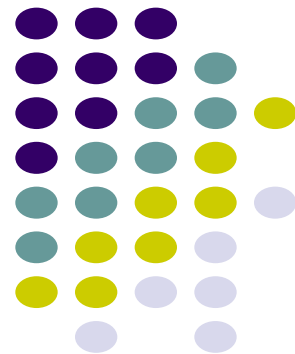


§ 7 向量空间





7.1 引言

我们在前几节讨论了矩阵和向量，一个线性方程组可以写成矩阵形式： $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，它的解是向量的集合。正如微积分研究点的集合关于开集、闭集和极限等性质，线性代数将考虑解向量的集合关于加法、数乘的运算性质，满足这种运算性质的集合称为向量空间。

线性代数 主要运算：向量的线性组合

主要问题： $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解

问题：一个方程组有多于一个的有限个解吗？



7.1 引言

设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有两个互异的解 $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$, 则

$$\left. \begin{array}{l} A\alpha = \mathbf{b} \\ A\beta = \mathbf{b} \end{array} \right\} \implies \forall c \in \mathbb{R}, A(c\alpha + (1-c)\beta) = \mathbf{b},$$

即 $c\alpha + (1-c)\beta, c \in \mathbb{R}$ 均是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解.

$A(\beta - \alpha) = \mathbf{0}$, 即 $\beta - \alpha$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

因此 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 若超过一个解, 则有无穷解.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 若有解 α , 则任意解 $\beta (A\beta = \mathbf{b})$ 均满足 $\beta \in \{\alpha + N(A)\}$,
其中 $N(A) = \{\mathbf{y} | A\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$.



7.1 引言

$\implies A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解的情况:

Case 1 只有零解 *Case 2* 有无穷解

为了描述解集，我们引入一个概念——向量空间.



7.2 向量空间和子空间

定义：设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是一些 n 维列向量的集合，且 V 关于向量加法和数乘封闭，即 $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \implies c_1\alpha + c_2\beta \in V$. 则称 V 为一个向量空间(vector space).

性质：零向量属于一向量空间 V .



7.2 向量空间和子空间

例： $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ，则 V 是一个向量空间，

例如 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$ ，则 $c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in V, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

例： $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 不是一个向量空间.

例： $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1 \right\}$ 不是向量空间.



7.2 向量空间和子空间

更一般的定义：

一个实向量空间(**real vector space**)是“向量”的集合，其关于加法和(实数的)数乘封闭(即线性组合封闭)且满足1.7节的八条性质.

例： $M_n(\mathbb{R}) = \{n \text{ 阶实矩阵}\}.$

例： 和 \mathbf{u} 垂直的 3 维向量全体, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

例： $V = \{y = f(x) | y'''' = 0\}.$



7.2 向量空间和子空间

子空间：设 V 是一个向量空间， $W \subset V$ ，若 W 关于 V 的加法、数乘封闭，则 W 是一个子空间(subspace).

例： \mathbb{R}^3 的子空间

1. $W = \mathbb{R}^3$.

2. $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3. W 是一过原点平面.

4. W 是一过原点直线.



7.3 列空间和零空间

关于 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 相关联的有两类(子)空间.

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$, 则 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 的全部线性组合是一个 \mathbb{R}^3

的子空间, 称为 A 的列空间(column space), 记作 $C(A)$.

方程组的解属于 A 的列空间

几何上, 它是一张平面(过原点).



7.3 列空间和零空间

$$\begin{aligned}\text{例: } A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5) \\ V &= \{c_1\alpha_1 + \dots + c_5\alpha_5 \mid c_i \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 + c_3 \\ -c_2 + c_4 \\ -c_3 + c_5 \\ -c_4 \end{pmatrix} \mid c_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid b_1 + b_3 + b_5 = 0 \right\} = C(A).\end{aligned}$$

几何上, 它是 \mathbb{R}^5 上一个“超”平面.



7.3 列空间和零空间

定理: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\iff \mathbf{b} \in C(A)$

例如, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 总有解, 因为 $\mathbf{0} \in C(A)$.

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$, 问: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in C(A)$?

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \alpha_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



7.3 列空间和零空间

另一类子空间：零空间 $N(A) = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$.

验证：它是一个空间！（ $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 的解集不是一个空间）

定理： $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有无穷解 $\iff A$ 的列向量线性相关.



7.4 阶梯形

问题：求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 或 $N(A)$?

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

U 是一个阶梯形式(echelon form).

主元所在列(1, 3 列)称为主列(pivot column), 主元对应变量 (x_1, x_3) 称为主变量(pivot variable).



7.4 阶梯形

检查: 2, 4 两列是 1, 3 列的线性组合, 称为自由列(free column).

x_2, x_4 是自由变量, 对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

目标: 保证每个方程只有一个主变量.



7.4 阶梯形

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N(A) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$



7.4 阶梯形

- 注：1. $A \xrightarrow{\text{行变换}} U$, 则 $N(A) = N(U)$.
2. $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 这说明 $N(B) \subset N(AB)$.
3. $C(AB) \subset C(A)$, AB 的每一列是 A 的列向量的线性组合.
4. 设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有一个解 \mathbf{x}^* , 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集为 $\mathbf{x}^* + N(A)$.

例：比较 $N(C)$ 和 $N(A), N(B)$, 其中 $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

例：设 V_1, V_2 是 \mathbb{R}^n 中两子空间, 则

$V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$ 是一个子空间, 而 $V_1 \cup V_2$ 一般不是子空间.