

수학 및 연습 1 기말고사
(2018년 7월 27일 오전 11:00 – 오후 1:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1 [20점] 사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 는 각각의 점 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ 를 평면 $2x - y + 3z = 0$ 에 대한 대칭점에 대응시킨다고 하자. L 이 선형사상임을 보이고, L 에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 2 [20점] 행렬 A 와 영이 아닌 세 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}, \quad A\mathbf{w} = 3\mathbf{w}$$

를 만족하면 세 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 는 일차독립임을 보이시오.

문제 3 [20점] 3×3 행렬 A 가

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

를 만족할 때, 행렬식의 성질을 이용하여 $\det A = 0$ 임을 보이시오.

문제 4 [20점] 삼차원 공간에서 집합

$$\{(1, 2, 3) + r(1, -1, 3) + s(2, 1, 0) + t(-1, 1, 2) \mid 1 \leq r \leq 2, 2 \leq s \leq 3, 0 \leq t \leq a\}$$

의 부피가 30 이 되는 양수 a 의 값을 구하시오.

문제 5 [20점] 삼차원 공간에서, 두 평면 $x+y+z=1$, $x-2y+3z=1$ 의 교선과 점 $(1, 1, 1)$ 사이의 거리를 구하시오.

문제 6 [20점] 곡선 $X(t) = e^t(1, \sinh t, -\cosh t)$ 위의 점 $X(\log 2)$ 에서 접선의 방정식과 접촉평면의 방정식을 모두 직교좌표로 나타내시오.

(연습용 여백)

문제 7 [20점] 극좌표로 두 곡선 $r = 1 + \sin \theta$ 와 $r = \cos \theta$ 이 주어졌을 때, 다음 물음을 답하십시오.

- (a) (10점) $r = \cos \theta$ 가 그려져있는 xy -좌표평면위에 $r = 1 + \sin \theta$ 그래프를 그리시오.
- (b) (10점) 곡선 $r = 1 + \sin \theta$ 의 내부와 곡선 $r = \cos \theta$ 의 외부로 이루어진 영역의 넓이를 구하십시오.

문제 8 [20점] 극좌표로 주어진 곡선

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

의 길이를 구하십시오.

문제 9 [20점] 곡선

$$X: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

의 밀도함수가 $\mu(x, y) = y$ 로 주어질 때, 곡선 X 의 질량중심을 구하십시오.

문제 10 [20점] \mathbb{R}^4 의 곡선

$$X(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t, \sin t)$$

에 대하여, 점 $X(\pi)$ 에서의 곡률벡터와 곡률을 구하십시오.