§2. 矩阵与线性方程组

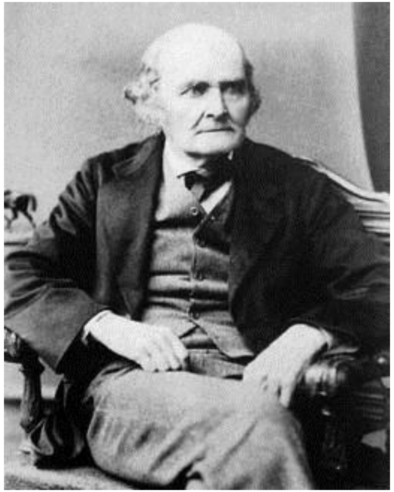
行列式的工具
⇒ 方阵

矩阵 → 可逆

线性方程组的表示

行图

列图



A. Cayley

从历史上看，矩阵正式作为数学中的研究对象出现，是在行列式的研究发展起来之后．英国数学家Arthur Cayley (1821-1895)被公认为矩阵论的奠基人，他提到矩阵概念“或是从行列式的概念而来，或是作为一个表达方程组的方便的方法而来的”(莫里斯·克莱因《古今数学思想》第33章).

矩阵在数学和物理学等其他科学分支中，都有着广泛而重要的应用.

2.1 矩阵(matrix)与向量的乘积 两种定义

例：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \iff x_1 \overset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} + x_2 \overset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} + x_3 \overset{w}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}.$$ 定义①

不是列向量

矩阵 A 与向量 $\mathbf{x}$ 的乘积等于矩阵的列向量的线性组合.

2.1 矩阵与向量的乘积

上述方程组
$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \\ 2x_1 & & +x_3 & =3 \\ & 2x_2 & +x_3 & =3 \end{cases}$$

也可表示为
$$\begin{cases} (1, & 1, & -1) & \cdot & (x_1,x_2,x_3) & =1 \\ (2, & 0, & 1) & \cdot & (x_1,x_2,x_3) & =3 \\ (0, & 2, & 1) & \cdot & (x_1,x_2,x_3) & =3. \end{cases}$$

这诱导了矩阵乘向量的另一种定义：

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, 则

$$A\mathbf{x}=\begin{pmatrix} (a_{11},a_{12},a_{13})\cdot(x_1,x_2,x_3) \\ (a_{21},a_{22},a_{23})\cdot(x_1,x_2,x_3) \\ (a_{31},a_{32},a_{33})\cdot(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}.$$ 定义②

2.1 矩阵与向量的乘积

通过 $A\mathbf{x}$ 的上述两种定义，我们对线性方程组可有两种新理解.

例：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

理解一：求向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性组合，使之等于 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

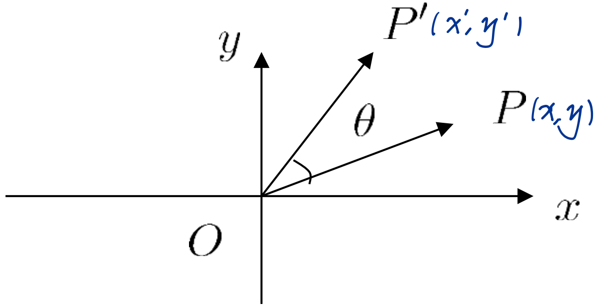
理解二：求向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,使之与系数矩阵行向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

的点积分别为 $1, 3, 3$.

2.1 矩阵与向量的乘积

例：将平面上所有向量绕原点 O 旋转角度 θ. 则点 $P(x,y)$ 在此旋转变换下得像 $P'(x',y')$ 为

$$\begin{cases} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$



这可表示为 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

注：这节涉及到的矩阵都是行数与列数相同的矩阵，即方阵.

2.2 可逆矩阵

最简单的情况

线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 解的情形比数量方程 $ax=b\,(a,b\in\mathbb{R})$ 要复杂.

若 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 对任意向量 $\mathbf{b}$ 有唯一解，则 A 是可逆的(invertible).

例：
$$\begin{cases} x_1 & & & = b_1 \\ -x_1 & +x_2 & & = b_2 \\ & -x_2 & +x_3 & = b_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

任意给定 b_1,b_2,b_3，方程组有唯一解
$$\begin{cases} x_1 & = b_1 \\ x_2 & = b_1+b_2 \\ x_3 & = b_1+b_2+b_3. \end{cases}$$

故系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵.

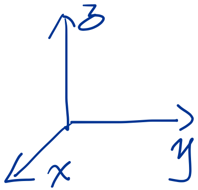
2.2 可逆矩阵

对线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 若 A 可逆，则可由常数项 $\mathbf{b}$ 求得 $\mathbf{x}$.

$$\begin{cases} x_1 & = b_1 \\ x_2 & = b_1 + b_2 \\ x_3 & = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

矩阵 S 称为 A 的逆.

2.2　可逆矩阵



设 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, 若 $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 可逆,

则 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的全部线性组合是整个 3 维空间.

此时 $\mathbf{0}$ 写成 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的线性组合只有一种可能:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}.$$

这时我们称向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 线性无关(linearly independent). 相应
等价
$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

2.2 可逆矩阵

否则 $\mathbf{0}$ 可以写成 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的多种线性组合.

如 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=0\mathbf{u}+0\mathbf{v}+0\mathbf{w}\\&=1\mathbf{u}+1\mathbf{v}+(-1)\mathbf{w}.\end{aligned}$$

这种情形下，称矩阵 $A=(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是奇异的(singular)，向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 是线性相关的(linearly dependent).

即存在不全为 0 的数 c,d,e 使 $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}+e\mathbf{w}=\mathbf{0}.$

2.2 可逆矩阵

例（循环差分矩阵）

给定 $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = b_1 \\ x_2 - x_1 & = b_2 \\ x_3 - x_2 & = b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

若 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c为任意实数.（无穷多解）

若 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, 则方程组无解.

2.2 可逆矩阵

从几何上看，$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性相关,

它们的全部线性组合是平面 $x+y+z=0.$

总结：

若方阵 A 的列向量线性无关，则 A 可逆， $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 只有零解.
若方阵 A 的列向量线性相关，则 A 奇异， $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有无穷多解.

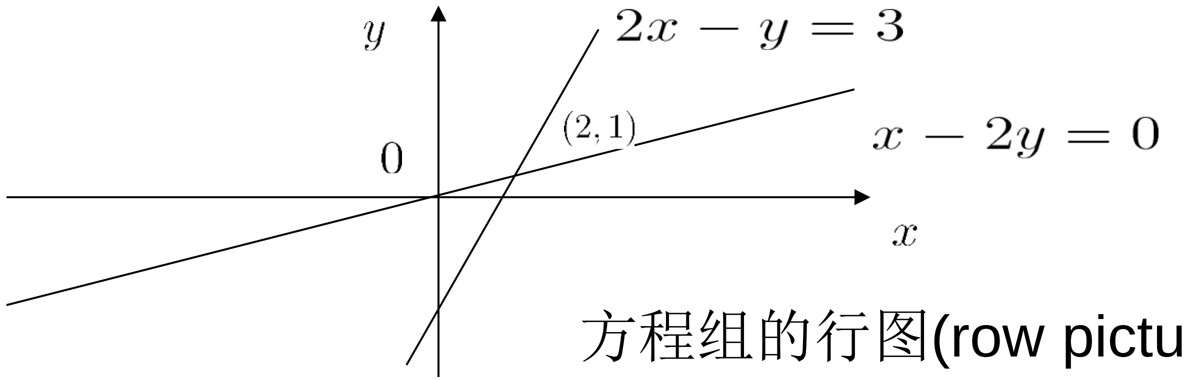
2.3　线性方程组的行图和列图

4种表示方式

给定一个线性方程组 $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=3. \end{cases}$ (2个方程，2 个未知量)

(1)它可以写称矩阵形式 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(2)从行(row)的角度看，每行代表一条直线，方程组的解为两直线的交点.

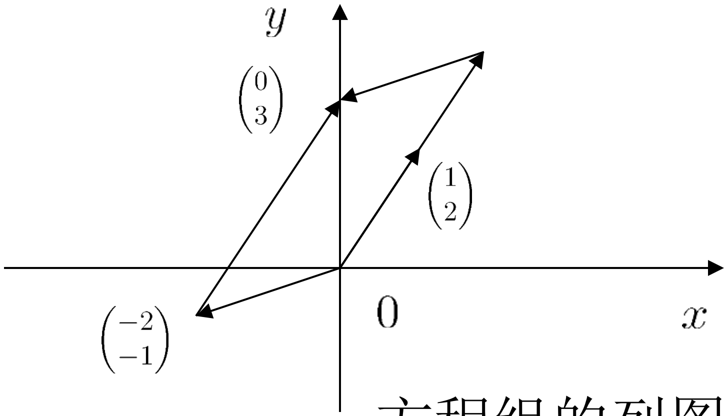


方程组的行图(row picture)

2.3　线性方程组的行图和列图

(3)从列(column)的角度看，方程组可改写为 $x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}.$

解方程组 $\Longleftrightarrow$ 求 $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ 关于系数矩阵列向量 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ 的线性组合.



可以看出 $2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}.$

所以方程组的解为 $\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$

方程组的列图(column picture)

2.3　线性方程组的行图和列图

(4)系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ 是可逆的.

考虑 $\begin{cases}x-2y=b_1\\ 2x-y=b_2\end{cases}$ ，求得 $\begin{cases}x=\frac{-b_1+2b_2}{3}\\ y=\frac{-2b_1+b_2}{3}\end{cases}$（唯一解）.

$$\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

2.3 线性方程组的行图和列图

一般地,设 $A=(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)$ 为 $n\times n$ 矩阵, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$

方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的每行表示一条直线 $(n=2)$, 或一张平面 $(n=3)$ 或一张超平面 $(n>3)$.

解方程组 $\Longleftrightarrow$ 考察这些直线或平面或超平面是否有交点. 角度①

$\Longleftrightarrow$ 求 $x_1,\cdots,x_n$ 满足 $x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n=\mathbf{b}$. 角度②

方程组对任意 $\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow$ A 可逆 角度③

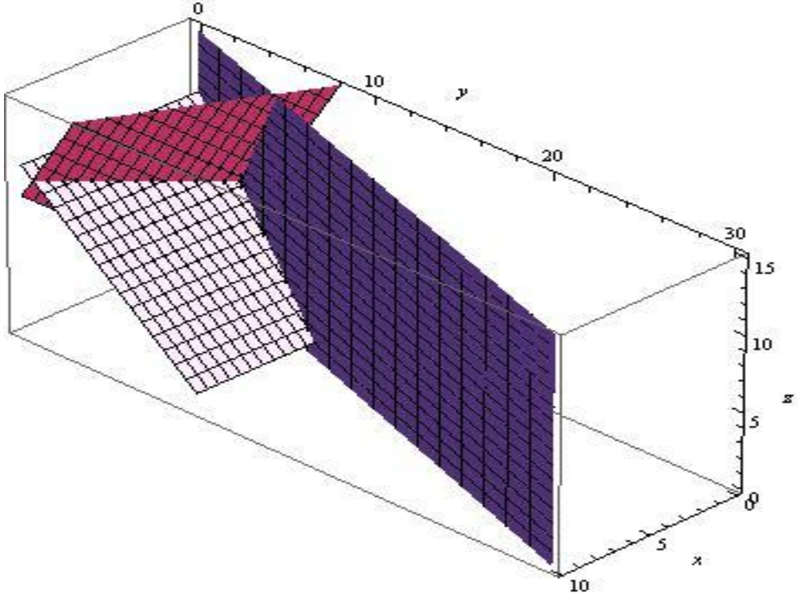
此时 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$ （ $\mathbf{x}$ 可表示为 A^{-1} 的列向量的线性组合）.

2.3 线性方程组的行图和列图

例 $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ y + z = 11 \end{cases}$ 矩阵形式 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$

另一个例子

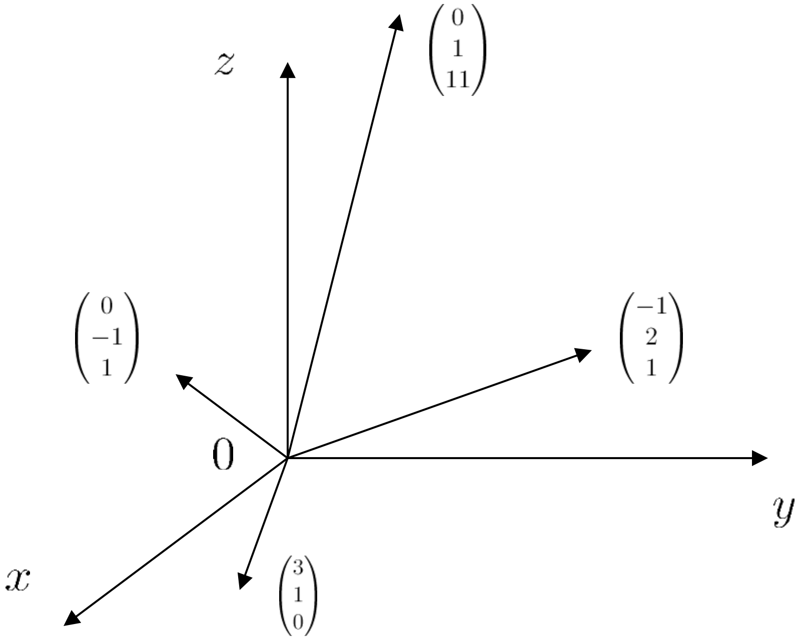
行图



每行方程确定三维空间中的一个平面,点 $(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, \frac{37}{5})$ 是三个平面的交点.

2.3　线性方程组的行图和列图

列图　方程组 $\Longleftrightarrow x\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\11\end{pmatrix}$



三个列向量 $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

不共面，其线性组合可产生任意三维列向量.

2.3　线性方程组的行图和列图

A 可逆：

$$\begin{cases} 3x & -y & & = b_1 \\ x & +2y & -z & = b_2 \\ & y & +z & = b_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

有唯一解：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

2.3 线性方程组的行图和列图

例：

从列图得出的一种简便思路

$$\begin{cases} x & +3y & +5z & =4 \\ x & +2y & -3z & =5 \\ 2x & +5y & +2z & =8 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

系数矩阵 A 的三个列向量与向量 $(1,1,-1)$ 点积都为 0，但常数项 $(4,5,8)\cdot(1,1,-1)=1\neq 0$，故常数项不能表示为 A 的列向量的线性组合. 所以方程组无解.