Ateliers de mathématiques appliquées

Atelier 4

**Généralités sur les fonctions - approche numérique -**

# I - Tableau de valeurs

**Exercice 1**

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x - 4$

1. Écrire un programme Python permettant de créer le tableau de valeurs suivant (sous la forme de deux listes une pour les $x$ et une pour les $f(x)$)

| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6 | | | | | -4 | | | | | |

2. Écrire un programme Python permettant de lire deux réels $a$ et $b$ et de donner le tableau de valeurs de $f$ sur $[a;\ b]$ avec un pas de $0,1$ (sous la forme de deux listes).

# II - Recherche des extremums

On se donne une fonction $f$ définie sur un intervalle $[a;\ b]$.
L'objectif est de créer un algorithme permettant de déterminer des valeurs approchées du minimum et du maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[a;\ b]$.

**Exercice 2 (Méthode par balayage à pas constant)**

Cette méthode consiste à subdiviser l'intervalle $[a;\ b]$ en $N$ intervalles de même longueur $\frac{b-a}{N}$. On fera ensuite le balayage des valeurs prises par la fonction en chacune des bornes de la subdivision.
L'algorithme suivant traduit cette méthode.

**Algorithme**

*Saisir les réels a, b, N*
*Affecter à min la valeur f(a)*
*Affecter à max la valeur f(a)*
*Affecter à p la valeur (b - a)/N*
*Affecter à x la valeur a*
**Pour i allant de 1 à N**
    *Affecter à x la valeur x + p*
    *Affecter à y la valeur f(x)*
    **Si y > max**
        *affecter à max la valeur y*
    **Si y < min**
        *affecter à min la valeur y*
*Afficher min et max*

1. Écrire et tester un programme Python traduisant cet algorithme pour la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-1;\ 4]$ par : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$.
   On pourra choisir différentes valeurs de $N$ pour affiner le pas.
2. Représentez graphiquement la fonction et justifiez (graphiquement) les résultats obtenus.

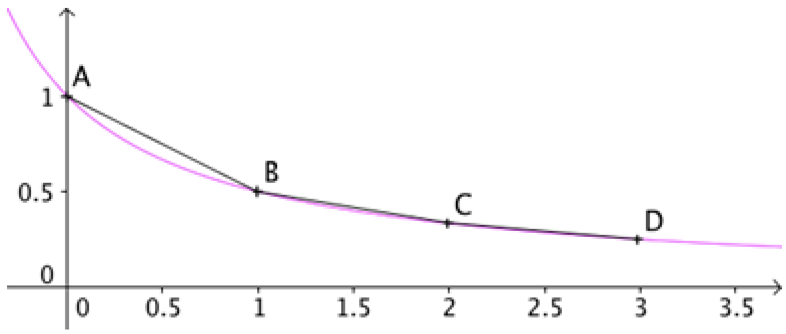
**Exercice 3 (Méthode par balayage aléatoire)**
Cette méthode consiste à balayer de façon aléatoire l'intervalle $[a;\ b]$ en cherchant $N$ valeurs différentes. Si $N$ est suffisamment grand, la recherche des extremums par cette méthode est efficace.

1. Écrire une instruction Python qui permet de générer $N$ nombres aléatoires de l'intervalle $[a;\ b]$
2. Écrire un algorithme traduisant la méthode de recherche des extremums par balayage aléatoire.
3. Programmer et tester cet algorithme à l'aide de Python pour la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-1;\ 4]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$.
4. Cette méthode semble-elle plus performante que la méthode présentée dans l'exercice 2 ?

## III - Longueur d'une courbe

**Exercice 4**
Dans un repère orthonormé, on veut calculer, sur l'intervalle $[0;\ 3]$, une valeur approchée de la longueur de la courbe de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. Pour cela, on a placé sur la courbe quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'abscisses respectives 0, 1, 2 et 3 formant trois segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$. En calculant la somme $AB + BC + CD$ donner




   une première approximation de la longueur de la courbe de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;\ 3]$.
2. Une meilleure approximation s'obtient avec un plus grand nombre de points sur la courbe dont les abscisses sont réparties régulièrement sur l'intervalle $[0;\ 3]$.
   Écrire un script Python permettant de trouver une valeur approchée de la longueur de la courbe de $f$ avec un nombre $N$ de points. Tester ce script pour différentes valeurs de $N$.
3. Adapter le programme précédent pour obtenir une approximation de la longueur de la courbe de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1;\ 5]$. Donner cette longueur.

**Exercice 5 (Calcul d'une valeur approché de $\pi$)**
Soit la fonction $f$ définie sur $[-1;\ 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
En calculant la longueur de la courbe représentative de $f$, donner une valeur approchée de $\pi$