

수학 및 연습 1 중간고사
(2013년 4월 20일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (40점). 다음 급수의 수렴과 발산을 판정하고 그 이유를 밝히시오.

- (a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$
- (b) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e^2}{n}\right)^n$
- (c) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$
- (d) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}$

문제 2 (20점). 각 항이 1 이 아닌 양수로 이루어진 수열 a_n 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴한다고 하자. 이 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n}$ 이 수렴하는지를 판정하시오.

문제 3 (30점). 다음 멱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

- (a) (15점) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$
- (b) (15점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2 + 1} x^n$

문제 4 (20점). 함수 $y = \tanh x$ 의 역함수를 $x = \tanh^{-1} y$ 라 하자. 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 함수 $h(y) = \frac{d}{dy} \tanh^{-1} y$ 를 y 에 관한 식으로 나타내시오.
- (b) (10점) 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ 의 값을 구하시오.

문제 5 (20점). 함수 $f(x) = x^2 \arcsin x$ 의 원점에서의 5차 근사다항식을 구하시오.

문제 6 (20점). 다음 정적분 값을 오차가 10^{-7} 이내가 되도록 구하시오.

$$\int_0^{0.1} \arctan t \, dt$$

문제 7 (20점). 함수 $f(x) = (1+x)^r$ ($r > 0$) 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 자연수 n 에 대하여 $\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$ 이라 할 때, 함수 $f(x)$ 의 테일러 급수가 $Tf(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ 임을 보이시오.
- (b) (15점) $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = Tf(x)$ 임을 보이시오.

문제 8 (20점). 극좌표계로 주어진 아래 두 곡선에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$r = 2 + \sin \theta - \cos \theta, \quad r = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

- (a) (10점) 두 곡선의 개형을 하나의 좌표평면 위에 함께 그리시오.
- (b) (10점) 두 곡선의 교점을 극좌표로 나타내고, 그 두 점 사이의 거리의 제곱을 구하시오.

문제 9 (10점). 직교좌표계 (x, y, z) 와 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 에 대하여 두 식 $\varphi \leq \frac{\pi}{6}$ 와 $z \leq 4$ 로 표현된 영역의 부피를 구하시오.