20 점.
(부분점수 없음).

4. 주어진 집합은

$$\left\{ (6,3,6) + r(1,-1,3) + s(2,1,0) + t(-a,a,2a) \;\middle|\; 0 \leq r,s,t \leq 1 \right\}$$

로 $(1,-1,3)$, $(2,1,0)$, $(-a,a,2a)$ 가 이루는 평행육면체가 $(6,3,6)$ 만큼 평행이동한 도형이다.

평행육면체의 부피는

$$vol = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -a & a & 2a \end{bmatrix} \right| = 15|a|.$$

$a>0$ 이므로 $a=2$.

20 점

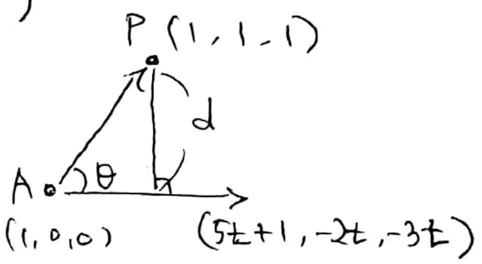
행렬식 계산에서 틀리면 10 점 감점.

5번.

교선의 기울기벡터 : $(1,1,1) \times (1,-2,3) = (5,-2,-3)$.

교선 위의 점 : $(1,0,0)$.

교선의 매개변수 방정식 : $(5t+1, -2t, -3t)$



$$d = |\overrightarrow{AP}| \cdot \sin\theta = \frac{|(5,-2,-3)||(0,1,1)|\sin\theta}{|(5,-2,-3)|}$$

$$= \frac{|(5,-2,-3) \times (0,1,1)|}{|(5,-2,-3)|}$$

$$= \sqrt{\frac{51}{38}}$$

* 교선의 방정식을 구하면 10점.

* 답 $= \sqrt{\frac{51}{38}}$: 10점.

6. $X(\log 2) = 2\left(1, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right) = \left(2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$X'(t) = e^t(1, \sinh t + \cosh t, -\cosh t - \sinh t) = (e^t, e^{2t}, -e^{2t})$

$X''(t) = (e^t, 2e^{2t}, -2e^{2t})$

$X'(\log 2) = (2, 4, -4) \qquad X''(\log 2) = (2, 8, -8)$

$X'(\log 2) \times X''(\log 2) = (0, 8, 8) = 8(0, 1, 1)$

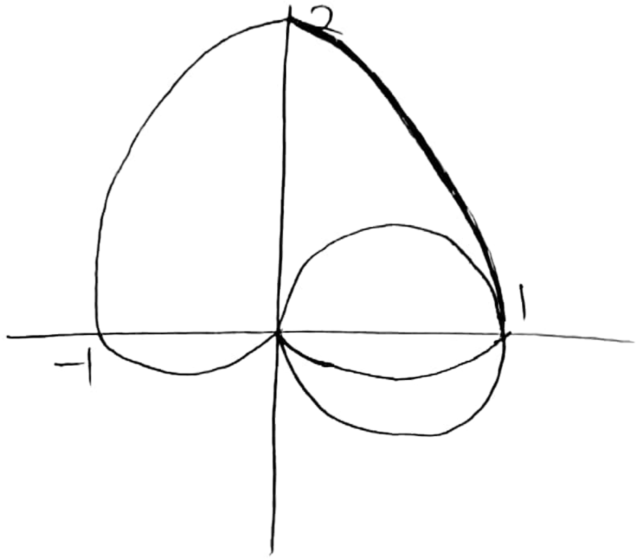
① 접선의 방정식 : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-\frac{3}{2}}{4} = \dfrac{z+\frac{5}{2}}{-4}$ ┘+10

② 접촉평면의 방정식 : $\left(x-2, y-\frac{3}{2}, z+\frac{5}{2}\right) \cdot (0,1,1) = 0$

$\Rightarrow y+z+1=0$. ┘+10

※ ①, ②에서 계산 실수가 있으면 각각 −5점.

7. (a)



∘ $\frac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi$ 부분에 해당되는 그래프를 원 안쪽에 그리지 않을시 -5점

(b) 구하고자 하는 넓이는

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} (1+\sin\theta)^2\, d\theta - \frac{\pi}{8}}_{(*)}$$

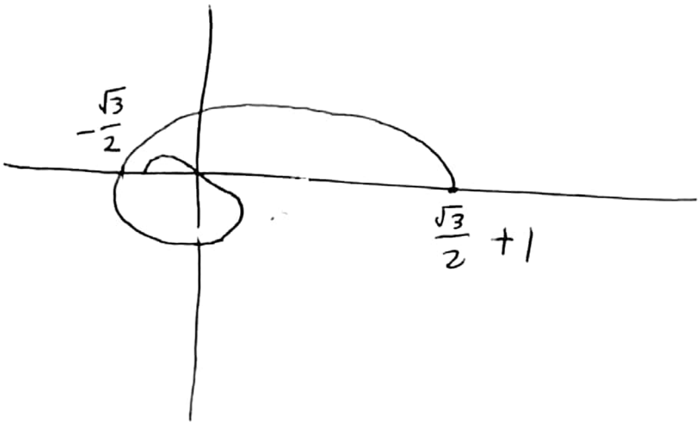
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} 1 + 2\sin\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta - \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \frac{\pi}{8}$$

$$= \pi + 1.$$

∘ (*) 식을 잘 썼으면 +5점

8 $r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$



곡선의 길이 $= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left|1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$, $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2} \ge 0$,이므로

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2\pi$.

(*) 곡선의 길이의 정의를 서술하였으면 (+10점)

(*) 계산을 정확히 했으면 (+10점)

9. 주어진 곡선은 $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 로 매개화 할수 있다.

$X'(t) = 3\cos t \sin t\,(-\cos t, \sin t)$ $\quad |X'(t)| = 3\cos t \sin t.\ (\ge 0)$

① 질량 $m = \int_X \mu\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot 3\cos t \sin t\, dt$ J+3

$= 3\int_0^1 u^4\, du$ $\quad$ ($u=\sin t$ 로 치환)

$= \frac{3}{5}$ J+3

② $\bar{x} = \frac{1}{m}\int_X x\cdot\mu\, ds = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^4 t \sin^4 t\, dt$ J+3

$= \frac{1}{m}\cdot\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 2t\, dt = \frac{1}{m}\frac{3}{16}\int_0^{\pi} \sin^4 u \cdot \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{m}\cdot\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\, du = \frac{1}{m}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{15}{256}\pi$ J+4

↑ 부분적분.

③ $\bar{y} = \frac{1}{m}\int_X y\cdot\mu\, ds = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin^7 t\, dt$ J+3

$= \frac{1}{m}\cdot 3\cdot\int_0^1 u^7\, du = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{m} = \frac{5}{8}$ J+4

$\therefore$ 질량중심 $= \left(\frac{15}{256}\pi, \frac{5}{8}\right)$

10. 곡률 벡터 $\vec{K} = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$ —— 10점

$X'(t) = (\cos 2t, \sin 2t, -\sin t, \cos t)$, $|X'(t)| = \sqrt{2}$.

$X''(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, -\cos t, -\sin t)$,

$\vec{K}(\pi) = (0, 1, \frac{1}{2}, 0)$ ← $t=\pi$ 에서의 곡률 벡터, 5점

$|\vec{K}(\pi)| = \underbrace{k(\pi)}_{t=\pi \text{ 에서의 곡률.}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. —— 5점.