2018년 1학기 수학 및 연습 1 채점기준.

#1. $\overrightarrow{XA} = (1-2t, 2-t, 3-2t)$

$\overrightarrow{XB} = (-2t, 1-t, 2-2t)$

$\overrightarrow{XC} = (1-2t, -1-t, 1-2t)$

$\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, \overrightarrow{XC}$ 가 일차 종속이다. $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, \overrightarrow{XC}) = 0$ ① 5점

$$\det(\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, \overrightarrow{XC}) = \det\begin{pmatrix} 1-2t & -2t & 1-2t \\ 2-t & 1-t & -1-t \\ 3-2t & 2-2t & 1-2t \end{pmatrix}$$

①열-②열

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -2t & 1-2t \\ 1 & 1-t & -1-t \\ 1 & 2-2t & 1-2t \end{pmatrix} \overset{\text{②열-③열}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2t \\ 1 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 1-2t \end{pmatrix}$$

②행-①행 & ③행-①행

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2t \\ 0 & 3 & -2+t \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2(-2+t) = 4-2t$$

$\therefore t=2 \Leftrightarrow 4-2t=0 \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, \overrightarrow{XC}) = 0 \cdots$ ②

①, ② 에 의해, $t=2$. 20점

※다른 풀이: $\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, \overrightarrow{XC}$ 가 일차 종속이다.

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{XA} + b\overrightarrow{XB} + c\overrightarrow{XC} = 0$ 이고, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ 인 실수 a,b,c 가 존재한다 5점

$$\hookrightarrow \begin{cases} a(1-2t) + b(-2t) + c(1-2t) = 0 \cdots ① \\ a(2-t) + b(1-t) + c(-1-t) = 0 \cdots ② \\ a(3-2t) + b(2-2t) + c(1-2t) = 0 \cdots ③ \end{cases}$$

③-① : $2a+2b=0 \cdots$ ④ $\qquad$ $2\times$②-① : $3a+2b-3c=0 \cdots$ ⑤

④ & ⑤ $\Rightarrow$ $\boxed{a=-b \ \& \ a=3c}$ ⑥ 그런데, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ 이므로, $\boxed{a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0}$ ⑦

⑥을 ①에 대입 : $3c(1-2t) - 3c(-2t) + c(1-2t) = 0 \Rightarrow c(4-2t) = 0$.

⑦ 에 의해, $c \neq 0$ 이므로, $t=2$. 20점.

* 두번째 풀이에서 ⑦을 안 보이시고 답만 맞을 경우, −10 점.

* 〃 시작부분에 $\overrightarrow{XC} = p\overrightarrow{XA} + q\overrightarrow{XB}$ 꼴로 시작한 경우에도 −10 점. ($a\overrightarrow{XA} + b\overrightarrow{XB} + c\overrightarrow{XC} = 0$ 에서 $c \neq 0$ 임을 보이지 않은 채 시작한 경우, 즉 ⑦을 보이지않은 경우와 동일하므로)

* 답이 틀리면 뒤의 점수 15 점은 없음.

* A, B, C가 만드는 평면의 방정식을 구한 후, X가 그 평면 위에 있어야 한다고 논증한 경우, 평면의 방정식 $x+2y-3z=-4$ 가 맞았으나 답만 틀린 경우 15점.

2. 두 평면 $2x-y+z=1$, $y+z=0$의 교선의 방향벡터는 $\boxed{+10점}$
$(2,-1,1)\times(0,1,1)=(-2,-2,2)$ 이다. (또는 이와 평행하다.)

직선 $2x=6y-6=3z$는 $\frac{x}{3}=y-1=\frac{z}{2}$로 나타낼 수 있고

이 방향벡터는 $(3,1,2)$ 이다.

따라서 구하려는 평면의 법선벡터는 $\boxed{+5점}$
$(-2,-2,2)\times(3,1,2)=(-6,10,4)$이다. (또는 이와 평행)

이 평면은 $2x=6y-6=3z$를 포함하고, 따라서
$(0,1,0)$을 포함한다. 그러므로 평면의 방정식은 $\boxed{+5점}$
$(-3,5,2)\cdot((x,y,z)-(0,1,0))=-3x+5(y-1)+2z=0$ 이다.

*채점 기준 : 교선의 방정식이 틀렸더라도 방향벡터만 맞으면 +10점.

평면의 방정식과 동치인 다양한 표현들은 모두 인정.
Ex $\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0$, $\vec{p}+t\vec{v}+s\vec{w}$, ...

#3 f는 두선형사상 g, h의 합성이므로 선형사상이다.

선형사상 f, g, h에 해당하는 행렬을 각각 A, B, C라 하자.

$g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \ g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}$

$\longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1\\-4 & 3\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \ f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow AB = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

$\longrightarrow A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\-1 & 1\end{pmatrix}$

f, g 각각 5점

$f = g \circ h \longrightarrow A = BC \longrightarrow C = B^{-1}A$

5점

$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1\\-4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\-1 & 1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}$

5점.

* $C = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 두고, 행렬연산이 아닌 연립방정식으로 푼경우 답 맞아야 마지막 10점 부여

4.(a)

$$L(X) = X - P_n(X) \qquad (n=(1,1,1))$$

$$= X - \frac{n \cdot X}{n \cdot n} n$$ +5

$$= (x_1, x_2, x_3) - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}(1,1,1)$$

$$= \left(\frac{2x_1-x_2-x_3}{3}, \frac{-x_1+2x_2-x_3}{3}, \frac{-x_1-x_2+2x_3}{3}\right)$$ 5

$$L(X+cZ) = (X+cZ) - \frac{n\cdot(X+cZ)}{n\cdot n} n$$

$$= \left(X - \frac{n\cdot X}{n \cdot n} n\right) + c\left(Z - \frac{n\cdot Z}{n\cdot n} n\right)$$

$= L(X) + cL(Z)$ 이므로 L은 선형사상 +5

4(b) $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

이므로 L에 대응되는 행렬 $A = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ +5

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\-3 & 6 & -3\\-3 & -3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} = A$$

이므로 $A^{10} = A$ +5

※ $L(x)$를 잘못 구해서 풀경우 해당문제 0점

4(a) 선형사상임을 보일때

$L(x+z) = L(x)+L(z)$ 또는 $L(cx) = cL(x)$

둘중 하나만 보일경우 2점감점

4(a) 선형사상임을 보일 때

$L(x+cz)$를 전개하여 설명하지 않을경우

해당부분 0점

4(b) $A^{10}=A$ 임을 보일때

L이 정사영임을 이용하여 $A^2=A$를 설명해도

정답인정

$A^{10}=A$ 임을 보일때.

A를 잘못구해서 $A^2=A$ 임을 계산하면 0점

다만 A를 잘못구해도 정사영임을 이용하여

$A^2=A$ 임을 설명하면 5점

5번 (a)

$GAG^{-1}+I = GAG^{-1}+GG^{-1} = G(A+I)G^{-1}$

$\det(GAG^{-1}+I) = \det(G(A+I)G^{-1}) = \det G \det(A+I)(\det G)^{-1}$

$= \det(A+I)$

$\therefore \det(A+I) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} = -3$

(b)

$I = A^2 + AB + A + B = (A+I)(A+B)$

$\det(A+I)\cdot\det(A+B) = \det(I) = 1$

$\therefore \det(A+B) = \dfrac{1}{\det(A+I)} = -\dfrac{1}{3}$

(a) 기준 $\det(GAG^{-1}+I) = \det(A+I)$ 임을 명시하거나 준하는 식이 필요

과정이 맞고 계산이 맞으면 10점, 계산 실수 시 5점

풀이 과정에서 수학적 오류가 있으면 0점

(ex) $GAG^{-1} = GG^{-1}A$, $GAG^{-1}+I = A+I$ etc)

(b) 기준 $(A+B)(A+I) = I$ 라고 쓰는 경우 충분한 설명이 없으면 0점

(a)에서 올바른 계산 결과가 나오지 않아도

$\det(A+B) = \dfrac{1}{\det(A+I)}$ 까지 적으면 10점 인정

수학적 오류가 있으면 0점

풀이 (1)

#6. $A = (0, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (1, 3, 5)$, $D = (1, 4, 11)$.

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 3, 9)$.

이 때, 점 A, B, C, D 를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피는

$$V = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right| \cdots\cdots ①$$

−10

이고, 이를 계산하면,

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \right| = \frac{2}{3} \cdots\cdots ②$$

이다.

−10

풀이 (2)

① △ABC 의 넓이.

$\triangle ABC$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ −8

② 높이.

~~법선~~ △ABC 를 포함하는 평면의 방정식은 $x - 2y + z = 0$ 이고, 이 평면과 점 D 사이의 거리는 $\frac{4}{\sqrt{6}}$ 이다.

−8

③ 부피.

①, ② 로 부터, 부피 V 는 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}$ 이다.

−4

−4

* 채점기준.

1) 풀이 (1) 로 푼 경우, 부피 공식 ① 을 "올바르게" 적으면 10점, 그 외 0점.

2) 〃 , ② 를 "올바르게" 계산해야 10점, 그 외 0점.

3) 〃 , 성분이 ~~틀려도~~ 달라도 벡터표현이 맞으면 답 인정.

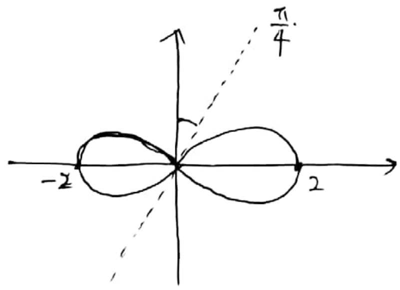
4) 풀이 (2) 로 푼 경우, 점의 선택에 무관하게 계산이 맞으면 답 인정.

7-(a) $x^2+y^2 = 2\sqrt{x^2-y^2}$ 에 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 를 넣어

$r^2 = 2\sqrt{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$,

$\Rightarrow |r| = 2\sqrt{\cos2\theta}$ ($0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi\le\theta\le\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi\le\theta\le2\pi$)

개형 :



7-(b) 넓이 $S = 4\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta = 4\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos2\theta\,d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\,d\theta$

$= 8\left[\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4$

(채점 기준) (a) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 를 넣어서 $r^2=2\sqrt{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$ 와 같은 식이 있으면 5점 ($r=2\sqrt{\cos2\theta}$ 도 인정). 없으면 0점

개형이 맞으면 5점 (x-축, y-축의 절편 등을 표기하지 않아도 5점).

그러나 잘못된 표기를 하면 3점, 개형이 틀리면 0점

(b) 적분식이 $\int\frac{1}{2}r^2\,d\theta$ 를 이용한 것이 보이면, 혹은 $\int\frac{1}{2}r^2\,d\theta$ 라는 식을 썼으면 3점

위 식에 정확한 $r(\theta)$식과, 범위를 넣어서 ($4\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ or $2\times\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ or $\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+\int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi}$)

맞는 식을 유도하면 5점

계산실수 없이 정확한 답을 구하면 10점

(넓이 식 자체를 $\frac{1}{2}$ 안적거나. 아예 곡선 길이 식, $\int d\theta$ 같은 식을 쓰면 0점)

(혹은 2를 빠뜨린)

※ (a)에서 8점 미만의 점수를 받았을 시 (b)는 다 맞더라도 3점.

8. $X(t) = \left(\frac{\sin 2t}{2}, \frac{1-\cos 2t}{2}, \cos t\right)$

$X'(t) = (\cos 2t, \sin 2t, -\sin t)$

$X''(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, -\cos t)$.

$t=\pi$ 대입. $X(\pi) = (0, 0, -1)$

$X'(\pi) = (1, 0, 0)$ +5점

$X''(\pi) = (0, 2, 1)$ +5점

접선의 방정식 : $X(\pi) + tX'(\pi) = (t, 0, -1)$

$\Leftrightarrow y=0,\ z=-1$ +5점

접촉 평면 방정식 : $X(\pi) + sX'(\pi) + tX''(\pi) = (s, 2t, t-1)$

$\Leftrightarrow y = 2z+2$ +5점.

- $X'(\pi)$ 틀리게 구했을 시 접선의 방정식 맞아도 해당 부분 0점.
  (단, $X'(\pi) = (-1, 0, 0)$ 이라고 구한 경우 예외.)
- $X''(\pi)$ or $X'(\pi)$ 틀리게 구했을 시 접촉 평면 맞게 구해도 0점.

#9. <채점기준>

(a) · $X'(t)$, $X''(t)$ 계산 ⌋ 3점

· $S = |X'(t) \times X''(t)|$ 임을 명시 혹은 이용하면 ⌋ 3점.

· 올바르게 답 구하면 ⌋ 4점.

(b) $\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s) = (g'(s))^3\, X'(g(s)) \times X''(g(s)) \\ \cdot\ |\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s)| = 8\cosh^3 s \sqrt{16\sinh^2 s + 5} \end{array} \right.$

중 하나라도 도출하면, 5점

계산 실수 없이 올바르게 최솟값 도출하면, 5점

<풀이>

(a) $X'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$, $X''(t) = (-\cos t, -\sin t, 2)$

평행사변형 넓이 $= |X'(t) \times X''(t)|$

$= |(2\cos t + 2t\sin t,\ 2\sin t - 2t\cos t,\ 1)| = \sqrt{4t^2+5}$

(b) $\tilde{X}'(s) = X'(g(s))\, g'(s)$

$\tilde{X}''(s) = X''(g(s))\, \{g'(s)\}^2 + X'(g(s))\, g''(s)$

$|\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s)| = |g'(s)|^3\, |X'(g(s)) \times X''(g(s))|$

$\underset{(a)}{=} 8\cosh^3 s \sqrt{5 + 16\sinh^2 s}$ → 우함수 & $s \geq 0$ 에서 증가함수

$s=0$ 에서 최소값. 답: $8\sqrt{5}$

Scanned by CamScanner

문제 10)

(a) $X'(t) = (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t))$.

$|X'(t)| = \sqrt{2}e^t$

$s(t) = \int_0^t |X'(u)|du = \int_0^t \sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}$] +3

$t = \log(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s) = g(s)$] +3

$\tilde{X}(s) = \left((1+\frac{1}{\sqrt{2}}s)\cos(\log(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s)),\ (1+\frac{1}{\sqrt{2}}s)\sin(\log(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s))\right)$] +3

$s \geq 0$] +1

(b) $\mathbb{K}(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$] +5

$= \frac{1}{\sqrt{2}e^t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t)'\right)$

$= \frac{1}{2e^t}(-\sin t - \cos t,\ \cos t - \sin t)$

$K(t) = |\mathbb{K}(t)| = \frac{1}{2e^t}\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}$

$|X(t)| = e^t$ 이므로 $K(t) = \frac{1}{\sqrt{2}|X(t)|}$] +5

- 곡률 혹은 곡률벡터의 정의식을 정확히 썼으면 +5 ——
  - $\left|\frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'\right|$
  - $\frac{|x''y' - x'y''|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$
  - 기타 교재에 나온 식들.
- 이하 정답까지의 논리에 틀린 점이 없으면 +5.