해석개론 및 연습 1 과제 #3

2017-18570 컴퓨터공학부 이성찬

1. (1)

- $\text{int}\, A = \{(x,y) \in \mathbb{R} : xy > 1\}$

  $x_0y_0 > 1$ 이라고 하자. $\epsilon < \frac{x_0y_0-1}{|x_0|+|y_0|}$ 에 대해, $|x_0 - x| < \epsilon, |y - y_0| < \epsilon$ 라 하면

$$\begin{aligned} xy - 1 = |xy| - 1 = |x|\,|y| - 1 &\geq (|x_0| - \epsilon)(|y_0| - \epsilon) - 1 \\ &= |x_0|\,|y_0| - 1 - \epsilon(|x_0| + |y_0|) + \epsilon^2 > \epsilon^2 > 0 \end{aligned}$$

  이므로 $N((x_0, y_0), \epsilon) \subset A$.

- $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R} : xy \geq 1\}$

  $x_0y_0 \geq 1$ 라고 하자. $\epsilon > 0$에 대하여 $(x_0 + \frac{y_0}{2|y_0|}\epsilon)y_0 = x_0y_0 + |y_0|\,\epsilon/2 > 1$ 이다. 그러므로 $(x_0 + \frac{y_0}{2|y_0|}\epsilon, y_0) \in A$ 이고 이는 $N((x_0, y_0), \epsilon)$ 의 원소이고 (x_0, y_0) 과 다른 점이므로 $N((x_0, y_0), \epsilon) \cap A \backslash \{(x_0, y_0)\} \neq \emptyset$.

- $\overline{A} = A$

(2)

- $\text{int}\, A = \emptyset$

  $A \subset \mathbb{Q}$ 임은 자명하다. 임의의 $\epsilon > 0$, $x \in A$ 에 대하여 $N(x, \epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ 에는 무리수가 반드시 존재한다. 따라서 $N(x, \epsilon) \not\subseteq A$ 이므로 A 의 어떠한 점도 내점이 될 수 없다.

- $A' = \{-1, 1\}$

  $\forall \epsilon > 0$, $0 < \left|(-1)^n - (-1)^n \frac{n}{n+1}\right| < \epsilon$ 인 n 이 존재하는지 확인하면 된다.

$$\left|(-1)^n - (-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon$$

  이 되도록 하는 n은 $\lceil 1/\epsilon \rceil$ 보다 크기만 하면 된다.

- $\overline{A} = A \cup \{-1, 1\}$

(3)

- $\text{int}\, A = \emptyset$

  $\alpha = (x_0, y_0, 0) \in A$ 라 하자. $\forall \epsilon > 0$, $N(\alpha, \epsilon)$ 에는 $(x_0, y_0, \epsilon/2)$ 이 존재하며 이는 A의 원소가 아니다. $N(\alpha, \epsilon) \not\subseteq A$ 이므로 A 의 어떠한 점도 내점이 될 수 없다.

- $A' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$

  $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)$ 에 대해 $r\beta = r(\cos\theta, \sin\theta, 0) \in A$ 이라 두자. 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $\min\{(r - \epsilon/2), r/2\} \cdot \beta \in N(r\beta, \epsilon) \cap A \backslash \{r\beta\}$ 이므로 극한점이 된다.

- $\overline{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$

(4)

- $\text{int}\, A = \emptyset$

  A 의 원소들의 성분은 전부 유리수이다. $\alpha \in A$ 일 때, 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $N(\alpha, \epsilon)$ 에는 반드시 무리수가 존재한다. $N(\alpha, \epsilon) \not\subseteq A$ 이므로 내점이 존재하지 않는다.

- $A' = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

  임의의 $z = (x, 0)$ $(x \geq 0)$, $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(z, \epsilon)$ 중 구간 $I_1 = \{(k, 0) : x - \epsilon <$

$k < x + \epsilon\}$ 과 $I_2 = \{(x, y) : 0 < y < \epsilon\}$ 를 생각하자.
우선 I_1 에 존재하는 x 가 아닌 양의 유리수 p/q ($\gcd(p, q) = 1$) 을 하나 택한다.
그리고 $\epsilon' = \sqrt{\epsilon^2 - (x - p/q)^2}$ 에 대해, 충분히 큰 n 을 잡는다.
그러면 $y = 1/n < \epsilon'$ 이 되게 할 수 있다. 이러한 n 을 n' 으로 고정하고, $p/q = m/n'$ 이 되게 하는 m을 $n'p/q$ 로 잡아준다.
그러면 $(m/n, 1/n) \in N(z, \epsilon)$ 가 된다.
$(\because (x - p/q)^2 + (1/n')^2 < (x - p/q)^2 + \epsilon'^2 = \epsilon^2)$
그리고 $(m/n, 1/n) \in A\backslash\{z\}$ 이므로 이 점은 극한점이 된다.

- $\overline{A} = A \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

(5)
- $\operatorname{int} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |x + y| < 1\}$
  $z = (x_0, y_0)$ 가 $|x_0| < 1$, $|x_0 + y_0| < 1$ 을 만족한다고 하자. 임의의 양수

$$0 < \epsilon < \min\left\{1 - x_0, x_0 + 1, \frac{1 - |x_0 + y_0|}{2}\right\}$$

  에 대하여 $|x - x_0| < \epsilon$, $|y - y_0| < \epsilon$ 를 가정하면 $|x| < 1$ 은 자동으로 얻어진다.

$$\begin{aligned} |x + y| &= |x - x_0 + y - y_0 + x_0 + y_0| \leq |x - x_0| + |y - y_0| + |x_0 + y_0| \\ &< 2\epsilon + |x_0 + y_0| < 1 \end{aligned}$$

  이므로 $N(z, \epsilon) \subset A$ 이다.
- $A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |x + y| \leq 1\}$
  $\operatorname{int} A$ 의 점들은 전부 A' 에 속하므로 $|x + y| = 1$ 인 점들에 대해서 보인다.
  $z = (x_0, y_0)$ 가 $|x_0| \leq 1$, $|x_0 + y_0| = 1$ 을 만족한다고 하자.
  $y_0 \neq 0$ 인 경우, $(x_0, y_0 - \frac{y_0}{2|y_0|}\epsilon) \in N(z, \epsilon)$ for $0 < \epsilon < 1$. 그리고

$$\left|x_0 + y_0 - \frac{y_0}{2\,|y_0|}\epsilon\right| + \left|\frac{y_0}{2\,|y_0|}\epsilon\right| \leq |x_0 + y_0| = 1$$

  와 $\left|\frac{y_0}{2|y_0|}\epsilon\right| = \epsilon/2$ 로부터 $\left|x_0 + y_0 - \frac{y_0}{2|y_0|}\epsilon\right| < 1 - \epsilon/2$ 이므로 $(x_0, y_0 - \frac{y_0}{2|y_0|}\epsilon) \in A\backslash\{z\}$. 따라서 극한점이 된다. $\epsilon \geq 1$ 의 경우에는 $(x_0, y_0 - \frac{y_0}{2|y_0|})$ 으로 두면 된다.
  $y_0 = 0$ 인 경우, $x = \pm 1$ 이다. $\forall \epsilon > 0$ 에 대해 $(\pm 1, \pm 1 \mp \epsilon)$ 에 속하는 적당한 실수를 잡아주면 $N(z, \epsilon) \cap A\backslash\{z\} \neq \emptyset$ 이므로 극한점이 된다.
- $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |x + y| \leq 1\}$

2. (1) **거짓**. (반례) $A = (0, 1) \cup (1, 2)$ 를 생각하면 $\operatorname{int} A = A$ 인데 $\operatorname{int} \overline{A} = (0, 2)$ 이다.

(2) **거짓**. $A = \{0\}$ 을 생각하면 $\operatorname{int} A = \emptyset$ 이므로 $\overline{\operatorname{int} A} = \emptyset \neq A$.

(3) **참**.

(4) **참**.

(3), (4) 를 보이기 위해서는 다음 명제를 보이면 된다.

Claim. $\overline{A^C} = (\operatorname{int} A)^C$.

($\subset$) $x \in \overline{A^C}$ 일 때, $x \in A^C$ 라면, $x \notin \operatorname{int} A$ 이므로 ($\operatorname{int} A \subset A$) OK.
$x \notin A^C$ 이고 $x \in (A^C)'$ 이라면, 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon) \cap A^C \backslash \{x\} \neq \emptyset$ 이므로 $y \in N(x, \epsilon) \cap A^C \backslash \{x\}$ 를 잡을 수 있다. 그러면 $y \in N(x, \epsilon)$ 인데 $y \in A^C$ 이므로 모든 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon)$ 은 A 의 부분집합이 될 수 없다. $x \notin \operatorname{int} A$.

($\supset$) $x \notin \operatorname{int} A$ 라 가정하자. 우선 $x \in A^C$ 이면 $x \in \overline{A^C}$ 는 당연하다.
$x \notin A^C$ 를 가정하면, x 가 A 의 내점이 아니므로 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon)$ 는 A 의 부분집합이 아니다. 따라서 $y \in N(x, \epsilon) \backslash A$ 가 존재한다. 이는 곧 $y \in N(x, \epsilon) \cap A^C$ 이며, $A^C = A^C \backslash \{x\}$ 이므로 극한점의 정의에 따라 $N(x, \epsilon) \cap A^C \backslash \{x\} \neq \emptyset$ 이 되어 $x \in (A^C)'$ 이다. 따라서 $x \in \overline{A^C}$.

3. (1) $\langle b_n \rangle$ 이 코시 수열이므로 수렴한다. 수렴하는 수열은 유계이므로, 모든 n 에 대해 $|b_n| < A$ 인 $A \in \mathbb{R}$ 이 존재한다. 이제 다음이 성립한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} A \, |a_n| < \infty$$

따라서 비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 는 절대수렴한다.

(2) $a_n = n!/n^n$ 으로 정의하자.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

극한값이 존재하며 1 보다 작으므로, $\limsup a_{n+1}/a_n = 1/e < 1$ 이다. 비율판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

4. $\overline{A}$ 가 유계이고 닫힌집합인지 확인하면 된다.

- $\overline{A}$ 는 A 를 포함하는 가장 작은 닫힌 집합이다.
- A가 유계이므로 $x \in A \Rightarrow \|x\| < R$ 인 $R \in \mathbb{R}$ 이 존재한다.
  (a) $x \in A$ 이면 $\|x\| < R$ 이므로 OK.
  (b) $x \in A' - A$ 인 경우[1] 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon) \cap A \backslash \{x\} \neq \emptyset$ 이다. $y \in N(x, \epsilon) \cap A$ 에 대하여 $\|y - x\| < \epsilon$, $\|y\| < R$ 이므로

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|y - x\| + \|y\| < R + \epsilon$$

  이다. 따라서 이 경우에도 $\|x\| < R + 1$ 이다.

  따라서 $\overline{A}$ 는 유계이다.

5. 다음과 같은 집합족 $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ 을 고려한다.

$$U_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + 2\,|y| < 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

[1] 이러한 원소가 존재하지 않는 경우는 당연히 참이므로 존재한다고 가정한다.

- U_k 는 열린집합이다.
  $z = (x_0, y_0) \in U_k$ 라 하면 $\epsilon < \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{k} - |x_0| - 2|y_0|)$ 에 대해
  $$|x - x_0| < \epsilon, |y - y_0| < \epsilon \implies |x| + 2|y| < |x_0| + 2|y_0| + 3\epsilon < 1 - \frac{1}{k}$$
  (삼각부등식: $|x| < |x_0| + \epsilon, |y| < |y_0| + \epsilon$) 이므로 $N(z, \epsilon) \subset U_k$ 임을 알 수 있다.
- 구한 집합족은 cover 가 된다.
  $(x_0, y_0) \in A$ 이면 $|x_0| + 2|y_0| < 1$ 이므로
  $$k = \left\lceil \frac{1}{1 - |x_0| - 2|y_0|} \right\rceil$$
  으로 잡으면
  $$1 - \frac{1}{k} \geq 1 - (1 - |x_0| - 2|y_0|) = |x_0| + 2|y_0|$$
  가 되어 $(x_0, y_0) \in U_k$. 따라서 $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$.
- Open finite subcover 가 존재하지 않는다.
  만약 open finite subcover $\{U_{k_1}, \ldots, U_{k_m}\}$ $(k_1 < k_2 < \cdots < k_m)$ 이 존재한다면 이들의 합집합은 U_{k_m} 이고, $1 - 1/k_m < 2|y_0| < 1$ 인 실수 y_0 를 잡을 수 있다. 그러면 $(0, y_0) \in A - U_{k_m}$ 이므로 subcover 임에 모순이다. Finite subcover 가 존재하지 않는다.

6. (귀류법) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ 라고 가정하자.
적당한 $\epsilon > 0$ 에 대하여 N 이 존재해, $|a_n - a| \geq \epsilon$ 인 $n > N$ 이 무수히 많이 존재한다.
만약 위 조건을 만족하는 n 이 유한하다면, 그러한 n 중 최댓값을 N 으로 잡아주면 $\lim a_n = a$ 가 되게 할 수 있다.
따라서 $|a_n - a| \geq \epsilon$ 인 n 들에 대해 차례대로 $n_1 < n_2 < \cdots$ 로 잡으면[2] 이렇게 얻어진 부분수열 $\langle a_{n_k} \rangle$ 는 절대 a 로 수렴 할수 없으므로 모순이다.

8. 주어진 관계식을 다음과 같이 변형한다.
$$na_{n+1} \leq na_n - ca_n \implies ca_n \leq na_n - na_{n+1} \implies (c-1)a_n \leq (n-1)a_n - na_{n+1}$$
이제 $b_n := (n-1)a_n/(c-1)$ $(n \geq 1)$ 으로 정의하면,

- $a_n > 0, c > 1$ 이므로 $b_n \geq 0$ 이 되어 아래로 유계이다.
- $b_{n+1} - b_n \geq a_n > 0$ $(c > 1)$ 에서 $b_n < b_{n+1}$ 이므로 감소수열이다.

따라서 단조수렴정리에 의해 b_n 은 수렴한다. 그 극한값을 β 로 두자. 이제 $k = N, N+1, \ldots, n$ 에 대해 부등식을 변변 더하면
$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_N - b_{n+1}$$
를 얻고 $n \to \infty$ 인 극한을 취하면 다음 식을 얻는다.
$$0 < \sum_{k=N}^{\infty} a_k \leq b_N - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_N - \beta$$
$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ 는 비교판정법에 의해 수렴하며, 항을 유한개 더한 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

[2] 자연수의 집합은 셀 수 있다. 혹은 well-ordering principle 에 의해 최소의 원소가 항상 존재한다.