2019-1 수학1 중간고사

1(a). $x>1$ 에서 $\log x \le 2\sqrt{x}$ 이므로, $0 \le \frac{(\log n)^3}{n^3} \le \frac{8}{n^{3/2}}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{3/2}}$ 는 수렴하므로, 비교판정법에 의해 수렴.

1(b). $0 \le \frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ 이고 $\sum \frac{1}{n^2}$ 는 수렴하므로,

비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ 는 수렴하고, 절대수렴하는 급수는

수렴하므로 원 급수도 수렴.

1(c). $a_n = \left(1-\sinh\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 로 하면, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\sinh\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sinh\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sinh\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0}}$

$= \frac{1}{e}$ 이므로 멱근 판정법에 의하여 수렴.

1(d). $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ 이며

$\sum \frac{1}{n}$ 이 발산하므로, 극한비교판정법에 의해 발산.

(채점기준).

각 소문항별 부분점수 없음.

틀린 논리가 사용된 경우 0점. 틀린 논리의 예는 아래에 서술.

(1) $a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) "$\frac{\sin n}{n^2} \le \frac{1}{n}$ 이므로 비교판정법에 의해 수렴"

(3) 모든 n에 대하여 $(\log n)^3 < n$.

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n^n \approx \lim_{n\to\infty} b_n^n \Rightarrow \sum a_n^n \approx \sum b_n^n$

2. $\sum_{n=3}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)x^n$ 이 수렴하는 범위?

① $a_n := n^{\frac{1}{n}}-1$.

⇒ 수렴반경을 r 이라 하면,

$$1/r = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{1/n+1}-1}{n^{1/n}-1}$$

이 때, $\lim_{n\to\infty}(n^{1/n}-1)=0$ $(\because \lim_{n\to\infty}\log(n^{1/n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0)$

& $f(x) := x^{1/x}-1 = e^{\log x/x}-1$ 이라 할 때

$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}\cdot e^{\log x/x}$ 이므로, 로피탈 정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(n+1)}{f'(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\log(n+1)}{1-\log n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{1} = 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$\therefore$ $r=1$. 즉, $|x|<1$ 일 때 주어진 급수는 수렴

$|x|>1$ 일 때 발산.

② $a_n = n^{\frac{1}{n}}-1 > \frac{1}{n}$ $(\because n>>1$ 이면 $n>(1+\frac{1}{n})^n)$

$0<\frac{1}{n}$ 이고, $\sum\frac{1}{n}=\infty$ 이므로 $\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\infty$

$\therefore$ $x=1$ 일 때 발산

③ · $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}x^{1/x} < 0$ if $x>3$

⇒ $a_n > a_{n+1} > 0$ $\forall n$

· $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}(n^{1/n}-1)=0$

교대급수 판정법에 의해, $\sum_{n=3}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)(-1)^n<\infty$

$\therefore$ $x=-1$ 일 때 수렴.

기준) ①, ②, ③ 각 5점. ①에서 수렴반경 구하는 과정이 잘못되면 5점 감점

로피탈 정리, 교대급수 정리의 조건 언급 없으면 2점 감점

3. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ $(|x|<1)$ 이므로

양변을 적분하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \log(1+x) \quad (|x|<1)$$

을 얻는다. 따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{3^n} = \log\frac{4}{3}$ 이다. (+5)

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ 이므로 양변을 두 번 미분하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (|x|<1)$$

을 얻는다. 따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$ $(|x|<1)$

이고, $x=\frac{1}{2}$을 대입하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = 6$ 이다. (+5)

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ 이므로 양변을 두 번 적분하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} = (1-x)\log(1-x)+x \quad (|x|<1)$$

를 얻는다. $x=\frac{1}{2}$을 대입하고, 양변에 2를 곱하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n} = 1-\log 2$$ 를 얻는다. (+5)

* 등비급수의 수렴 반경을 명시하지 않은 경우 2점 감점.
* 다른 방법으로 수렴여부를 판정한 경우, 조건과 판정법의 이름을 모두 정확히 서술한 경우에만 +2점.

4.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{h_{n+1}}{h_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{(n+1)h_n}}{1}\right|$

$\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{h_{n+1}}{h_n}\right| = 1$ 이다. 따라서 수렴반경은 1이다. +6

$x=1$ 일때 : $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$ 이므로 일반항 판정법에 의해 발산 +2

$x=-1$ 일때 : $\lim_{n\to\infty} (-1)^n h_n \neq 0$ 이므로 일반항판정법에 의해 발산 +2

* 경계 판정의 경우 답 1점, 과정 1점으로 채점한다.

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$ 이라 하자.

$f(x) - x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$.

$(|x|<1)$.

$\therefore\ f(x) = \frac{-\log(1-x)}{1-x}$ 이다. +8

$\left|\frac{1}{2}\right|<1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n} = f(\frac{1}{2}) = \log 4$ +2

* 합의 재배열을 이용한 경우 "양항급수" 또는 "절대수렴성" 을 언급하지 않은경우 2점 감점

* 함수를 구하는 과정 등에서 사소한 실수가 있는경우 2점 감점.

5.(a) $f'(x) = \cosh x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ 이므로

(또는 $\sinh x$이 증가 → $\sinh^{-1} x$도 증가이므로)

역함수 정리에 의해 역함수가 존재한다. ┘+5 ※1

$g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$. ┘+2

$g''(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$ (or $g''(y)(f'(x))^2 + g'(y) f''(x) = 0$) ┘+3 ※2

$f''(0) = 0 \Rightarrow g''(0) = 0$

※1 $f'(x)$이 틀린 경우 전체 0점

※2 $g''(0)$의 값이 틀려도 $g''(y)$의 식이 맞으면 3점.

설명 부족/식 오류시 $g''(0)$이 맞아도 0점

(b) $T_2 g(y) = g(0) + g'(0) y + \frac{g''(0)}{2!} y^2$ ┘+3 ※1

$= \frac{1}{2} y$ ┘+2점 ※2

※1 답이 틀려도 3점 가능

단, y를 x로 잘못 표기한 경우 점수 X

※2 (a)에서 식이 틀리면 0점 ($f'(x)$, $f''(x)$ 포함)

#6. $\log(1-\arctan x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\log(1-\arctan x)}{x}$.

$\lim_{x\to 0+} x = 0 = \lim_{x\to 0+} \log(1-\arctan x)$ 이므로, 로피탈 정리를 사용하면 5점

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1-\arctan x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{1-\arctan x} = -1$$ 이다 8점

따라서, $\lim_{x\to 0+} (1-\arctan x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ 또는 $\frac{1}{e}$ 이다 10점.

* 로피탈 정리를 적용하였으나, 미분을 잘못했거나 극한값을 잘못 구하는 경우 5점

예) $(\arctan x)' \neq \frac{1}{1+x^2}$ 인 경우., 부호 실수 등.

* $(1-\arctan x)^{\frac{1}{x}} = (1-\arctan x)^{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{\arctan x}{x}}$ 이고,

$\lim_{x\to 0+} (1-\arctan x)^{\frac{1}{\arctan x}} = \frac{1}{e}$ 이고 5점 $\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x} = 1$ 이므로 10점

$\lim_{x\to 0+} (1-\arctan x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$ 이다.

(이 경우, 답만 틀렸을 경우 8점).

* 근사다항식으로 $\lim_{x\to 0+} (1-\arctan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$ 으로 구한 경우 8점

(이 경우, 근사 내용 없이 $\lim_{x\to 0+} (1-\arctan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} (1-x)^{\frac{1}{x}}$ 을 주장할 때 0점)

* 로피탈 정리를 잘못 적용 ($\frac{0}{0}$ 이나 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 아닐 때 사용), log를 잘못 쓰신 경우,

백지, 답만 구한 경우 0점.

문제 7.

근사다항식의 존재성과 유일성에 의해 $f(0)=1,\ f'(0)=2,\ f''(0)=8$ ⌟ +4.

$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 이라 하면 $g'(x)=\dfrac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2}$, $g''(x)=\dfrac{-f''(x)\cdot f(x)+2\cdot\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^3}$ 이므로

$g(0)=1,\quad g'(0)=-2,\quad g''(0)=0.$

따라서, 근사다항식의 존재성과 유일성에 의해 $g(x)$의 2차 근사다항식은

$g(0)+g'(0)x+\dfrac{g''(0)}{2}x^2 = 1-2x$ ⌟ +6.

풀이) $f(x)=1+2x+4x^2+R_2f(x)$ 라 하면 $(R_2f(x)=o(x^2))$

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{1+2x+4x^2+R_2f(x)}.$$

$x=0$ 근방에서 $|2x+4x^2+R_2f(x)|<1$ 이므로 이 경우

$$g(x)=\frac{1}{1-(-2x-4x^2-R_2f(x))}=1+(-2x-4x^2-R_2f(x))+(-2x-4x^2-R_2f(x))^2+\cdots$$

$$=1-2x+o(x^2).$$

근사다항식의 유일성에 의해 $g(x)$의 2차 근사다항식은 $1-2x$. ⌟ +10.

*. $|2x+4x^2+R_2f(x)|$ 가 $x=0$ 근방에서 1보다 작다는 것을 언급하지 않았다면 -5점.

8. $\log(x) = \log(11+(x-11))$

$$= \log 11 + \log\left(1+\left(\frac{x-11}{11}\right)\right)$$

$$= \log 11 + \frac{1}{11}(x-11) - \frac{1}{2\cdot 11^2}(x-11)^2 + \frac{1}{3\cdot 11^3}(x-11)^3 - \cdots$$

$$= \underbrace{\log 11 + \frac{1}{11}(x-11) - \frac{1}{242}(x-11)^2 + \frac{1}{3993}(x-11)^3}_{p(x)} - \cdots$$

---

* $p(x)$의 각 항마다 2점. (2점 x 4 = 8점)

여기서 "항"이란 $C_n(x-11)^n$ 꼴을 의미한다. (x로 전개시 0점처리)

* 약분을 하지 않아도 관대하게 정답처리 (ex. $\frac{1}{3993} = \frac{2}{7986}$)

* $(x-11)^4$ 이상의 항 혹은 $O((x-11)^3)$을 적어도 정답처리

* 미분으로 직접 구한 경우에도 정답처리.

By 테일러 정리, $\log x - p(x) = \frac{f^{(4)}(x_*)}{4!}(x-11)^4$ 인 x_*가 11과 x 사이에 존재.

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ 이므로 $|f^{(4)}(x_*)| \le \frac{6}{10^4}$ ($\because x_* \in [10,12]$)

$$\Rightarrow |\log x - p(x)| \le \frac{1}{4!}\cdot\frac{6}{10^4}\cdot 1^4 \quad (\because x \in [10,12])$$

$$= \frac{1}{4\cdot 10^4}.$$

16

---

* 교대급수 사용시 전구간 $x\in[10,12]$ 에서 증명시 0점.

($x \in [11,12]$ 에서 교대급수 성질 사용후 $x \in [10,11)$ 에서 옳게 풀면 점수인정)

* 풀이는 틀렸으나 테일러정리를 잘 사용한경우 $|R| = \frac{|f^{(4)}(x_*)|}{4!}(x-1)^4$ 이 언급되면 2점.

* 오차의 부호를 실수하면 점수 없음.

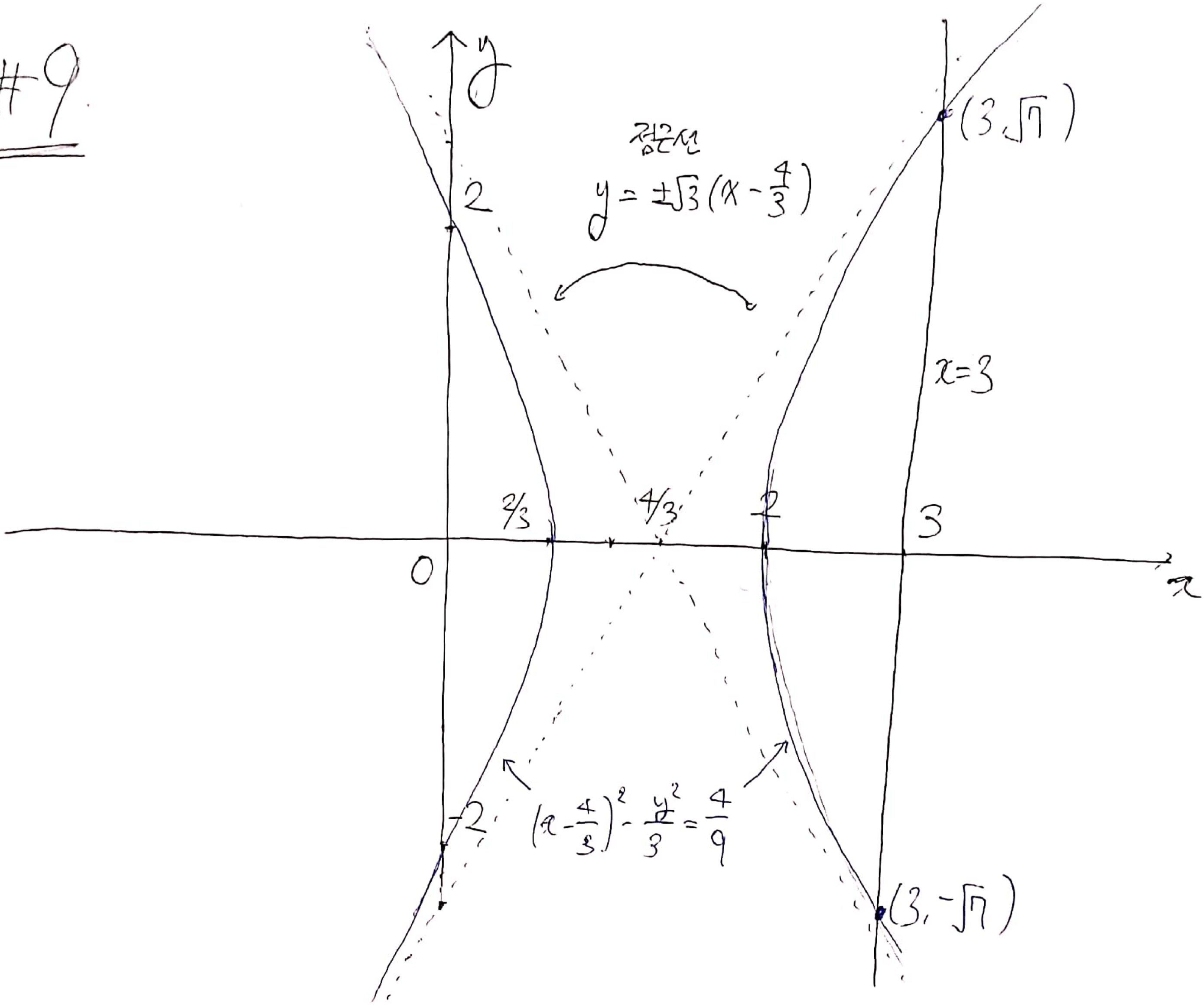
* $M_n f(x)$ 의 정의 및 정의역-작은실수($\neq \mathbb{R}$)는 감점 없음.

* 에러항 R 에서 $(x-1)^4$ 의 흔적 ($(x-1)^4$, $(-1)^4$, $\cdots$) 등이 없으면 점수 없음

* $-\frac{6}{x^4}$ 의 최댓값이 $-\frac{6}{10^4}$ 이라는 말 언급시 점수 없음. (절댓값의 최댓값이라 써야함)

* 비약이 심한경우 점수 없음.

#9

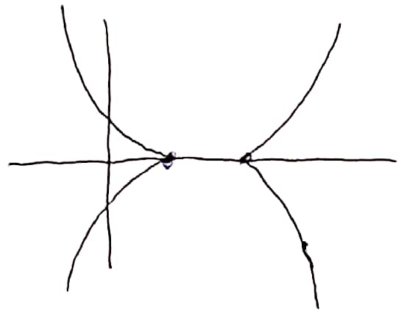


- $r = 3\sec\theta \iff x = r\cos\theta = 3$ (5 pts)
- $r = \dfrac{1}{\frac{1}{2} + \cos\theta} \iff r = 2 - 2r\cos\theta = 2 - 2x \iff x^2 + y^2 = r^2 = (2-2x)^2$
  $\iff \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{4}{9}$ (5 pts)
- 교점 : $x = 3$, $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{4}{9} \iff x = 3$, $y^2 = 7$ 으로 $(3, \pm\sqrt{7})$ (5 pts)

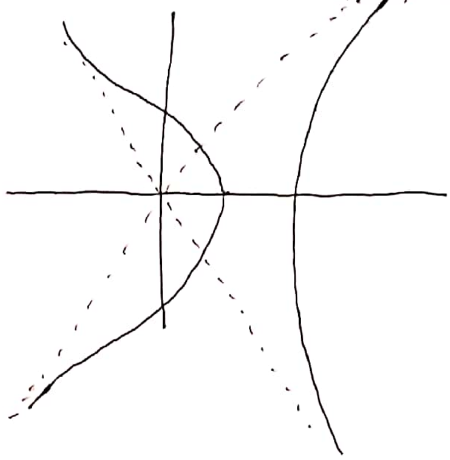
- 세 문항 모두 부분점수 없음.
- 쌍곡선의 경우, 좌우대칭의 형태를 가지고 x축과 만나는 두 점이 원점과 (3, 0) 사이에 있는 경우 정답으로 인정.
  - 쌍곡선의 형태에서 크게 벗어난 경우 정답으로 인정하지 않음.
  - 정답으로 인정되지 않는 몇몇 유형을 다음 페이지에 첨부함.
- 교점의 경우, 직교좌표계나 극좌표계 중 하나라도 맞게 작성했을 경우 정답으로 인정.
  - arccos 함수를 두 값을 가지게 해석한 답안의 경우 인정하지 않음.

• 역막유형들 :

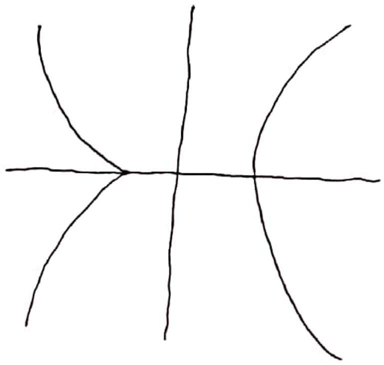
① 첨점이 있음.



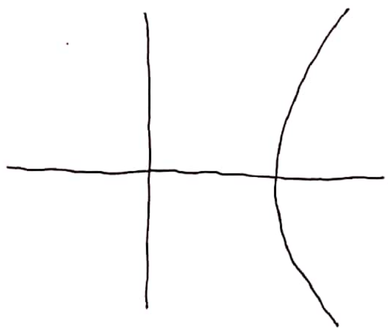
② 점근선을 (원점 지나는 직선들로) 잘못 생각.



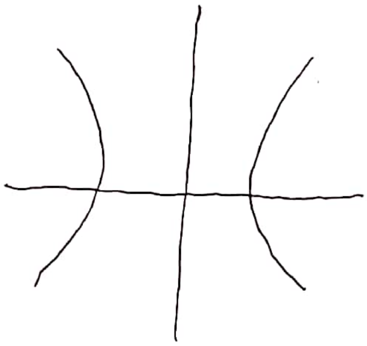
③ 비대칭

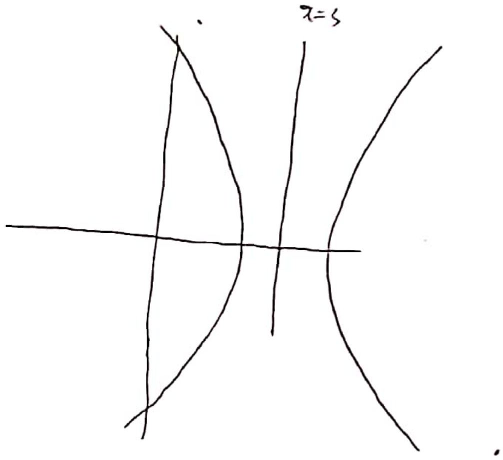


④ 한 쪽만 있음.



⑤ x절편 위치 틀림.





#10.

(a) $\rho = \cos\varphi$

$$\Rightarrow \rho^2 = \rho\cos\varphi$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = z$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$ +7

- $z>0$ 과 같은 조건을 덧붙여 원점이 누락된 경우 −2.
- 그 외 부분점수 없음.

(b) $\varphi = \arctan 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta = \frac{2}{\sqrt5}\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta = \frac{2}{\sqrt5}\rho\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt5}\rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = (2z)^2$$ +5

(단, $\rho \ge 0$ 이므로 $z \ge 0$) +3

- $(z>0)$과 같이 쓴 경우에도 3점 획득 X.
- $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = 2$ 와 같이 쓴 경우,
  - 원점 언급이 있을시 8점
  - 아닌 경우 5점.