§9 求解非齐次线性方程组

9.1 复习

设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵，考虑 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} U\,(\text{阶梯形}) \xrightarrow{\text{行变换}} U_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{列对换}$$

$$R = \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

主变量：主列对应的变量.

主列个数 $=$ 主元个数 $=$ 主变量个数

$=$ 秩 A $=$ 无关行向量个数

$=$ 无关列向量个数

9.1 复习

(1) U_0 中主列设为第 $i_1, \cdots, i_r$ 列，则 A 中 $i_1, \cdots, i_r$ 列线性无关(称为 A 中主列)，且 A 中其余列均是这些主列的线性组合.

$$\text{例:}\quad A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow U_0 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{matrix} \end{array}$$

容易看出 $\beta_4 = 2\beta_1 + 4\beta_3$, 则 $\alpha_4 = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$.

(2) $N(A)$ 中基础解系向量个数为 $n - r$.

9.1 复习

以上例说明：x_1, x_3 为主变量，x_2, x_4, x_5 为自由变量.

令 $x_2 = 1, x_4 = x_5 = 0$; $x_4 = 1, x_2 = x_5 = 0$; $x_5 = 1, x_2 = x_4 = 0$

分别得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解为$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

则 $N(A) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_i \in \mathbb{R} \right\}.$

9.2 求特解

这次课，考虑求解一般线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

已知：(1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\Longleftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$.

(2)设 $\mathbf{x}^*$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一特解，则 $\mathbf{x}^* + N(A)$是方程全部解.

当零空间为2维或者3维时，所有解是过X星的直线或者平面

9.2 求特解

例 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$ 一个特解 $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow N(A) = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

则原方程组解集 $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\} = S(A, \mathbf{b})$.

从图像上看，$S(A, \mathbf{b})$和$N(A)$是两条平行直线.

9.2 求特解

如何求特解？

例 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 4 \end{cases}$，即 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

解：$\boxed{\text{考虑增广矩阵}}$

$$(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (C\ \mathbf{d}).$$

9.2 求特解

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 和 $C\mathbf{x}=\mathbf{d}$ 同解. $C\mathbf{x}=\mathbf{d}$ 对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & & & =0 \\ & & -2x_3 & -x_4 & -2x_5 & =1 \end{cases}.$$

自由变量为 x_2, x_4, x_5. 令 $x_2=x_4=x_5=0$, 则 $x_3=-\frac{1}{2}, x_1=\frac{1}{2}$.
即 $\mathbf{x}^*=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,0)^T$ 为特解.

9.2 求特解

$C\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 和 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 同解，

令 $x_2=1, x_4=x_5=0$, 得 $C\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解 $(-1,1,0,0,0)^T$;

$x_4=1, x_2=x_5=0$, 得 $C\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解 $(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1,0)^T$;

$x_5=1, x_2=x_4=0$, 得 $C\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解 $(1,0,-1,0,1)^T$.

故 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解集为

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\middle| c_i\in\mathbb{R}\right\}.$$

9.3 解的一般性讨论

设A 如上，为一个$m \times n$ 阶矩阵, $r =$ 秩(A), 容易检查

$$r \leq min(m, n).$$

若$r = n$, 则称 A 是一个列满秩矩阵(matrix of full column rank).

$r = m$, 则称 A 是一个行满秩矩阵(matrix of full row rank).

特别地$r = n = m$, 则 A 是可逆的.

$Case\,1: r = n = m.$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有唯一解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$

独立方程的个数等于未知量的个数

9.3 解的一般性讨论

$Case\,2: r=n<m$. 则 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 只有零解，此时 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 无解或有唯一解(特解).

例：$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\6&1\\5&1\end{pmatrix}$. $r(A)=2=A$ 的列数. 考虑 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$

$$(A\,\mathbf{b})=\begin{pmatrix}1&3&b_1\\2&1&b_2\\6&1&b_3\\5&1&b_4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&c_1\\0&1&c_2\\0&0&c_3\\0&0&c_4\end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}\in C(A) \iff A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解

$\iff c_3=c_4=0$

9.3 解的一般性讨论

$Case\,3: r = m < n.$ 则 A 行消去得到 m 个主元，即

$$U_0 \xrightarrow[\text{列对换}]{P} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & & & \\ & \ddots & & F \\ & & 1 & \end{array}\right) = R$$

则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 变为$U_0\mathbf{x} = \mathbf{d}$(同解). $U_0\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 总有特解$\mathbf{x} = P\begin{pmatrix}\mathbf{d} \\ 0\end{pmatrix}.$
此时自由变量有 $n - m$ 个.

故这种情况下 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷多解.

9.3 解的一般性讨论

$$Case\,4: r < m, r < n. \quad A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

$$R = EAP$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有解 $\Longleftrightarrow R\mathbf{y} = E\mathbf{b} = \mathbf{d}$ 有解.

$$\Longleftrightarrow \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \text{满足}\, d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$$

$R\mathbf{y} = \mathbf{d}$若有解，则有无穷解 $\Longrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷解.

9.3 解的一般性讨论

注意，这里不是同解变形，只是做相应的变换，有降维的可能

注记：

$Case\,2: A$ 列满秩. $\quad A \xrightarrow{E} U_0 = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \qquad EA = U_0$

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}_{n\times m} \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = I_n \Longrightarrow (I_n\ 0)E\cdot A = I_n$$

三维空间中的两个基底*二维空间中的两个基底=二维空间中的两个基底

即 A 有左逆 $(E\ 0)$.

$Case\,3: A$ 行满秩. $\quad A \xrightarrow{E} U_0 = \begin{pmatrix} I_m & F \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad EA = U_0$

$$U_0 \cdot \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times m} = I_m \Longrightarrow EA\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = I_m \Longrightarrow A\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}E = I_m$$

即 A 有右逆 $\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$.

9.3 解的一般性讨论

例：当 $\lambda=?$ 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & =2 \\ x_1 & +7x_2 & -4x_3 & +11x_4 & =\lambda \end{cases}$$

有无穷解，无解？

解：

$$(A\ \mathbf{b})=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix}$$

9.3 解的一般性讨论

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (C\ \mathbf{d})$$

$C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 同解.

$C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 有解 $\Longleftrightarrow \lambda = 5$. 此时，$C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 有无穷解.

($C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系有 $4 - 2 = 2$ 个向量.)