

# 수학 및 연습 1 중간고사

(2014년 7월 9일 19:00-21:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (30점). 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하시오.

(a) (10점)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{sn+1}} \quad (s > 0)$

(b) (10점)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$

(c) (10점)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{3^n} \right)$

문제 2 (20점). 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 양의 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$  에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  이면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  이 수렴할 필요충분조건은

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  이 수렴하는 것임을 보이시오.

(b) (10점) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - e^{-\frac{1}{n}} \right)$  의 수렴 여부를 판정하시오.

문제 3 (20점). 멱급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n + 3^n}{n} (x-2)^n$  가 수렴하는  $x$  의 범위를 구하시오.

문제 4 (20점).  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  에서 정의된 함수  $f(x) = \frac{1}{\pi}(x + \tan x - 1)$  가 미분가능한 역함수  $g$  를 가짐을 보이고,  $g'(\frac{1}{4})$  와  $g''(\frac{1}{4})$  를 모두 구하시오.

문제 5 (15점). 다음 급수의 합을 구하여라.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)5^{2n}}$$

문제 6 (15점). 함수

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)(1-x^2)}$$

에 대하여

(a) (5점) 모든  $x$  에 대하여  $f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$  인  $a, b, c$  를 구하시오.

(b) (10점)  $f^{(2014)}(0)$  의 값을 구하시오.

문제 7 (20점). 원점 근방에서 정의된  $n$  번 미분가능한 함수  $f(x), g(x)$  에 대하여  $f(x)$  와  $g(x)$  의 원점에서  $n$  차 근사다항식을 각각  $T_n f(x), T_n g(x)$  라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - T_n f(x)T_n g(x)}{x^n} = 0$  임을 보이시오.

(b) (10점)  $\frac{\cos x}{4x^2 + 1}$  의 3 차 근사다항식을 구하시오.

문제 8 (20점).  $\sqrt{9.45}$  의 근사값을 오차의 범위가  $10^{-3}$  이내가 되도록 구하시오.

문제 9 (20점). 극좌표계로 주어진 두 곡선  $r = 1 + \cos 2\theta, r = 1 + \sin \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) 의 개형을 하나의 좌표평면 위에 함께 그리고, 두 곡선의 모든 교점을 극좌표계로 나타내시오.

문제 10 (20점). 공간의 점 P, Q 를 구면 좌표계  $(\rho, \phi, \theta)$  로 나타낼 때,  $P = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}), Q = (2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$  라 하자. 이때 선분 PQ의 길이와 삼각형  $\triangle OPQ$  의 넓이를 구하시오.