Algoritmos y Estructuras de Datos

Guía Práctica 1
Lógica

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1.1. Repaso de lógica proposicional

Ejercicio 1. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero* y el de x e y es *falso*.

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $\neg(y \vee c)$

e) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

f) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

g) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

h) $(\neg c \wedge \neg y)$

Ejercicio 2. Considere la siguiente oración: "Si es mi cumpleaños o hay torta, entonces hay torta".

- Escribir usando lógica proposicional y realizar la tabla de verdad
- Asumiendo que la oración es verdadera y hay una torta, qué se puede concluir?
- Asumiendo que la oración es verdadera y no hay una torta, qué se puede concluir?
- Suponiendo que la oración es mentira (es falsa), se puede concluir algo?

Ejercicio 3. ★ Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalencias. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

b)
- $\neg(\neg p) \rightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

c)
- $((True \wedge p) \wedge (\neg p \vee False)) \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$
- $p \wedge \neg q$

d)
- $(p \vee (\neg p \wedge q))$
- $\neg p \rightarrow q$

e)
- $p \rightarrow (q \wedge \neg(q \rightarrow r))$
- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))$

Ejercicio 4. Determinar si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$

b) $(p \wedge \neg p)$

c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$

d) $((p \wedge q) \rightarrow p)$

e) $\big((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))\big)$

f) $\big((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))\big)$

Ejercicio 5. Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

a) $True$, $False$

b) $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$

c) p, $(p \wedge q)$

d) p, $(p \vee q)$

e) p, q

f) p, $(p \rightarrow q)$

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?

1.2. Trivaluada

Ejercicio 6. Asumiendo que el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de a es *falso* y el de x e y es *indefinido*, indicar cuáles de los operadores deben ser operadores "luego" para que la expresión no se indefina nunca:

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

e) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

f) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

Ejercicio 7. Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera.

b) Ninguna es verdadera.

c) Exactamente una de las tres es verdadera.

d) Sólo p y q son verdaderas.

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas.

f) r es verdadera.

1.3. Cuantificadores

Ejercicio 8. ★ Determinar, para cada aparición de variables, si dicha aparición se encuentra libre o ligada. En caso de estar ligada, aclarar a qué cuantificador lo está. En los casos en que sea posible, proponer valores para las variables libres de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

a) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \rightarrow\ x + y = z)$

b) $(\forall x : \mathbb{Z})((\forall y : \mathbb{Z})((0 \leq x < n \wedge 0 \leq y < m) \rightarrow x + y = z))$

c) $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 10 \rightarrow j < 0)$

d) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow P(j)) \wedge P(j)$

Ejercicio 9. ★ Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*
$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*
$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q":*
$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q":*
$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x))) \wedge \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x)))$

Ejercicio 10. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- *"Existe un único número natural menor a 10 que cumple P"*
- *"Existen al menos dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- *"Existen exactamente dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*
- *"Si un entero cumple P y es impar, no cumple Q"*
- *"Todos los enteros pares cumplen P, y todos los enteros impares que no cumplen P cumplen Q"*
- *"Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninguno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cumplen P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

Ejercicio 11. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- *"Si un entero cumple P, entonces existe un entero distinto tal que juntos cumplen Q"*
- *"Existe un par de enteros tal que cumplen Q y ninguno de ambos cumple P"*
- *"Si un par de enteros cumplen Q, entonces al menos uno de ellos cumple P"*
- *"Si un entero cumple P, no existe ningún entero tal que juntos cumplan Q"*

Ejercicio 12. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sean a, b y k enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

a) $P(3)$
$k > 5 \wedge (\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \to P(n))$

b) $P(3)$
$k > 5 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < k \wedge P(n))$

c) $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \to Q(n))$
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \to Q(n))$

d) $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \to Q(n))$

e) $k = 0 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
$k = 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \to Q(n)))$