Algoritmos de búsqueda sobre secuencias

Algoritmos y Estructuras de Datos

Búsqueda lineal

- El problema de búsqueda por valor de un elemento en una secuencia es uno de los problemas fundamentales de la Informática.
- Vamos a aprovecharlo para aplicar el Teorema del Invariante y explorar su relación con el diseño de algoritmos
- Especificado formalmente:
  proc $contiene$(in $s : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in $x : \mathbb{Z}$, out $result$: Bool){
  Pre $\{True\}$
  Post $\{result = true \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \le i < |s| \wedge_L s[i] = x)\}$
  }
- ¿Cómo podemos buscar un elemento en una secuencia?

Búsqueda lineal

s[0]	s[1]	s[2]	s[3]	s[4]	...	s[$\|s\|-1$]
$= x? \neq x$	$= x? \neq x$	$= x? \neq x$	$= x? \neq x$			$= x? \neq x$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$			$\uparrow$
i	i	i	i			i

- ¿Qué invariante de ciclo podemos proponer?

  $I \equiv 0 \le i \le |s| \wedge_L$
  $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \le j < i \rightarrow_L s[j] \neq x)$

- ¿Qué función variante podemos usar?

  $fv = |s| - i$

Búsqueda lineal

- Invariante de ciclo:

$$I \equiv 0 \le i \le |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \le j < i \rightarrow_L s[j] \neq x)$$

- Función variante:

$$fv = |s| - i$$

- ¿Cómo lo podemos implementar en Java?

```
boolean contiene(int []s, int x) {
     int i = 0;
     while (i < s.length && s[i] != x) {
         i = i + 1;
     }
     return i < s.length;
 }
```

- ¿Es la implementación correcta con respecto a la especificación?

Recap: Teorema de corrección de un ciclo

- **Teorema.** Sean un predicado I y una función $fv : \mathbb{V} \to \mathbb{Z}$ (donde $\mathbb{V}$ es el producto cartesiano de los dominios de las variables del programa), y supongamos que $I \Rightarrow \text{def}(B)$. Si
  1. $P_C \Rightarrow I$,
  2. $\{I \land B\}\ S\ \{I\}$,
  3. $I \land \neg B \Rightarrow Q_C$,
  4. $\{I \land B \land v_0 = fv\}$ **S** $\{fv < v_0\}$,
  5. $I \land fv \leq 0 \Rightarrow \neg B$,

  ... entonces la siguiente tripla de Hoare es válida:

  $$\{P_C\} \textbf{ while B do S endwhile } \{Q_C\}$$

Búsqueda lineal

- Para este ciclo, tenemos:
  - $P_C \equiv i = 0$,
  - $Q_C \equiv (i < |s|) \leftrightarrow (\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \land_L s[j] = x)$.
  - $B \equiv i < |s| \land_L s[i] \neq x$
  - $I \equiv 0 \leq i \leq |s| \land_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \to_L s[j] \neq x)$
  - $fv = |s| - i$
- Ahora tenemos que probar que:
  1. $P_C \Rightarrow I$,
  2. $\{I \land B\}\ S\ \{I\}$,
  3. $I \land \neg B \Rightarrow Q_C$,
  4. $\{I \land B \land v_0 = fv\}$ **S** $\{fv < v_0\}$,
  5. $I \land fv \leq 0 \Rightarrow \neg B$,

Recap: Teorema de corrección de un ciclo

1. $P_C \Rightarrow I$,
2. $\{I \land B\}\ S\ \{I\}$,
3. $I \land \neg B \Rightarrow Q_C$,
4. $\{I \land B \land v_0 = fv\}$ **S** $\{fv < v_0\}$,
5. $I \land fv \leq 0 \Rightarrow \neg B$,

En otras palabras, hay que mostrar que:

- I es un invariante del ciclo (punto 1. y 2.)
- Se cumple la postcondición del ciclo a la salida del ciclo (punto 3.)
- La función variante es estrictamente decreciente (punto 4.)
- Si la función variante alcanza la cota inferior la guarda se deja de cumplir (punto 5.)

Corrección de búsqueda lineal

¿I es un invariante del ciclo?

$$I \equiv 0 \leq i \leq |s| \land_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \to_L s[j] \neq x)$$

- La variable i toma el primer valor 0 y se incrementa por cada iteración hasta llegar a $|s|$.
- $\Rightarrow 0 \leq i \leq |s|$
- En cada iteración, todos los elementos a izquierda de i son distintos de x
- $\Rightarrow (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \to_L s[j] \neq x)$

Corrección de búsqueda lineal

¿Se cumple la postcondición del ciclo a la salida del ciclo?

$$I \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow_L s[j] \neq x)$$

$$Q_C \equiv (i < |s|) \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \wedge_L s[i] = x)$$

- Al salir del ciclo, no se cumple la guarda. Entonces no se cumple $i < |s|$ o no se cumple $s[i] \neq x$
  - Si no se cumple $i < |s|$, no existe ninguna posición que contenga x
  - Si no se cumple $s[i] \neq x$, existe al menos una posición que contiene a x

Corrección de búsqueda lineal

¿Es la función variante estrictamente decreciente?

$$fv = |s| - i$$

- En cada iteración, se incremente en 1 el valor de i
- Por lo tanto, en cada iteración se reduce en 1 la función variante.

Corrección de búsqueda lineal

¿Si la función variante alcanza la cota inferior la guarda se deja de cumplir?

$$fv = |s| - i$$

$$B \equiv i < |s| \wedge_L s[i] \neq x$$

- Si $fv = |s| - i \leq 0$,entonces $i \geq |s|$
- Como siempre pasa que $i \leq |s|$, entonces es cierto que $i = |s|$
- Por lo tanto $i < |s|$ es falso.

Corrección de búsqueda lineal

- Finalmente,ahora que probamos que:
  1. $P_C \Rightarrow I$,
  2. $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$,
  3. $I \wedge \neg B \Rightarrow Q_C$,
  4. $\{I \wedge B \wedge v_0 = fv\}\ \mathbf{S}\ \{fv < v_0\}$,
  5. $I \wedge fv \leq 0 \Rightarrow \neg B$,
- ...podemos por el teorema concluir que el ciclo termina y es correcto.

Búsqueda lineal

- Implementación:

```
bool contiene(vector<int> &s, int x) {
  int i = 0;
  while( i < s.size() && s[i] != x ) {
    i=i+1;
  }
  return i < s.size();
}
```

- Es bueno este programa?
- qué quiere decir bueno?
- Tarda mucho? tarda demasiado?
- usa mucha memoria?
- Vamos a ver esto con mucho más cuidado dentro de algunas clases
- Mientras tanto.....

Búsqueda lineal

- Implementación:

```
bool contiene(vector<int> &s, int x) {
  int i = 0;
  while( i < s.size() && s[i] != x ) {
    i=i+1;
  }
  return i < s.size();
}
```

- Analicemos cuántas veces va a iterar este programa:

s	x	# iteraciones
$\langle\rangle$	1	0
$\langle 1\rangle$	1	0
$\langle 1,2\rangle$	2	1
$\langle 1,2,3\rangle$	4	3
$\langle 1,2,3,4\rangle$	4	3
$\langle 1,2,3,4,5\rangle$	-1	5

Búsqueda lineal

- ¿De qué depende la cantidad de veces que se ejecuta el ciclo?
  - Del tamaño de la secuencia
  - De si el valor buscado está o no contenido en la secuencia
- ¿Qué tiene que pasar para que el tiempo de ejecución sea el máximo posible?
  - El elemento no debe estar contenido en la secuencia.
- Esto representa el **peor caso** en tiempo de ejecución.

Búsqueda lineal

- Dada una secuencia cualquiera, ¿cuál es el tiempo máximo (i.e. el peor caso) que puede tardar en ejecutar el programa?

Función `contiene`	T_{exec}	máx.# veces
`int i = 0;`	c_1	1
`while( i < s.size() && s[i] != x ) {`	c_2	$1+\|s\|$
`i=i+1;`	c_3	$\|s\|$
`}`		
`return i < s.size();`	c_4	1

- ¿Cuál es el tiempo máximo de ejecución para una secuencia s? Sea n la longitud de s

$$T_{contiene}(n) = 1 * c_1 + (1+n) * c_2 + n * c_3 + 1 * c_4$$

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Supongamos ahora que la secuencia está ordenada.
- proc *contieneOrdenada*(in $s : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in $x : \mathbb{Z}$, out *result* : Bool){

  Pre {ordenada(s)}

  Post $\{result = true \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \wedge_L s[i] = x)\}$

  }
- ¿Podemos aprovechar que la secuencia está ordenada para crear un programa más eficiente ?
- Ejercicio: Escribir el predicado ordenada(s).

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

Podemos interrumpir la búsqueda tan pronto como verificamos que $s[i] \geq x$.

```
bool contieneOrdenada(vector<int> &s, int x) {
  int i = 0;
  while( i < s.size() && s[i] < x ) {
    i=i+1;
  }
  return (i < s.size() && s[i] == x);
}
```

¿Cuál es el tiempo de ejecución de peor caso?

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Podemos interrumpir la búsqueda tan pronto como verificamos que $s[i] \geq x$.

Función `contieneOrdenado`	T_{exec}	máx.# veces
`int i = 0;`	c'_1	1
`while( i < s.size() && s[i] < x ) {`	c'_2	$1 + \|s\|$
`i=i+1;`	c'_3	$\|s\|$
`}`		
`return (i < s.size() && s[i] == x);`	c'_4	1

- Sea n la longitud de s, ¿cuál es el tiempo de ejecución en el peor caso?

$$T_{contieneOrdenado}(n) = 1 * c'_1 + (1 + n) * c'_2 + n * c'_3 + 1 * c'_4$$

- El tiempo de ejecución de peor caso de `contiene` y `contieneOrdenado` está acotado por la misma función $c * n$.

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- ¿Podemos aprovechar el ordenamiento de la secuencia para mejorar el tiempo de ejecución de peor caso?
- Pensemos en el juego de “Adivinar un número.º “Adivinar el personaje”
  - ¿Necesitamos iterar si $|s| = 0$? Trivialmente, $x \notin s$
  - ¿Necesitamos iterar si $|s| = 1$?Trivialmente, $s[0] == x \leftrightarrow x \in s$
  - ¿Necesitamos iterar si $x < s[0]$? Trivialmente, $x \notin s$
  - ¿Necesitamos iterar si $x \geq s[|s| - 1]$? Trivialmente, $s[|s| - 1] == x \leftrightarrow x \in s$

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

Asumamos por un momento que $|s| > 1 \wedge_L (s[0] \leq x \leq s[|s|-1])$

$\uparrow$ *low*									$\uparrow$ *high*

				?					
$\uparrow$ *low*				$\uparrow$ *mid*					$\uparrow$ *high*

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$					
				$\uparrow$ *low*					$\uparrow$ *high*

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$		?			
				$\uparrow$ *low*		$\uparrow$ *mid*			$\uparrow$ *high*

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$		$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$ *low*		$\uparrow$ *high*			

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	?	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$ *low*	$\uparrow$ *mid*	$\uparrow$ *high*			

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$ *low*	$\uparrow$ *high*				

Si $x \in s$, tiene que estar en la posición *low* de la secuencia.

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$ *low*	$\uparrow$ *high*				

- ¿Qué invariante de ciclo podemos escribir?

$$I \equiv 0 \leq low < high < |s| \wedge_L s[low] \leq x < s[high]$$

- ¿Qué función variante podemos definir?

$$fv = high - low - 1$$

Búsqueda sobre secuencias ordenados

```
boolean contieneOrdenada(int []s, int x) {
    // casos triviales
    if (s.length == 0 ) {
        return false;
    } else if (s.length == 1) {
        return s[0] == x;
    } else if (x<s[0]) {
        return false;
    } else if (x ≥ s[s.length-1]) {
        return s[s.length-1] == x;
    } else {
        // casos no triviales
  ◦ ...
  }
}
```

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

```
        } else {
            // casos no triviales
            int low = 0;
            int high = s.length - 1;
            while( low+1 < high ) {
                int mid = (low+high) / 2;
                if( s[mid] ≤ x ) {
                    low = mid;
                } else {
                    high = mid;
                }
            }
            return s[low] == x;
        }
    }
```

A este algoritmo se lo denomina búsqueda binaria

Búsqueda binaria

- Veamos ahora que este algoritmo es correcto.

$$
\begin{array}{rcl}
P_C & \equiv & ordenada(s) \wedge (|s| > 1 \wedge_L s[0] \leq x \leq s[|s|-1]) \\
 & & \wedge \; low = 0 \wedge high = |s| - 1 \\
Q_C & \equiv & (s[low] = x) \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \wedge_L s[i] = x) \\
B & \equiv & low + 1 < high \\
I & \equiv & 0 \leq low < high < |s| \; \wedge_L \; s[low] \leq x < s[high] \\
fv & = & high - low - 1
\end{array}
$$

Corrección de la búsqueda binaria

- ¿Es I un invariante para el ciclo?
  - El valor de *low* es siempre menor estricto que *high*
  - *low* arranca en 0 y sólo se aumenta
  - *high* arranca en $|s| - 1$ y siempre se disminuye
  - Siempre se respecta que $s[low] \leq x$ y que $x < s[high]$
- ¿A la salida del ciclo se cumple la postcondicion Q_C?
  - Al salir, se cumple que $low + 1 = high$
  - Sabemos que $s[high] > x$ y $s[low] <= x$
  - Como s está ordenada, si $x \in s$, entonces $s[low] = x$

Corrección de la búsqueda binaria

- ¿Es la función variante estrictamente decreciente?
  - Nunca ocurre que $low = high$
  - Por lo tanto, siempre ocurre que $low < mid < high$
  - De este modo, en cada iteración, o bien high es estrictamente menor, o bien low es estrictamente mayor.
  - Por lo tanto, la expresión $high - low - 1$ siempre es estrictamente menor.
- ¿Si la función variante alcanza la cota inferior la guarda se deja de cumplir?
  - Si $high - low - 1 \leq 0$, entonces $high \leq low + 1$.
  - Por lo tanto, no se cumple $(high > low + 1)$, que es la guarda del ciclo

Búsqueda binaria

- ¿Podemos interrumpir el ciclo si encontramos x antes de finalizar las iteraciones?
- Una posibilidad **no recomendada** (no lo hagan en casa!):

```
o..
while( low+1 < high) {
  int mid = (low+high) / 2;
  if( s[mid] < x ) {
    low = mid;
  } else if( s[mid] > x ) {
    high = low;
  } else {
    return true; // Argh!
  }
}
return s[low] == x;
}
```


Búsqueda binaria

- Una posibilidad **aún peor** (ni lo intenten!):

```
bool salir = false;
while( low+1 < high && !salir ) {
  int mid = (low+high) / 2;
  if( s[mid] < x ) {
    low = mid;
  } else if( s[mid] > x ) {
    high = mid;
  } else {
    salir = true; // Puaj!
  }
}

return s[low] == x || s[(low+high)/2] == x;
}
```


Búsqueda binaria

- Si queremos salir del ciclo, el lugar para decirlo es ... la guarda!

```
while( low+1 < high && s[low] != x ) {
  int mid = (low+high) / 2;
  if( s[mid] <= x ) {
    low = mid;
  } else {
    high = mid;
  }
}
return s[low] == x;
}
```

- Usamos fuertemente la condición $s[low] \leq x < s[high]$ del invariante.

Búsqueda binaria

- ¿Cuántas iteraciones realiza el ciclo (en peor caso)?

Número de iteración	$high - low$
0	$\|s\| - 1$
1	$\cong (\|s\| - 1)/2$
2	$\cong (\|s\| - 1)/4$
3	$\cong (\|s\| - 1)/8$
$\vdots$	$\vdots$
t	$\cong (\|s\| - 1)/2^t$

- Sea t la cantidad de iteraciones necesarias para llegar a $high - low = 1$.

$1 = (|s|-1)/2^t$ entonces $2^t = |s|-1$ entonces $t = \log_2(|s|-1)$.

Luego, el tiempo de ejecución de peor caso de la búsqueda binaria es = proporcional a $\log_2 |s|$ y no proporcional a $|s|$.

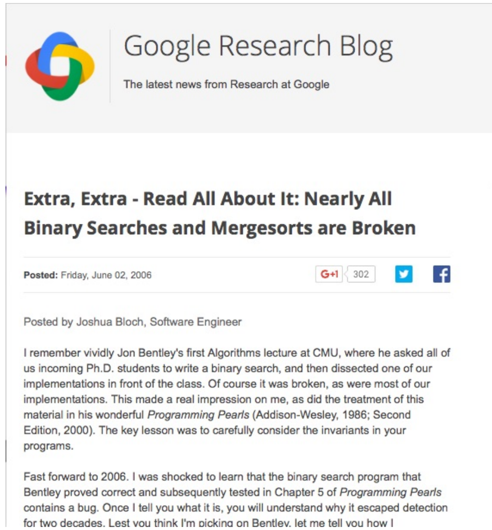
Búsqueda binaria

- ¿Es mejor un algoritmo que ejecuta una cantidad logarítmica de iteraciones?

$\|s\|$	Búsqueda Lineal	Búsqueda Binaria
10	10	4
10^2	100	7
10^6	$1,000,000$	21
$2{,}3 \times 10^7$	$23,000,000$	25
7×10^9	$7,000,000,000$	33 (!)

- Sí! Búsqueda binaria es más eficiente que búsqueda lineal
- Pero, requiere que la secuencia esté ya ordenada.

Bonus Track: Nearly all binary searches are broken!


Google Research Blog

The latest news from Research at Google

Extra, Extra - Read All About It: Nearly All Binary Searches and Mergesorts are Broken

Posted: Friday, June 02, 2006

Posted by Joshua Bloch, Software Engineer

I remember vividly Jon Bentley's first Algorithms lecture at CMU, where he asked all of us incoming Ph.D. students to write a binary search, and then dissected one of our implementations in front of the class. Of course it was broken, as were most of our implementations. This made a real impression on me, as did the treatment of this material in his wonderful *Programming Pearls* (Addison-Wesley, 1986; Second Edition, 2000). The key lesson was to carefully consider the invariants in your programs.

Fast forward to 2006. I was shocked to learn that the binary search program that Bentley proved correct and subsequently tested in Chapter 5 of *Programming Pearls* contains a bug. Once I tell you what it is, you will understand why it escaped detection for two decades. Lest you think I'm picking on Bentley, let me tell you how I

`http://goo.gl/Ww0Cx6`

Nearly all binary searches are broken!

- En 2006 comenzaron a reportarse accesos fuera de rango a vectores dentro de la función `binarySearch` implementada en las bibliotecas estándar de Java.
- En la implementación en Java, los enteros tienen precisión finita, con rango $[-2^{31}, 2^{31} - 1]$.
- Si `low` y `high` son valores muy grandes, al calcular `k` se produce overflow.
- La falla estuvo *dormida* muchos años y se manifestó sólo cuando el tamaño de los vectores creció a la par de la capacidad de memoria de las computadoras.
- Bugfix: Computar `k` evitando el overflow:

```
int mid = low + (high-low)/2;
```


Conclusiones

- La búsqueda binaria implementada en Java estaba formalmente demostrada ...
- ... pero la demostración suponía enteros de precisión infinita (en la mayoría de los lenguajes imperativos son de precisión finita).
  - En AED no nos preocupan los problemas de aritmética de precisión finita (+Info: Orga1).
  - Es importante validar que las hipótesis sobre las que se realizó la demostración valgan en la implementación (aritmética finita, existencia de acceso concurrente, multi-threading, etc.)

Apareo (fusión, merge) de secuencias ordenadas

- **Problema:** Dadas dos secuencias ordenadas, fusionarlas en una única secuencia ordenada.
- El problema es importante per se y como subproblema de otros problemas importantes.
- Especificación:

  proc *merge*(in $a, b : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out $result : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$){
  Pre $\{ordenada(a) \ \wedge \ ordenada(b)\}$
  Post $\{ordenada(result) \ \wedge \ mismos(result, a++b)\}$
  }

  pred *mismos*($s, t : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$){
  $(\forall x : \mathbb{Z})(\#apariciones(s, x) = \#apariciones(t, x)$
  }
- ¿Cómo lo podemos implementar?
  - Podemos copiar los elementos de a y b a la secuencia c, y después ordenar c.
  - Pero no sabemos ordenar ¿Se podrá fusionar ambas secuencias en una única pasada?

Apareo de secuencias ordenadas

Ejemplo:

- $a =$

1	3	5	7	9	
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
i	i	i	i	i	i

- $b =$

2	4	6	8	
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
j	j	j	j	j

- $c =$

?1	?2	?3	?4	?5	?6	?7	?8	?9	
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k

Apareo de secuencias

- ¿Qué invariante de ciclo tiene esta implementación?

$$
\begin{aligned}
I \ \equiv \ & ordenada(a) \wedge ordenada(b) \wedge |c| = |a| + |b| \\
\wedge \ & ((0 \leq i \leq |a| \ \wedge \ 0 \leq j \leq |b| \ \wedge \ k = i + j) \\
\wedge_L \ & (mismos(subseq(a, 0, i) + +subseq(b, 0, j), subseq(c, 0, k)) \\
\wedge \ & ordenada(subseq(c, 0, k)))) \\
\wedge \ & i < |a| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < j \rightarrow_L b[t] \leq a[i]) \\
\wedge \ & j < |b| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < i \rightarrow_L a[t] \leq b[j])
\end{aligned}
$$

- ¿Qué función variante debería tener esta implementación?

$$fv = |a| + |b| - k$$

Apareo de secuencias

```
int[] merge(int[] a, int b[]) {
        int[] c = new int[a.length+b.length];
        int i = 0; // Para recorrer a
        int j = 0; // Para recorrer b
        int k = 0; // Para recorrer c

        while( k < c.length ) {
                if( /*Si tengo que avanzar i */ ) {
                        c[k++] = a[i++];
                } else if(/* Si tengo que avanzar j */)  {
                        c[k++] = b[j++];
                }
        }
        return c;
}
```

- ¿Cuándo tengo que avanzar i? Cuando j está fuera de rango ó cuando i y j están en rango y $a[i] < b[j]$
- ¿Cuándo tengo que avanzar j? Cuando no tengo que avanzar i

Apareo de secuencias

- Al terminar el ciclo, ¿ya está la secuencia c con los valores finales?
- ¿Cuál es el tiempo de ejecución de peor caso de `merge`?
- Sea $n = |c| = |a| + |b|$
- El `while` se ejecuta $n + 1$ veces.
- Por lo tanto, $T_{merge}(n) \in O(n)$

Bibliografía

- David Gries - The Science of Programming
  - Chapter 16 - Developing Invariants (Linear Search, Binary Search)
- Cormen et al. - Introduction to Algorithms
  - Chapter 2.2 -Analyzing algorithms
  - Chapter 3 - Growth of Functions