§3. 高斯消元法

基于矩阵的线性方程组的系统解法

3 高斯消元法

最古老、最重要

C. F. Gauss

高斯消元法以著名德国数学家Carl Friedrich Gauss(1777-1855)命名. Gauss被认为是历史上最重要的数学家之一，他在数学的众多分支，如数论、代数、分析、微分几何等以及统计学、物理学、天文学、大地测量学、地理学、电磁学、光学等领域都有重要的贡献. Gauss还享有“数学王子”的美誉.

值得一提的是，这种解线性方程组的消元法最早出现在中国古代数学著作《九章算术》中，相关内容在大约公元前150年前就出现了.

3.1 Gauss消元法 降维/消元

$\boxed{\text{正常的情况}}$

先看简单的例子：

第一主元 第一主元位置

例3.1 $\begin{cases} 1x - 2y = 2 & (1) \\ 3x + 4y = 16 & (2) \end{cases} \xrightarrow[\text{消元}]{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ \quad\ \ 10y = 10 \end{cases} \xrightarrow[\text{回代}]{} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

3.1 Gauss消元法

三维的情况

例3.2

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & +z & =1 \quad (1) \\ 6x & +2y & +z & =-1 \quad (2) \\ -2x & +2y & +z & =7 \quad (3) \end{array}\right. \xRightarrow[\substack{(3)-(1)\times(-1) \\ l_{31}=\frac{-2}{2}=-1}]{\substack{l_{21}=\frac{6}{2} \\ (2)-(1)\times 3}} \left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & +z & =1 \\ & -1y & -2z & =-4 \quad (2)' \\ & 3y & +2z & =8 \quad (3)' \end{array}\right.$$

第二主元

$$\xRightarrow{(3)'-(2)'\times(-3)} \left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & +z & =1 \\ & -y & -2z & =-4 \\ & & -4z & =-4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

回代

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3.1 Gauss消元法

问：什么时候消元法停止呢？→无解/无穷多

例3.3 $\begin{cases} 1x-2y &= \ \ 2 \quad (1) \\ 3x-6y &= 16 \quad (2) \end{cases} \xRightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} x-2y &= 2 \\ \qquad 0 &= 10 \end{cases}$ 无解

例3.4 $\begin{cases} 1x-2y &= 2 \quad (1) \\ 3x-6y &= 6 \quad (2) \end{cases} \xRightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} x-2y &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 2+2y$

无穷多解

3.1 Gauss消元法

小结：若消元过程中出现 $0 = c \neq 0$ 或 $0 = 0$, 则消元法中止.

线性方程组的解有下列三种情况：

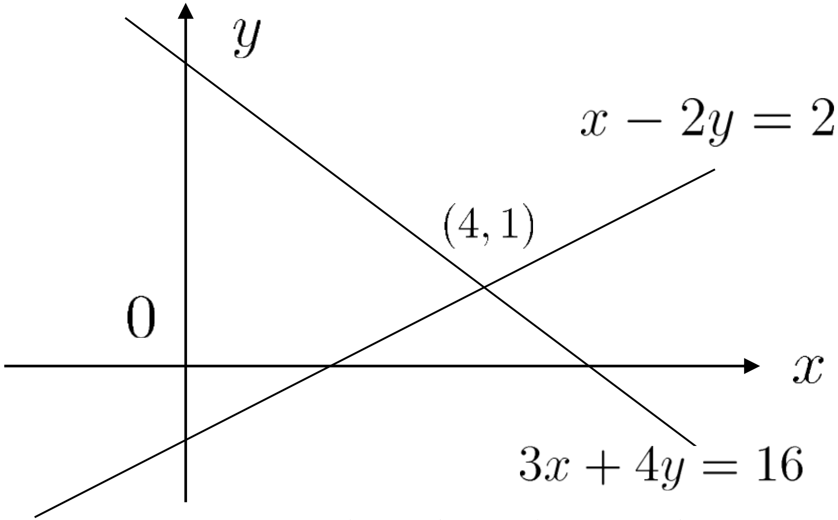
1. 有唯一解；$\longrightarrow$ ①Gauss消元 ②行图 ③列图 ④逆矩阵
2. 无解；
3. 有无穷多解.

3.1 Gauss消元法

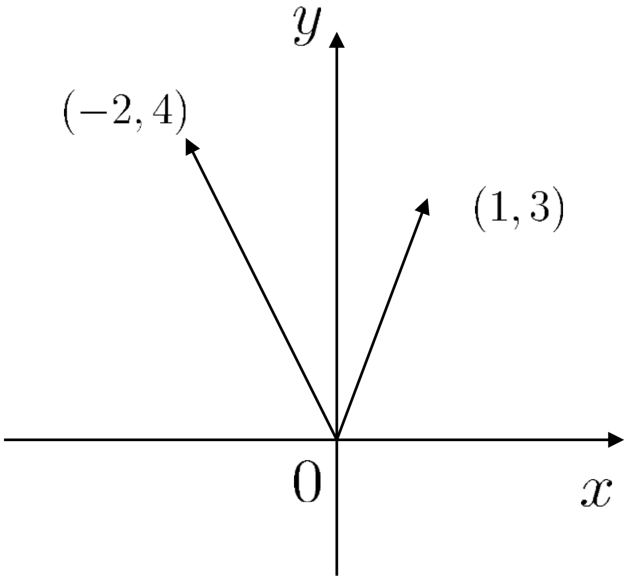
行图/列图

$$\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ 3x + 4y &= 16 \end{cases}$$

有唯一解



行图：两直线相交，有唯一交点

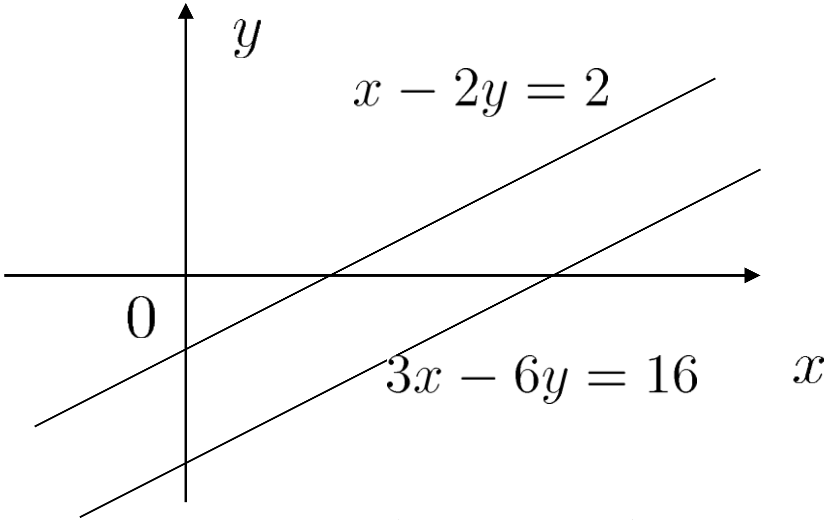


列图：两列向量不共线

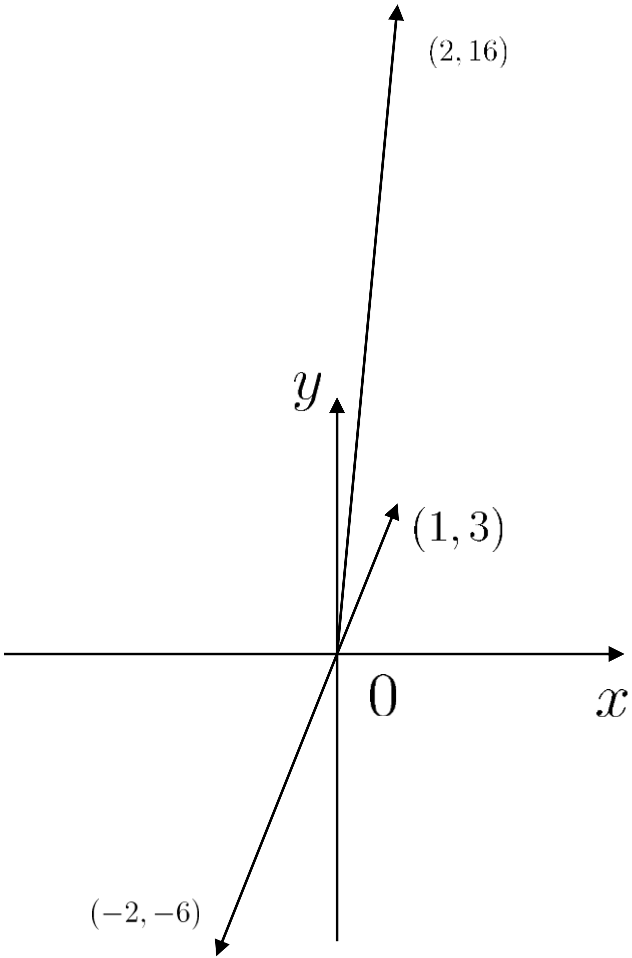
3.1 Gauss消元法

$$\begin{cases} x-2y &= 2 \\ 3x-6y &= 16 \end{cases}$$

无解



行图：两直线平行，无交点

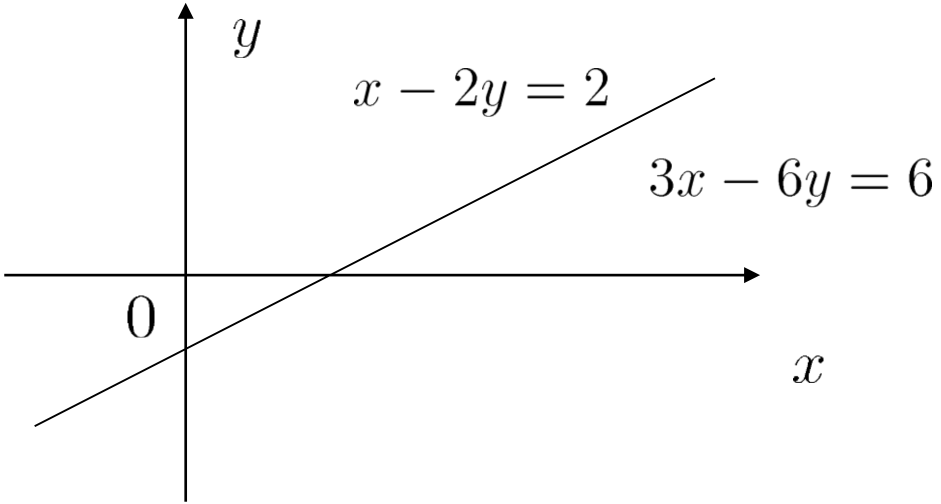


列图：两列向量共线

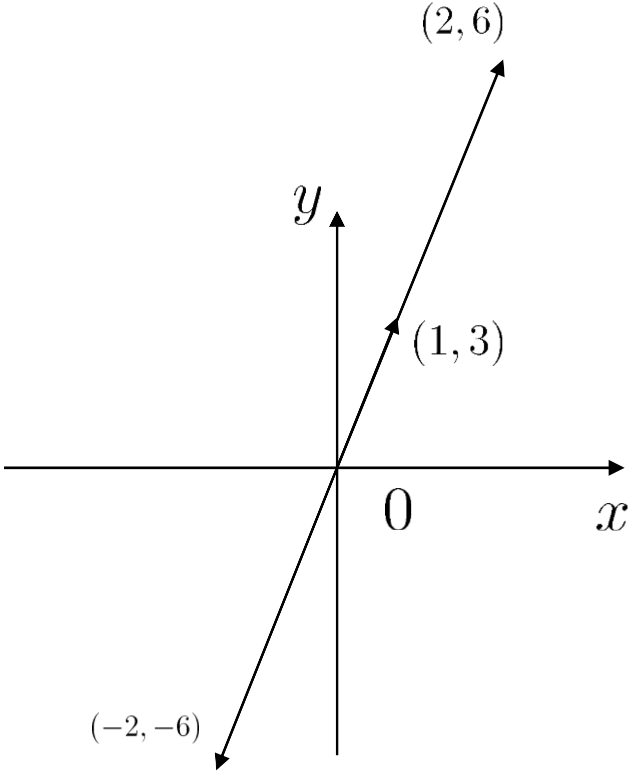
3.1 Gauss消元法

$$\begin{cases} x-2y &= 2 \\ 3x-6y &= 6 \end{cases}$$

有无穷多解



行图：两直线重合



列图：两列向量共线

3.1 Gauss消元法 换行

例3.5 $\begin{cases} \quad\quad\quad\; y - z = 3 & (1) \\ -2x + 4y - z = 1 & (2) \\ -2x + 5y - 4z = -2 & (3) \end{cases} \xRightarrow{(1)\longleftrightarrow(2)} \begin{cases} -2x + 4y - z = 1 & (1)' \\ \quad\quad\quad\; y - z = 3 & (2)' \\ -2x + 5y - 4z = -2 & (3)' \end{cases}$

$$\xRightarrow{(3)'-(1)'\times 1} \begin{cases} -2x + 4y - z = 1 & \\ \quad\quad\quad\; y - z = 3 & (2)'' \\ \quad\quad\quad\; y - 3z = -3 & (3)'' \end{cases}$$

$$\xRightarrow{(3)''-(2)''\times 1} \begin{cases} -2x + 4y - z = 1 \\ \quad\quad\quad\; y - z = 3 \\ \quad\quad\quad\quad\; -2z = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

3.1 Gauss消元法

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3.1　Gauss消元法

上述求解过程可以推广到含n个未知量 n 个方程的情形.

也可以 m 个方程

Gauss消元法的步骤：

(1) 若方程组的第一个主元位置为0, 则交换方程以得到第一个主元；

(2) 用第一个方程的倍数消去第一个主元下方所有系数；

(3) 确定第二个主元，继续以上消元过程；

(4) 最后得到含一个未知量的方程，回代得方程组的解.

$\boxed{n\text{个方程有}n\text{ 个主元}}$ $\Longleftrightarrow$ 方程组有唯一解.

消元中止 $\Longrightarrow$ 方程组无解或有无穷多解(即出现$0=c\neq 0$或 $0=0$).

3.2　消元法的矩阵表示：消去矩阵

例3.6
$$\begin{cases} x & +2y & +z & =2 & (1) \\ 3x & +8y & +z & =12 & (2) \\ & 4y & +z & =2 & (3) \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} x & +2y & +z & =2 \\ & 2y & -2z & =6 & (2)' \\ & 4y & +z & =2 & (3)' \end{cases} \qquad \xrightarrow{l_{21}=3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{(3)'-(2)'\times 2} \begin{cases} x & +2y & +z & =2 \\ & 2y & -2z & =6 \\ & & 5z & =-10 \end{cases} \qquad \xrightarrow{l_{32}=2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

n 个方程 n 个未知量

消元法成功 $\Longleftrightarrow$ n 个主元

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

- 若将系数矩阵A第二行第二列元素a_{22} 由“8”换成“6”,则消元法第二步要暂停，需先交换第二三行.

$$\begin{cases} x & +2y & +z & =2 \\ 3x & +6y & +z & =12 \\ & 4y & +z & =2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & =2 \\ & & -2z & =6 \\ & 4y & +z & =2 \end{cases}$$

- 若将系数矩阵A 第三行第三列元素 a_{33}由“1”换成 “-4”，则消元法中止，得不到第三个主元.

$$\begin{cases} x & +2y & +z & =2 \\ 3x & +8y & +z & =12 \\ & 4y & -4z & =2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & =2 \\ & 2y & -2z & =6 \\ & 4y & -4z & =2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & =2 \\ & 2y & -2z & =6 \\ & & 0 & =-10 \end{cases}$$

$\boxed{n \text{ 个方程 } n \text{ 个未知量时,消元法成功} \Longleftrightarrow U\text{是可逆上三角阵} \Longleftrightarrow A \text{ 是可逆矩阵.}}$

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

已用 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 来描述线性方程组.

目标：用尽可能简洁的方式来描述对方程组消元化简的过程.

回顾：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 行 n 列的方阵, $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 维向量.

矩阵乘向量
$$A\mathbf{x}=x_1\overrightarrow{col_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{col_n}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{row_1}\cdot\mathbf{x}\\ \vdots\\ \overrightarrow{row_n}\cdot\mathbf{x}\end{pmatrix}$$

特别, $A\mathbf{x}$ 的第 i 个分量 $=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$.

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

再看例3.6

消元法第一步：第二个方程减去第一个方程的3倍.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

我们想用一个矩阵实现这步消元.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

消元法第二步：第三个方程减去第二个方程的 2 倍.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3-2b_2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\-10\end{pmatrix}$$

- E_{21}恰是单位矩阵$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$的第二行减去第一行的 3 倍得到的.
- E_{32}恰是单位矩阵$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$的第三行减去第二行的 2 倍得到的.

称 E_{21}, E_{32} 这样的矩阵为消去矩阵(elimination matrix), 这是一类初等矩阵 (elementary matrix).

注：单位矩阵(identity matrix) I 与任何n维向量 $\mathbf{b}$ 相乘 $\boxed{I\mathbf{b}=\mathbf{b}}$

3.2　消元法的矩阵表示：消去矩阵

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad E_{21}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad E_{21}A = ?$$

$$E_{21}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

需定义矩阵 E_{21} 与 A 的乘法运算，使上式成立.

这种运算需满足

$$\boxed{\begin{aligned} &A(BC) = (AB)C \\ &AB = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ A\mathbf{b}_3) \end{aligned}}$$

3.2　消元法的矩阵表示：消去矩阵

定义：$AB = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3) := (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ A\mathbf{b}_3)$.

验证：

- $$E_{21}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$E_{32}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

小结：消去过程 ＝消去矩阵同时左乘系数矩阵 A 和常数项 $\mathbf{b}$.

3.2 消元法的矩阵表示：置换阵

若主元位置为零，需先交换方程再换元.

再看例3.5

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & y & -z & = 3 \\ -2x & +4y & -z & = 1 \\ -2x & +5y & -4z & = -2 \end{array}\right. \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} -2x & +4y & -z & = 1 \\ & y & -z & = 3 \\ -2x & +5y & -4z & = -2 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_1}$$

交换第一、二方程 $\longleftrightarrow$ 交换第一、二行

问：是否存在矩阵 P, 使 $PA = A_1$, $P\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$.

3.2　消元法的矩阵表示：置换阵

- $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足要求.
- P_{12}为单位矩阵 I 交换第一、二行得到的.
- 将单位阵 I 的第 i,j行交换得到的矩阵是置换阵(permutation matrix).

小结：$P_{ij}A$将矩阵 A 的第 i,j 行交换.

3.2 消元法的矩阵表示：初等行变换和初等矩阵

对方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 消元法涉及以下三种同解变形：

(1)把一个方程减去另一个方程的倍数；

(2)交换两个方程；

(3)用一个非零数乘一个方程.

相应地对增广矩阵$(A\mid\mathbf{b})$作以下三种行变换：

(1)把一行减去另一行的倍数；

(2)交换两行；

(3)用一个非零数乘一行.

由单位矩阵经过一次初等行变换得到的矩阵称为初等矩阵.

3.2 消元法的矩阵表示:初等行变换和初等矩阵

例:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1\cdot l}\begin{pmatrix}1&0&0\\-l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_{21}(-l)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\longleftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=P_{23}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\cdot c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=D_2(c)$$

$E(A\mid\mathbf{b})=(EA\mid E\mathbf{b})$, E 为初等矩阵.

3.2 消元法的矩阵表示:初等行变换和初等矩阵

对线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$作消元法，实质上是对矩阵$(A\mid\mathbf{b})$作消元或换行.
称矩阵$(A\mid\mathbf{b})$为增广矩阵(augmented matrix).

例：计算 $E_{31}(-1)P_{12}(A\mid\mathbf{b})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1&3\\-2&4&-1&1\\-2&5&-4&-2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4&-1&1\\0&1&-1&3\\-2&5&-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&-1&1\\0&1&-1&3\\0&1&-3&-3\end{pmatrix}$$

小结：对线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的消元过程，即为一系列初等矩阵左乘增广矩阵$(A\mid\mathbf{b})$.

3.2 消元法的矩阵表示:初等行变换和初等矩阵

例3.7 令 $E_{21}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_{32}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$A=(a_{ij})_{3\times 3}$为三阶矩阵.

则$E_{21}A=A$的第二行减去第一行的 4 倍.

$P_{32}A=A$ 的第二行与第三行交换.

3.2 消元法的矩阵表示:初等行变换和初等矩阵

$$AE_{21} = \left(A\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \; A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} - 4a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 4a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - 4a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A \text{ 的第一列减去第二列的} 4 \text{ 倍}$$

$$AP_{32} = \left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix} = A \text{ 的第二列与第三列交换}$$

小结：“左乘换行，右乘换列”.