2013-S 수학 및 연습 기말고사 모범답안

[#1] (방법 1) 주어진 직선 m의 방향벡터 $\mathbb{V}=(1,1,4)-(2,0,1)=(-1,1,3)$

정사영한 직선의 방향벡터 $\mathbb{W}=\mathbb{V}-P_{n}(\mathbb{V})$ (n은 평면의 법선벡터)

$$\therefore \mathbb{W}=(-1,1,3)-\frac{(1,1,-2)\cdot(-1,1,3)}{(1,1,-2)\cdot(1,1,-2)}(1,1,-2)$$

$$=(-1,1,3)-(-1)\cdot(1,1,-2)=(0,2,1)$$ // 15

또한 직선 m과 평면 $x+y-2z=-3$의 교점을 구하면, m의 방정식

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{3}$ 로 부터 $(x,y,z)=(-t+1,\ t+1,\ 3t+4)$

$\therefore -t+1+t+1-2(3t+4)=-3$

$\therefore t=-\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore$ 교점 $=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ 구하려는 직선의 방정식은 $x=\frac{3}{2},\ \frac{y-\frac{1}{2}}{2}=z-\frac{5}{2}$ 이다. // 25

(채점기준)
- 정사영된 직선 위의 한 점을 옳바르게 구하면 10점
- 정사영된 방향벡터를 옳바르게 구하면 15점
- 직선의 방정식을 마지막에 잘못 구한 경우 −5점 (ex $x=\frac{3}{2}$를 빼먹는 등의 실수)

(방법 2) 각 점 A(2,0,1)과 B(1,1,4)에서 평면 $x+y-2z=-3$ 에 내린 수선의 발을 구하자.

$(2,0,1)+t(1,1,-2)=(2+t,t,1-2t)$ 가 평면위의 점이어야 하므로

$2+t+t-2(1-2t)=-3 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$

마찬가지로 $(1,1,4)+s(1,1,-2)=(1+s,1+s,4-2s)$ 가 평면위의 점이므로

$1+s+1+s-2(4-2s)=-3 \Rightarrow s=\frac{1}{2}$

두 수선의 발은 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},2\right)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3\right)$ 이다.

// 10 // 20

따라서 정사영 된 직선의 방향벡터는 $(0,2,1)$ 이다.

$\therefore x=\frac{3}{2},\quad \frac{y-\frac{3}{2}}{2}=z-3$

// 25

(채점기준) • 정사영된 직선 상의 두점을 구하는 과정이 각각 10점

• 방향벡터와 직선식을 올바르게 써야 만점.

#2. (a) $\mathbb{X} \times \mathbb{b} = -\mathbb{b} \times \mathbb{X}$ 이므로,

$$L(\mathbb{X}) = (\mathbb{a} \times \mathbb{X} + \mathbb{X} \times \mathbb{b}) \times \mathbb{c}$$
$$= (\mathbb{a} \times \mathbb{X} - \mathbb{b} \times \mathbb{X}) \times \mathbb{c}$$
$$= \{(\mathbb{a} - \mathbb{b}) \times \mathbb{X}\} \times \mathbb{c}$$
$$= \{(1,-1,1) \times \mathbb{X}\} \times \mathbb{c}$$

$$\mathbb{a} - \mathbb{b} = (2013, 2012, 2011) - (2012, 2013, 2010) = (1,-1,1)$$

$$L(\mathbb{e}_1) = \{(1,-1,1) \times (1,0,0)\} \times (-1,1,1) = (0,-1,1)$$
$$L(\mathbb{e}_2) = \{(1,-1,1) \times (0,1,0)\} \times (-1,1,1) = (-1,0,-1)$$
$$L(\mathbb{e}_3) = \{(1,-1,1) \times (0,0,1)\} \times (-1,1,1) = (-1,1,-2)$$

따라서, L에 대응되는 행렬, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ +10

(채점기준) A가 틀렸거나, $L(\mathbb{e}_1), L(\mathbb{e}_2), L(\mathbb{e}_3)$를 열벡터로 쓰지 않은 경우 0점 처리함.

#2. (b) $M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ 이므로,

$M = \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\1 & 2 & 1\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 이고, $\det M = 4$ 이다.

// 8

평행육면체의 부피는 평행이동에 관계없으므로,

$Vol(B) = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\right| = 4$

따라서 $vol(M(B)) = |\det M| \cdot Vol(B) = 4 \times 4 = 16$ 이다.

// 15

(채점기준) • 행렬 M을 제대로 구하고 det M 까지 제대로 구한 경우 +8점.

• Vol(B)가 정확히 맞은 경우에만 +7점

[#3]

$$\det\begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & t \end{pmatrix} = t\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & t \end{pmatrix} - (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & t \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= t(t-6) + (3t-14) + 2\cdot(+2)$$

$$= t^2 - 3t - 10$$

$$= (t-5)(t+2)$$

$\therefore \det A \neq 0 \iff t \neq 5,\ t \neq -2$ // 10

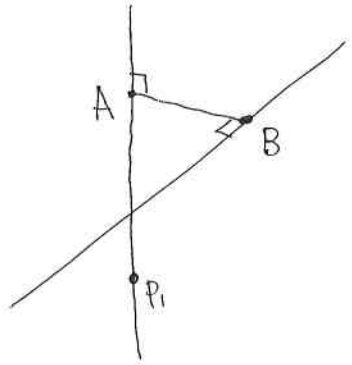
$t=3$ 일때 $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{(3-5)(3+2)} = -\dfrac{1}{10}$ // 20

(채점기준) • $\det A = t^2 - 3t - 10$ 이 틀린 경우 결론이 맞더라도 점수 없음

• A^{-1}를 계산하여 $\det A^{-1}$을 구한 경우 계산이 틀리면 점수 없음.

#4.

$Y(t) = P_2 + tV_2$



$X(t) = P_1 + tV_1$

최단거리 일 때 벡터를 B-A라 하면 B-A는 직선 X(t), Y(t)에 수직이므로 $B-A \parallel V_1 \times V_2$.

또, B-A는 $B-P_1$을 정사영 한 것으로 볼수 있으므로,

$$B-A = \frac{(V_1 \times V_2)\cdot(B-P_1)}{|V_1 \times V_2|^2}\, V_1 \times V_2$$

$$= \frac{(V_1 \times V_2)\cdot(B-P_2) + (V_1 \times V_2)\cdot(P_2-P_1)}{|V_1 \times V_2|^2}\, V_1 \times V_2$$

$$= \frac{(V_1 \times V_2)\cdot(P_2-P_1)}{|V_1 \times V_2|^2}\, V_1 \times V_2$$

$$\therefore |B-A| = \frac{|(V_1 \times V_2)\cdot(P_2-P_1)|}{|V_1 \times V_2|}$$

20점

※ 수직임을 언급하면 +5점

※ B-A에 절댓값을 붙이지 않으면 5점감점

#5

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2+3\cos t)^2 + (3\sin t)^2}\, dt$$

5점

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{13 + 12\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{13 + 12\left(2\cdot\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{25 - 24\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 5\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{24}{25}\sin^2\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 5\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{24}{25}\sin^2 t}\; 2dt = 2 \times 10\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{24}{25}\sin^2 t}\, dt$$

$$= 20E\left(\frac{25}{24}\right)$$

20점

※ 상수배 할 때 틀린 경우 (ex) $10E\left(\frac{25}{24}\right)$ 등…) 5점감점

※ $4E(-24)$, $10E\left(\frac{25}{24}\right) + 2E(-24)$ 등도 맞는 답.

#6

접촉평면의 방정식 : $\left(X(t) - X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \left(X'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times X''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$ 5점

$X\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,\ 2\sqrt{3},\ 2)$ 5점

$X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-1,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 5점

$X''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0,\ -\frac{13}{18}\sqrt{3},\ -\frac{13}{18}\right)$ 5점

$X'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times X''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{52}{27},\ -\frac{13}{18},\ \frac{13\sqrt{3}}{18}\right) = \frac{13}{54}(8, -3, 3\sqrt{3})$

5점

$\therefore\ 8(x-0) - 3(y-2\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(z-2) = 0$

$8x - 3y + 3\sqrt{3}z = 0$

#7.

곡선의 질량 $= \int_0^1 t \cdot |x'(t)|\, dt$

$= \int_0^1 t \cdot \sqrt{2} \cdot \cosh t \, dt$ 5점

$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = M$ 10점

$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^1 t \cdot \cosh t \, |x'(t)|\, dt$

$= \frac{1}{M} \int_0^1 t \cdot \sqrt{2} \cdot \cosh^2 t \, dt$ 5점

$= \frac{\sqrt{2}}{8M} \left(3 + 2\sinh 2 - \cosh 2\right)$ 15점

25점.

#8

주어진 두 곡선

$r = 2(1+\cos\theta)$, $r = 2+\cos\theta$ 는

2π 를 주기로 가지며,

$-\pi \le \theta \le \pi$ 에서 생각할 때

$2+2\cos\theta \ge 2+\cos\theta \iff \cos\theta \ge 0$

$\iff -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. 5

$\therefore$ 넓이 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\{2(1+\cos\theta)\}^2 - \frac{1}{2}\{2+\cos\theta\}^2 \, d\theta$

10

$= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3\cos^2\theta + 4\cos\theta)\, d\theta$ (우함수)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2\theta + 4\cos\theta \, d\theta$

$= \frac{3}{4}\pi + 4$. 20

#9.

$X(t) = (t, \cosh t)$ 라 놓자.

$$\mathbb{K}(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$$

$$= \frac{1}{\cosh t}\left(\frac{(1, \sinh t)}{\cosh t}\right)'$$

$$= \frac{(-\tanh t, \operatorname{sech} t)}{\cosh^2 t}$$

10 점

$\therefore\ \kappa(t) = |\mathbb{K}(t)| = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$.

$\therefore\ t=0$ 일 때 곡률이 최대가 된다.

$\kappa(0) = 1$, $\mathbb{K}(0) = (0, 1)$.

15 점

접촉원의 방정식 : $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

20 점.