Resolución parcial del ejercicio 4.c de la guía 3

Esta es una resolución parcial (de una parte) del ejercicio 4c que empezamos a hacer en clase y por cuestiones de tiempo (y porque nos enredamos) no la culminamos

Calcular la wp del programa S:

$$
\begin{array}{lll}
S \equiv & \text{if } (i \geq 1) & \\
 & \quad s[i] := s[i-1] & \big]\ S_1 \\
 & \text{else} & \\
 & \quad s[i] := 0 & \big]\ S_2 \\
 & \text{endIf} &
\end{array}
$$

Con la postcondición Q:

$$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})\left(1 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = s[j-1]\right)$$

Aplicando axioma 4 nos queda:

$$wp(S, Q) \overset{Ax4}{\equiv} def(B) \wedge_L \underbrace{B \wedge wp(S_1, Q)} \vee \neg B \wedge wp(S_2, Q)$$

Vamos a resolver solo lo marcado en **rojo** (lo dificil).

Arrancamos con la guarda y las condiciones para que no se indefina el setAt

$$B \wedge wp(s[i] := s[i-1],\ Q)$$

$$(i > 1) \wedge def(setAt(s, i, s[i-1])) \wedge_L Q^{s}_{setAt(s,i,s[i-1])}$$

$$def(s[i-1]) \wedge_L 0 \leq i < |s|$$

$$0 \leq i-1 < |s| \wedge_L 0 \leq i < |s|$$

$$1 \leq i < |s|$$

Ahora vamos con la poscondición con el reemplazo de s por el setAt(). **Nota**: para simplificar la escritura a la hora de definir el tanto de j ya asumo que |s| = | setAt(s,i,s[i-1]) |

$$(\forall j : \mathbb{Z})(1 \leq j < |s| \rightarrow_L setAt(s, i, s[i-1])[j] = setAt(s, i, s[i-1])[j-1])$$

Ahora, como el *setAt(s,i,s[i-1])* me va a generar una nueva secuencia igual a s en todas las posiciones menos en *i*, tengo que analizar todos los casos donde se indexe a *s* en *i.*

Como a *s* la indexo en *j* y en *j-1*, tengo que separar los casos donde j o j-1 sean iguales a i

Casos:

1) **$j \neq i \wedge j-1 \neq i$**
2) **$j = i$**
3) **$j = i-1$**

Una forma de separar estos casos es a partir del cuantificador original, armar 3 cuantificadores nuevos, donde todo sea igual, pero agregando las condiciones de los casos antes del implica. Lo que da lugar a esto:

$$(\forall j:\mathbb{Z})\left(1 \leq j < |s| \wedge i \neq j \wedge i \neq j-1 \rightarrow_L s[j] = s[j-1]\right) \wedge$$

$$(\forall j:\mathbb{Z})\left(1 \leq j < |s| \wedge i = j \rightarrow_L s[i-1] = s[i-1]\right) \wedge$$

$$(\forall j:\mathbb{Z})\left(1 \leq j < |s| \wedge i = j-1 \rightarrow_L s[i+1] = s[i-1]\right)$$

En el primer caso, dado que ninguna de las dos indexaciones del setAt(s,i,s[i-1]) son en i, cambiamos el setAt() directamente por s por s

En el segundo caso, la primera indexación (a la izquierda del igual) es en j, y dado que j=i, nos queda setAt(s,i,s[i-1])[i] y por definición del setAt, esto es igual a s[i-1]. La segunda indexación (a la derecha del igual), es en j-1, por lo tanto cambiamos a i-1, y por lo tanto podemos cambiar el setAt(s,i,s[i-1]) por s. **Notar que esta expresión es trivialmente True**.

En el tercer caso, tenemos una situación similar a la del segundo caso, pero la indexación sobre i se da en el setAt() de la derecha.

Notar que de esta forma nada queda fuera de rango (como pasó en el pizarrón) ya que mantenemos todo dentro de algún cuantificador, que predica sobre el rango de j, y la variable i queda delimitada por los posibles valores de j

Conclusión: volviendo al planteo original,

$$wp(S, Q) \overset{Ax4}{\equiv} def(B) \land_L \underbrace{B \land wp(S_1, Q)} \lor \neg B \land wp(S_2, Q)$$

Lo marcado en rojo queda resuelto como:

$$1 < i < |s| \land_L$$

$$(\forall j : \mathbb{Z})(1 \leq j < |s| \land i \neq j \land i \neq j-1 \to_L s[j] = s[j-1]) \land$$

$$(\forall j : \mathbb{Z})(1 \leq j < |s| \land i = j-1 \to_L s[i+1] = s[i-1])$$

Notar que el recuadro violeta es el rango que surge de juntar la guarda y el resultado del def(setAt(s,i,s[i-1]))

En resumen, la precondición más débil de esta rama del if es que:

- i sea mayor estricto a i pero no se vaya de la secuencia
- Todos los elementos de la secuencia (menos el que vamos a cambiar y su anterior) sean iguales entre sí
- El anterior al que vamos a cambiar sea igual al posterior