§8 求解齐次线性方程组

8.1 引言

给定一个矩阵A ($m \times n$ 阶), 可以结合两个子空间.

1.列空间(column space) $C(A)=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m|\mathbf{y}=A\mathbf{x},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\}$ 是$\mathbb{R}^m$的子空间. $C(A)=\{A$的列向量(m 维)的全部线性组合

2.零空间(null space) $N(A)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n|A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$是 $\mathbb{R}^n$的子空间.

$N(A)=\{A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的 $\boxed{\text{“某些” 解向量的全体线性组合}}\}$.

本节内容进一步分析这些解向量

8.1 引言

性质：(1) $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解 $\Longleftrightarrow \mathbf{b}\in C(A)$.

(2)设 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个特解为 $\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}^n$, 则 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解集为

$$\mathbf{x}^*+N(A)=\{\mathbf{x}^*+\alpha|\alpha\in N(A)\}.$$

一般地, $N(A)$ 含无穷个向量. 但是这些向量可以只用有限个 “特殊” 的向量(即互相独立，线性无关)线性组合得出.

本节内容重点

8.1 引言

例 1：$2x+3y+z=0$ 的解集 $N(A)=$ 一平面. 如何写出全部解(或平面上所有点)呢？

检查 $\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ 是两个独立的解, $\forall\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in N(A)$ 都是 $\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ 的线性组合：

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\-2a-3b\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}+(b-a)\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

如果取两个特殊解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix}a\\b\\-2a-3b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}.$

方便表达

8.1 引言

这两个特殊解是这样得到的. $2x+3y+z=0 \Longrightarrow$

$$z=-2x-3y \Longleftrightarrow \begin{cases} x = & x & \\ y = & & y \\ z = & -2x & -3y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} y.$$

x, y 任意取, 所以 $N(A) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$,
其中 $A = (2\ 3\ 1)$.

问：一般情况下，求 $N(A)$的特殊解，使得$N(A)=$这些特殊解的全部线性组合？

"好"：（1）线性无关；（2）能够表达其他的解

8.2 基础解系

例2：$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -3 & -2 & 3\end{pmatrix}=U,$$

U是一个阶梯矩阵(echelon form), $1,-3$是第一二行主元, 且 $N(A)=N(U)$.

8.2 基础解系

继续消元得

$$U=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -3 & -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{7}{3} & -1\\ 0 & -3 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{7}{3} & -1\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}=U_0,$$

U_0 称为简化行阶梯形(reduced row echelon form), 即消去主元所在列的其余元素, 且主元化为1.

8.2 基础解系

$N(A) = N(U) = N(U_0), U_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 即

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & & +\frac{7}{3}x_3 & -x_4 & =0 \\ & x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & -x_4 & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rlrr} x_1 = & -\frac{7}{3}x_3 & +x_4 \\ x_2 = & -\frac{2}{3}x_3 & +x_4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3, x_4 \in \mathbb{R},$$

$$N(A) = N(U_0) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

8.2 基础解系

由例1, 例 2, 主元对应的未知量称为主变量, 设为$x_{i_1},\cdots,x_{i_r}$,
其余变量为自由变量, 设为 $x_{i_{r+1}},\cdots,x_{i_n}$.
若干特殊解向量($n-r$ 个)称为基础解系.

定理：设 A 是一个$m\times n$ 阶矩阵，则只经过行变换，A 可化成一个行阶梯形矩阵 U, 最终化成行最简约阶梯形矩阵U_0.

不唯一　　　　唯一

8.2 基础解系

例 3：$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

解：$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{33}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_0.$$

8.2 基础解系

即 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{33}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_3 + \frac{7}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \end{cases}$，$x_2, x_4, x_5$ 是自由变量.

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - \frac{33}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = -\frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{33}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_2\alpha_1 + x_4\alpha_2 + x_5\alpha_3,$$

系数确定之后怎么用主变量表示也是确定了，主变量因此也需要表示成其他向量的形式

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 称为基础解系.

$$N(A) = \{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 | c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

8.2 基础解系

定理：基础解系中的向量线性无关.

正如上例, α_1 是取 $x_2 = 1, x_4 = x_5 = 0$ 得到的解向量;

α_2 是取 $x_4 = 1, x_2 = x_5 = 0$ 得到的解向量;

α_3 是取 $x_5 = 1, x_2 = x_4 = 0$ 得到的解向量.

因此，只看 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的 $2, 4, 5$ 三分量得到的子向量恰好是

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \text{它们线性无关} \Longrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性无关.}$$

一个定理

8.2 基础解系

注：数量规律

1.主元个数 $=$ 未知量个数(A 的列数) $-$ 自由变量个数.

2.自由变量个数 $=$ 基础解系向量个数

$=$ 无关解向量个数.

3.主元个数 $=$ A 的列向量中无关向量个数. N(A) = N(U)

8.3 简化行阶梯形的列变换

简化行阶梯阵 U_0 一般不是对角阵. 如果使用列变换，则U_0 可以化成 $R = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的形式, 但是注意列变换(对换)改变未知量的次序(只做列对换).

更好的表示方式

8.3 简化行阶梯形的列变换

例： $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +x_5 & =0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +6x_4 & +3x_5 & =0 \\ -x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & +3x_5 & =0 \end{cases}.$

解： $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[c_3 \longleftrightarrow c_5]{c_2 \longleftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R,$

$c_2 \longleftrightarrow c_4 \Longleftrightarrow x_2 \longleftrightarrow x_4$

$c_3 \longleftrightarrow c_5 \Longleftrightarrow x_3 \longleftrightarrow x_5$

8.3 简化行阶梯形的列变换

$N(A) \neq N(R)$, 但考虑到 $x_2 \longleftrightarrow x_4, x_3 \longleftrightarrow x_5$ 则有

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & & & +2x_2 & -x_3 & =0 \\ & x_4 & & & & =0 \\ & & x_5 & & & =0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

总结：$A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} R = \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，即 $R = EAP$.

8.3 简化行阶梯形的列变换

$A\alpha=0$

若 $\alpha \in N(A)$, 则 $P^{-1}\alpha \in N(R)$. $EAPP^{-1}\alpha=0$ $R(P^{-1}\alpha)=0$

r 称为 A 的秩 $=$ 主元个数 $=$ 主变量个数 $=$ A 的无关列向量数

$= A$ 的列数 $-$ 基础解系个数.

秩 A $=$ 秩 U_0 $=$ 秩 R.

R 的主变量是 $x_1, \cdots, x_r$, 自由变量是 $x_{r+1}, \cdots, x_n$.

$$N(A) \underset{P}{\overset{P^{-1}}{\rightleftarrows}} N(R)$$

8.3 简化行阶梯形的列变换

求 $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

$$R = \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

考虑 $N = \begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix}$ (称为零空间矩阵, null space matrix).

$RN = 0$ 展示 N 的每一列均是 $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 这 $n-r$ 个列向量的全体线性组合 $= R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解集 $N(R)$, 即 $C(N) = N(R)$.

线性无关

8.3 简化行阶梯形的列变换

例如：$R=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&4&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{3\times 4}=\begin{pmatrix}I_2&F\\0&0\end{pmatrix}$，则 $N=\begin{pmatrix}-2&-3\\-4&-5\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，

$$N(R)=\left\{c_1\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\middle|c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}=C(N).$$

8.3 简化行阶梯形的列变换

事实上，设 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in N(R)$, 即 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$,

即 $\begin{pmatrix} I_2 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = 0, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$,

则 $\mathbf{u} + F\mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} = -F\mathbf{v} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix} \mathbf{v} = N\mathbf{v}$,

即 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in C(N)$.　　证明任何一个解都是N的列向量的线性组合

8.3 简化行阶梯形的列变换

以上例子暗示了方程个数和无关解个数的一个关系，

即“无关”方程个数 $= A$ 的列数 $-$ 无关解个数(基础解系向量数).

A的行秩

$r \qquad\qquad n \qquad\qquad (n-r)$