

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1 [20점] 다음 급수의 수렴여부를 판정하시오.

(a) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n^3}$

(b) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

(c) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sinh \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(d) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

문제 2 [15점] 거듭제곱급수 $\sum_{n=3}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)x^n$ 이 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

문제 3 [15점] 다음 급수가 수렴함을 보이고, 급수의 합을 구하시오.

(a) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{3^n}$

(b) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(c) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$

문제 4 [20점] $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 일 때, 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$ 에 대하여, 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$ 의 수렴범위가 $-1 < x < 1$ 임을 보이시오.

(b) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n}$ 의 값을 구하시오.

학번:

이름:

문제 5 [15점] 함수 $f(x) = \sinh x + \sinh^{-1} x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(연습용 여백)

- (a) (10점) $y = f(x)$ 의 역함수 $x = g(y)$ 가 정의됨을 보이고, $g'(0)$ 과 $g''(0)$ 을 구하시오.
- (b) (5점) 원점에서 $g(y)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 6 [10점] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \searrow 0} (1 - \arctan x)^{\frac{1}{x}}$$

문제 7 [10점] 2번 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 원점 근방에서의 2차 근사다항식을 $1 + 2x + 4x^2$ 라고 할 때 $\frac{1}{f(x)}$ 의 원점 근방에서의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 8 [15점] 점 $x = 11$ 근방에서 $\log x$ 의 3차 테일러 다항식 $p(x)$ 를 구하고, 구간 $[10, 12]$ 의 모든 점 x 에 대하여 부등식 $|\log x - p(x)| \leq \frac{1}{4 \cdot 10^4}$ 이 성립함을 보이시오.

문제 9 [15점] 극좌표계로 주어진 두 곡선

$$r = 3 \sec \theta, \quad r = \frac{1}{\frac{1}{2} + \cos \theta}$$

의 개형을 좌표평면에 그리고 그 교점을 구하시오.

문제 10 [15점] 다음 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 표현된 식을 직교좌표계 (x, y, z) 로 나타내시오.

- (a) (7점) $\rho = \cos \varphi$
- (b) (8점) $\varphi = \arctan 2$