

§ 5 矩阵的逆

矩阵的一种运算

①什么样的可逆

②怎么求逆

5.1 可逆矩阵的定义

一元一次方程 $ax = b$, 当 $a \neq 0$ 时两边乘以 $\frac{1}{a}$ 得 $x = \frac{b}{a}$, 且 $\frac{1}{a}$ 具有下列性质:

$$\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

类似地, 可引入可逆矩阵的概念:

定义: 对**方阵** A , 若存在矩阵 B , 满足 $AB = BA = I$, 则称 A 是可逆的(**invertible**). 称 B 是 A 的逆矩阵(**inverse matrix**), 记作 A^{-1} .

不可逆矩阵也称为奇异矩阵(**singular matrix**), 而可逆矩阵也称为非奇异矩阵(**nonsingular matrix**).

注: 存在不可逆方阵, 如 $0, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.1 可逆矩阵的定义

A 可逆, 存在 B 使 $BA=I$
 $\Rightarrow A$ 可逆 注: AB 与 BA 可交换
 $A = AI = ABA = \underbrace{(AB)}_I A$
 $AB=I$ 为什么这么定义?

定义: 对方阵 A , 若存在矩阵 B , 满足 $AB = BA = I$, 则称 A 是可逆的(invertible), 称 B 是 A 的逆矩阵(inverse matrix), 记作 A^{-1} .

不可逆矩阵也称为奇异矩阵(singular matrix), 而可逆矩阵也称为非奇异矩阵(nonsingular matrix).

注: 存在不可逆方阵, 如 $0, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. \rightarrow 待定系数法

5.2 矩阵可逆的性质

(1)若方阵 A 满足 $AB = I, CA = I$, 则 $B = C$. 特别的, 方阵的逆唯一.

证明: $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$.

可逆的一定是方阵

5.2 矩阵可逆的性质

(2) 若 A 可逆, 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
也可推导^①

证明: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 两边乘 A^{-1} , 得 $\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

① $\forall \mathbf{b}$, 取 \mathbf{b} 为 \mathbf{e}_j
 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j$ $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = I$ } 求矩阵逆
的核心想法

5.2 矩阵可逆的性质

(3) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\iff A$ 不可逆.

(4) 2×2 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆 $\iff \underbrace{ad - bc}_{\substack{\text{det } A \\ \downarrow \\ \text{判断可逆与否}}} \neq 0$, 且 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

例: 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $3 \times 6 - 4 \times 5 = -2 \neq 0$, 故 A 可逆,

且 $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

5.2 矩阵可逆的性质

(5) 对角矩阵 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ 可逆 $\iff d_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$,

$$\text{且 } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix}.$$

(6) 若方阵 A, B 满足 $AB = I$, 则 $BA = I$, 且 $A^{-1} = B$.

5.2 矩阵可逆的性质

定理:(1)若 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

(2)若 n 阶方阵 A 和 B 都可逆, 则 AB 可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3)若 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$$

5.3 初等矩阵的逆

例

$$E_{21}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

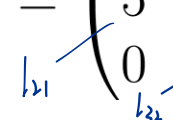
$$D_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{21}(-5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{21}(5) \quad P_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{12} \quad D_2(c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/c & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

小结：初等矩阵 E 都是可逆的, 其逆把 E 变回 I .

5.3 初等矩阵的逆

$$E_{32}(-4)E_{21}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 20 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{21}(-5)^{-1}E_{32}(-4)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$


5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

两个方程组有相同系数矩阵,可以一起消元.增广矩阵写成 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right)$
通过初等矩阵来记录消元过程.

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

方法：Gauss-Jordan消元法

$$(A \vdots I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - 3r_2]{\text{Gauss} \quad \text{Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (I \vdots A^{-1})$$

因此 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

总结：设 A 可逆, 则

$$\left(A \middle| I_n \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(I_n \middle| A^{-1} \right).$$



W. Jordan

德国大地测量学家
Wilhelm Jordan(1842-
1899)改进了Gauss消
元法.

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

例：求 $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆.

$$\begin{aligned} \text{解: } (K \vdash I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - (-\frac{1}{2})r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 - (-\frac{2}{3})r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 + \frac{3}{4}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{r_1 + \frac{2}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[r_3 \cdot \frac{3}{4}]{r_1 \cdot \frac{1}{2}, r_2 \cdot \frac{2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array} \right) = (I \vdots K^{-1})
 \end{aligned}$$

因此 $K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

K 零元比较多
K⁻¹ 无零元

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

由Gauss-Jordan消元法求逆矩阵的过程知：

设 A 可逆, 则 A 可经过一系列初等行变换化成单位矩阵 I . 因此有初等矩阵 E_1, E_2, \dots, E_k 使得

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

故 $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$, $A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$.

- A 可逆 $\implies A$ 可表示成一系列初等矩阵的乘积

$$\iff$$

- $\underbrace{E_k \cdots E_1}_{A^{-1}} (A \vdots I) = (I \vdots A^{-1}).$

5.5 矩阵可逆与主元个数

由Gauss-Jordan消元法求逆的过程还可以得到

定理: n 阶矩阵 A 可逆 $\iff A$ 有 n 个主元 → 由 Gauss-Jordan 消元法得出的

证明: \Leftarrow 若 n 阶方阵 A 有 n 个主元, 则方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i (1 \leq i \leq n)$ 分别有唯一解 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. 则 $A(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n) = I$, 得 A 的右逆.

此时, A 可经过一系列初等行变换化为单位矩阵, 即存在初等矩阵 E_1, E_2, \dots, E_k , 使得 $E_k \cdots E_1 A = I$, 于是得 A 的左逆.

对方阵 A , 右逆 = 左逆 = 逆, 故 A 可逆.

5.5 矩阵可逆与主元个数

\implies) 设 A 可逆, 即存在矩阵 B , 使 $AB = BA = I$.

假设 A 没有 n 个主元, 则对 A 用初等行变换必产生一个零行, 即存在初等矩阵的乘积 E 使 EA 有零行.

于是 $(EA)B = E(AB) = E$ 也有零行, 这与 E 是初等矩阵的乘积矛盾.

因此 n 阶可逆方阵 A 必有 n 个主元.

由证明过程知

定理: 若对 n 阶方阵 A 有 $AB = I$, 则 $BA = I$, 且 $B = A^{-1}$.

5.6 下三角矩阵的逆

主对角线下(上)方元素全为零的方阵称为上(下)三角矩阵.

例: $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ a_2 b_1 + a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$

一般地, 不难证明:

定理: 两个 n 阶下(上)三角矩阵 A 与 B 的乘积仍为下(上)三角矩阵,
且 AB 的主对角元等于 A 与 B 的相应主对角元的乘积.

5.6 下三角矩阵的逆

例: 设 $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 L^{-1} .

$$\begin{aligned} \text{解: } (L \vdots I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -5 & 1 \end{array} \right) = (I \vdots L^{-1}). \end{aligned}$$

因此 $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$

5.6 下三角矩阵的逆

一般地,

定理: 下三角矩阵可逆 \iff 主对角元素都非零.

可逆下三角矩阵的逆也是下三角阵.

若原矩阵对角元素都是 1, 则逆的对角元也都是 1.

5.7 分块矩阵的消元和逆

考虑分块矩阵 $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$, 其中 A 可逆.

则可进行分块矩阵的初等行变换, 使之变成分块上三角矩阵:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D - CA^{-1}B \end{array}\right).$$

使用分块初等矩阵, 即有

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D - CA^{-1}B \end{array}\right).$$

5.7 分块矩阵的消元和逆

为把一般分块矩阵变为分块上三角矩阵, 称下列三种变换为分块矩阵的初等行变换:

1. 把一个块行减去另一块行左乘以 P ;
2. 两个块行互换位置;
3. 用一个可逆矩阵左乘某一块行.

类似有分块矩阵的初等列变换, 则需要用矩阵作右乘.

5.7 分块矩阵的消元和逆

相应得分块初等矩阵, 如

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C - PA & D - PB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$$

5.7 分块矩阵的消元和逆

例：设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ 为可逆的分块上三角矩阵, 其中 A_{11} 是 $p \times p$ 矩阵, A_{22} 为 $q \times q$ 矩阵. 求 A^{-1} .

解：用 B 表示 A^{-1} 且把它分块使 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$.

故有 $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p, \quad A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0,$
 $A_{22}B_{21} = 0, \quad A_{22}B_{22} = I_q.$

由此解得 $B_{22} = A_{22}^{-1}, B_{21} = 0, B_{11} = A_{11}^{-1}, B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}.$
于是 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$

- 分块上三角矩阵可逆 \iff 主对角线上各分块都是可逆的.