

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

(연습용 여백)

문제 1 [15점] 두 점 $(0, 0, -1)$ 과 $(5, 5, 4)$ 를 지나는 직선 ℓ 을 평면 $2x + y - 2z = 5$ 에 정사영한 직선의 방정식을 구하시오.

문제 2 [20점] 삼차원 공간의 세 점 $P = (2, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$, $R = (5, 7, 3)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 세 점 P, Q, R 을 지나는 평면 H 의 방정식을 구하시오.
- (b) (5점) 삼각형 PQR 의 넓이를 구하시오.
- (c) (10점) 직선 $2x - 1 = y + 2 = 2z - 3$ 과 평면 H 가 만난다면 그 교점을 구하고, 만나지 않는다면 둘 사이의 최단거리를 구하시오.

문제 3 [15점] 두 행렬식이

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 3, \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 7$$

로 주어져 있을 때 다음의 행렬식을 구하시오.

- (a) (5점) $\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 4 & 6 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$
- (b) (5점) $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 + b_3 & a_2 + b_3 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
- (c) (5점) $\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 2 & a_2 & b_2 \\ 3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$

문제 4 [25점] n 차 정사각행렬 A, B 와 단위행렬 I_n , 그리고 영행렬 O 에 대하여 다음 명제가 참이면 T, 거짓이면 F를 표시하고 간단한 이유를 쓰시오. (단, n 은 2 이상의 자연수)

- (a) (5점) AB 가 가역행렬이면 A 는 가역행렬이다.
- (b) (5점) $A^2 = A$ 이면 $A = I_n$ 또는 $A = O$ 이다.
- (c) (5점) $A^5 = A^3 = I_n$ 이면 $A = I_n$ 이다.
- (d) (5점) $\det(AB^t + B^t) = 1$ 이면 B 는 가역행렬이다.
- (e) (5점) 실수 k 에 대하여 $\det(kA) = k(\det A)$ 이다.

문제 5 [30점] \mathbb{R}^3 의 두 벡터 \mathbf{a}, \mathbf{b} 에 대하여, $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 다음과 같이 정의될 때 물음에 답하시오.

(연습용 여백)

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{b})$$

(a) (10점) L 이 선형사상임을 보이시오.

아래 문항 (b)~(d)에서는 $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$ 일 때 물음에 답하시오.

(b) (10점) L 에 대응되는 행렬 A 를 구하시오.

(c) (5점) $\det A$ 를 구하시오.

(d) (5점) 네 점 $O(0, 0, 0)$, $P(1, -2, -3)$, $Q(2, 1, -4)$, $R(3, 4, 1)$ 에 대하여, $L(O)$, $L(P)$, $L(Q)$, $L(R)$ 를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

문제 6 [20점] 원점을 지나지 않는 미분가능한 곡선 $X(t) = (0, 0, z(t))$ 와 $Y(t) = (x(t), y(t), \sqrt{x^2(t) + y^2(t)})$ 에 대하여 다음을 보이시오.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\det \begin{pmatrix} X(t) \cdot X(t) & X(t) \cdot Y(t) \\ Y(t) \cdot X(t) & Y(t) \cdot Y(t) \end{pmatrix} \right) \\ = \det \begin{pmatrix} X(t) \cdot X(t) & X(t) \cdot X'(t) \\ -Y(t) \cdot Y(t) & Y(t) \cdot Y'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

문제 7 [20점] 점 $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 에서 곡선 X 의 접촉평면을 구하시오.

$$X(t) = \left(e^{\tan \frac{t}{2}} \tan^2 \frac{t}{2}, e^{\tan \frac{t}{2}} \tan \frac{t}{2}, \tan \frac{t}{2} \right)$$

문제 8 [20점] 극좌표로 주어진 좌표평면상의 곡선

$$r = 1 + \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

를 점 $(2, 0)$ 에서부터 잰 호의 길이 s 로 매개화하면 다항식 $p(s), q(s)$ 에 대하여 $\tilde{X}(s) = (p(s), q(s)^{\frac{1}{2}})$ 가 된다고 할 때, s 의 범위와 $p(s), q(s)$ 를 구하시오.

문제 9 [15점] 나선 $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 에서 밀도함수가 $f(t) = t^2$ 일 때, 구간 $-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 나선의 질량과 질량 중심을 구하시오.

문제 10 [20점] 타원

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

위의 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에서 곡률벡터와 접촉원의 방정식을 구하시오.