

수학 및 연습 1 기말고사
(2015년 6월 6일 오후 1:00-3:00)

| | |
|-----|-----|
| 학번: | 이름: |
|-----|-----|

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 좌표공간 \mathbb{R}^3 의 두 벡터 \mathbf{a}, \mathbf{b} 는 서로 수직이 아니고, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 을 만족한다고 하자. 이때 세 벡터 $\mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 는 일차독립임을 보이시오.

문제 2. [20점] 3차원 공간에서 세 점 $A(1, 2, 3), B(2, 4, 5), Q(3, 4, 6)$ 를 지나는 평면에 대하여 평면 밖의 한 점 P 에서 이 평면에 내린 수선의 발이 Q 라고 한다. \overrightarrow{AP} 의 길이가 8일 때, \overrightarrow{AP} 와 \overrightarrow{AB} 가 이루는 각의 크기 θ 를 구하시오.

문제 3. [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 가역행렬 G 에 대하여 다음 등식을 만족시키는 행렬 A 의 행렬식을 구하시오.

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) (10점) $AB = 2BA$ 를 만족하는 가역행렬 A, B 는 존재하지 않음을 보이시오.

문제 4. [30점] \mathbb{R}^3 의 2개의 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 는 시점이 원점이면서 서로 수직인 단위벡터이고, 평면 α 는 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 를 모두 포함하는 평면이다. 다음과 같이 사상 L 을 정의할 때, 물음에 답하시오.

$$\begin{aligned} L: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\longmapsto L(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

여기서 \mathbf{v} 는 \mathbf{x} 를 평면 α 로 정사영한 벡터이다.

(a) (10점) 벡터 $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ 와 같이 표현될 때,

$$a_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \quad a_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2$$

임을 증명하시오.

(b) (10점) 사상 L 이 선형사상임을 보이시오.

(c) (10점) L 에 대응하는 행렬 M 을 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 를 써서 나타내시오.

문제 5. [20점] 평면 $x + y + z = 1$ 위의 네 점 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 1, 1), D(1, -1, 1)$ 를 밑면의 네 점으로 하고 $E(2, 2, 2)$ 를 나머지 꼭지점으로 하는 사각뿔의 부피를 구하시오.

문제 6. [25점] 좌표평면 위의 영역 $\{(x, y) \mid x > 2y\}$ 에서 정의된 곡선 $e^{x-2y} = 4(x-y)^2 - x^2$ 을 $t = x - 2y$ 로 매개화하고 $t = 1$ 일 때 속도벡터를 구하시오.

문제 7. [25점] 곡선 $X(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 의 길이를 구하고, 점 $(1, 0, 1)$ 로부터 켄 곡선의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 점에서 곡률벡터를 구하시오.

문제 8. [20점] 현수선 $y = \frac{1}{2} \cosh 2x$ ($0 \leq x \leq 1$) 를 호의 길이로 매개화하시오. 이때, 매개변수의 범위 구하시오.

문제 9. [20점] 극좌표계에서 식

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

으로 주어진 곡선 X 의 개형을 그리고, 이 곡선에 의해 나뉘어진 영역 중에서 점 $(-2, 0)$ 을 포함하는 영역의 넓이를 구하시오.