문제 1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{n^3}$ 〈2013년 여름학기 수학 및 연습 1 중간고사〉

모범답안

풀이) $\log n < \sqrt{n}$ 이므로, $\frac{(\log n)^2}{n^3} \le \frac{1}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 이 수렴하므로, 비교판정법에 의해 수렴한다.

┘ 10점

풀이2) $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x^3}$ 라 하면 적당히 큰 x에 대해 $f'(x) < 0$ 이고,

$\int_1^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^3} dx = \frac{1}{4} < \infty$ 이므로

적분판정법에 의해 수렴한다.

* 적분판정법을 이용하여 푼 경우, 감소조건을 보이지 않으면 2점 감점

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

풀이) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$

따라서, 비율판정법에 의해 수렴한다. ┘ 10점

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n+1}} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n$

풀이 1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^{n+1}} \cdot \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{e}} \cdot \frac{3n}{n+1} = \frac{3}{e} > 1$

┘ 10점

따라서 멱근판정법에 의해 발산한다.

풀이 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{n+1}} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e} \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \infty$

따라서 일반항 판정법에 의해 발산한다.

문제2.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}\right| = 2$$

따라서, $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 에서 급수가 수렴한다. ┘5점

$\sin x = \frac{1}{2}$ 인 경우 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ ┘5점

$\sin x = -\frac{1}{2}$ 인 경우 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ┘5점

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ 이므로 교대급수 수렴정리에 의해 수렴

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le \sin x < \frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{6}$ ┘5점

* 끝점에 대해 안보인 경우 5점만 드림.

문제 3. $y = x - 4$ 라 하면, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n} y^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^2}{5^n}} \right| = \frac{1}{5}$$

10점

따라서, $-5 < y < 5$ 에서 수렴한다.

$\therefore$ $-1 < x < 9$ 에서 수렴.

$x = -1$ 인 경우 : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n}(-5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 = \infty$. 5점

$x = 9$ 인 경우 : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n} \cdot 5^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$ 5점

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2 = \infty$ 이므로 일반항판정법에 의해 발산.

$\therefore$ $-1 < x < 9$ 에서 수렴.

* x에 대한 범위로 바꾸지 않은 경우 5점감점

[문제 4]

sol ①) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$ //5

양변을 미분하면 $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \xrightarrow{\times x} \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

양변을 적분하면 $\frac{x}{1-x} + \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$

$\div x$ $\frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ //10

$x=\frac{1}{2}$ 을 대입하면,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} = 2 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2$$ //5

sol ②) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{2^n}$

이 때, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ 이고,

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ 의 양변을 적분하면 //5

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$.

따라서, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$ //10

그러므로, (준식) $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - 2\ln 2$ //5

• 채점기준. ; $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 에서 $|x|<1$ 임을 언급하지 않은경우 점수 없음.

[#5] $f'(x) = \cosh^{-1}\sqrt{x}$ 이고 $y = \cosh^{-1}x$ 라 두면

$x = \cosh y = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} \Rightarrow (e^{y})^2 - 2xe^{y} + 1 = 0$

$\Rightarrow e^{y} = x \pm \sqrt{x^2-1}$

$x>1$ 이고, $y>0$ 이므로 $e^{y} = x + \sqrt{x^2-1}$

$\therefore y = \cosh^{-1}x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$.

$\therefore x>1$ 에서 $\cosh^{-1}x > 0$

역함수정리에 의해 $f(x) = \int_2^x \cosh^{-1}\sqrt{t}\,dt$ 는 역함수를 가진다 // +10

이때. $f(2)=0$ 이므로 $f^{-1}(0)=2$

$\therefore (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\cosh^{-1}\sqrt{2}}$ // +10 $= \frac{1}{\log(\sqrt{2}+1)}$ // +10

- 역함수의 존재성을 설명하는 과정에서 설명과정이 틀리면 점수 없음

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$ 임을 보이기 위하여 $f''(x)$를 역함수정리를 활용하여 구하면 0점

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$ 이라고 이유 없이 써놓은 경우 -5점

$\Rightarrow$ 그래프를 활용하여 설명한 경우, 설명이 정확하면 10점

- 역함수의 미분을 구하기 위한식 $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)}$ 이 있으면 10점.

- $\cosh^{-1}\sqrt{2} = \log(\sqrt{2}+1)$ 를 활용하여 답을 쓰지 않은 경우 -10점.

[#6] $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots \ (|x|<1)$ 이다. // +5

따라서 $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \cdots$

$\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} \cdots$

$$f(x) = \log(1+x^2) - \log(1-x^2)$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \cdots\right) - \left(-x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} \cdots\right)$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{4n+2}$$ 이다. // +5

$f^{(2014)}(0) = 2014! \cdot (x^{2014}$의 계수$)$ // +5

$= 2014! \cdot \frac{2}{1007} = 4 \cdot 2013!$ // +5

- $\log(1+x)$의 테일러전개를 올바르게 쓰면 5점
- $f(x)$의 멱급수 전개 까지 정확히 쓴 경우 총 10점
- $f^{(2014)}(0)$를 계산할때 !을 빼먹거나 계산실수가 있는 경우 해당하는 점수를 받을수 없음.

#7

$f(x) = \sin(\pi x)$ 라 하자.

$f(1) = 0$

$f'(x) = \pi \cdot \cos(\pi x) \quad \therefore f'(1) = -\pi$

$f''(x) = -\pi^2 \cdot \sin(\pi x) \quad \therefore f''(1) = 0$

$f'''(x) = -\pi^3 \cdot \cos(\pi x) \quad \therefore f'''(1) = \pi^3$

각 5점

$$\therefore T_3^1 f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= -\pi(x-1) + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3$$

+5

* $\sin(\pi x) = -\sin(\pi(x-1))$ 을 이용해 풀었을 경우, 부호가 틀렸으면 -10

#8

$x^2+y^2=6\sqrt{x^2-y^2}$

$\Rightarrow r^2 = 6\sqrt{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)} = 6|r|\boxed{\sqrt{\cos 2\theta}}$

$\Rightarrow |r| = 6\sqrt{\cos 2\theta}$ or $r=0$. +5pt

전자가 $r=0$ 을 포함. $\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $|r|=6\sqrt{\cos 2\theta}$ 의 그래프를 그리면 된다.

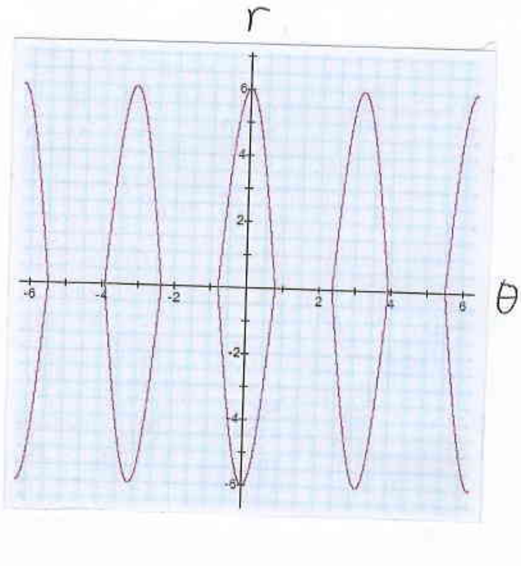
이때 $\sqrt{\cos 2\theta}$ 가 π를 주기로 가지므로

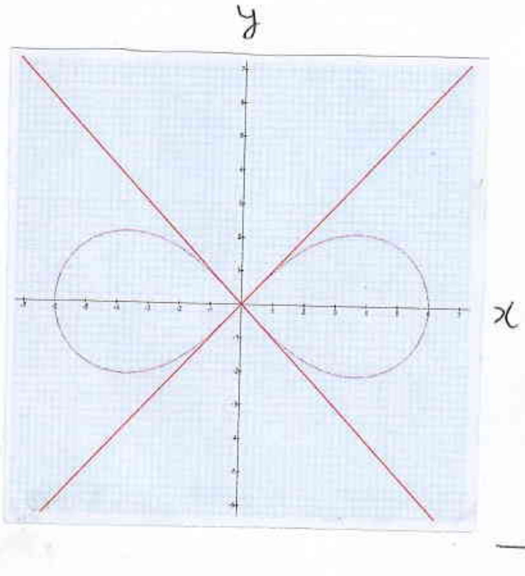
$0 \le \theta \le 2\pi$ 에서 그리면 충분하며,

이 범위에서 $\sqrt{\cos 2\theta}$ 는 $\cos 2\theta \ge 0$ 인 구간, 즉

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi \le \theta \le 2\pi$

에서 정의된다. 이제 그래프의 개형은 다음과 같다.





+15pt

#9

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\Rightarrow \quad r\cdot\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\theta$$

$$\therefore \quad r\left(\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\right) = 0.$$

$r=0$ 인 경우, $r^2 = \cos 2\theta + \frac{3}{2}$ 을 만족하지 않는다.

따라서 $r \neq 0$.

$$\therefore \quad \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta = 0. \iff \theta = \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

$n \in \mathbb{Z}$.

5

$$r^2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) + \frac{3}{2} = 2 \qquad \therefore \quad r = \pm\sqrt{2}.$$

10

교점 : $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

15

두 점 사이의 거리 $= 2\sqrt{2}$.

20.