

**수학 및 연습 1 기말고사**  
(2016년 6월 4일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

**문제 1.** [20점] 두 평면  $x + y + z = 4$ ,  $2x + y + 3z = 6$  의 교선과  $x$  축 사이의 최단거리를 구하시오.

**문제 2.** [20점] 삼차원 좌표공간의 벡터  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  와  $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$  를 포함하며 원점을 지나는 평면을  $H$  라 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 벡터  $\mathbf{x}$  에 대하여  $\mathbf{x}$  와 가장 가까운  $H$  위의 벡터를  $P(\mathbf{x})$  라고 할 때,  $P(\mathbf{x})$  를 구하시오.
- (b) (5점) 사상  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  가 선형사상임을 보이시오.
- (c) (5점) 선형사상  $P$  에 대응하는 행렬을 구하시오.

**문제 3.** [20점] 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

의 역행렬을 구하시오. (단,  $a_1 a_2 \neq 0$  이다.)

**문제 4.** [20점] 직선  $x = y - a = z + b$  에 대한 대칭이 선형사상이 되기 위한  $a, b$  의 값을 구하고, 이 경우 선형사상에 대응되는 행렬 및 행렬식을 구하시오.

**문제 5.** [20점] 선형사상  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  이

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

을 만족한다고 하자.

- (a) (10점) 선형사상  $L$  에 대응되는 행렬을 구하시오.
- (b) (10점) 삼차원 좌표공간의 세 벡터  $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 3, -1)$ ,  $\mathbf{w} = (-1, 0, 2)$  에 대하여

$$S = \{x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$$

일 때,  $L(S)$  의 부피를 구하시오.

**문제 6.** [20점] 삼차원 좌표공간의 세 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  에 대하여

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) \cdot ((2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (-\mathbf{a} + \mathbf{c}))$$

로 정의하자.  $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 6\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  임을 보이시오.

**문제 7.** [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 좌표평면 위에서 극좌표로 주어진 다음 곡선이 둘러싸는 영역의 넓이를 구하시오.

$$r = 2 \cos \theta - \sec \theta, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

- (b) (10점) 좌표평면 위에서 극좌표로 주어진 두 곡선  $X_1 : r = 1 - \cos \theta$  와  $X_2 : r = 1 + \cos \theta$  가 있다. 곡선  $X_1$  과  $X_2$  로 각각 둘러싸인 영역의 공통된 부분의 둘레의 길이를 구하시오.

**문제 8.** [20점] 좌표평면에서 점  $P$  의 운동이  $(\cos 2t, \sin 2t)$  로 주어지고, 점  $Q$  의 운동이  $2(\cos t, \sin t)$  로 주어졌다고 하자. 점  $P$  에서 점  $Q$  를 바라보았을 때 점  $Q$  의 운동을 곡선  $X(t)$  라 하자.

- (a) (10점)  $X(t)$  를 구하시오.
- (b) (10점)  $t = \frac{\pi}{2}$  일 때 접선의 방정식을 구하시오.

**문제 9.** [20점] 곡선  $X(t) = (2t, \cosh 2t, \sinh 2t)$  를 호의 길이로 매개화 하시오.

**문제 10.** [20점] 곡선  $y = -\log(\cos x)$ ,  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$  의 곡률이 최대인 점에서 곡률벡터와 접촉원의 방정식을 구하시오.