수학 및 연습 1 기말고사

(2013년 6월 8일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (25점). 두 직선 $l : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, $\quad m : x = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{3}$ 에 대해 $P_l(\mathbf{x})$ 와 $P_m(\mathbf{x})$ 를 각각 직선 l, m 에 대한 점 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ 의 정사영이라고 하자.

(a) (10점) $P_l(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 가 되는 3×3 행렬 A 를 구하시오.

(b) (15점) $P_m(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ 꼴로 나타낼 수 있음을 보이고, 이 때 상수벡터 $\mathbf{b}$ 를 구하시오.

문제 2 (20점). 각 성분이 실수인 2×2 행렬의 집합을 $\mathcal{M}$ 이라 두고,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

를 벡터 $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ 와 같이 보았을 때, 사상

$$T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X$$

가 선형사상임을 보이고, 이에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 3 (20점). 다음을 만족시키는 상수 t 를 구하시오.

$$\det \begin{pmatrix} 3a_1 + 5b_1 & 3a_2 + 5b_2 & 3a_3 + 5b_3 \\ 4b_1 + 5c_1 & 4b_2 + 5c_2 & 4b_3 + 5c_3 \\ 8c_1 + 5a_1 & 8c_2 + 5a_2 & 8c_3 + 5a_3 \end{pmatrix} = t \ \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

문제 4 (20점). 시점이 $(1, 1, 3)$ 이고 종점이 각각 $(2, 3, 2)$ 와 $(0, 2, 5)$ 인 두 선분 L_1, L_2 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 선분 L_1 과 L_2 를 모두 포함하는 평면의 방정식을 구하시오.

(a) (10점) 선분 L_1 과 L_2 을 인접한 두 변으로 하는 평행사변형을 평면 $3x - 5y + z = 1$ 에 정사영시켜 얻은 평행사변형의 넓이를 구하시오.

문제 5 (20점). 곡선 $X(t) = (t, t^2, t^3)$, $(t > 0)$ 상의 각각의 점에서 곡선의 위치벡터($X(t)$), 속도벡터, 가속도벡터는 항상 서로 일차독립임을 보이시오.

문제 6 (20점). 공간에서 정의된 곡선

$$X(t) = ((2 + 3\cos t)\cos t, \ (2 + 3\cos t)\sin t, \ t)$$

에 대하여 $t = \pi$ 에서의 접촉평면의 방정식을 구하시오.

문제 7 (30점). 극좌표계로 표현된 좌표평면 상의 곡선 $l : r = 1 + \cos\theta$, $(0 \le \theta < \pi)$ 를 생각하자.

(a) (20점) 곡선 l 을 호의 길이로 매개화 하시오.

(b) (10점) 곡선 l 을 길이가 같고 이어져 있는 두 부분으로 나누려고 할 때, 나누는 점의 좌표를 직교좌표계로 나타내시오.

문제 8 (20점). 좌표공간 상의 곡선

$$X(t) = (\cosh t, \ \sinh t, t), \quad (-1 \le t \le 1)$$

의 중심을 구하시오.

문제 9 (25점). 함수 $y = e^x$ 의 그래프에서 곡률반경이 최소가 되는 점을 찾고, 그 점에서의 접촉원의 중심을 구하시오.