

§ 6 LU 分解

6.1 LU 分解

LU分解: 简化表示与运算

初等行变换

回忆消元法的过程: 方阵 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 上三角矩阵 U .

使用矩阵语言: $EA = U$, E 是初等矩阵的乘积.

$$\begin{aligned} \text{例: } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = U & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{21}} A = U \\ \implies A = E_{21}^{-1} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

目标: 将矩阵 A 分解成一个下三角矩阵(lower triangular matrix) 和一个上三角矩阵(upper triangular matrix)的乘积.

6.1 LU 分解

看三阶方阵的情形：

设不需做换行， A 经**Gauss**消元法变为上三角阵 U .

即 $(E_{32}E_{31}E_{21})A = U$.

于是 $A = (E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1})U = LU$.

消去矩阵为下三角矩阵. 下三角矩阵的逆、乘积均是下三角矩阵.

6.1 LU 分解

问题：为什么用 $A = LU$, 而非 $U = (E_{32}E_{31}E_{21})A$?

例： $E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, E_{31} = I_3, E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = L$$

6.1 LU 分解

- L 容易计算, E 不易计算.
- L 只包含消去信息, E 包含其他信息.
- L 是这样得到的: 将消元的系数写在相应位置上.

$$n = 3, A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}}_L U \quad \text{记 } A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix},$$

代入得

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - l_{21}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - l_{31}\mathbf{u}_1 - l_{32}\mathbf{u}_2.$$

“ l_{ij} ”表示把矩阵的第 i 行减去第 j 行的 l_{ij} 倍.

6.1 LU 分解

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1 \times (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2 \times (-\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = U$$
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = LU.$$

U 为上三角矩阵, 对角元为 A 的主元.

L 为下三角矩阵, 对角元为 1, 乘数 l_{ij} 位于对角元下方.

6.1 LU 分解

有时, U 写成 $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix}$

例: 上例中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDU.$$

其中 D 为对角阵, U 为上三角阵, L 为下三角阵, L 和 U 的对角元都是 1.

6.2 用 LU 分解解线性方程组

若 $A = LU$, 则方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 变为 $L\mathbf{c} = \mathbf{b}$ (下三角形方程组)
 $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ (上三角形方程组)

例: 已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = LU,$$

应用 A 的 LU 分解来解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix}$.

6.2 用 LU 分解解线性方程组

解: $L\mathbf{c} = \mathbf{b} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix} \implies \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix},$

$U\mathbf{x} = \mathbf{c} : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$

不计求 LU 分解的运算在内, 解两个三角方程组 $L\mathbf{c} = \mathbf{b}$ 和 $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ 比直接解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 简单.

6.2 用 LU 分解解线性方程组

实际问题中常需解一系列具有相同系数矩阵的线性方程组

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_p.$$

当 A 可逆时, 可求 A^{-1} , 再求 $A^{-1}\mathbf{b}_1, A^{-1}\mathbf{b}_2, \dots, A^{-1}\mathbf{b}_p$.

实践中,

1. 用消元法解第一个方程组, 同时得到 A 的 LU 分解;
2. 用 LU 分解解剩下的方程组.

6.3 消元法的计算量

问题：设 A 为 n 阶矩阵，用 Gauss 消元法解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 需多少次加减乘除运算？

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & * & * & * \end{pmatrix}, \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- 求乘数 $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} (i = 2, \dots, n)$ 共需 $n - 1$ 次除法.
- $l_{i1}a_{1j}, l_{i1}b_1 (i, j = 2, \dots, n)$ 共需 $n(n - 1)$ 次乘法.
- $a_{ij} - l_{i1}a_{1j}, b_i - l_{i1}b_1 (i, j = 2, \dots, n)$ 共需 $n(n - 1)$ 次减法.

$$\implies A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{pmatrix}, \text{对 } n - 1 \text{ 阶矩阵继续消元, } \dots$$

6.3 消元法的计算量

所以，消元法一般过程含乘除法次数为

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} \approx \frac{n^3}{3}.$$

含加减法次数为

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+1) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \approx \frac{n^3}{3}.$$

回代过程：含乘除法次数为 $\frac{n(n+1)}{2}$ ，含加减法次数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 。

因此，**Gauss**消元法的计算量为

$$\begin{aligned} \text{含乘除法次数} &= \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \approx \frac{n^3}{3} \\ \text{加减法次数} &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \approx \frac{n^3}{3} \end{aligned}$$

6.4 LU 分解的存在性和唯一性

并非每个矩阵 A 都有 LU 分解, 即使 A 可逆.

例: 若 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = LU,$

则 $u_{11} = 0, u_{12} = 1, 2 = l_{21} \cdot 0$?

问题: 若可逆矩阵 A 有 LU 分解, 则 A 应满足什么条件?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

设 A_k 是 A 的左上角的 $k \times k$ 子矩阵, 称为 A 的 k 阶顺序主子阵.

6.4 LU 分解的存在性和唯一性

定理：设可逆矩阵 A 的顺序主子阵 $A_k (k = 1, \dots, n)$ 均为可逆阵，则 A 有 LU 分解.

证明：对 A 的阶数 n 用数学归纳法.

$n = 1$ 时, $L = (1), U = A = (a_{11}) \neq 0$, 定理成立.

假设 $n = k$ 时定理成立, 则 $n = k + 1$ 时,

$$A = \begin{pmatrix} A_k & \beta \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 β 是 k 维列向量, α^T 是 k 维行向量.

6.4 LU 分解的存在性和唯一性

由 A_k 可逆, 对 A 作消元: $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -\alpha^T A_k^{-1} & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} A_k & \beta \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_k^{-1} \beta \end{pmatrix}.$

$$\text{即 } A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \alpha^T A_k^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & \beta \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_k^{-1} \beta \end{pmatrix}.$$

由归纳假设, $A_k = L_k U_k$.

$$\text{故 } A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \alpha^T A_k^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & L_k^{-1} \beta \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_k^{-1} \beta \end{pmatrix} = LU.$$

定理得证.

6.4 LU 分解的存在性和唯一性

定理：设 n 阶可逆阵 A 有 $A = LU$,其中 L 为下三角矩阵, U 为上三角矩阵,且 $l_{ii} = 1, u_{ii} \neq 0 (1 \leq i \leq n)$,则分解唯一.

证明：设可逆阵 A 有两个 LU 分解： $A = L_1U_1 = L_2U_2$, 则

$$L_1^{-1}L_2 = U_1U_2^{-1}$$

为对角阵. 因 L_1, L_2 的对角元为1, 故 $L_1^{-1}L_2$ 对角元全为1. 故 $L_1^{-1}L_2 = U_1U_2^{-1} = I$, 即 $L_1 = L_2, U_1 = U_2$.

同理, 设可逆矩阵 $A = LDU$, 则分解唯一.

6.5 对称矩阵的 LDL^T 分解

设可逆对称矩阵 A 不需换行，只通过消元能化成上三角矩阵 U ，即有 $A = LDU$ ，则 $A = A^T = U^T D L^T$ 。

由 LDU 分解唯一性知 $U = L^T$ 。

故 $A = LDL^T$ 。

$$\begin{aligned} \text{例: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} && LU \text{ 分解} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && LDL^T \text{ 分解} \end{aligned}$$

6.5 对称矩阵的 LDL^T 分解

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3 - (-r_2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = LDL^T.$$

6.6 置换矩阵

定义：一个 n 元置换是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列. 这诱导了 n 阶单位矩阵行的一个重排. 单位阵行重排后得到的矩阵称为置换阵.

注： $1, 3, 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $3, 1, 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

例：所有 2×2 置换阵为 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.6 置换矩阵

所有 3×3 置换阵为

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{32}P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_{21}P_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 共有 $n!$ 个 n 阶置换阵.
- 置换阵的逆还是置换阵, 置换阵的乘积仍是置换阵.
- 置换阵 P 满足 $P^{-1} = P^T$.

6.7 $PA = LU$ 分解

定理：设 A 是一个 n 阶可逆阵，则存在置换阵 P ，使得 $PA = LU$ 。

证明：对矩阵 A 的阶数 n 用数学归纳法。

$n = 1$ 时定理显然成立。假设 $n = k$ 时定理成立。

$n = k + 1$ 时， A 的第一列有非零元，否则 A 不可逆。

设 $a_{i1} \neq 0$ ，则调换第 1 行和第 i 行，得矩阵 A' 。于是 $A' = P_{i1}A$ 也可逆。

对 A' 作消元得 $A'' = \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ ，且 $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & I \end{pmatrix} A''$ 。

6.7 $PA = LU$ 分解 是由 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 变换来的

A_1 为 $n - 1$ 阶可逆阵, 由归纳假设知, 存在 $n - 1$ 阶置换阵 P_1 使得 $P_1 A_1 = L_1 U_1$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } P_{i1} A = A' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_1 t & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} P_{i1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_1 t & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} = LU.$$

最后令 $P = \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} P_{i1}$, 则 $PA = LU$.

6.7 $PA = LU$ 分解

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = LU.$$

6.7 $PA = LU$ 分解

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \longleftarrow r_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \longleftarrow r_4]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = U.$$

$$\implies U = E_{43}(-3)P_{42}E_{41}(-2)P_{31}A$$

$$\implies A = P_{31}E_{41}(2)P_{42}E_{43}(3)U.$$

6.7 $PA = LU$ 分解

注意到

顺序不同, 换行
不同

$$E_{41}(2)P_{42} = P_{42}E_{21}(2)$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{P_{31}P_{42}}_P \underbrace{E_{21}(2)E_{43}(3)}_L U = PLU$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$