수학 및 연습 1 기말고사

(2014년 6월 7일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점)**.** 좌표공간에서 점 $P(1,2,3)$ 을 지나고 $\mathbf{v}=(2,3,-1)$ 과 나란한 직선 ℓ_1 과, 점 $Q(0,3,2)$ 를 지나고 $\mathbf{w}=(1,3,2)$ 와 나란한 직선 ℓ_2 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\mathbf{x}=\overrightarrow{PQ}$ 의 $\mathbf{n}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ 에 대한 정사영을 구하시오.

(b) (10점) 두 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 사이의 거리를 구하시오.

문제 2 (20점)**.** $\mathbf{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ 일 때, 함수 $L:\mathbf{M}\to\mathbf{M}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$L(P)=P+P^t \quad (P\in\mathbf{M}).$$

(a) (5점) 임의의 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbf{M}$ 을 $\mathbb{R}^4$ 의 벡터 (a,b,c,d) 와 같이 보았을 때, L 이 선형사상임을 증명하시오.

(b) (10점) L 에 대응되는 행렬 A 를 찾고, $\det A$ 도 구하시오.

(c) (5점) 행렬 P_1, P_2, P_3, P_4 가 $\mathbf{M}$ 의 일차독립인 벡터일 때, $L(P_1)$, $L(P_2)$, $L(P_3)$, $L(P_4)$ 는 일차독립인가? 맞으면 증명을 하고 틀리면 반례를 드시오.

문제 3 (20점)**.** 다음 명제가 참이면 T, 거짓이면 F 를 표시하시오.
(답이 맞으면 4점, 틀리면 -4점, 답안 미기재시 0점. **답만 쓰시오**.)

(a) (4점) $n\times n$ 정사각행렬 A 와 B 에 대하여 $AB=0$ 이면 $BA=0$ 이다.

(b) (4점) $n\times n$ 정사각행렬 A 에 대하여 $\det(A^tA)=(\det A)^2$ 이다.

(c) (4점) $n\times n$ 정사각행렬 A 와 B 에 대하여 $\det(A+B)=\det A+\det B$ 이다.

(d) (4점) $n\times n$ 정사각행렬 A 와 B 에 대하여 $\det(AB)=(\det A)(\det B)$ 이다.

(e) (4점) 3×3 정사각행렬 A 에 대하여 $A^3=0$ 이면 $A^2=0$ 또는 $A=0$ 이다.

문제 4 (20점)**.** 삼차원 좌표공간의 점 P 를 지나고 단위벡터 $\mathbf{n}$ 에 수직인 평면을 α 라고 하자. 이때 삼차원 좌표공간의 점 X 에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) X 를 평면 α 로 정사영한 점을 $E(X)$ 라고 하자. 이때 $E(X)=X+((P-X)\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 임을 보이시오.

(b) (10점) $\mathbb{R}^3$ 에서 평면 $x+2y+3z=0$ 으로의 정사영을 나타내는 선형사상이 있다. 이 선형사상에 대응되는 행렬 A 를 구하고, $\det(A^{2014}-I)$ 를 구하시오.

문제 5 (20점)**.** 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\mathbb{R}^3$ 상에 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 가 일차독립일 때, $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\neq 0$ 임을 보이시오.

(b) (10점) $\mathbb{R}^3$ 상에 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 가 일차독립일 때, 벡터 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, $\mathbf{w}\times\mathbf{u}$ 도 일차독립임을 보이시오.

문제 6 (20점)**.** 삼차원 좌표공간에서 다음 방정식으로 결정되는 곡선을 생각하자.

$$x^2+y^2+z^2=4,\ \ (x-1)^2+y^2=1,\ z\geq 0$$

(a) (10점) 위의 곡선을 매개화하시오.

(b) (10점) 곡선 위의 점 $(0,0,2)$ 에서의 접촉평면의 방정식을 구하시오.

문제 7 (20점). 평면상의 곡선이

$$X(t) = \left(\arctan t, \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right)$$

로 주어졌을 때 다음을 구하시오.

(a) (10점) $0 \le t \le 1$ 일 때 곡선의 길이를 구하시오.
(b) (10점) $t = 1$ 에서 접선의 매개변수 방정식을 구하시오.

문제 8 (20점). 원기둥좌표계에서

$$r = z = e^\theta$$

로 주어진 곡선 X 를 호의 길이로 매개화하시오. (단, 곡선의 길이는 점 $(r, \theta, z) = (1, 0, 1)$ 로부터 재기 시작한다.)

문제 9 (20점). 곡선 $X(t) = (t, \sin t)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 에서의 접촉원을 구하시오.

문제 10 (20점). 극좌표계로 주어진 곡선 $r = 2\cos\theta - 1$ 로 둘러싸인 부분 중 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 포함하는 부분의 넓이를 구하시오.