2019–1 수학 1 기말고사 모범답안

1. $\begin{cases} 2x - z = 8 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$ 을 연립하면

두 평면의 교선 l : $x-2 = y = \dfrac{z+4}{2}$ 를 얻는다 /5점

l 의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ 1,\ 2)$

$B=(2,\ 0,\ -4)$는 교선 위의 점이다.

∴ 평면 P의 법벡터 $= \vec{u} \times \overrightarrow{AB}$

$= (1,\ 1,\ 2) \times (4,\ 4,\ -7)$

$= (-15,\ 15,\ 0)$

평면 P : $(-15,\ 15,\ 0)\cdot(x-2,\ y,\ z+4) = 0$

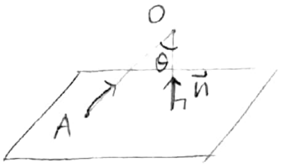
정리하면 $x-y-2=0$

/10점

∴ 원점과 평면 P 사이의 거리 $= \dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$ /5점

(별해) 평면 P의 법벡터 $\vec{n}=(-1,\ 1,\ 0)$

$A=(-2,\ -4,\ 3)$이 평면 P 위의 점이므로



원점과 평면 P 사이의 거리

$= |\overrightarrow{AO}|\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{AO}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|(2,\ 4,\ -3)\cdot(-1,\ 1,\ 0)|}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}$

* $\vec{n}$만 구한 경우 부분점수 없음

* 별해에서 계산실수를 할 경우 5점 감점

2. $|x\mathbf{u}+y\mathbf{v}| = \sqrt{x^2-xy+3y^2}$

$|x\mathbf{u}+y\mathbf{v}|^2 = x^2|\mathbf{u}|^2 + 2xy(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + y^2|\mathbf{v}|^2 = \underline{x^2-xy+3y^2}$

+10

$|\mathbf{u}|^2=1$, $|\mathbf{v}|^2=3$. $2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = -1$

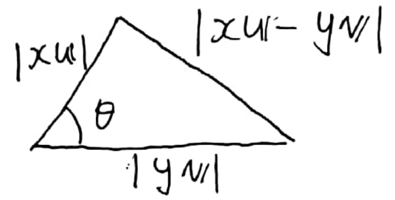
$|\mathbf{u}|=1$, $|\mathbf{v}|=\sqrt{3}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$ +10.

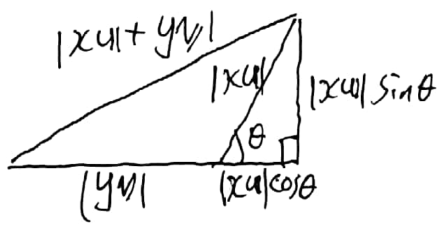
* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ 공식이 있으면 +5

* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 벡터를 2차원 혹은 3차원에 한정한 경우 점수없음

*



이 삼각형에서 제 2 코사인 법칙을 적용해서 올바르게 풀 경우 +20



이 삼각형에서 피타고라스 정리를 적용해서 올바르게 풀 경우 +20

3

(a) ($\Rightarrow$) 우선 L 이 선형사상이므로 $L(0)=0$ 이다.

$L(x)=0$ 인 비자명해 $x \neq 0$ 이 존재하면,

L 이 일대일 함수 임에 모순.

$\therefore$ $L(x)=0$ 의 해는 자명한것 뿐이다. +5

($\Leftarrow$) $L(x)=L(y)$ 라 하자.

$\Rightarrow L(x)-L(y)=L(x-y)=0$ 이다.

$\therefore$ $x-y=0$ 이다. $\Rightarrow x=y$.

$\therefore$ L은 일대일함수 이다. +5

(*) 각 방향 부분점수 없음.

(*) 증명해야 하는 명제와 동등한 비자명한 내용을 이용한 경우 점수 없음.

(b)

$2L(u)+L(v)-2L(w)=0$

$=L(2u+v-2w)$ 이고,

L이 일대일 함수 이므로 $2u+v-2w=0$. (by (a)) +5

$\therefore$ u, v, w 는 일차 종속 이다. +5

(*) 판정이 틀린경우 점수없음

(*) $\det[L]\neq 0$ 을 이용한 경우 자세한 증명이 없으면 5점 감점.

4. $y=x$에 대한 대칭변환에 해당하는 행렬은 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$ +5점

$$\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix}=7,\quad \det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1$$

$\therefore \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$의 행렬식은 $-\frac{1}{7}$이다. +10점

※ 단, $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&1\\1&3\end{pmatrix}$을 구하고

행렬식을 안 구하거나 틀렸을 경우 부분점수 5점.

5. (a) $a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3}\, a_{\sigma(4)4} \neq 0$ 이려면

$a_{\sigma(i)i}$ $(i=1,2,3,4)$ 가 모두 0 이 아니어야 한다.

$a_{11} = a_{21} = a_{41} = 0$ 이므로 $\sigma(1) = 3$ 이어야 한다.

그리고 $a_{43} = a_{44} = 0$ 이므로 $\sigma(3), \sigma(4) \neq 4$ 이고 $\sigma(2) = 4$가 된다

+5

따라서 가능한 치환은

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

+5

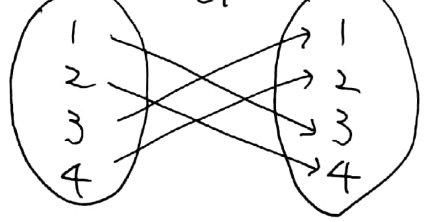
* 치환의 표기는 다음 4개의 경우만 인정

① $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

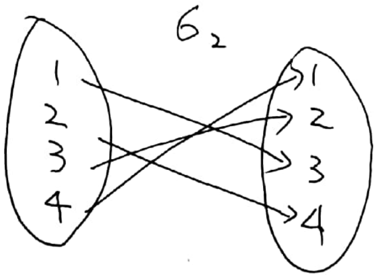
② $\sigma_1 = (1\ 3)(2\ 4)$. $\sigma_2 = (1\ 3\ 2\ 4)$

③ $\sigma_1 = (3, 4, 1, 2)$ $\sigma_2 = (3, 4, 2, 1)$

④ σ_1



σ_2



※ σ 값을 명시하지 않아도, non-zero 항들을 명시한 경우 5점 부여.

(b) $\operatorname{sgn}\sigma_1 = +1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2 = -1$ ┘ 1개 3점, 2개 5점

* ① +, - , 양수, 음수 등의 답안은 인정하지 않음

② (a)에서 틀린 표기를 이용한 경우 (b)도 점수 없음.

(c) $\det A = (\operatorname{sgn}\sigma_1) a_{31} a_{42} a_{13} a_{24} + (\operatorname{sgn}\sigma_2) a_{31} a_{42} a_{23} a_{14}$

$= 6 \times 4 \times 3 \times 2 - 6 \times 4 \times 5 \times 1$

$= 24$ ┘ +5

6번.

$(a\times b)\times a = (a\cdot a)b - (b\cdot a)a$

$(a\times b)\times b = (a\cdot b)b - (b\cdot b)a$

$$\Rightarrow ((a\times b)\times a)\times((a\times b)\times b) = (|a|^2 b - (a\cdot b)a)\times((a\cdot b)b - |b|^2 a)$$

$$= |a|^2(a\cdot b)\cancel{b\times b}_{0} - |a|^2|b|^2\, b\times a - (a\cdot b)^2\, a\times b + (a\cdot b)|b|^2\cancel{a\times a}_{0}$$

$$= (|a|^2|b|^2 - (a\cdot b)^2)\, a\times b \quad (\because b\times a = -a\times b)$$

$$= |a\times b|^2\, a\times b. \quad +10$$

$\therefore t = |a\times b|^2$ $+5$

$\boxed{\text{Sol 2}}$

$$((a\times b)\times a)\times((a\times b)\times b) = \left[\cancel{(a\times b)\cdot((a\times b)\times b)}_{0}\right]a - \left[a\cdot((a\times b)\times b)\right](a\times b)$$

$$= -\left[a\cdot((a\times b)\times b)\right](a\times b)$$

$$= -\det(a, a\times b, b)\,(a\times b) \quad +10$$

$$= |a\times b|^2 (a\times b). \quad (\because -\det(a, a\times b, b) = \det(a\times b, a, b) = (a\times b)\cdot(a\times b) = |a\times b|^2).$$

$\therefore t = |a\times b|^2$ $+5$

※ 답은 맞았으나 계산과정에 오류가 있을 시 5점.

#7

$$X(t) = \left(\int_0^{\log t} u\,du,\ \int_0^t \cos(2\pi u)\,du,\ \int_0^t e^u\,du + t \right) \times (1, t-1, et)$$

$$\Rightarrow X(1) = \left(\int_0^0 u\,du,\ \int_0^1 \cos(2\pi u)\,du,\ \int_0^1 e^u\,du + 1 \right) \times (1, 0, e)$$

$$= (0, 0, e) \times (1, 0, e)$$

$$= (0, e, 0)$$

+5

$$X'(t) = \left(\frac{\log t}{t},\ \cos(2\pi t),\ e^t + 1 \right) \times (1, t-1, et)$$

$$+ \left(\int_0^{\log t} u\,du,\ \int_0^t \cos(2\pi u)\,du,\ \int_0^t e^u\,du + t \right) \times (0, 1, e)$$

$$\Rightarrow X'(1) = (0, 1, e+1) \times (1, 0, e) + (0, 0, e) \times (0, 1, e)$$

$$= (e, e+1, -1) + (-e, 0, 0)$$

$$= (0, e+1, -1)$$

+5

$$X''(t) = \left(\frac{1 - \log t}{t^2},\ -2\pi \sin(2\pi t),\ e^t \right) \times (1, t-1, et)$$

$$+ \left(\frac{\log t}{t},\ \cos(2\pi t),\ e^t + 1 \right) \times (0, 1, e)$$

$$+ \left(\frac{\log t}{t},\ \cos(2\pi t),\ e^t + 1 \right) \times (0, 1, e)$$

$$+ \left(\int_0^{\log t} u\,du,\ \int_0^t \cos(2\pi u)\,du,\ \int_0^t e^u\,du + t \right) \times (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow X''(1) = (1, 0, e) \times (1, 0, e) + 2\,(0, 1, e+1) \times (0, 1, e)$$

$$= (0, 0, 0) + 2(-1, 0, 0)$$

$$= (-2, 0, 0)$$

+5

$\Rightarrow X'(1) \times X''(1) = (0, e+1, -1) \times (-2, 0, 0)$

$= (0, 2, 2(e+1))$

$\Rightarrow$ 평면의 방정식 $(0, 2, 2(e+1)) \cdot \big((x, y, z) - (0, e, 0)\big) = 0$

$\Rightarrow 2(y-e) + 2(e+1)z = 0$

$\Rightarrow y + (e+1)z - e = 0$

+5

평면의 방정식을 매개변수로 나타낸 경우도 정답 인정

$t=1$ 대입을 잘못한 경우 부분점수 없음

문제 8 $r = \dfrac{3}{2+\cos\theta}$

(a) $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\theta$ 를 이용하여 주어진 식에 대입하면, $+5$.

$$2\sqrt{x^2+y^2} + x = 3$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = (3-x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 .$$ 타원 식을 얻는다. $+5$

(b) 주어진 식 $I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2+\cos\theta}\right)^2 d\theta = \frac{2}{9}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2+\cos\theta}\right)^2 d\theta$

$= \frac{2}{9} \times$ (곡선이 둘러 싼 넓이) $+4$

곡선은 (a)에서 타원임을 알고 있고,

타원의 넓이는 $\underbrace{(\text{장축의 반경})}_{2} \times \underbrace{(\text{단축의 반경})}_{\sqrt{3}} \times \pi$ 이므로, $2\sqrt{3}\pi$ $+3$

따라서 $I = \frac{2}{9} \times 2\sqrt{3}\pi = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ $+3$

* (a)에서 $x = r\cos\theta = \dfrac{3\cos\theta}{2+\cos\theta}$, $y = r\sin\theta = \dfrac{3\sin\theta}{2+\cos\theta}$ 도 정답.

* (b)에서 $\left(\dfrac{1}{2+\cos\theta}\right)$ 을 타원식으로 바꿔서 $\left(\dfrac{(x+\frac{1}{3})^2}{\frac{4}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \right)$

적분값을 계산한 경우도 같은 방식으로 부분점수 부여.

9번 채점기준.

$$|x'(t)| = \frac{1}{1+t^2}$$ ┘5

$$s = s(t) = \int_0^u \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan t.$$
$(= |x'(u)|)$

$g(s) = \tan s$ ($s = \arctan t$ 의 역함수) ┘5

답 : $\tilde{x}(s) = x(g(s)) = \sin s(\cos s, \sin s)$ ┘5

$(0 \le s < \pi/2)$ ┘5

* s의 범위, 부등호 틀리면 부분점수 X
* 계산 부분점수 X.

(변환시) ~~▒~~ $t = \tan s$ 를 대입.
($0 \le s < \pi/2$ 에서 일대일이므로)

$\tilde{x}(s) = \sin s(\cos s, \sin s)$ ⋯ ①

$|\tilde{x}'(s)| = 1$ (이므로, 호의길이로 재매개화) ┘10

따라서. $\tilde{x}(s) = \sin s(\cos s, \sin s)$ ┘5
② ⋯ $(0 \le s < \pi/2)$ ┘5

* $|X'(s)| = 1$ 이 된다는 말이 없으면
식 ① 이나 ② 가 있더라도 점수 X.

10. (a) $C(t) = X(t) + \dfrac{K(t)}{|K(t)|^2}$

$$K(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$$

$X'(t) = (1, t)$, $|X'(t)| = \sqrt{t^2+1}$ 이므로

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(\frac{(1, t)}{\sqrt{t^2+1}}\right)' = \frac{(-t, 1)}{(1+t^2)^2}$$ 3

$$|K(t)| = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore C(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right) + (t^2+1)^3\left(\frac{-t}{(1+t^2)^2}, \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$= \left(-t^3, \frac{3}{2}t^2+1\right)$$ 7

- $K(t)$ 올바르게 구한 경우 +3
- $C(t)$ 올바르게 구한 경우 +7

※ 곡률 벡터를 직접 구하지 않고 곡률 벡터의 방향을 기하학적으로 서술한 경우, 논리적 오류가 없으면 +10.

(b) $l = \int_{-1}^{1} |C'(t)|\,dt$

$= \int_{-1}^{1} 3|t|\sqrt{t^2+1}\,dt$

$= 4\sqrt{2} - 2.$ +10.

부분점수 X

적분 과정에서 논리적 오류가 있는 경우 0점.

ex) $|C'(t)| = 3t\sqrt{t^2+1}$

$\int_{-1}^{1} |C'(t)|\,dt$

$= \cancel{2}\int_{-1}^{1} 3t\sqrt{t^2+1}\,dt$

$= 2\int_{0}^{1} 3t\sqrt{t^2+1}\,dt$

$= 4\sqrt{2} - 2$

(a) 틀린 경우 0점.

(c) $\bar{x} = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{(-t^3)}_{기} \cdot \underbrace{3|t|\sqrt{t^2+1}}_{우}}_{기}\, dt = 0.$

+5.

$$\bar{y} = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}t^2+1\right)\cdot 3|t|\sqrt{t^2+1}\, dt$$

$$= \cdots = \frac{1}{2\sqrt{2}-1}\left(\frac{13\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{35}(50+9\sqrt{2}) = \frac{10}{7} + \frac{9\sqrt{2}}{35}$$

※ c(t)를 잘 구한 경우, c(t) 혹은 포물선이 y축 대칭이므로 $\bar{x}=0$ 이라고 서술한 경우 정답인정

※ (a)나 (b)의 오답으로 문제를 풀 경우 0점

예) (a)에서 잘못 구한 c(t)의 대칭성을 사용할 경우 오답처리.

그러나 포물선이 y축 대칭이므로 $\bar{x}=0$ 이라 서술한 경우 정답 인정.