

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

(연습용 여백)

문제 1 [20점] 삼차원 공간에서 두 평면 $2x - z = 8$ 과 $x + y - z = 6$ 의 교선 ℓ 과 점 $A = (-2, -4, 3)$ 가 이루는 평면 P 에 대하여, P 와 원점 사이의 거리를 구하시오.

문제 2 [20점] 어떤 두 벡터 \mathbf{u}, \mathbf{v} 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

임의의 실수 x, y 에 대하여 벡터 $x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ 의 크기가 $\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}$ 이다.

이때 두 벡터 \mathbf{u}, \mathbf{v} 가 이루는 각의 코사인 값을 구하시오.

문제 3 [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 일대일 함수일 필요충분조건은 방정식 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 의 해가 자명한 것뿐임을 보이시오.
- (b) (10점) 일대일 함수인 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 및 세 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여

$$L(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

라 한다. 이때 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 일차독립인지 아닌지 판정하시오.

문제 4 [15점] 선형사상 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 과 $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 에 대응되는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 이고, 합성사상 $L \circ M$ 은 직선 $y = x$ 에 대한 대칭변환을 나타낸다고 할 때, 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 행렬식을 구하시오.

문제 5 [20점] 다음과 같이 주어진 행렬 $A = (a_{ij})$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & 2 \\ 6 & 10 & 8 & 11 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) (10점) $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} \neq 0$ 인 4-치환 σ 를 모두 찾고, 그렇게 되는 이유를 설명하시오.
- (b) (5점) (a)에서 언급한 각각의 σ 의 부호를 구하시오.
- (c) (5점) 행렬 A 의 행렬식을 구하시오.

문제 6 [15점] 임의의 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ 에 대해서 성립하는 항등식

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

을 이용하여, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ 일 때,

$$((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) = t(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

를 만족시키는 스칼라 t 를 구하시오.

(연습용 여백)

문제 7 [20점] $t = 1$ 에서 다음 곡선의 접촉평면을 구하시오.

$$X(t) = \left(\int_0^{\log t} u \, du, \int_0^t \cos(2\pi u) \, du, \int_0^t e^u \, du + t \right) \times (1, t-1, et)$$

문제 8 [20점] 극좌표로 주어진 곡선 $r = \frac{3}{2 + \cos \theta}$ 에 대해 물음에 답하시오.

(a) (10점) 곡선의 식을 직교좌표계로 나타내시오.

(b) (10점) $\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2 + \cos \theta} \right)^2 d\theta$ 의 값을 구하시오.

문제 9 [20점] 곡선 $X(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (\cos \arctan t, \sin \arctan t)$ ($t \geq 0$)을 $X(0)$ 에서부터 궤 호의 길이로 매개화하시오.

문제 10 [30점] 포물선 $X(t) = \left(t, \frac{t^2}{2} \right)$ ($-1 \leq t \leq 1$)의 점 $X(t)$ 에서 접촉원의 중심을 $C(t)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $C(t)$ 를 t 의 식으로 구하시오.

(b) (10점) 곡선 $C(t)$ ($-1 \leq t \leq 1$)의 길이를 구하시오.

(c) (10점) 곡선 $C(t)$ ($-1 \leq t \leq 1$)의 중심을 구하시오.