



## 2.1. Funciones auxiliares

**Ejercicio 1.** ★ Nombrar los siguientes predicados sobre enteros:

- a)  $\text{pred } \text{???} (x: \mathbb{Z}) \{$   
 $(\exists c: \mathbb{Z})(c > 0 \wedge (c * c = x))$   
 $\}$
- b)  $\text{pred } \text{???} (x: \mathbb{Z}) \{$   
 $(x > 1) \wedge (\forall n: \mathbb{Z})((1 < n < x) \rightarrow_L (x \bmod n \neq 0))$   
 $\}$

**Ejercicio 2.** ★ Escriba los siguientes predicados sobre números enteros en lenguaje de especificación:

- a)  $\text{pred } \text{sonCoprimos } (x, y: \mathbb{Z})$  que sea verdadero si y sólo si  $x$  e  $y$  son coprimos.
- b)  $\text{pred } \text{mayorPrimoQueDivide } (x: \mathbb{Z}, y: \mathbb{Z})$  que sea verdadero si  $y$  es el mayor primo que divide a  $x$ .

**Ejercicio 3.** ★ Nombre los siguientes predicados auxiliares sobre secuencias de enteros:

- a)  $\text{pred } \text{???} (s: \text{seq}(\mathbb{Z})) \{$   
 $(\forall i: \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \rightarrow_L s[i] \geq 0)$   
 $\}$
- b)  $\text{pred } \text{???} (s: \text{seq}(\mathbb{Z})) \{$   
 $(\forall i: \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \rightarrow_L (\forall j: \mathbb{Z})((0 \leq j < |s| \wedge i \neq j) \rightarrow_L (s[i] \neq s[j])))$   
 $\}$

**Ejercicio 4.** ★ Escriba los siguientes predicados auxiliares sobre secuencias de enteros, aclarando los tipos de los parámetros que recibe:

- a)  $\text{esPrefijo}$ , que determina si una secuencia es prefijo de otra.
- b)  $\text{estáOrdenada}$ , que determina si la secuencia está ordenada de menor a mayor.
- c)  $\text{hayUnoParQueDivideAlResto}$ , que determina si hay un elemento par en la secuencia que divide a todos los otros elementos de la secuencia.
- d)  $\text{enTresPartes}$ , que determina si en la secuencia aparecen (de izquierda a derecha) primero 0s, después 1s y por último 2s. Por ejemplo  $\langle 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2 \rangle$  cumple con  $\text{enTresPartes}$ , pero  $\langle 0, 1, 3, 0 \rangle$  o  $\langle 0, 0, 0, 1, 1 \rangle$  no. ¿Cómo modificaría la expresión para que se admitan cero apariciones de 0s, 1s y 2s (es decir, para que por ejemplo  $\langle 0, 0, 0, 1, 1 \rangle$  o  $\langle \rangle$  sí cumplan  $\text{enTresPartes}$ )?

**Ejercicio 5.** Sea  $s$  una secuencia de elementos de tipo  $\mathbb{Z}$ . Escribir una expresión (utilizando sumatoria y productoria) tal que:

- a) Cuento la cantidad de veces que aparece el elemento  $e$  de tipo  $\mathbb{Z}$  en la secuencia  $s$ .
- b) Sume los elementos en las posiciones impares de la secuencia  $s$ .
- c) Sume los elementos mayores a 0 contenidos en la secuencia  $s$ .
- d) Sume los inversos multiplicativos ( $\frac{1}{x}$ ) de los elementos contenidos en la secuencia  $s$  distintos a 0.

## 2.2. Análisis de especificación

**Ejercicio 6.** Las siguientes especificaciones no son correctas. Indicar por qué y corregirlas para que describan correctamente el problema.

- a) **progresionGeometricaFactor2**: Indica si la secuencia  $l$  representa una progresión geométrica factor 2. Es decir, si cada elemento de la secuencia es el doble del elemento anterior.

```
proc progresionGeometricaFactor2 (in l: seq(Z)) : Bool
  requiere {True}
  asegura {res = True  $\leftrightarrow$  (( $\forall i : \mathbb{Z}$ )( $0 \leq i < |l| \rightarrow l[i] = 2 * l[i - 1]$ ))}
```

- b) **minimo**: Devuelve en  $res$  el menor elemento de  $l$ .

```
proc minimo (in l: seq(Z)) : Z
  requiere {True}
  asegura {( $\forall y : \mathbb{Z}$ )( $(y \in l \wedge y \neq x) \rightarrow y > res$ )}
```

**Ejercicio 7.** Para los siguientes problemas, dar todas las soluciones posibles a las entradas dadas:

- a) **proc indiceDelMaximo** (in l: seq(R)) : Z

```
requiere {|l| > 0}
asegura {0  $\leq res < |l| \wedge$  (( $\forall i : \mathbb{Z}$ )( $0 \leq i < |l| \rightarrow l[i] \leq l[res]$ ))}
```

i)  $l = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$

ii)  $l = \langle 15.5, -18, 4.215, 15.5, -1 \rangle$

iii)  $l = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$

- b) **proc indiceDelPrimerMaximo** (in l: seq(R)) : Z

```
requiere {|l| > 0}
asegura {0  $\leq res < |l| \wedge$  (( $\forall i : \mathbb{Z}$ )( $0 \leq i < |l| \rightarrow (l[i] < l[res] \vee (l[i] = l[res] \wedge i \geq res))$ ))})}
```

i)  $l = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$

ii)  $l = \langle 15.5, -18, 4.215, 15.5, -1 \rangle$

iii)  $l = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$

- c) ¿Para qué valores de entrada **indiceDelPrimerMaximo** y **indiceDelMaximo** tienen necesariamente la misma salida?

**Ejercicio 8.** Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$f(a, b) = \begin{cases} 2b & \text{si } a < 0 \\ b - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Indicar cuáles de las siguientes especificaciones son correctas para el problema de calcular  $f(a, b)$ . Para aquellas que no lo son, indicar por qué.

- a) **proc f** (in a, b: R) : R

```
requiere {True}
asegura {(a < 0  $\wedge res = 2 * b$ )  $\wedge$  (a  $\geq 0 \wedge res = b - 1$ )}
```

- b) **proc f** (in a, b: R) : R

```
requiere {True}
asegura {(a < 0  $\wedge res = 2 * b$ )  $\vee$  (a  $\geq 0 \wedge res = b - 1$ )}
```

- c) `proc f (in a, b:  $\mathbb{R}$ ) :  $\mathbb{R}$`   
     `requiere {True}`  
     `asegura {(a < 0  $\rightarrow$  res = 2 * b)  $\vee$  (a  $\geq$  0  $\rightarrow$  res = b - 1)}`
- d) `proc f (in a, b:  $\mathbb{R}$ ) :  $\mathbb{R}$`   
     `requiere {True}`  
     `asegura {res = (if a < 0 then 2 * b else b - 1 fi)}`

**Ejercicio 9.** Considerar la siguiente especificación, junto con un algoritmo que dado  $x$  devuelve  $x^2$ .

```
proc unoMasGrande (in x:  $\mathbb{R}$ ) :  $\mathbb{R}$ 
    requiere {True}
    asegura {res > x}
```

- a) ¿Qué devuelve el algoritmo si recibe  $x = 3$ ? ¿El resultado hace verdadera la postcondición de `unoMasGrande`?
- b) ¿Qué sucede para las entradas  $x = 0,5$ ,  $x = 1$ ,  $x = -0,2$  y  $x = -7$ ?
- c) Teniendo en cuenta lo respondido en los puntos anteriores, escribir una **precondición** para `unoMasGrande`, de manera tal que el algoritmo cumpla con la especificación

## 2.3. Relación de fuerza

**Ejercicio 10.** Sean  $x$  y  $r$  variables de tipo  $\mathbb{R}$ . Considerar los siguientes predicados:

P1: $\{x \leq 0\}$	Q1: $\{r \geq x^2\}$
P2: $\{x \leq 10\}$	Q2: $\{r \geq 0\}$
P3: $\{x \leq -10\}$	Q3: $\{r = x^2\}$

- a) Indicar la relación de fuerza entre P1, P2 y P3
- b) Indicar la relación de fuerza entre Q1, Q2 y Q3
- c) Escribir 2 programas que cumplan con la siguiente especificación:

```
proc hagoAlgo (in x:  $\mathbb{R}$ ) :  $\mathbb{R}$ 
    requiere {x  $\leq$  0}
    asegura {res  $\geq$  x2}
```

- d) Sea A un algoritmo que cumple con la especificación del ítem anterior. Decidir si necesariamente cumple las siguientes especificaciones:
- `requiere {x  $\leq$  -10}, asegura {r  $\geq$  x2}`
  - `requiere {x  $\leq$  10}, asegura {r  $\geq$  x2}`
  - `requiere {x  $\leq$  0}, asegura {r  $\geq$  0}`
  - `requiere {x  $\leq$  0}, asegura {r = x2}`
  - `requiere {x  $\leq$  -10}, asegura {r  $\geq$  0}`
  - `requiere {x  $\leq$  10}, asegura {r = x2}`
- e) ¿Qué conclusión pueden sacar? ¿Qué debe cumplirse con respecto a las precondiciones y postcondiciones para que sea seguro reemplazar la especificación?

**Ejercicio 11.** Considerar las siguientes dos especificaciones, junto con un algoritmo  $a$  que satisface la especificación de  $p2$ .

```
proc p1 (in x: R, in n: Z) : Z
  requiere { $x \neq 0$ }
  asegura { $x^n - 1 < res \leq x^n$ }
```

```
proc p2 (in x: R, in n: Z) : Z
  requiere { $n \leq 0 \rightarrow x \neq 0$ }
  asegura { $res = \lfloor x^n \rfloor$ }
```

- a) Dados valores de  $x$  y  $n$  que hacen verdadera la precondition de  $p1$ , demostrar que hacen también verdadera la precondition de  $p2$ .
- b) Ahora, dados estos valores de  $x$  y  $n$ , supongamos que se ejecuta  $a$ : llegamos a un valor de  $res$  que hace verdadera la postcondición de  $p2$ . ¿Será también verdadera la postcondición de  $p1$  con este valor de  $res$ ?
- c) ¿Podemos concluir que  $a$  satisface la especificación de  $p1$ ?

## 2.4. Especificación de problemas

**Ejercicio 12.** Especificar los siguientes problemas:

- a) Dado un entero, decidir si es par
- b) Dado un entero  $n$  y otro  $m$ , decidir si  $n$  es un múltiplo de  $m$
- c) Dado un entero, listar todos sus divisores positivos (sin duplicados)
- d) Dado un entero positivo, obtener su descomposición en factores primos. Devolver una secuencia de tuplas  $(p, e)$ , donde  $p$  es un factor primo y  $e$  es su exponente, ordenada en forma creciente con respecto a  $p$

**Ejercicio 13.** Especificar los siguientes problemas sobre secuencias:

- a) Dadas dos secuencias  $s$  y  $t$ , decidir si  $s$  está *incluida* en  $t$ , es decir, si todos los elementos de  $s$  aparecen en  $t$  en igual o mayor cantidad
- b) Dadas dos secuencias  $s$  y  $t$ , devolver su *intersección*, es decir, una secuencia con todos los elementos que aparecen en ambas. Si un mismo elemento tiene repetidos, la secuencia retornada debe contener la cantidad mínima de apariciones del elemento en  $s$  y en  $t$
- c) Dada una secuencia de números enteros, devolver aquel que divida a más elementos de la secuencia. El elemento tiene que pertenecer a la secuencia original. Si existe más de un elemento que cumple esta propiedad, devolver alguno de ellos
- d) Dada una secuencia de secuencias de enteros  $l$ , devolver una secuencia de  $l$  que contenga el máximo valor. Por ejemplo, si  $l = \langle \langle 2, 3, 5 \rangle, \langle 8, 1 \rangle, \langle 2, 8, 4, 3 \rangle \rangle$ , devolver  $\langle 8, 1 \rangle$  o  $\langle 2, 8, 4, 3 \rangle$
- e) Dada una secuencia  $l$  con todos sus elementos distintos, devolver la secuencia de *partes*, es decir, la secuencia de todas las secuencias incluidas en  $l$ , cada una con sus elementos en el mismo orden en que aparecen en  $l$

## 2.5. Especificación de problemas usando inout

**Ejercicio 14.** Dados dos enteros  $a$  y  $b$ , se necesita calcular su suma y retornarla en un entero  $c$ . ¿Cuáles de las siguientes especificaciones son correctas para este problema? Para las que no lo son, indicar por qué.

- a) 

```
proc sumar (inout a, b, c: Z)
  requiere {True}
  asegura { $a + b = c$ }
```

- b) `proc sumar (in a, b:  $\mathbb{Z}$ , inout c:  $\mathbb{Z}$ )`  
     `requiere {True}`  
     `asegura {c = a + b}`
- c) `proc sumar (inout a, b:  $\mathbb{Z}$ , inout c:  $\mathbb{Z}$ )`  
     `requiere {a = A0 ∧ b = B0}`  
     `asegura {a = A0 ∧ b = B0 ∧ c = a + b}`

**Ejercicio 15.** Dada una secuencia  $l$ , se desea sacar su primer elemento y devolverlo. Decidir cuáles de estas especificaciones son correctas. Para las que no lo son, indicar por qué y justificar con ejemplos.

- a) `proc tomarPrimero (inout l:  $seq(\mathbb{R})$ ) :  $\mathbb{R}$`   
     `requiere {|l| > 0}`  
     `asegura {res = head(l)}`
- b) `proc tomarPrimero (inout l:  $seq(\mathbb{R})$ ) :  $\mathbb{R}$`   
     `requiere {|l| > 0 ∧ l = L0}`  
     `asegura {res = head(L0)}`
- c) `proc tomarPrimero (inout l:  $seq(\mathbb{R})$ ) :  $\mathbb{R}$`   
     `requiere {|l| > 0}`  
     `asegura {res = head(L0) ∧ |l| = |L0| - 1}`
- d) `proc tomarPrimero (inout l:  $seq(\mathbb{R})$ ) :  $\mathbb{R}$`   
     `requiere {|l| > 0 ∧ l = L0}`  
     `asegura {res = head(L0) ∧ l = tail(L0)}`

**Ejercicio 16.** Dada una secuencia de enteros, se requiere multiplicar por 2 aquéllos valores que se encuentran en posiciones pares. Indicar por qué son incorrectas las siguientes especificaciones y proponer una alternativa correcta.

- a) `proc duplicarPares (inout l:  $seq(\mathbb{Z})$ )`  
     `requiere {l = L0}`  
     `asegura {`  
         `|l| = |L0| ∧`  
         `(∀i :  $\mathbb{Z}$ )(0 ≤ i < |l| ∧ i mód 2 = 0) →L l[i] = 2 * L0[i]`  
     `}`
- b) `proc duplicarPares (inout l:  $seq(\mathbb{Z})$ )`  
     `requiere {l = L0}`  
     `asegura {`  
         `(∀i :  $\mathbb{Z}$ )((0 ≤ i < |l| ∧ i mód 2 ≠ 0) →L l[i] = L0[i]) ∧`  
         `(∀i :  $\mathbb{Z}$ )((0 ≤ i < |l| ∧ i mód 2 = 0) →L l[i] = 2 * L0[i])`  
     `}`
- c) `proc duplicarPares (inout l:  $seq(\mathbb{Z})$ ) :  $seq(\mathbb{Z})$`   
     `requiere {True}`  
     `asegura {`  
         `|l| = |res| ∧`  
         `(∀i :  $\mathbb{Z}$ )((0 ≤ i < |l| ∧ i mód 2 ≠ 0) →L res[i] = l[i]) ∧`  
         `(∀i :  $\mathbb{Z}$ )((0 ≤ i < |l| ∧ i mód 2 = 0) →L res[i] = 2 * l[i])`  
     `}`

**Ejercicio 17.** Especificar los siguientes problemas de modificación de secuencias:

- a) `proc primosHermanos(inout  $l : seq\langle \mathbb{Z} \rangle$ )`, que dada una secuencia de enteros mayores a dos, reemplaza dichos valores por el número primo menor más cercano. Por ejemplo, si  $l = \langle 6, 5, 9, 14 \rangle$ , luego de aplicar `primosHermanos( $l$ )`,  $l = \langle 5, 3, 7, 13 \rangle$
- b) `proc reemplazar(inout  $l : seq\langle \text{Char} \rangle$ , in  $a, b : \text{Char}$ )`, que reemplaza todas las apariciones de  $a$  en  $l$  por  $b$
- c) `proc limpiarDuplicados(inout  $l : seq\langle \text{Char} \rangle$ , out  $dup : seq\langle \text{Char} \rangle$ )`, que elimina los elementos duplicados de  $l$  dejando sólo su primera aparición (en el orden original). Devuelve además,  $dup$  una secuencia con todas las apariciones eliminadas (en cualquier orden)