

# 해석개론 및 연습 1 과제 #1

2017-18570 컴퓨터공학부 이성찬

1. 먼저  $m \in S$  이므로  $\inf S \geq m$  임은 당연하다. 이제  $m$ 이  $S$ 의 최대 하계임을 보이자.  $\forall \epsilon > 0$ 에 대해,  $m + \epsilon$ 이  $S$ 의 하계라고 가정하면  $\forall x \in S$ 에 대하여  $m + \epsilon \leq x$ 이다. 그런데  $m \in S$ 이므로  $m + \epsilon \leq m$ 이고 이는  $\epsilon > 0$ 에 모순이다. 따라서  $\inf S = m$ .

2. **Claim 1.** Suppose that a subset  $S$  of  $\mathbb{R}$  contains a maximum  $m \in \mathbb{R}$ . Then  $\sup S = m$ .

**Proof.**  $m \in S$ 이므로  $\sup S \leq m$  임은 당연하다. 이제  $m$ 이  $S$ 의 최소 상계임을 보이자.  $\forall \epsilon > 0$ 에 대해,  $m - \epsilon$ 이  $S$ 의 상계라고 가정하면  $\forall x \in S$ 에 대하여  $m - \epsilon \geq x$ 이다. 그런데  $m \in S$ 이므로  $m - \epsilon \geq m$ 이고 이는  $\epsilon > 0$ 에 모순이다. 따라서  $\sup S = m$ .

(1) Let  $A = (1, 2)$ .  $\forall x \in A$ 에 대하여  $x < 2$ 이므로  $\sup A \leq 2$ . 이제 2가  $A$ 의 최소 상계임을 보이자.  $\forall \epsilon > 0$ 에 대해,  $2 - \epsilon$ 이  $A$ 의 상계라고 하면  $\forall x \in A$ 에 대하여  $2 - \epsilon \geq x$ 이다. 그런데  $2 - \epsilon/2 \in A$ 이므로  $2 - \epsilon \geq 2 - \epsilon/2$ 이고 정리하면  $\epsilon \leq 0$ 이 되어 모순이다. 따라서  $\sup A = 2$ .

$\forall x \in A$ 에 대하여  $x > 1$ 이므로  $\inf A \geq 1$ . 이제 1이  $A$ 의 최대 하계임을 보이자.  $\forall \epsilon > 0$ 에 대해,  $1 + \epsilon$ 이  $A$ 의 하계라고 하면  $\forall x \in A$ 에 대하여  $1 + \epsilon \leq x$ 이다. 그런데  $1 + \epsilon/2 \in A$ 이므로  $1 + \epsilon \leq 1 + \epsilon/2$ 이고 정리하면  $\epsilon \leq 0$ 이 되어 모순이다. 따라서  $\inf A = 1$ .

(2) Let  $B = \left\{ \frac{1}{1+n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

먼저  $f(n) = \frac{1}{1+n^2}$ 이 감소함을 보이자.  $1 + n^2 < 1 + (n+1)^2$ 이므로  $f(n) > f(n+1)$ . 따라서  $B$ 의 최댓값은  $n = 1$ 일 때인  $1/2$ 이다. 이제 Claim 1에 의하여  $\sup B = 1/2$ . 우선  $B$ 의 모든 원소들은 양수이므로  $\inf B \geq 0$ . 만약  $\epsilon > 0$ 이  $B$ 의 하계라고 하면,  $n > \sqrt{1/\epsilon}$ 인 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$n^2 > \frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon} - 1, \quad n^2 + 1 > \frac{1}{\epsilon}$$

이므로  $\epsilon > \frac{1}{1+n^2}$ 가 되어  $\epsilon$ 이 하계라는 가정에 모순이다. 따라서  $\inf B = 0$ .

(3) Let  $C = \{(-1)^n + (-1/2)^m : n, m \in \mathbb{N}\}$ .  $C$ 의 최댓값과 최솟값을 찾자.

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^m \leq \frac{1}{4}$$

이므로

$$\forall x \in C, \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}$$

이다. 최댓값은  $(n, m) = (2, 2)$ 일 때  $5/4$ , 최솟값은  $(n, m) = (1, 1)$ 일 때  $-3/2$ 이다.  $C \subset \mathbb{R}$ 이므로 Claim 1과 1번 문제의 결과에 의해  $\sup C = 5/4$ ,  $\inf C = -3/2$ .

3. (1)  $A, B$ 가 유계이므로 적당한 실수  $a, b, c, d$ 가 존재하여 모든  $x \in A, y \in B$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

따라서 다음이 성립하고

$$a - d \leq x - y \leq b - c$$

$A - B$  또한 유계임을 알 수 있다.

**(2) Claim.**  $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ .

**Proof.** 우선 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\inf A \leq x \leq \sup A, \quad \inf B \leq y \leq \sup B$$

모든  $u \in A - B$  에 대해  $u \leq \sup A - \inf B$  이므로  $\sup(A - B) \leq \sup A - \inf B$ .

이제  $k = \sup A - \inf B$  가  $A - B$  의 최소 상계임을 보인다.  $\forall \epsilon > 0$ ,  $k - \epsilon$  가  $A - B$  의 상계라고 가정하자. 그런데, 상한과 하한의 정의로부터 다음을 만족하는  $x \in A, y \in B$  가 존재한다.

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A, \quad \inf B \leq y < \inf B + \frac{\epsilon}{2}$$

따라서  $k - \epsilon < x - y \leq k$  가 되어 상계라는 가정에 모순이므로 원하는 등식을 얻는다.

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  이므로 임의의 주어진  $\epsilon > 0$  에 대해  $N \in \mathbb{N}$  이 존재하여  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대해  $|a_n| < \epsilon$  이다.  $n > N$  일 때도  $0 \leq |s_n - s| < a_n$  이므로  $|s_n - s| < |a_n| < \epsilon$  이다. 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ .

5. (1) Given  $\forall \epsilon > 0$ , take  $N = \frac{49}{16\epsilon^2}$ . 그러면  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대하여

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 7} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{7}{4\sqrt{n} + 14} \right| < \frac{7}{4\sqrt{n}} < \epsilon \quad \left( \because \sqrt{n} > \frac{7}{4\epsilon} \right)$$

$$\text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 7} = \frac{1}{2}.$$

- (2) Given  $\forall \epsilon > 0$ , take  $N = \sqrt[5]{\frac{3}{\epsilon}}$ . 그러면  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대하여

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n^5 + \cos(n^8 + 1)}{n^5 + 1} - 2 \right| &= \left| \frac{\cos(n^8 + 1) - 2}{n^5 + 1} \right| \leq \frac{|\cos(n^8 + 1)| + 2}{n^5 + 1} \\ &< \frac{3}{n^5 + 1} < \frac{3}{n^5} < \epsilon \quad \left( \because n^5 > \frac{3}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + \cos(n^8 + 1)}{n^5 + 1} = 2.$$

- (3) Given  $\forall \epsilon > 0$ , take  $N = \max \left\{ \frac{2}{\epsilon}, 6 \right\}$ . 그러면  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대하여

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n^2 + n(-1)^n}{n^2 + 2} - 3 \right| &= \left| \frac{n(-1)^n - 6}{n^2 + 2} \right| \leq \frac{n|(-1)^n| + 6}{n^2 + 2} \\ &< \frac{n + 6}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n(-1)^n}{n^2 + 2} = 3.$$

6. 수열  $\{a_n\}$  이 수렴하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \in \mathbb{R}$  이라 하자. 그러면,  $\forall \epsilon > 0$  에 대해  $N$ 이 존재하여  $n > \max\{N, 1\}$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대해

$$\left| \frac{(-2)^n + n}{2^n} - c \right| < \epsilon$$

를 만족한다.  $\epsilon = 1/2$  라고 해보자.

$m \in \mathbb{N}$  에 대하여  $n = 2m$  일 때, 만족해야 하는 부등식은

$$\left| \frac{2m}{2^{2m}} - c + 1 \right| < \frac{1}{2}$$

이고,  $n = 2m + 1$  일 때 만족해야 하는 부등식은

$$\left| \frac{2m+1}{2^{2m+1}} - c - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

이다. 변변 더하면

$$\begin{aligned} 1 &> \left| \frac{2m+1}{2^{2m+1}} - c - 1 \right| + \left| \frac{2m}{2^{2m}} - c + 1 \right| = \left| -\frac{2m+1}{2^{2m+1}} + c + 1 \right| + \left| \frac{2m}{2^{2m}} - c + 1 \right| \\ &> \left| 2 + \frac{2m}{2^{2m}} - \frac{2m+1}{2^{2m+1}} \right| = \left| 2 + \frac{2m-1}{2^{2m+1}} \right| > 2 \end{aligned}$$

이 되어 모순이다. 따라서 주어진 수열은 발산한다.

7. 수렴하는 수열은 유계임을 이용한다.  $\{s_n\}$  이 수렴하므로  $|s_n| < A$  인 실수  $A$ 가 존재한다.

- (1)  $\forall \epsilon > 0$  에 대하여,  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대해  $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{A + |s| + 4}$  가 되게 하는  $N$ 이 존재한다. 그러므로 그  $N$  에 대하여  $n > N$  일 때마다 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |s_n^2 + 4s_n + 5 - (s^2 + 4s + 5)| &= |s_n^2 - s^2 + 4(s_n - s)| = |s_n - s| |s_n + s + 4| \\ &< |s_n - s| (|s_n| + |s| + 4) \\ &< \frac{\epsilon}{A + |s| + 4} \cdot (A + |s| + 4) = \epsilon \end{aligned}$$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = f(s)$ .

- (2)  $\forall \epsilon > 0$  에 대하여,  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대해  $|s_n - s| < \frac{2\epsilon}{A + |s|}$  가 되게 하는  $N$  이 존재한다. 그러므로 그  $N$  에 대하여  $n > N$  일 때마다 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{1}{1+s_n^2}} - \sqrt{\frac{1}{1+s^2}} \right| &= \frac{|\sqrt{1+s_n^2} - \sqrt{1+s^2}|}{\sqrt{1+s_n^2}\sqrt{1+s^2}} < \frac{|\sqrt{1+s_n^2} - \sqrt{1+s^2}|}{1} \\ &= \frac{|1+s_n^2 - 1 - s^2|}{\sqrt{1+s_n^2} + \sqrt{1+s^2}} < \frac{|s_n^2 - s^2|}{2} \\ &= \frac{|s_n - s| |s_n + s|}{2} \leq \frac{|s_n - s| (|s_n| + |s|)}{2} \\ &< \frac{2\epsilon}{A + |s|} \frac{A + |s|}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

첫 번째 부등호는  $\sqrt{1+x^2} > 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 으로부터 얻고, 두 번째 부등호는  $x^2 \geq 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 으로부터 얻는다. 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = f(s)$ .

(3) Let  $B = \max\{A, |s|\}$ .  $\forall \epsilon > 0$  에 대하여,  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대해  $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2019B^{2018}}$  가 되게 하는  $N$ 이 존재한다. 그러므로 그  $N$  에 대하여  $n > N$  일 때마다 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |s_n^{2019} - s^{2019}| &= |s_n - s| \left| \sum_{i=0}^{2018} s_n^{2018-i} s^i \right| < |s_n - s| \sum_{i=0}^{2018} |s_n|^{2018-i} |s|^i \\ &< |s_n - s| \sum_{i=0}^{2018} B^{2018} < \frac{\epsilon}{2019B^{2018}} 2019B^{2018} = \epsilon \end{aligned}$$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = f(s)$ .

8. 주어진 명제는 거짓이다.

[반례]  $a_n = (-1)^n$  일 때<sup>1</sup>,  $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k$  은 0 으로 수렴한다.

**Claim.**  $\sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{(-1)^n - 1}{2}$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n}$

**Proof.**  $n$ 이 짝수일 때, 좌변, 우변 모두 0이다.  $n$ 이 홀수일 때, 좌변, 우변 모두  $-1$  이다.

이제  $b_n$ 이 0으로 수렴함을 보이자.

Given  $\forall \epsilon > 0$ , take  $N = 1/\epsilon$ . 그러면  $n > N$  인 모든  $n \in \mathbb{N}$  에 대해 다음이 성립한다.

$$\left| \frac{(-1)^n - 1}{2n} - 0 \right| \leq \frac{|(-1)^n| + 1}{2n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  이다.

---

<sup>1</sup>수열  $(-1)^n$ 이 발산함은 연습시간에 보였다.