< 2013년 1학기 수학 및 연습 1 기말고사 모범답안 >

1. (a) $l: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 이므로 l 위의 점은

$(t, 2t, 3t)$ 형태이다. $P_l(x)$ 는 l의 점 중 X와

가장 가까운 점 즉 $\overline{P_l(x)X} \perp l$ 인 점이므로

$$0 = (x-t, y-2t, z-3t)\cdot(1,2,3)$$
$$= x+2y+3z-14t \qquad t = \frac{x+2y+3z}{14}$$

따라서, $P_l(x) = \left(\frac{x+2y+3z}{14}, \frac{2x+4y+6z}{14}, \frac{3x+6y+9z}{14}\right)$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

(b) $m: x = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{3}$ 이므로

$P_m(X) = (t, 2t, 3t+4)$ 로 두고 (a)와 같이 풀면

$$0 = (x-t, y-2t, z-3t-4)\cdot(1,2,3)$$
$$= x+2y+3z-12-14t. \qquad t = \frac{x+2y+3z-12}{14}$$

따라서, $P_m(X) = \left(\frac{x+2y+3z-12}{14}, \frac{2(x+2y+3z-12)}{14}, \frac{3(x+2y+3z-12)}{14}+4\right)$ ┘+5점

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\12\\-10\end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbb{b} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\12\\-10\end{pmatrix}$$ ┘+15점

채점 기준

(a) 답이 맞으면 10점

답이 틀렸으나 정사영 공식이 맞으면 5점

#2.

(i) $X, Y \in M$

$$T(X+Y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}(X+Y)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Y$$

$$= T(X) + T(Y)$$ +5

(ii) $C \in \mathbb{R}$, $X \in M$

$$T(CX) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}(CX) = C \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = CT(X)$$

+5

(i), (ii) 에 의해 T 는 선형사상이다.

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

+10 (부분점수 없음)

#3. 풀이1) (좌변의 행렬) = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 이므로,

+15

$\det(AB) = \det A \det B$ 에 의해.

$$(\text{좌변}) = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{=t} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \therefore\ t = 221$$

+5

풀이2) $A=(a_1, a_2, a_3)$, $B=(b_1, b_2, b_3)$, $C=(c_1, c_2, c_3)$ 라 두면, det 는 행에 대하여 선형사상이므로,

$$\det\begin{pmatrix} 3A+5B \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3A \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 5B \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{같은 행이 있는 행렬의 det 는 0}}{=} \det\begin{pmatrix} 3A \\ 4B \\ 8C \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 5B \\ 5C \\ 5A \end{pmatrix} = 3\cdot 4\cdot 8\cdot \det\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + 5^3 \det\begin{pmatrix} B \\ C \\ A \end{pmatrix}$$

+10

$$= 96 \det\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + 125\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$= 221 \det\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

+10

참고) ① 풀이2) 에서 $\det\begin{pmatrix} 3A+5B \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3A \\ 4B \\ 8C \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 5B \\ 5C \\ 5A \end{pmatrix}$ 를 이유없이 바로 쓴 경우 0점.

("행렬식은 선형사상이다" 도 0점)

② 가우스 소거법을 이용한 경우 답 맞으면 20점, 틀리면 0점.

#4. (a)

$$\vec{L_1} = (2, 3, 2) - (1, 1, 3) = (1, 2, -1)$$

$$\vec{L_2} = (0, 2, 5) - (1, 1, 3) = (-1, 1, 2)$$

$$\vec{L_1} \times \vec{L_2} = (5, -1, 3)$$

┘ 5점

평면이 (1, 1, 3)을 지나므로 평면의 방정식은

$$5(x-1) - (y-1) + 3(z-3) = 0$$

$$5x - y + 3z = 13.$$

┘ 5점

(b)

$\vec{L_1}, \vec{L_2}$ 로 이루어진 평행사변형의 넓이

$$= |\vec{L_1} \times \vec{L_2}| = |(5, -1, 3)| = \sqrt{35}$$

┘ 5점

두 평면이 이루는 각은 두 법선벡터가 이루는 각과 같으므로, L_1, L_2 로 이루어진 평면과 평면 $3x - 5y + z = 1$ 가 이루는 각을 θ라 하면,

$$\cos\theta = \frac{(5, -1, 3)\cdot(3, -5, 1)}{\sqrt{5^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2+1^2}} = \frac{23}{35}$$

그러므로 정사영시켜 얻은 넓이는

$$\sqrt{35} \times \cos\theta = \frac{23\sqrt{35}}{35}$$

┘ 5점

(b) (별해)

$\vec{L_1}$ 을 $3x-5y+z=1$ 평면에 정사영시킨 벡터를 $\tilde{\vec{L_1}}$ 라 하면,

$$\tilde{\vec{L_1}} = (1,2,-1) - \frac{(3,-5,1)\cdot(1,2,-1)}{(3,-5,1)\cdot(3,-5,1)}(3,-5,1)$$

$$= \frac{1}{35}(59,30,-27)$$

→ 3점.

마찬가지로

$$\tilde{\vec{L_2}} = \frac{1}{35}(-17,5,76)$$

→ 5점

따라서 정사영시킨 넓이는

$$|\tilde{\vec{L_1}} \times \tilde{\vec{L_2}}| = \left|\frac{1}{35}(69,-115,23)\right|$$

$$= \frac{23\sqrt{35}}{35}$$

→ 5점.

* 점을 정사영시켜 푼 경우 별해와 같은 기준으로 채점.

* 계산을 끝까지 하지 않은 경우, 계산 실수 3점 감점.

5번

Step 1. $X(t) = (t, t^2, t^3)$

$X'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

$X''(t) = (0, 2, 6t)$

} 5점

Step 2. $X(t), X'(t), X''(t)$ 가 일차독립임을 보이자. … 15점

(방법 1) $\boxed{\text{벡터 } X(t), X'(t), X''(t) \text{ 이 일차독립} \Leftrightarrow \det(X(t)\ X'(t)\ X''(t)) \neq 0}$ 를 이용.

$$\det\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 2 \\ t^3 & 3t^2 & 6t \end{pmatrix} = 2t^3,$$

$t>0$ 일때 $2t^3 \neq 0$ 이므로

$X(t), X'(t), X''(t)$ 는 일차독립이다.

(방법 2) $aX(t) + bX'(t) + cX''(t) = 0$ 임을 가정하자.

$a(t, t^2, t^3) + b(1, 2t, 3t^2) + c(0, 2, 6t) = 0$ 이므로

$$\left.\begin{cases} at + b = 0 & ① \\ at^2 + 2bt + 2c = 0 & ② \\ at^3 + 3bt^2 + 6ct = 0 & ③ \end{cases}\right\} (*)$$

$t>0$ 이므로 식② − 식①$\times t$ 을 계산하면 $bt + 2c = 0$ 을,

식③ − 식②$\times t$ 를 계산하면, $bt^2 + 4ct = 0$ 을 얻는다.

두식을 연립하면 $2ct = 0$, 이때, $t>0$ 이므로 $c = 0$ 이고, 따라서

$b = 0, a = 0$ 이 된다. $\therefore$ X, X', X'' 는 각 t 에서 일차독립이다.

(채점기준) * Step 1을 틀리면 부분점수 없음. (전체 0점)

* Step 2: (방법 1)에서 행렬식 계산을 틀린 경우 감점 5점

(방법 2) 에서 (*)를 틀린경우, 10점감점 (이후 풀이에 대한 부분점수 없음)

$a=b=c=0$ 을 보이는 풀이과정에서 실수가 있는 경우 5점 감점

(예: 임의의 t 에 대해성립해야 하므로 $at + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$. ← 틀린풀이)

★* (방법2) 에서 일차독립에 관한 명제만 쓰고 풀이과정이 없는 경우, step2 에 대한 점수 없음

* 일차독립임을 가정하고, 모순을 보이는 풀이에서

$X = aX' + bX''$ 인 경우에 대해서만 모순을 보인 경우, 감점 5점

* 임의의 두쌍의 벡터가 서로 일차독립임을 보인 풀이

=> 문제에 애매한 표현 ("서로 일차독립임을 보이시오.") 이 있어

풀이과정에 오류가 없는 경우, 만점 처리

(단, 이와 같이 풀더라도, 잘못된 결론 (예: 따라서 $X(t), X'(t), X''(t)$는

일차독립이다.) 을 언급한 경우는 제외)

6. $t=\pi$ 에서의 접촉평면의 방정식 ; $X=(x,y,z)$

$(X'(\pi)\times X''(\pi))\cdot(X-X(\pi))=0$

or $\det(X'(\pi),\ X''(\pi),\ X-X(\pi))=\det(X-X(\pi),\ X'(\pi),\ X''(\pi))=0$ ···· ①

$X'(t)=(-2\sin t-3\sin 2t,\ 2\cos t+3\cos 2t,\ 1)$

$X''(t)=(-2\cos t-6\cos 2t,\ -2\sin t-6\sin 2t,\ 0)$ 에서

$X(\pi)=(1,0,\pi)$, $X'(\pi)=(0,1,1)$, $X''(\pi)=(-4,0,0)$ 이므로 ···· ②

접촉평면의 법선벡터는

$X'(\pi)\times X''(\pi)=(0,1,1)\times(-4,0,0)$

$=(0,-4,4)$ 이다.

따라서, 접촉평면의 방정식은

$(0,-4,4)\cdot(x-1,\ y,\ z-\pi)=0$

$-4y+4(z-\pi)=0$

$-y+z-\pi=0$ 이다. ···· ③

(i) ① 에 해당하는 언급이나 풀이가 있으면 +5 점

(ii) ② 에서 $X'(\pi)$ 와 $X''(\pi)$: 각 +5 점

둘 중 틀린 것이 있으면 이후 계산은 틀린 걸로 간주

(iii) ③ 에서 마지막까지 풀이가 모두 맞으면 +5 점

(iv) $aX'(\pi)+bX''(\pi)+X(\pi)$, $(a,b:$ 실수$)$ 는 접촉평면의 방정식이 아닙니다.

7. a) 곡선 $l = X(\theta)$ 라 할 때, 속력은

$$|X'(\theta)| = (r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= ((1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |2\cos\tfrac{1}{2}\theta|$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}\theta \quad (\because 0 \leq \theta < \pi).$$

5

θ는 0부터 t 까지의 호의 길이는

$$s = \int_0^t |X'(\theta)|\, d\theta = \int_0^t 2\cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 4\sin\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^t = 4\sin\tfrac{1}{2}t.$$

호의 길이로의 재매개화를 $\tilde{X}(s)$ 라 할 때

$$\tilde{X}(s) = X(\theta), \quad s = 4\sin\tfrac{1}{2}\theta \quad \text{or} \quad \theta = 2\arcsin(\tfrac{1}{4}s)$$

10

$$\therefore \tilde{X}(s) = X(\theta) = X(2\arcsin\tfrac{1}{4}s) = \left((2-\tfrac{1}{8}s^2)(1-\tfrac{1}{8}s^2),\ s\cdot(1-\tfrac{1}{16}s^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

20

b). 호의 전체 길이는 $\int_0^\pi |X'(\theta)|\, d\theta = \int_0^\pi 2\cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 4.$

θ는 0부터 θ_0 까지의 호의 길이가 2인 θ_0를 찾으면

$$\int_0^{\theta_0} |X'(\theta)|\, d\theta = 4\sin\tfrac{1}{2}\theta_0 = 2, \quad \therefore \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

5

원하는 좌표는 $X(\theta_0) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$

10

8.

$X(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$, $-1 \le t \le 1$

중심 구하기.

$X'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$

$|X'(t)| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1^2} = \sqrt{2}|\cosh t| = \sqrt{2}\cosh t$

곡선의 길이 $l = \int_{-1}^{1} |X'(t)|\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\cosh t\,dt$

$= \sqrt{2}\left[\sinh t\right]_{-1}^{1} = 2\sqrt{2}\sinh(1) = \sqrt{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$ 5점

$\bar{x} = \frac{1}{l}\int_X x\,ds = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} x(X(t)) \cdot |X'(t)|\,dt$

$= \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} \cosh t \cdot \sqrt{2}\cosh t\,dt = \frac{1}{l}\sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)\,dt$

$= \frac{\sqrt{2}}{2l}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t + t\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4\sinh(1)}(\sinh(2) + 2)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}(e - \frac{1}{e})}\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2} + 2\right)$ 5점

$\bar{y} = \frac{1}{l}\int_X y\,ds = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} \sinh t \cdot \sqrt{2}\cosh t\,dt = 0$ (기함수) 5점

$\bar{z} = \frac{1}{l}\int_X z\,ds = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} t \cdot \sqrt{2}\cosh t\,dt = 0$ (기함수) 5점

(채점기준)

* $|X'(t)|$ 틀리면 0점

* l 계산이 틀리면, $\bar{x}$ 0점

* $\bar{y}, \bar{z}$ 에서 $\sinh t\,|X'(t)|$ 와 $t\,|X'(t)|$가 기함수라는 설명이 있어야 점수 부여.

(t, $\sinh t$가 기함수라는 이유로 $\bar{y} = \bar{z} = 0$ 이라고 쓰면 0점)

9. $X(t) = (t, e^t) \quad (t \in \mathbb{R})$ 로 매개화하면

$= (x(t), y(t))$

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}$$ +10 (정의만 맞은 경우 +5)

곡률반경 $r(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}{e^t}$ 의 최솟값을 구하기 위해 미분하면

$$r'(t) = \frac{(1+e^{2t})^{\frac{1}{2}}(2e^{2t}-1)}{e^t} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2t} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}.$$

∴ 곡률반경이 최소가 되는 점 : $\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$ +5

곡률벡터

$$\vec{k}(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)' = \left(\frac{-e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}, \frac{e^t}{(e^{2t}+1)^2}\right).$$

이므로 접촉원의 중심은

$$X\left(\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\vec{k}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)}{k\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{27}{4}\left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, 2\sqrt{2}\right)$$

+10

< 채점기준 >

총 25 점.

1. 곡률 및 곡률벡터는 책에 있는 모든 공식 사용 가능.
2. 외적을 이용하여 곡률을 계산한 경우 외적을 2차원에서 생각했으면 5점 감점. (외적은 3차원에서만 정의됨)