2014 수학 및 연습 1 기말고사 모범답안

[#1] (a) $\mathbb{X} = \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1)$

$$\mathbb{n} = \mathbb{v} \times \mathbb{w} = (2, 3, -1) \times (1, 3, 2) = (9, -5, 3)$$

$$P_{\mathbb{n}}(\mathbb{X}) = \frac{\mathbb{X} \cdot \mathbb{n}}{\mathbb{n} \cdot \mathbb{n}} \mathbb{n} = \frac{-9-5-3}{9^2+(-5)^2+3^2} (9, -5, 3)$$

→5

$$= \frac{-17}{115} (9, -5, 3)$$

→10

(b) l_1과 l_2 사이의 거리는 $\mathbb{X}$의 $\mathbb{n}$에 대한 정사영의 크기와 같다. →5

$$\therefore \left| \frac{-17}{115} (9, -5, 3) \right| = \frac{17}{115} |(9, -5, 3)| = \frac{17}{\sqrt{115}}$$

→10

(별해) $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{2}$

를 각각 $(1+2t, 2+3t, 3-t)$, $(s, 3+3s, 2+2s)$로 매개화하면

$(1+2t-s,\ 2+3t-(3+3s),\ 3-t-(2+2s)) = k(9, -5, 3)$ 일때

직선위의 두점의 거리가 최소가 된다.

연립하여 풀면 $t = \frac{28}{115}$, $s = \frac{18}{115}$ 이고 →5 $k = \frac{17}{115}$

$$\therefore \text{거리} = \left| \frac{17}{115} (9, -5, 3) \right| = \frac{17}{\sqrt{115}}$$

→10

(채점기준)
- (a)에서 정사영에 대한 식이 제대로 적혀있으면 +5점
- 그 후 계산과정이 정확하여 답에 도달하면 +5점

- (b)에서 거리가 정사영의 크기와 같다는 언급이 있고 식으로 올바르게 표현시 +5점
  답까지 계산이 정확하면 +5점
- 별해에서 t, s 값을 정확히 구하면 5점, 답까지 계산과정이 정확하면 +5점.

2. (a) 임의의 행렬 $P, Q \in M$ 와 $c \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$L(P+Q) = (P+Q) + (P+Q)^t$$
$$= P + P^t + Q + Q^t = L(P) + L(Q),$$
$$L(cP) = (cP) + (cP)^t = c(P+P^t) = cL(P).$$

따라서 L은 선형사상이다. 」 (5 점)

* 필요한 모든 조건을 보이지 않으면 0점.

(b)
$$L(e_1) = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e_1$$
$$L(e_2) = L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_2+e_3$$
$$L(e_3) = L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_2+e_3$$
$$L(e_4) = L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2e_4$$

따라서 대응되는 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 」 (5점)

$\det A$ 는 2열과 3열이 같으므로 0 이다. 」 (10 점)

(c) e_1, e_2, e_3, e_4 는 일차 독립이고

$L(e_2) = L(e_3)$ 이므로 $L(e_1), L(e_2), L(e_3), L(e_4)$는 일차종속. (5점)

* 구체적인 반례를 잡지 않거나 계산이 틀린 경우 0점.

* P_1, P_2, P_3, P_4가 일차독립일 때 $L(P_1), L(P_2), L(P_3), L(P_4)$가 항상 일차종속임을 보일 경우 정답 인정.

[#3] (a) F

반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

(b) T

(c) F

반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(d) T

(e) F

반례) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=O$

(채점기준) 문항당 정답인 경우 +4점, 오답인 경우 −4점,

미기재시 0점.

4(a)

$E(X)$는 X를 α 위에 정사영한 점이므로 $\overrightarrow{XE(X)}$ (유향선분)은

평면 α와 수직이다.

좌표공간이 삼차원이기 때문에 벡터 $\overrightarrow{XE(X)}$와 m은 나란하다.

따라서 $\overrightarrow{XE(X)} = km$을 만족하는 실수 k가 존재한다.

m은 단위벡터 이므로

$$k = k(m \cdot m)$$

$$= (km) \cdot m$$

$$= \overrightarrow{XE(X)} \cdot m$$

$$= (E(X) - X) \cdot m$$

$$= ((E(X) - P) + (P - X)) \cdot m$$

$$= (E(X) - P) \cdot m + (P - X) \cdot m$$

$$= (P - X) \cdot m$$

($\because$ $E(X) - P = \overrightarrow{PE(X)}$는 α 안의 유향선분 $\Rightarrow$ m과 수직)

따라서 $\overrightarrow{XE(X)} = km = ((P - X) \cdot m)m$

$\overrightarrow{XE(X)} = E(X) - X$ 이므로 $E(X) = X + ((P - X) \cdot m)m$.

/10

부분점수 없음.

4(b) 평면 $x+2y+3z=0$ 에 수직인 단위벡터 $n=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ 이라 두자.

$X=(x,y,z)$ $P=(0,0,0)$ 이라하면 (a)의 결과에 의해

$$E(x,y,z)=(x,y,z)+\left((-x,-y,-z)\cdot\frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}\right)\frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$$ ┘+3

$$=(x,y,z)-\frac{1}{14}(x+2y+3z)(1,2,3)$$

$$=\frac{1}{14}(13x-2y-3z,\ -2x+10y-6z,\ -3x-6y+5z)$$

따라서 $A=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}13&-2&-3\\-2&10&-6\\-3&-6&5\end{pmatrix}$. ┘+2

A는 정사영이므로 2번 정사영해도 같은 결과가 나온다. $\Rightarrow A^2=A$.

그러므로 $A^{2014}=A$.

$$\det(A^{2014}-I)=\det(A-I)=\det\left(\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-2&-4&-6\\-3&-6&-9\end{pmatrix}\right)=0$$

(∵ A−I의 각 열벡터들이 일차종속이므로) ┘+5

< 채점기준 >

① 행렬 A를 제대로 구하지 못한 경우, $\det(A-I)=0$ 이 나왔더라도 점수부여 없음.

② $A^{2014}=A$ 임을 보이지 않더라도

$$\det(A^{2014}-I)=\det((A-I)(A^{2013}+A^{2012}+\cdots+A+I))$$
$$=\det(A-I)\det(A^{2013}+A^{2012}+\cdots+A+I)$$ 임을 이용하여 계산가능.

③ 행렬식 계산 과정에 잘못된 부분이 있을 경우 점수 없음.

5. (a) (풀이1) u, v, w 일차독립 $\Leftrightarrow$ $\det(u|v|w) \neq 0$

$$(u\times v)\circ w = \det(u|v|w) \neq 0.$$

(풀이2) (대우) $(u\times v)\circ w = 0$

(case1) $u\times v = 0 \longrightarrow u \parallel v \longrightarrow u, v, w$ 일차종속.

(case2) $u\times v \neq 0$, w가 $u\times v$에 수직이므로,

w가 u와 v로 만들어지는 평면에 포함된다.

$\longrightarrow$ w가 u와 v의 일차결합으로 표현된다.

$\longrightarrow$ u, v, w 일차종속. * 부분점수 없음.

(b) (풀이1)

$$\det\begin{pmatrix} u\times v \,|\, v\times w \,|\, w\times u \end{pmatrix} = \big((u\times v)\times(v\times u)\big)\circ(w\times u)$$

$$= \Big\{\big((u\times v)\circ w\big)v - \underbrace{\big((u\times v)\circ v\big)}_{0}w\Big\}\circ(w\times u)$$

$$= \big((u\times v)\circ w\big)\, v\circ(w\times u)$$

$$= \{\det(u|v|w)\}^2 \neq 0 \quad (\because u, v, w \text{가 일차독립 이므로}^{\text{By (a)}})$$

$\longrightarrow$ $u\times v$, $v\times w$, $w\times u$ 일차독립

* 단, 계산과정이 부실한 경우 5점.

(b) (풀이 2).

a, b, c 에 대한 방정식 $a(u\times v) + b(v\times w) + c(w\times u) = 0$ (*)

을 생각하면,

양변에 $\cdot u$ 를 적용하면, $b\,(v\times w)\cdot u = 0 \longrightarrow b = 0$

〃 $\cdot v$ 〃 , $c\,(w\times u)\cdot v = 0 \longrightarrow c = 0$

〃 $\cdot w$ 〃 , $a\,(u\times v)\cdot w = 0 \longrightarrow a = 0$.

(*) 가 자명한 해 $(0, 0, 0)$ 만을 가지므로,

$u\times v$, $v\times w$, $w\times u$ 는 일차독립이다.

#6. (a) $(x-1)^2+y^2=1$ 에서

$x=\cos\theta+1$, $y=\sin\theta$ 로 두면,

$x^2+y^2+z^2=4$ 에서 $z^2=2-2\cos\theta$, $z=\sqrt{2-2\cos\theta}=2\sin\frac{\theta}{2}$

이 때, $z\geq 0$ 이므로 $0\leq\theta\leq 2\pi$ 에서 $X(\theta)=(\cos\theta+1, \sin\theta, 2\sin\frac{\theta}{2})$

┘10점

◦ 다른 방법으로 매개화 한 경우 표현되지 않는 부분이 존재할 경우 0점.

범위를 적지 않은 경우 5점.

(b) $X(\theta_0)=(0,0,2) \Rightarrow \theta_0=\pi$

$X'(\pi)=(0,-1,0)$, $X''(\pi)=(1,0,-\frac{1}{2})$ 이므로

┘5점

접촉평면의 방정식은 $(X'(\pi)\times X''(\pi))\circ((x,y,z)-(0,0,2))=0$

$X'(\pi)\times X''(\pi)=(\frac{1}{2},0,1)$, $\therefore \frac{1}{2}x+z-2=0$

┘10점.

7 (a) $X(t) = \left(\arctan t, \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right)$

$$X'(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$$

$$|X'(t)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

곡선의 길이 : $L = \int_0^1 |X'(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ ($t = \sinh x$ 로 치환.)

┘5점

$$= \int_0^{\sinh^{-1}1} \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} \cosh x\,dx = \int_0^{\sinh^{-1}1} \frac{\cosh x}{\cosh x}\,dx$$

$$= \sinh^{-1}1$$

$\sinh^{-1}1 = \alpha$라 하면, $\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} = 1$ 이고 지수방정식을 풀면

$\alpha = \log(1+\sqrt{2})$ 임을 알 수 있다. $\therefore L = \log(1+\sqrt{2})$

┘10점

• 계산실수 시 점수 없음.

7 (b)

$$X(1) = \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\log 2\right).$$

$$X'(1) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$\perp$ ①, 5점.

$t=1$ 에서의 접선을 $l(s)$라 하면

$$l(s) = X(1) + s \cdot X'(1)$$

$$= \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\log 2\right) + s \cdot \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}s + \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\log 2\right)$$

$\perp$ ②, 10점

- 매개화하지 않았을 시 2점 감점.
- 계산실수 허용하지 않음 (①에서)
- 접선공식이 틀린경우 점수 없음.
- ①이 틀렸지만 접선의 공식을 맞게 끝까지 구한 경우 부분점수 5점.

8. 직교좌표계로 매개화하면,

$$X(\theta) = (e^{\theta}\cos\theta,\ e^{\theta}\sin\theta,\ e^{\theta})$$ 5점

$$X'(\theta) = (e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta,\ e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta,\ e^{\theta})$$

$$|X'(\theta)| = \sqrt{3}\,e^{\theta}$$

$$s(\theta) = \int_0^{\theta} |X'(u)|\,du = \int_0^{\theta} \sqrt{3}e^{u}\,du = \sqrt{3}\,(e^{\theta}-1)$$ 10점

($e^0=1$ 이므로)

(적분구간의 아래끝이 맞아야 함!)

$$\Rightarrow \theta = \log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$$ 15점

$$\Rightarrow \tilde{X}(s) = X\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right)$$

$$= \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\left(\cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right),\ \sin\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right),\ 1\right)$$

20점

※ 직교좌표계로 바꾸지 않고, 원기둥 좌표계에서 곧바로

s를 구한 경우, s가 제대로 맞아야 10점, 부분점수 없음.

#9. $X(t) = (t, \sin t)$

$X'(t) = (1, \cos t)$ 이므로,

곡률 벡터는 $\mathbb{K}(t) = \dfrac{1}{|X'(t)|}\left(\dfrac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$

$$= \left(\frac{\cos t \sin t}{(1+\cos^2 t)^2} , \frac{-\sin t}{(1+\cos^2 t)^2} \right)$$

* 곡률벡터나 곡률 중 어느 하나라도 정확히 구하면 10점
* 계산이 틀리는 경우 곡률벡터나 곡률을 구하는 식이 정확히 맞으면 5점

곡률은 $\kappa(t) = |\mathbb{K}(t)| = \dfrac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^{3/2}}$

$$\Rightarrow \mathbb{K}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(\tfrac{2}{9}, -\tfrac{2\sqrt{2}}{9}\right), \quad \kappa\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{2\sqrt{3}}{9}$$

10

$\therefore$ 접촉원의 중심 $= \left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\mathbb{K}(\frac{\pi}{4})}{(\kappa(\frac{\pi}{4}))^2} = \left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{3}{2}, -\sqrt{2}\right)$

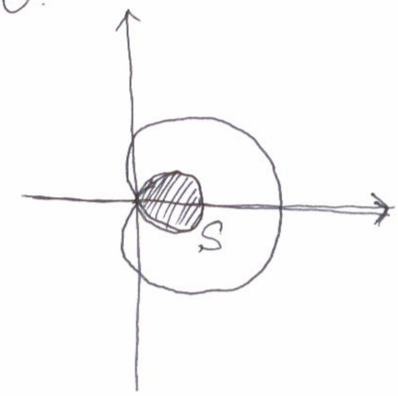
5

반지름 $=$ 곡률 반경 $= \dfrac{1}{\kappa(\frac{\pi}{4})} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

5

$\Rightarrow$ 접촉원의 방정식 : $\left(x - \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{3}{2}\right)^2 + (y+\sqrt{2})^2 = \tfrac{27}{4}$.

#10.



곡선 $r=2\cos\theta-1$에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 하자.

이때 우리가 원하는 공식은 $S=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$. $(\theta_0<\theta<\theta_1)$ +5점

그리고 해당하는 θ의 범위는 $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ 10점.

따라서, $S=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(2\cos\theta-1)^2\,d\theta$.

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(2\cos\theta-1)^2\,d\theta=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ 20점.

☆ $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 으로 푼 경우

→ 2배에 대한 언급이 있는 경우 15점.

→ 2배에 대한 언급이 없는 경우 10점.