2014년 여름학기 수학 및 연습 1
기말고사 모범답안.

1. $T(a_1) = (a_2 + a_3) \times a_1$

   $T(a_2) = (a_1 + a_3) \times a_2$

   $T(a_3) = (a_1 + a_2) \times a_3$ 이므로,

$T(a_1) + T(a_2) + T(a_3) = a_2 \times a_1 + a_3 \times a_1 + a_1 \times a_2 + a_3 \times a_2$
$+ a_1 \times a_3 + a_2 \times a_3 = -\cancel{a_1 \times a_2} + \cancel{a_3 \times a_1} + \cancel{a_1 \times a_2} - \cancel{a_2 \times a_3}$
$- \cancel{a_3 \times a_1} + \cancel{a_2 \times a_3} = 0$ 이다. 하나의 벡터가 나머지 벡터의 일차결합으로 표현되므로 $T(a_1), T(a_2), T(a_3)$ 은 일차종속 」

20점.

* 'T(a_1)+T(a_2)+T(a_3) = T(a_1 + a_2 + a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) \times (a_1 + a_2 + a_3) = 0$ 이므로 일차종속' 으로 풀어도 됨.

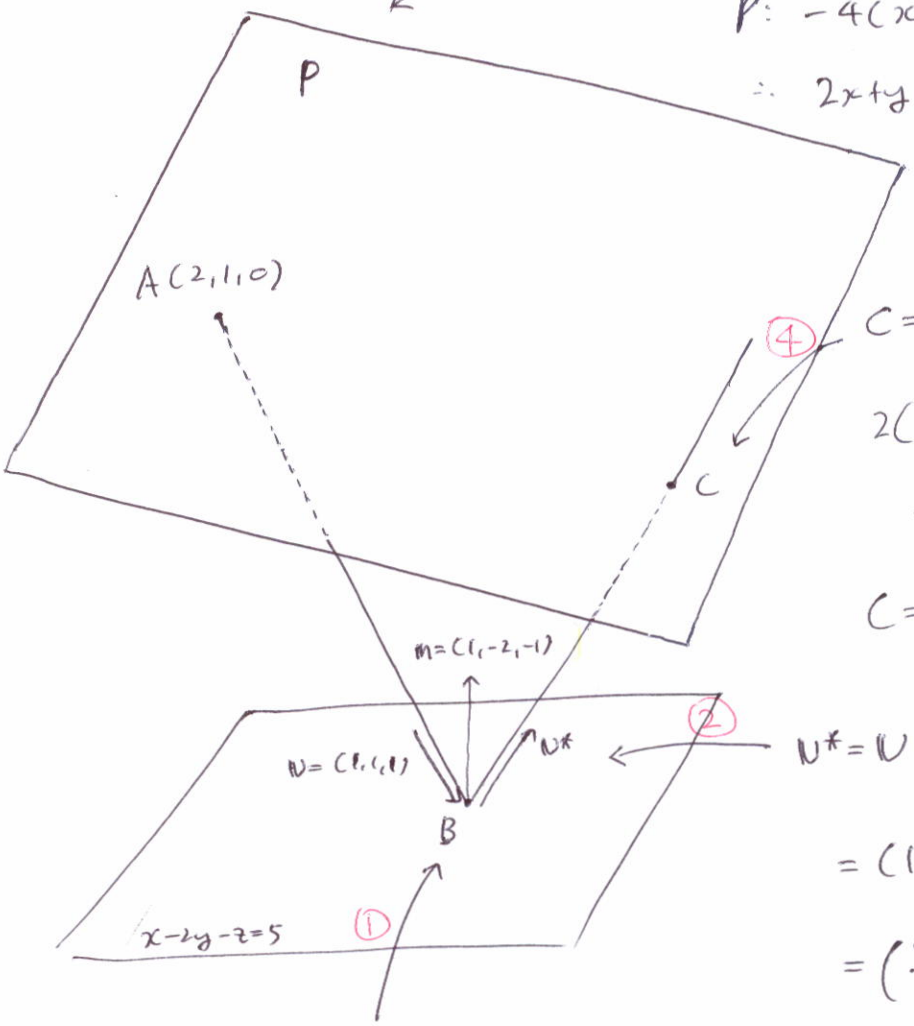
* 부분점수 없음.

2.

③ 법선벡터: $(-2,0,-2)\times(3,-2,2)=(-4,-2,4)$

$P: -4(x-2)-2(y-1)+4z=0$

$\therefore\ 2x+y-2z=5$ 」5점



④ $C=\left(-\frac{1}{2}+5t,\ -\frac{3}{2}-t,\ -\frac{5}{2}+t\right)$

$2\left(-\frac{1}{2}+5t\right)+\left(-\frac{3}{2}-t\right)-2\left(-\frac{5}{2}+t\right)=5$

$t=\frac{5}{14}$

$C=\left(\frac{9}{7},\ -\frac{13}{7},\ -\frac{15}{7}\right)$ 」5점

② $v^*=v-2\frac{v\cdot n}{n\cdot n}n$

$=(1,1,1)-2\frac{-2}{6}(1,-2,-1)$

$=\left(\frac{5}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ 」5점

① $B=(2+t,\ 1+t,\ t)$

$(2+t)-2(1+t)-t=5$

$t=-\frac{5}{2}$

$B=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ 」5점

3. 주어진 두 평면의 교선의 방향벡터는 두 평면의 법선과 모두 수직이다. 즉, 교선의 방향벡터를

$$(1, -2, 4) \times (1, 1, -2) = (0, 6, 3)$$

이라 할 수 있다. 또, 두 평면은 공통적으로 점 $(4, 1, 0)$을 포함하므로, 교선의 방정식은

$$x = 4, \quad \frac{y-1}{6} = \frac{z}{3}$$

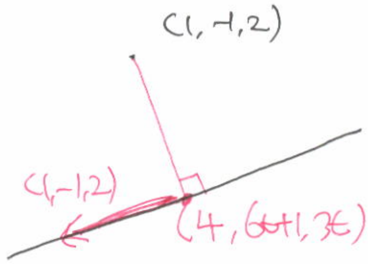
이다. (혹은 $\underline{x=4, \quad y=2z+1}$, 등) 10점

따라서 구하는 수선의 발은 $(4, 6t+1, 3t)$ $(t \in \mathbb{R})$ 라 할 수 있다.

그러면 $(4, 6t+1, 3t) - (1, -1, 2) \perp (0, 6, 3)$ 이므로

수직

$$(3, 6t+2, 3t-2) \cdot (0, 6, 3) = 0$$



$\Rightarrow 45t + 6 = 0$

$\Rightarrow t = -\frac{2}{15}$.

따라서 구하는 수선의 발은

$$\left(4,\ 6\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)+1,\ 3\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)\right) = \underline{\underline{\left(4,\ \frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right)}}$$

이다. 20점

*채점기준

- 교선을 구하면 10점. ← 방향벡터 5점 + 교선이 지나는 점 5점
  (교선 위의 점이 $(4, 6t+1, 3t)$ 와 같이 나타낸다고 써도 인정)
- 수선의 발을 정확히 구하면 20점.
- 이외의 오류에 따른 부분점수는 없음.

4.

(방법 1)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ 라 하면

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(방법 2) A의 각 열벡터를 a_1, a_2, a_3 이라 하면 $A=(a_1, a_2\ a_3)$.

이때 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a_1+a_2+a_3=0$ 이므로 세 벡터 a_1, a_2, a_3은 일차종속이고

$\det A = 0.$

(방법 3) A가 역행렬을 가진다면 (즉 $\det A\neq 0$ 이면), 주어진 등식의 왼쪽에 역행렬 A^{-1}을 곱하여

$$A^{-1}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

을 얻고, 이는 모순이다. 따라서 A는 역행렬을 가지지 않고, $\det A = 0$ 이다.

* 채점기준
- 논리가 맞으면 어떤 방법으로 풀어도 10점.
- 부분점수 없음.

5. (a) $X := (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$Y := (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$t \in \mathbb{R}$

$$X + tY = (x_1 + ty_1, x_2 + ty_2, \cdots, x_n + ty_n)$$

$$:= (z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

$$(x_i + ty_i := z_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$L_\sigma(X+tY) = L_\sigma(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

$$= (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \cdots, z_{\sigma(n)})$$

$$= (x_{\sigma(1)} + ty_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)} + ty_{\sigma(n)})$$

$$= (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) + t(y_{\sigma(1)}, \cdots, y_{\sigma(n)})$$

$$= L_\sigma(X) + tL_\sigma(Y)$$

$\therefore L_\sigma$는 선형사상이다. ┘10점

(b) $L_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = (x_3, x_1, x_2)$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ┘5점

$\det A = 1$ ┘5점

6. (a) O, P_1, P_2, P_3 이 이루는 평행육면체의 부피는

$$V = \det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2.$$

5점.

사면체의 부피는 평행육면체 부피의 $\frac{1}{6}$ 이므로 $\frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$. 10점.

(b) $$\det A = \det\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 2 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\sqrt{6} - 3$$ 이므로, 5점

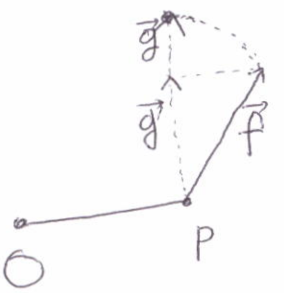
$L_A(O)$, $L_A(P_1)$, $L_A(P_2)$, $L_A(P_3)$ 이 이루는 사면체의 부피는

$$\frac{1}{6} \cdot \det A \cdot V = \frac{1}{6}(5\sqrt{6}-3) \cdot 2 = \frac{5\sqrt{6}}{3} - 1.$$ 10점.

7. (a) 원점 O 에 대한 회전력 $= \vec{OP}\times\vec{f} = (1,0,-1)\times(0,2,1) = (2,-1,2)$ +5

회전이 일어나는 평면 : $2x-y+2z=0$ +10

(b)



$\vec{g}$를 방향이 회전력과 $\vec{OP}$에 둘다 수직이며 f와 회전이 같은 방향으로 일어나는 벡터로 두자. +5

$$\vec{g}' = f - \frac{f\cdot\vec{OP}}{|\vec{OP}|^2}\vec{OP} = (0,2,1) - \frac{(0,2,1)\cdot(1,0,-1)}{2}(1,0,-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

크기를 $\vec{f}$와 같게 해주면,

$\vec{g} = \frac{\sqrt{10}}{6}(1,4,1)$ +10.

* $\vec{g}$의 방향을 외적을 사용하여 구할수도 있다. 단, 이때는 부호를 잘결정해 야한다. (회전력 X $\vec{OP}$ 로 해야한다.)

#8. (a)

곡선 X의 점을 (x, y) 라고 하면,

$$\sqrt{(x+\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+\frac{1}{2}+\sqrt{2}x\right)\left(x^2+y^2+\frac{1}{2}-\sqrt{2}x\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+\frac{1}{2}\right)^2 - 2x^2 = \frac{1}{4}$$

(r, θ)- 좌표계로 바꾸면

$$\left(r^2+\frac{1}{2}\right)^2 - 2r^2\cos^2\theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r^4+r^2-2r^2\cos^2\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow r^4 = r^2(2\cos^2\theta - 1)$$

$\therefore r^2 = 2\cos^2\theta - 1$ or $r = 0$

혹은, $r^2 = \cos 2\theta$ or $r = 0$

$\perp$ +15pt.

(채점 기준)

$r = \sqrt{\cos 2\theta}$ 와 같이 곡선의 일부분만을 나타낸 경우 −5pt.

#8. (b) $P(s)$는 1사분면에 위치해 있고 $P(s)$와 원점까지의 거리가 s이므로, $s=\sqrt{\cos 2\theta_0}$ for some θ_0를 만족한다. ($\theta_0 \le \frac{\pi}{4}$)

곡선 X는 $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 원점 $O = P(0)$를 지나므로,

$$l(s) = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta \quad \text{for } f(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta$$

┘ +5pt

$s = \sqrt{\cos 2\theta}$

$$ds = \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{-\sin 2\theta} \cdot \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{1-(\cos 2\theta)^2}} \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

▥ ┘ +10pt.

9.

(a) $x'(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t,\ 2\cos t - 2\cos 2t)$

$|x'(t)|^2 = (8-8\cos t)^2 = (4\sin\frac{t}{2})^2$

$s = \int_0^t |x'(s)|\, ds = 8 - 8\cos\frac{t}{2}$, $t = 2\arccos(1-\frac{s}{8})$ 5점

$\therefore\ \tilde{x}(s) = \Big(2\cos(2\arccos(1-\frac{s}{8})) - \cos(4\arccos(1-\frac{s}{8}))$,

$2\sin(2\arccos(1-\frac{s}{8})) - \sin(4\arccos(1-\frac{s}{8}))\Big)$ 5점

- s를 잘못 구하면 0점
- $\cos t = 2(1-\frac{s}{8})^2 - 1$ 이용해서 답 작성시 계산 정확하면 10점
- s는 제대로 구했지만 $\tilde{x}(s)$ 잘못 구했을 때는 5점

(b)

$$X'(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t,\ 2\cos t - 2\cos 2t)$$

$$X''(t) = (-2\cos t + 4\cos 2t,\ -2\sin t + 4\sin 2t)$$

평면 곡선 이므로 $X(t) = (x(t), y(t))$ 라 놓고 $\kappa(t)$ 를 구하면.

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{24\sin^2\frac{t}{2}}{(4\sin\frac{t}{2})^3}$$

(5점)

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}, \qquad R(t) = \frac{8}{3}\cdot\sin\frac{t}{2} \text{ 이므로}$$

$$\therefore \sin\frac{t}{2} = \frac{3}{8}R(t)$$

(5점)

- 곡률벡터 와 곡률의 크기 구하는 공식을 정확히 언급하면 5점
- $|X' \times X''|$ 와 $|x'y'' - x''y'|$ 등의 계산 과정이 나와있지 않으면 감점

10. $X(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$

접촉원의 중심은 $X(\pi) + \dfrac{\vec{k}(\pi)}{|\vec{k}(\pi)|^2}$ 로 구할 수 있다. ┘ 5점

$\vec{k}(t) = \dfrac{1}{|X'|}\left(\dfrac{X'}{|X'|}\right)' = \left(\dfrac{1}{4}\cot\dfrac{t}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$ 이므로

$\vec{k}(\pi) = \left(0,\ -\dfrac{1}{4}\right)$, $|\vec{k}(\pi)| = \dfrac{1}{4}$

┘ 10점

$\therefore$ 중심 : $(\pi, 2) + 16\left(0, -\dfrac{1}{4}\right) = (\pi, -2)$ ┘ 5점

- 접촉원의 반지름이 그 점에서의 곡률과 같음을 이용해서 답안 작성시.
  cycloid 의 그림을 그리거나, 다른 합당한 방법으로
  접촉원의 중심이 $(\pi, 6)$ 이 아니라 $(\pi, -2)$ 임을 보여야 정답 인정.

- 곡률벡터, 곡률벡터의 크기, 접촉원의 중심을 구하는 공식이 정확하면 5점.

- 곡률벡터 구해서 답안 작성시 $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$를 정확히 구해야 인정.