

수학 및 연습 1 기말고사
(2017년 6월 10일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [25점] 좌표공간의 점 A 를 지나고 단위벡터 \mathbf{v} 와 나란한 직선을 ℓ 이라고 하자. 각각의 점 $P \in \mathbb{R}^3$ 를 P 에서 직선 ℓ 에 내린 수선의 발에 대응시켜주는 사상을 $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점) $\Phi(P)$ 를 A, \mathbf{v}, P 를 이용하여 표현하시오.
- (b) (10점) 사상 Φ 가 선형사상이기 위한 필요충분조건은 직선 ℓ 이 원점을 지나는 것임을 보이시오.

문제 2. [15점] 선형사상 $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 와 \mathbb{R}^4 의 영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 가 다음을 만족한다고 하자.

$$L(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1, \quad L(\mathbf{v}_2) = 0\mathbf{v}_2, \quad L(\mathbf{v}_3) = 1\mathbf{v}_3, \quad L(\mathbf{v}_4) = 7\mathbf{v}_4.$$

이 때, 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 가 일차독립임을 보이시오.

문제 3. [20점] 차수가 n 이하인 실수 계수 다항식 전체 집합을 P_n 이라 두고, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 를 벡터 (a_0, a_1, \dots, a_n) 과 같이 보았을 때 선형사상 $T : P_3 \rightarrow P_4$, $p(x) \mapsto (x-1)p(x) + p'(x)$ 에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 4. [30점] 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 의한 \mathbb{R}^3 의 벡터 $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{c} = (3, 0, 1)$ 의 상이

$$L(\mathbf{a}) = (1, -2, 0), \quad L(\mathbf{b}) = (1, -5, 0), \quad L(\mathbf{c}) = (1, 0, 7)$$

이라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점) $L(1, 0, 0)$, $L(0, 1, 0)$, $L(0, 0, 1)$ 과 선형사상 L 에 대응하는 행렬 A 를 구하시오.
- (b) (15점) $L(0, 0, 0)$, $L(1, 0, 0)$, $L(0, 1, 0)$, $L(0, 0, 1)$ 으로 이루어진 사면체의 부피 V 를 구하시오.

문제 5. [20점] 좌표공간의 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대하여 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 3$ 일 때 다음을 구하시오.

- (a) (10점) $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (3\mathbf{b} + 5\mathbf{c})$
- (b) (10점) $(2\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times 2\mathbf{a})\}$

문제 6. [20점] 좌표공간의 곡선 $X(t) = (e^t, \sin(2t + \pi), \log(t^2 + e))$ 위의 점 $(1, 0, 1)$ 에서 접촉평면의 방정식을 구하시오.

문제 7. [20점] 좌표평면 위에 있는 사이클로이드 곡선 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 곡선 X 의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) 좌표평면 위에서 정의된 함수 $f(x, y) = x$ 에 대하여 선적분 $\int_X f \, ds$ 를 구하시오.

문제 8. [20점] 좌표평면 위에 있는 곡선 $X(t) = e^{\sqrt{t}} (\cos \sqrt{t}, \sin \sqrt{t})$, $(t \geq 1)$ 의 호의 길이에 의한 매개화 $\tilde{X}(s)$ 를 구하시오. (단, 매개화된 곡선 $\tilde{X}(s)$ 가 $\tilde{X}(0) = e(\cos 1, \sin 1)$ 을 만족한다.)

문제 9. [30점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점) 좌표공간의 이급 정규곡선 $X(t)$ 와 곡률벡터 $\kappa(t)$ 에 대하여 다음의 등식이 성립함을 보이시오.

$$\kappa(t) = \frac{1}{|X'(t)|^2} \{X''(t) - P_{X'(t)}(X''(t))\}$$

(단, $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ 는 벡터 \mathbf{w} 의 벡터 \mathbf{v} 위로의 정사영을 말한다.)

- (b) (15점) 곡선 위의 한 점 $Q = X(0) = (1, 0, 1)$ 에 대하여 Q 에서의 속도벡터와 가속도벡터가 각각 $X'(0) = (1, 2, 1)$, $X''(0) = (-1, 2, 1)$ 라고 하자. (a)를 이용하여 곡선 X 의 점 Q 에서의 접촉원의 중심을 구하시오.