Algoritmos y Estructuras de Datos - DC - UBA

Primer cuatrimestre de 2024

Trabajo práctico 1: Especificación y WP

Normativa

Límite de entrega: Domingo 21 de Abril a las 23:59hs.

Normas de entrega: Subir el pdf a la tarea del campus.

Versión: 3 (08/04/2024 13:30 hs)
Cambios con respecto a la versión 2: se arregla la tabla para el caso A coop, B no-coop. Se cambia la expresión seca por sello. Se aclara que pagos tiene un efecto multiplicativo (paga proporcional a lo que se aportó).

Cambios con respecto a la versión 1: se clarifica que la entrega es por el campus, se arregla el tipo del parámetro apuestas en el ejercicio 5 para que sea de tipo $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$ como en el resto del TP.

Enunciado: "Fondo Monetario Común".

A diferencia de lo que ocurre en la mayor parte del mundo, las Universidades Nacionales en Argentina son públicas, estatales, gratuitas, laicas, abiertas a la sociedad, autónomas, co-gobernadas y generadoras de conocimiento. Esta estructura y funcionamiento tiene sus raíces en una política de estado de más de 100 años: la Ley 1420 promulgada en 1884, la reforma universitaria de 1918 impulsada por el movimiento estudiantil, la gratuidad universitaria promovida durante la primera presidencia Juan Domingo Perón, en 1949. Desde entonces la matrícula universitaria aumentó enormemente. Sin embargo, durante el golpe de estado de 1966 y especialmente durante el golpe de 1976, el número de estudiantes universitarios disminuyó drásticamente. Con el retorno de la democracia se produce una verdadera revolución universitaria. La matrícula pasó de aproximadamente 300 mil 1983 hasta alcanzar los 1.8 millones en el año 2015 [1]. La masividad del acceso a la educación superior no ha reducido la calidad, al contrario. Actualmente la Universidad de Buenos Aires se encuentra entre las mejores universidades del mundo y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) ha avanzado enormemente desde su reactivación en el año 2003, ubicándose actualmente en el top 20 entre 1747 instituciones gubernamentales del mundo, según el ranking Scimago.

En la actualidad, la implementación de una política económica que va en contra del Estado está poniendo en riesgo la continuidad de más de 100 años de educación pública de calidad. Antes de que el proceso sea irreversible, el Consejo Directivo de la facultad ha votado por unanimidad de todos los claustros desarrollar una investigación conjunta para evaluar algunas hipótesis económicas. Debido a la importancia del tema, le han pedido a la materia Algoritmos y Estructuras de Datos que especifique los procedimientos y demuestre la correctitud de los algoritmos del software que se utilizará para estudiar cuáles son los comportamientos óptimos en juegos de apuestas (o inversiones) con intercambio de recursos. En este trabajo práctico comenzaremos estudiando la evolución de los recursos cuando las personas se ven obligadas a apostar todos sus recursos en cada paso temporal, y el intercambio de recursos solo se puede realizar a través de un "fondo monetario común" compuesto por la suma de todos los recursos de las personas que deciden cooperar, que se divide en partes iguales entre todas las personas más allá de que hayan cooperado o no. Alguna de las pregunta que busca responder esta investigación son: ¿Qué recursos puede obtener un individuo basado exclusivamente en su "mérito personal" (sin participar de ningún fondo común)?. ¿Cooperar reduce o aumenta los recursos del propio individuo si todas las personas (o la mayoría) ya están aportando al fondo común? ¿Cuál es la apuesta óptima jugando individualmente, y cuál es la apuesta óptima jugando cooperativamente?.

Consignas

En este trabajo práctico estudiaremos los comportamientos óptimos en un juego de apuestas en el que los individuos se ven obligados a apostar en cada paso temporal todos sus recursos[1]. Cada individuo tendrá su propia secuencia posible de eventos (dado que cada uno tiene su propia suerte, por ejemplo tira su dado). Por ejemplo, supongamos que una casa de apuestas ofrece 2 eventos (0 y 1), aunque luego utilizaremos cualquier número natural para representar una cantidad arbitraria de eventos, pero para pensarlo más fácilmente los llamaremos *cara* y *sello*. Entonces supongamos que tenemos pagos $Q_c = 3$ y $Q_s = 1{,}2$ cuando una moneda sale cara y sello respectivamente. Los recursos que obtenemos apostando una proporción $b_c = b \in [0, 1]$ a cara y $b_s = 1 - b$ a sello luego de dos lanzamientos de la moneda que resultan ser primero cara y

[1]El caso en el que se puede apostar a una única opción pueden verlo en [2]. Y la corrección ergódica a la Teoría de Utilidad Esperada de Von Neumann pueden verla en [3].

luego sello es:

$$\omega_2 = \underbrace{\omega_0\ \overbrace{b\,Q_c}^{\text{Cara}}}_{\omega_1}\ \overbrace{(1-b)\,Q_s}^{\text{Seca}}$$

donde $\omega_0 > 0$ representa los recursos iniciales. En el primer paso temporal el lanzamiento de la moneda resulta ser cara, por lo que los recursos apostados a cara ($\omega_0\, b$) son multiplicados por el pago Q_c dando lugar a nuestros nuevos recursos ω_1 (los recursos apostados a sello ($\omega_0\,(1-b)$) se pierden). En el segundo paso temporal el lanzamiento de la moneda resulta ser sello, por lo que los recursos apostados a sello ($\omega_1\,(1-b)$) son multiplicados por el pago Q_s dando lugar a nuestros nuevos recursos ω_2 (los recursos apostados a cara ($\omega_1\, b$) se pierden).

Podemos ver que individualmente no conviene apostar todos los recursos a ninguna de las opciones, pues en el momento que salga la opción contraria perderemos todos los recursos para siempre. La apuesta óptima (b^*) se encuentra entonces en algún punto intermedio. ¿Cuál es ese punto óptimo b^* a largo plazo (en el que la cantidad de caras y sellos tiende a 50 %/50 %) dado los pagos $Q_c = 3$ y $Q_s = 1.2$? Esa es una pregunta que nos gustaría poder responder. Los recursos que obtengamos con esa apuesta b^* será lo mejor a lo que podemos aspirar basados exclusivamente en nuestro mérito individual (sin participar de ningún mecanismo de cooperación).

En este trabajo práctico vamos a evaluar el efecto sobre los recursos individuales de un "fondo monetario común", compuesto por la suma de recursos de todas las personas que deciden cooperar, y que se divide en partes iguales entre todas las personas **sin importar si ellas cooperaron o no**. En la siguiente tabla mostramos la evolución de los recursos, en los primeros dos pasos temporales, de dos personas que apuestan mitad de los recursos a cara y mitad a sello ($b = 0{,}5$). El

	ω_0	b_xQ_x	ω_1	b_xQ_x	ω_2
A no-coop	1	1,5	1,5	0,6	**0,9**
B no-coop	1	0,6	0,6	1,5	**0,9**
A coop	1	1,5	0,75	0,6	**0,225**
B no-coop	1	0,6	1,35	1,5	**2,25**
A coop	1	1,5	1,05	0,6	**1,1**
B coop	1	0,6	1,05	1,5	**1,1**

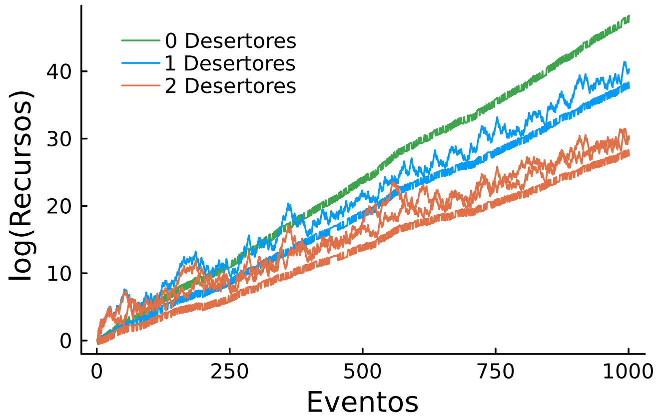
individuo A recibe los eventos $\{\text{cara}, \text{sello}\}$ y el individuo B $\{\text{sello}, \text{cara}\}$. Las columnas $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ representan los recursos individuales en los pasos temporales 0 a 2. Las columnas b_xQ_x representan la tasa de actualización de los recursos (Notar que están con subíndice x porque a cada individuo le toca un b distinto en cada instante (y por consiguiente el subíndice del Q utilizado). Por ejemplo, en el primer paso temporal el individuo A recibe una cara, por lo que su tasa es $b_cQ_c = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$, y en el segundo paso temporal el individuo A recibe una sello, por lo que su tasa de actualización de los recursos es $0{,}6 = b_sQ_s = 0{,}5 \cdot 1{,}2$. Y a la inversa con el individuo B. Las primeras dos filas representan el caso en el que cada individuo juega individualmente, no hay distribución de los recursos entre pasos temporales. Las segundas dos filas representan el caso en el que uno de los individuos coopera y el otro no, por lo que un individuo aporta al fondo común y redistribuye los recursos en partes iguales luego de cada paso temporal. Las terceras dos filas representan el caso en el que ambos individuos aportan al fondo común y redistribuyen los recursos en partes iguales luego de cada paso temporal.

¿A los individuos les conviene no cooperar, evitando entregar recursos propios mientras continúan recibiendo en partes iguales lo recaudado por el "fondo monetario común"? Si eso fuera así, estaríamos frente al "dilema del prisionero" y para pocos jugadores y pasos temporales, parecería que si. En él, cooperar implica un costo c para que el otro individuo reciba un beneficio de valor v, con $v > c$, y desertar significa negarse a cooperar y no conlleva ningún costo.

$$\begin{array}{c c} {}_{\text{Focal}}\diagdown^{\text{Otro}} & \begin{array}{cc} C & \quad D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} v-c & -c \\ v & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Este ejemplo es una dilema debido a que a pesar de que la mutua cooperación sea mejor que la mutua deserción, individualmente desertar siempre es mejor que cooperar. En los juegos de apuestas, sin embargo, esto no es lo que ocurre. Es relativamente fácil prever qué pasaría a mediano plazo si una de las dos personas (tabla) dejara de cooperar de forma unilateral: los recursos de la otra persona se reducirían rápidamente, tendiendo a cero, y quien quería sacar ventaja tendría los mismos resultados que obtendría jugando solo (también tendría a cero). En la siguiente figura se muestra la trayectorias de los recursos de individuos en grupos cooperativos de tamaño 100 con 0, 1 y 2 desertores (no-cooperadores). En la figura podemos ver el crecimiento de los recursos de los individuos dentro de grupos cooperativos (colores) con 0, 1 y 2 desertores. Las trayectorias con mayor variabilidad de un mismo color son los recursos de los individuos desertores, el resto son los cooperadores (al ser todas iguales se superponen). Allí se puede observar que los desertores tienen una tasa de crecimiento menor a mediano plazo de la que tenían cuando cooperaban. El primer agente que decide desertar unilateralmente (grupo azul con 1 desertor) reduce su tasa de crecimiento y sus recursos están por debajo de los recursos que tenía previamente dentro del grupo enteramente cooperador (grupo verde con 0 desertores). La reducción de recursos le ocurre incluso al segundo individuo que cambia de comportamiento cooperador a desertor. En todos los casos, la tasa de crecimiento se maximiza mediante mutua cooperación.

Especifiquemos y verifiquemos algunas de las funciones que necesitamos para evaluar cuáles son los comportamiento óptimos en juegos de apuestas.



0. Aclaraciones generales

- Los índices de las listas *recursos, cooperan, trayectorias, apuestas, pagos, eventos* representa el identificador de los individuos.
- *recursos*: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$ es la lista con el recurso de cada individuo.
- *cooperan*: $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$ es la lista que indica $True$ si el individuo en dicha posición coopera.
- *trayectorias*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, en cada paso de tiempos, cuántos recursos ($\mathbb{R}$) cuenta.
- *eventos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, en cada paso temporal, qué evento le ha tocado.
- *apuestas*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, para cada evento posible (numerados desde 0), cuánto apostará.
- *pagos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, para cada evento, cuánto se pagará por cada recurso apostado. Notar que a diferencia del ejemplo, estamos resolviendo un caso más general donde el pago de cada evento puede diferir por individuo.
- Las personas que no *cooperan* no aportan nada al fondo monetario común.
- Los *recursos* iniciales son positivos.
- Todos los *pagos* son positivos.
- Las *apuestas* de los individuos representan la proporción de los recursos que los individuos invierten a cada una de los eventos posibles. Notar nuevamente que a diferencia del ejemplo, en este caso más general, podríamos tener apuestas distintas para cada evento por cada individuo.
- Cada individuo apuesta siempre el mismo porcentaje por cada evento posible (es decir, el mismo número en cada paso temporal). Por ejemplo, si tenemos dos eventos; cara y sello y apuesta $0,4$ por cara y 0,6 por sello, en cada paso temporal apostará esas proporciones.

1. Especificación

De acuerdo a la descripción de las reglas se pide especificar los siguientes problemas.

1. **redistribucionDeLosFrutos**: Calcula los recursos que obtiene cada uno de los individuos luego de que se redistribuyen los recursos del fondo monetario común en partes iguales. El fondo monetario común se compone de la suma de *recursos* iniciales aportados por todas las personas que *cooperan*. La salida es la lista de recursos que tendrá cada jugador.

   `proc redistribucionDeLosFrutos` (in *recursos*: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in *cooperan*: $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$) : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$

2. **trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo**: Actualiza (In/Out) la lista de *trayectorias* de los los recursos de cada uno de los individuos. Inicialmente, cada una de las trayectorias (listas de recursos) contiene un único elemento que representa los recursos iniciales del individuo. El procedimiento agrega a las *trayectorias* los recursos que los individuos van obteniendo a medida que se van produciendo los resultados de los *eventos* en función de la lista de *pagos* que le ofrece la naturaleza (o casa de apuestas) a cada uno de los individuos, las *apuestas* (o inversiones) que realizan los individuos en cada paso temporal, y la lista de individuos que *cooperan* aportando al fondo monetario común.

   `proc trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo` (inout *trayectorias*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in *cooperan*: $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$, in *apuestas*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in *pagos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in *eventos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$)

3. **trayectoriaExtrañaEscalera** Esta función devuelve $True$ sii en la trayectoria de un individuo existe un único punto mayor a sus vecinos (llamado máximo local). Un elemento es máximo local si es mayor estricto que sus vecinos inmediatos.

   `proc trayectoriaExtrañaEscalera` (in *trayectoria*: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$) : Bool

4. **individuoDecideSiCooperarONo** Un *individuo* actualiza su comportamiento cooperativo / no-cooperativo (*cooperan*[*individuo*]) en función de los *recursos* iniciales, de quienes *cooperan*, de los *pagos* que se le ofrecen a cada individuo, de las inversiones o *apuestas* de cada individuo, y del resultado los *eventos* que recibe cada individuo, eligiendo el comportamiento que maximiza sus recursos individuales luego de que ocurren todos los eventos.

   `proc individuoDecideSiCooperarONo` (in *individuo*: $\mathbb{N}$, in *recursos*: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, inout *cooperan*: $seq\langle \mathsf{Bool}\rangle$, in *apuestas*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in *pagos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in *eventos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$)

5. **individuoActualizaApuesta** Un *individuo* actualiza su apuesta (*apuestas*[*individuo*]) en función de los *recursos* iniciales, de la lista de individuos que *cooperan*, de los *pagos* que se le ofrecen a cada individuo, de las inversiones o *apuestas* de cada individuo y del resultado los *eventos* que recibe cada individuo, eligiendo la apuesta que maximiza sus recursos individuales luego de que ocurren todos los eventos.

   `proc individuoActualizaApuesta` (in *individuo*: $\mathbb{N}$, in *recursos*: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$ in *cooperan*: $seq\langle \mathsf{Bool}\rangle$, inout *apuestas*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in *pagos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in *eventos*: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$)

2. Demostraciones de correctitud

Demostrar que la siguiente especificación es correcta respecto de su implementación.
La función **frutoDelTrabajoPuramenteIndividual** calcula, para el ejemplo de apuestas al juego de cara o sello, cuánto se ganaría si se juega completamente solo. Se contempla que el evento $True$ es cuando sale cara.

`proc frutoDelTrabajoPuramenteIndividual` (in *recurso*: $\mathbb{R}$, in *apuesta*: $\langle s:\mathbb{R}, c:\mathbb{R}\rangle$, in *pago*: $\langle s:\mathbb{R}, c:\mathbb{R}\rangle$, in *eventos*: $seq\langle \mathsf{Bool}\rangle$, out *res*: $\mathbb{R}$)
  `requiere` $\{apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0\}$
  `asegura` $\{res = recurso (apuesta_c\, pago_c)^{\#\mathtt{apariciones}(eventos,T)}\, (apuesta_s\, pago_s)^{\#\mathtt{apariciones}(eventos,F)}\}$

Donde $\#\mathtt{apariciones}(eventos, T)$ es el auxiliar utilizado en la téorica, y $\#(eventos, T)$ es su abreviación.

```
res = recursos
i = 0
while (i < |eventos|) do
    if eventos[i] then
        res = (res * apuesta.c) * pago.c
    else
        res = (res * apuesta.s) * pago.s
    endif
    i = i + 1
endwhile
```

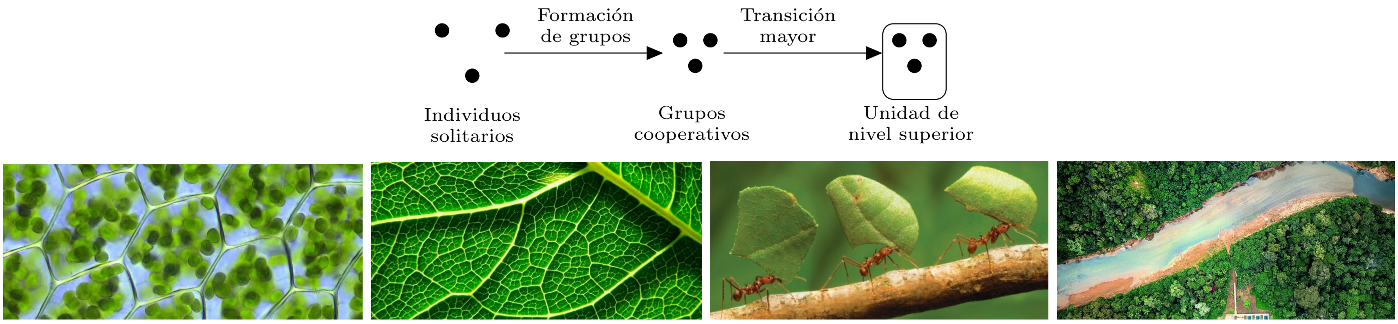
Anexo

No cualquier función de costo garantiza el aprendizaje. Este punto ya fue expresado en 1956 por John L Kelly en su artículo "A new interpretation of information rate" [2] aprobado por su colega de laboratorio Claude Shannon.

> The cost function approach [..] can actually be used to analyze nearly any branch of human endeavor. The utility theory of Von Neumann shows us one way to obtain such a cost function. The point here is that an arbitrary combination of a statistical transducer (i.e., a channel) and a cost function does not necessarily constitute a communication system. What can be done, however, is to take some real-life situation which seems to possess the essential features of a communication problem, and to analyze it without the introduction of an arbitrary cost function. The situation which will be chosen here is one in which a gambler uses knowledge of the received symbols of a communication channel in order to make profitable bets on the transmitted symbols.

El problema de apuestas que estamos estudiando tiene una estructura multiplicativa. A su vez, la selección natural de las formas de vida, por secuencia de tasas de supervivencia y reproducción, como la selección de las hipótesis en la teoría de la probabilidad, por secuencias de predicciones, son también de naturaleza multiplicativa: un único cero en la secuencia produce una extinción irreversible en evolución o hace falsa para siempre las hipótesis en probabilidad. Debido a que en los procesos multiplicativos los impactos de las pérdidas son más fuertes que los impactos de las ganancias, las hipótesis y formas de vida que emergen en probabilidad y evolución son aquellas que logran reducir las fluctuaciones (evitando el peor caso) por diversificación individual, por cooperación, por especialización cooperativa y por heterogeneidad cooperativa [2, 4, 5].

La complejidad actual de la vida es consecuencia de una serie de *transiciones evolutivas mayores* en las que entidades capaces de autorreplicación luego de la transición pasan a formar parte de unidades cooperativas indisolubles [6, 7]. De hecho, nuestra propia vida depende de varios niveles de cooperación con especialización heterogénea, sin los cuales no somos capaces de sobrevivir: la unión de la células con la mitocondria; nuestro organismo multicelular y la emergencia de los órganos; la sociedad y la emergencia de los roles y grupos; la coexistencia entre especies y la emergencia de los ecosistemas. Algo parecido ocurre con la evaluación de las hipótesis en probabilidad: las hipótesis elementales se agrupan para formar variables, las variables se relacionan entre sí para formar modelos causales, y los sistemas de modelos causales se ensamblan para forman teorías causales. Una estimación de biomasa realizada recientemente [8] indica que el 82,5 % corresponde al



Células eucariota | Organismos | Sociedades | Ecosistemas

reino de las plantas, el 12,8 % a las bacterias, el 2.2 % a los hongos, y 0.36 % a los animales. En la historia del ser humano, el surgimiento de la cooperación de conocimientos entre individuos (o cultura) tuvo efectos positivos radicales [9]: antes de la transición cultural estuvimos en grave peligro de extinción, lo que se evidencia en la baja diversidad del genoma humano respecto de las especies más cercanas, como los chimpancés; luego de la transición cultural fuimos capaces de ocupar todos los nichos ecológicos de la tierra como ningún otro vertebrado terrestre lo había logrado antes. El extraordinario crecimiento poblacional del ser humano está vinculado a una interacción simbiótica prolongada con especies vegetales y animales que produjo la emergencia de la agricultura hace aproximadamente 10.000 años. Sin embargo, nuestra biomasa representa actualmente tan solo el 0,0009 % de la biomasa total (2,5 % de la biomasa animal), y las proyecciones indican que estamos a menos de un siglo del estancamiento. Lo cierto es que este límite a la biomasa humana no está impuesto por la capacidad de la biosfera, sino por nuestra incapacidad actual para integrarnos de forma orgánica en los sistemas ecológicos que la componen. Los hongos lograron ocupar el tercer lugar en biomasa gracias que el 80 % de las plantas están asociadas en un sistema de intercambios recíprocos con los *arbuscule mycorrhizae*, que desde hace 400 millones de años conectan de forma subterránea a las plantas entre sí, transportando recursos de un punto del ecosistema al otro [10] (o ver charla de Kiers).

Referencias

[1] Buchbinder P. El sistema universitario argentino: una lectura de sus transformaciones en el largo plazo (1983-2015). Revista de la educación superior. 2020;49(193):45–64.

[2] Kelly JL. A new interpretation of information rate. The bell system technical journal. 1956;35(4):917–926.

[3] Peters O, Adamou A. The time interpretation of expected utility theory. arXiv preprint arXiv:180103680. 2021;.

[4] Peters O. The ergodicity problem in economics. Nature Physics. 2019;15(12):1216–1221.

[5] Landfried G. Las propiedades de la función de costo epistémico-evolutiva. Preprint GitHub. 2023;.

[6] Szathmáry E, Maynard Smith J. The major evolutionary transitions. Nature. 1995;374(6519):227–232.

[7] Szathmáry E. Toward major evolutionary transitions theory 2.0. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2015;112(33):10104–10111.

[8] Bar-On YM, Phillips R, Milo R. The biomass distribution on Earth. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2018;115(25):6506–6511.

[9] Hrdy SB. Mothers and others: The Evolutionary Origins of Mutual Understanding. Harvard University Press; 2009.

[10] Kiers ET, Duhamel M, Beesetty Y, Mensah JA, Franken O, Verbruggen E, et al. Reciprocal rewards stabilize cooperation in the mycorrhizal symbiosis. science. 2011;333(6044):880–882.