〈수학 및 연습 1 - 2014 여름학기 - 모범답안 및 채점기준〉

1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{sn+1}}$ $(s>0)$.

방법 1. 주어진 급수는 초항 $\frac{1}{e^{s+1}}$, 공비 $\frac{1}{e^{s}}$ $\left(\left|\frac{1}{e^{s}}\right|<1\right)$ 인 무한등비급수이다.

따라서 수렴

방법 2. $\frac{1}{e^{sn+1}} < \frac{1}{e^{sn}}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(e^{s})^{n}}$ 이 수렴하므로 주어진 급수 수렴

방법 3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{sn+1}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{s+1/n}} = \frac{1}{e^{s}} < 1$ 이므로 수렴. (멱근판정)

방법 4. $\frac{1}{e^{s(n+1)+1}} \cdot \frac{e^{sn+1}}{1} = \frac{1}{e^{s}} < 1$ 이므로 수렴. (비율판정)

방법 5. $f(x) = \frac{1}{e^{sx+1}}$ 이라 하면 $[1,\infty)$ 에서 $f(x)$는 감소, 연속이며 $f(x)\geq 0$ 이다.

이제 $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{e^{sx+1}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-se^{sx+1}}\right]_{1}^{b} = \frac{1}{se^{s+1}}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{sn+1}}$ 수렴

* 방법 5에서 적분판정의 조건을 쓰지 않으면 2점 감점.

1. (b) $\frac{1}{(2n+1)^{1/n}} \geq \frac{1}{(3n)^{1/n}} = \frac{1}{3^{1/n}n^{1/n}}$ $^{\forall n\in\mathbb{N}}$ 이고, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{1/n}n^{1/n}} = 1$ 이므로,

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^{1/n}} = 0$ 일 수 없다. 따라서, "일반항판정법"에 의해

주어진 급수는 발산한다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{2n+1}} \neq 0$ 이므로,

* "교대급수 정리의 조건을 만족하지 않으므로 발산" → 0점.

1. (C) 방법1. $\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n} > \frac{1}{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ 이고, $\sum \frac{1}{2n}=\infty$ 이므로, 비교판정법에 의해

$\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$ 발산.

방법2. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3^x}$ 이라 하면 이 함수는 $[1,\infty)$ 에서 연속, $f(x)\geq 0$ 이다.

또, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3^x}\log 3 = \frac{x^2\log 3-3^x}{3^x x^2} < 0$ 이므로 $f(x)$ 감소.

$\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3^x}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x+\frac{1}{\log 3}\cdot\frac{1}{3^x}\right]_1^b=\infty$ 이므로 적분판정법에 의해

$\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$ 발산.

* 방법 2에서 적분판정법의 조건 (특히 $f(x)$ 감소) 언급 안하면 −2,

언급은 했으나 $f'(x)<0$ 확인 안하면 −1.

* "$\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$ 에서 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=\infty$, $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$ 이므로 $\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)=\infty$"

$\longrightarrow$ 5점.

(추가 논의 필요)

2. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2$ if $n \gg 1$ (충분히 큰 모든 n에 대해)

언급 없을 시 -5점

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} b_n < a_n < 2b_n$

$\therefore \sum a_n < \infty \Rightarrow \sum \frac{1}{2} b_n < \infty \Rightarrow \sum b_n < \infty$

by 비교판정법

$\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum 2b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

$\therefore \sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum b_n < \infty$ ⌋ 10점

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$ & $\sum \frac{1}{n} = \infty$

by (a), $\sum (e^{\frac{1}{n}} - 1) = \infty$ (발산)

$\therefore \sum (1 - e^{\frac{1}{n}})$: 발산 ⌋ 10점

별해) $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots > 1 + \frac{1}{n}$

$e^{\frac{1}{n}} - 1 > \frac{1}{n} > 0$

$\sum \frac{1}{n} = \infty$ 이므로 비교판정법에 의해 $\sum (e^{\frac{1}{n}} - 1) = \infty$ (발산)

$\therefore \sum (1 - e^{\frac{1}{n}})$: 발산 ⌋ 10점

3. $a_n = \frac{(-4)^n + 3^n}{n}$ 이라 두면,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(-4)^{n+1}+3^{n+1}}{(-4)^n+3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left|\frac{-4+3\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n}\right| = 4$$

이므로 수렴반경은 $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{4}$.

따라서 $|x-2| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$ 일 때 수렴.

+10점

$x = \frac{7}{4}$ 일 때, $a_n\left(\frac{7}{4}-2\right)^n = \frac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{n} \geq \frac{1}{4n}$ 이고

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ 이 발산하므로 주어진 급수도 발산.

+5점

$x = \frac{9}{4}$ 일 때, $a_n\left(\frac{9}{4}-2\right)^n = \frac{(-1)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}$ 에서,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 은 교대급수 정리에 의해 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty$

이므로 주어진 급수는 수렴

+5점.

따라서 수렴하는 x의 범위는 $\frac{7}{4} < x \leq \frac{9}{4}$ 이다.

4. $f(x) = \frac{1}{\pi}(x + \tan x - 1) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\pi}(1 + \sec^2 x)$$

$$f''(x) = \frac{2}{\pi}\sec^2 x \tan x$$

정의역의 모든 점에서 $f'(x) > 0$ 이므로 역함수 정리에 의하여 f는

미분가능한 역함수 g를 가진다. 8점

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{3}$$ 5점 (부분점수 없음)

$$g''\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{f''\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{\left(f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)^3} = -\frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3} = -\frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{27}{\pi^3}} = -\frac{4\pi^2}{27}$$ 7점 (부분점수 없음)

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x|<1.$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n} = \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x}. \qquad \cdots (*)$$

여기 $x = \frac{1}{5}$ 을 대입하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{5^{2n}} = \frac{5}{2} \log \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{2} \log \frac{3}{2}.$$

* $(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ 임을 이용하여 답을 $5 \operatorname{arctanh} \frac{1}{5}$ 로 써도 된다.

* 사소한 계산 실수 -5.

ex) ~~log~~ $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} = +\log(1-x)$ 라 쓴 경우, 또는

(*) 까지 잘 구하고 $x = \frac{1}{5}$ 대입을 잘못한 경우.

#6. (a)

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)(1-x^2)} = \frac{a(x+1)^2 + b(1-x)(1+x) + c(1-x)}{(1-x)(1+x)^2}$$

$$= \frac{ax^2 + 2ax + a + b - bx^2 + c - cx}{(1-x)(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = b, \quad 2a - c = 1, \quad a + b + c = 0.$$

$$\therefore \quad a = b = \frac{1}{4}, \quad c = -\frac{1}{2}$$ 5점.

(b) $$f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{(2014)}(0)}{2014!} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot 2015 = -1007$$

$$\therefore \quad -1007 \times 2014!$$ 10점

* 부분점수 없음.

#7. (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)g(x) - T_nf(x)\,T_ng(x)}{x^n}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)\{g(x) - T_ng(x)\} + \{f(x) - T_nf(x)\}T_ng(x)}{x^n}$

$= 0.$ 10점.

(b) (a)를 이용하자.

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots$

$\dfrac{1}{1+4x^2} = 1 - 4x^2 + 16x^4 - \cdots \quad , |x| < 1/2$ 5점

$\Rightarrow \dfrac{\cos x}{1+4x^2} = 1 - \dfrac{9}{2}x^2 + o(x^3)$

$\therefore \ 1 - \dfrac{9}{2}x^2$ 10점.

* (a)에서 로피탈정리 n번 사용하여 보이면 0점.

#8. $\sqrt{9.45} = 3\sqrt{1.05}$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots, \quad |x| < 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{1.05} = 1 + \frac{1}{2}0.05 - \frac{1}{8}0.05^2 + \frac{1}{16}0.05^3 - \cdots$$

$$\Rightarrow \sqrt{9.45} = 3 + \frac{3}{40} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{400} + \cdots$$

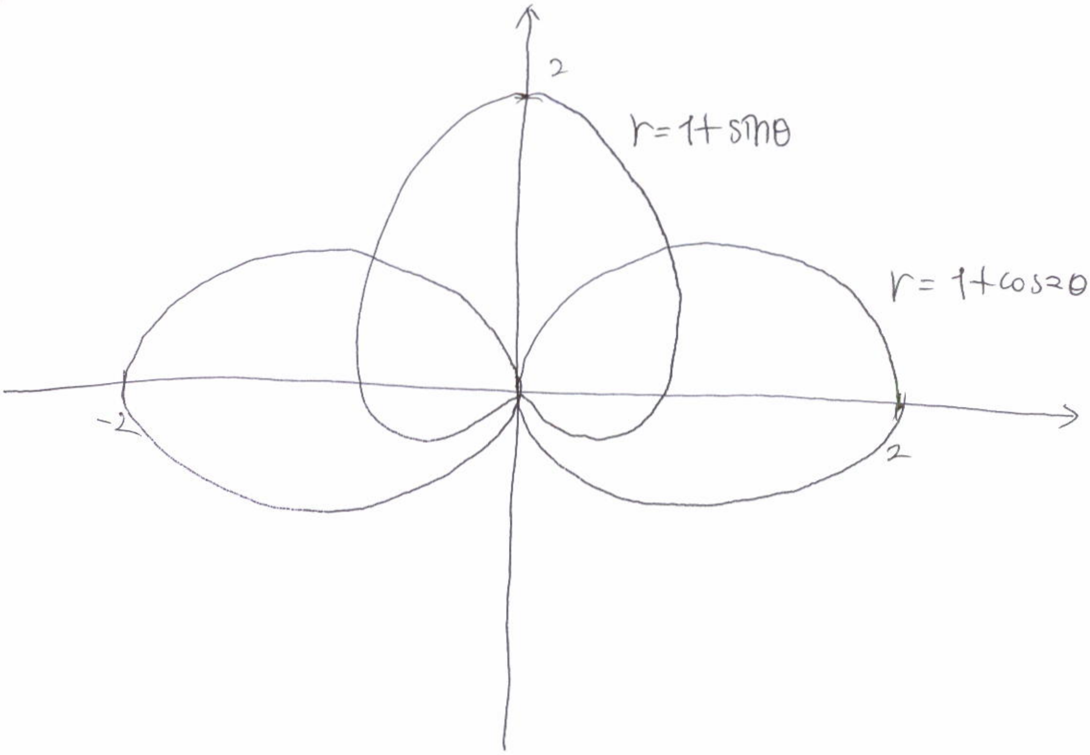
부호가 교대로 나타나고 $\left|-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{400}\right| = \frac{3}{3200} < \frac{1}{1000}$ 이므로

근사값은 $3 + \frac{3}{40} = 3.075$ 이다.

* 의미없는 근사값을 구한 경우 점수 없음. 예) $\sqrt{10}$이 포함된 근사값

* 오차가 10^{-3} 이하인 이유를 설명하지 않으면 −5점.

#9.



$$1 + \cos 2\theta = 1 + \sin\theta \iff 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1$$
$$= (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$$
$$\iff \sin\theta = \frac{1}{2}, -1$$

$\sin\theta = -1 \Rightarrow r = 0$. 5점

$\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow (r, \theta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi\right)$ 5점

* 그래프 각 5점씩.

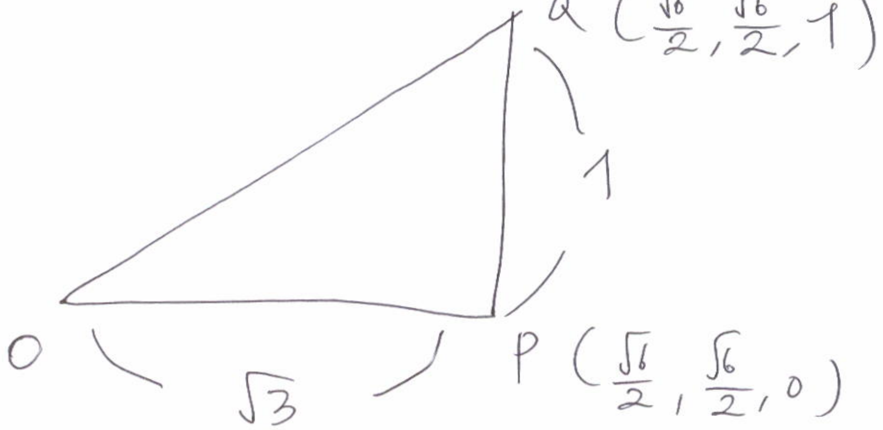
* 교점 직교좌표계로 표현하면 0점.

#10 .

$P = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ 5점

$Q = (2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$ 10점

$\overline{PQ} = 1$ 15점



$\therefore \triangle OPQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 20점