Chapitre 1: l'ensemble $\mathbb{R}^n$

Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce chapitre (module), vous apprendrez à faire des opérations sur les vecteurs, à déterminer si une famille donnée de vecteurs est libre ou liée. Vous apprendrez aussi à calculer l'image et le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Introduction

1. Le Panier de la ménagère: Supposons que pour remplir son panier, une mère de famille achète du pain, de l'huile et de la viande. Le pain est vendu à l'unité, l'huile en litres et la viande en grammes. Chaque panier peut être caractérisé par trois nombres x_1, x_2, x_3 où x_1 est le nombre de pains, x_2 le nombre de litres d'huile et x_3 celui de kilogrammes de viande. On peut donc associer tout panier à un triplet (x_1, x_2, x_3). Si p_1 est le prix (en dinars) d'un pain, p_2 le prix d'un litre d'huile et p_3 le prix d'un kilo de viande, le triplet (p_1, p_2, p_3) est le vecteur prix. A tout panier $x = (x_1, x_2, x_3)$ on peut associer son prix:

$$p(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$$

2. La Statistique: Lors d'un enquête de consommation de deux biens X et Y, on relève des observations sur n années:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_n \end{array}$$

   Pour $i = 1, ..., n$, x_i représente la consommation de X et y_i celle de Y au cours de la ième année. Les n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ sont les vecteurs de consommation de X et Y.

1.2 Définitions

Nous allons définir d'abord les espaces vectoriels dans le cas de $\mathbb{R}^n$ puis on généralisera.

Dans la suite n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Définition 1 *$\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets x, appelés aussi* **vecteurs**, *définis par*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

où pour $i = 1, ..., n$: $x_i \in \mathbb{R}$, x_i est appelée la $i^{\text{ème}}$ composante (ou coordonnée) de x.

Exemple 1 *$x = (1, -1, 0, 2)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^4$.*

Exemple 2

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$(0, 0)$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$(0, 0, 0)$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.

Remarque: Un nombre réel est appelé scalaire pour le distinguer des vecteurs.

1.3 Opérations

On définit une opération interne (addition) et une opération externe (multiplication par un scalaire) sur $\mathbb{R}^n$:

1. Addition de deux vecteurs: pour x, y dans $\mathbb{R}^n$:

$$x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

2. Multiplication d'un vecteur par un scalaire: pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

On note le vecteur nul $(0, 0, ..., 0)$ par $0_{\mathbb{R}^n}$ ou simplement par 0 en l'absence de confusion:

1.3.1 Propriétés de l'addition:

Prop 1 *pour tous vecteurs x, y, z de $\mathbb{R}^n$:*

$x + (y + z)$	$= (x + y) + z$	associative
$x + y$	$= y + x$	commutative
$x + 0$	$= 0 + x$	$0 = (0, ..., 0)$ élement neutre
$x + (-x)$	$= 0$	$-x$ symétrique de x

1.3.2 Propriétés de la multiplication externe:

Prop 2 *pour tous vecteurs x, y de $\mathbb{R}^n$, pour tous scalaires λ, μ de $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{ll} \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x & (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \\ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y & 1x = x \end{array}$$

Définition 2 *On dit que $\mathbb{R}^n$ muni de ces deux opérations (vérifiant ces propriétés) est un espace vectoriel réel. Plus généralement, un ensemble non vide E muni d'une addition et d'une multiplication externe qui vérifient ces propriétés est- appelé espace vectoriel.*

1.4 Combinaison linéaire de vecteurs

1.4.1 Définition

Définition 3 *Pour tous vecteurs $x_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n})$ et $x_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n})$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle combinaison linéaire de deux vecteurs x_1 et x_2, tout vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ où λ_1 et λ_2 sont des scalaires réels. Plus généralement si $x_1, x_2, ..., x_p$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$: chaque $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$, on appelle combinaison linéaire de ces p vecteurs tout vecteur de la forme:*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des scalaires réels.

Exemple 3 *dans $\mathbb{R}^3$:*

$$x = (1,0,2) \qquad y = (2,1,-1)$$

et alors

$$2x - y = 2(1,0,2) - (2,1,-1) = (0,-1,5)$$

Exemple 4 *dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur $x = (x_1, x_2)$ peut s'écrire comme comme combinaison linéaire de $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$:*

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

1.4.2 Bases canoniques

Base canonique de $\mathbb{R}^3$: soient les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

On dit que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les réels $x_1, x_2, ..x_3$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, soient les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ définis par

$$\begin{aligned}
&e_1 = (1, 0, ..., 0) \\
&e_2 = (0, 1, 0, ..., 0) \\
&\vdots \\
&e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \\
&\vdots \\
&e_n = (0, 0, ..., 0, 1)
\end{aligned}$$

Toutes les composantes de e_i sont nulles sauf la ième qui est égale à 1.

Alors tout vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des n vecteurs e_i:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

On dit que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, les réels $x_1, x_2, ..x_n$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

1.4.3 Familles libres, Familles liées

Définition 4 *Une famille finie $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre si et seulement si*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$$

On dit aussi que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_p$ sont linéairement indépendants.

Remarque: $0_{\mathbb{R}^n}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$:

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$$

Exemple 5 *base canonique de $\mathbb{R}^2$:*

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. En effet, cherchons λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$$

mais alors

$$\lambda_1 (1, 0) + \lambda_2 (0, 1) = (0, 0) \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$$

donc l'unique solution est $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.

Exercice 1 *Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une famille libre. Montrer de même que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est libre*

Solution: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec

$$e_1 = (1,0,0) \qquad e_2 = (0,1,0) \qquad e_3 = (0,0,1)$$

Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$$

c'est-à-dire

$$(\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = (0,0,0)$$

donc $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

Une famille qui n'est pas libre est dite liée, plus exactement:

Définition 5 *Une famille finie $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée s'il existe p réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ non tous nuls tels que*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n}$$

On dit aussi que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_p$ sont linéairement dépendants.

Exemple 6

$$u_1 = (1, -2) \qquad u_2 = (-2, 4)$$

est une famille liée puisque $2u_1 + u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$.

1.4.4 Cas particuliers

1. Famille composée d'un seul vecteur: Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. En effet, puisque (u) libre, l'équation $\lambda u = 0$ n'admet que la solution $\lambda = 0$ donc nécessairement $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.Au contraire (u) liée si et seulement $u = 0_{\mathbb{R}^n}$

2. Famille de deux vecteurs:

$$(u_1, u_2) \text{ est liée } \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : u_2 = \lambda u_1$$

On dit dans ce cas que u_1 et u_2 sont colinéaires. D'autre part

$$(u_1, u_2) \text{ est libre } \Longleftrightarrow \text{leurs composantes ne sont pas proportionnelles}$$

Exemple 7 *Dans $\mathbb{R}^2$: $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (2,-1)$ forment une famille libre. En effet la résolution de l'équation*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longleftrightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (2\lambda_2, -\lambda_2) = (0,0)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = -2\lambda_2 \\ -5\lambda_2 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Exemple 8 *Dans* $\mathbb{R}^3$*:* $u_1 = (1, 0, -3)$ *et* $u_2 = (-2, 0, 6)$ *forment une famille liée:*

$$2u_1 + u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

3. Famille de p vecteurs: $p \geq 3$: Pour une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on doit résoudre le système d'équations

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n}$$

d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$. Si l'unique solution de ce système est la solution triviale

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$$

alors $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est une famille libre. Sinon, s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ non tous nuls solution de ce système alors $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est une famille liée.

Exemple 9 *dans* $\mathbb{R}^3$*,* $u_1 = (1, 0, 2)$*,* $u_2 = (0, 1, -1)$*,* $u_3 = (1, 1, 1)$*. On résoud le système*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_{3p} = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$$

et la famille est liée: $u_1 + u_2 - u_3 = 0$ *(on a pris* $\lambda_1 = 1$*)*

1.4.5 Propriétés

Les familles libres et liées vérifient les propriétés suivantes:

Prop 3 *:*

1. *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
2. *Toute famille contenant deux vecteurs identiques est liée.*
3. *Toute famille contenant une famille liée est liée.*
4. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
5. *Dans* $\mathbb{R}^n$*, toute famille de* $n + 1$ *vecteurs est liée.*

1.5 Sous-espaces vectoriels

Définition 6 *Une partie non vide F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectorie de $\mathbb{R}^n$ si $(F, +, \cdot)$ est lui-même un espace vectoriel.*

Concrètement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si-et-seulement-si F est stable par combinaisons linéaires:

$$\forall (u, v) \in F \times F \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \quad (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \in F$$

Exemple 10 *Exemples: le vecteur nul 0_E et E sont deux sev de E.*

Définition 7 *On appelle sous -espace vectoriel engendré par les p vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$, l'ensemble des combinaisons linéaires de ces p vecteurs et l'on note cet ensemble $Vect\,(x_1, x_2, ..., x_p)$.*

Nous allons présenter les exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels engendrés.

1.5.1 Droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$:

Définition 8 *Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on appelle droite vectorielle $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel engendré par u:*

$$\mathcal{D} = Vect\,(u) = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

c'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u.

Exemple 11 *dans $\mathbb{R}^2$, soit $u = (1, 2)$ et un vecteur (x, y) est colinéaire à u si*

$$(x, y) = \lambda\,(2, 1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \Longleftrightarrow y = 2x$$

et "$y = 2x$" s'appelle une équation de la droite $\mathcal{D}$:

$$Vect\,(u) = \{(x, y) : y - 2x = 0\}$$

Exercice 2 *Soit $u = (-b, a)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Déterminer une équation de $Vect\,(u)$.*

Solution: (x, y) est colinéaire à u si

$$(x, y) = \lambda\,(-b, a) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda b \\ y = \lambda a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ax = -\lambda ab \\ by = \lambda ab \end{cases} \Longleftrightarrow ax + by = 0$$

donc $Vect\,(u)$ est la droite d'équation: $ax + by = 0$, elle est engendré par le vecteur $(-b, a)$.

1.5.2 Plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$:

Définition 9 *Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ non colinéaires, on appelle plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par u et v: $\mathcal{P} = Vect\,(u,v)$*

Exemple 12 *dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (-1,1,0)$ et $v = (-1,0,1)$ alors un vecteur (x,y,z) appartient au plan $\mathcal{P} = Vect\,(u,v)$ si et seulement si il est combinaison linéaire de ces deux vecteurs:*

$$(x,y,z) = \lambda\,(-1,1,0) + \mu\,(-1,0,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \Longleftrightarrow x + y + z = 0$$

et $x + y + z = 0$ est une équation du plan vectoriel $\mathcal{P}$.

Plus généralement, on a la propriété suivante: Si a, b, c sont des réels non tous nuls, alors l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{(x,y,z) : ax + by + cz = 0\}$$

est un plan vectoriel, il est engendré par exemple par $\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)$ et $\left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)$ (si $a \neq 0$).

1.6 Bases et dimension

1.6.1 Familles génératrices

Définition 10 *Une famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ engendre $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 13 *La base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

. x s'écrit comme combinaison linéaire de e_1 et e_2.

Exercice 3 *Les familles suivantes sont-elles génératrices*

1. *Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (2,1)$.*
2. *Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (2,-1)$, $u_2 = (-4,2)$*
3. *Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (2,1)$, $u_2 = (0,1)$ et $u_3 = (2,2)$*
4. *Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (2,1,0)$ et $u_2 = (0,1,0)$*
5. *Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (2,1,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (2,2,0)$.*

Solution:

1. Soit $x = (x_1, x_2)$. A-t-on $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$? Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$,
$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \qquad (*)$$
D'autre part $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (2,1)$ c'est-à-dire
$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 & (1) \\ u_2 = 2e_1 + e_2 & (2) \end{cases}$$
mais $(2) - (1)$ entraine $e_1 = u_2 - u_1$ et donc $e_2 = e_1 - u_1 = u_2 - 2u_1$. On peut remplacer e_1 et e_2 en fonction de u_1 et u_2 dans $(*)$:
$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1 (u_2 - u_1) + x_2 (u_2 - 2u_1)$$
et finalement
$$x = -(x_1 + 2x_2) u_1 + (x_1 + x_2) u_2$$
et donc tout élément x de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2, la famille (u_1, u_2) est donc génératrice.

2. $u_1 = (2, -1)$, $u_2 = (-4, 2)$, remarquons que $u_2 = -2u_1$ c'est à dire qu'ils sont colinéaires (sur la même droite vectorielle) donc tout vecteur x qui n'est pas sur cette droite n'est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2. Considérez par exemple $e_1 = (1,0)$ alors on ne peut trouver λ_1 et λ_2 tels que
$$e_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \Longleftrightarrow (1,0) = \lambda_1 (2,-1) + \lambda_2 (-4,2)$$
donc
$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 4\lambda_2 & = 1 \quad (1) \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 \quad (2) \end{cases}$$
mais alors $2(2) + (1) \Longrightarrow 0 = 1$ absurde.

3. Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (2,1)$, $u_2 = (0,1)$ et $u_3 = (2,2)$. C'est une famille génératrice.

4. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (2,1,0)$ et $u_2 = (0,1,0)$. $\mathcal{U}$ n'est pas une famille génératrice, par exemple $e_3 = (0,0,1)$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{U}$.

5. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (2,1,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (2,2,0)$. Même remarque que dans 4.

Nous avons les propriétés suivantes:

Prop 4 *:*

1. *Toute famille qui contient une famille génératrice est génératrice.*
2. *Toute famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ contient au moins n vecteurs.*

1.6.2 Bases

Définition 11 *Une famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$, si et seulement $\mathcal{B}$ est libre et génératrice. de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 14 *Base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ avec*

$$\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, ..., 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0) \\ \vdots \\ e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, ..., 0, 1) \end{array}$$

Prop 5 *Toute base de $\mathbb{R}^n$ contient exactement n vecteurs. On dit que $\mathbb{R}^n$ est un espacfe vectoriel de dimension n.*

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs d'une base quelconque de cet espace.

2 Applications linéaires

2.1 Définition

Définition 12 *Soient E et F deux espaces vectoriels et soit f une application de E dans F. f est une application linéaire si*

1. $\forall u \in E \quad \forall v \in E$: $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarques:

$$f(0_E) = 0_F \qquad f(-x) = -f(x)$$

Exemple 15 *:*

1. *Les fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont de la forme:*

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

2. *Soit g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ définie par:*

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & y = (y_1, y_2) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1 & = 2x_1 + x_2 \\ y_2 & = x_2 - x_3 \end{cases}$$

On vérifie que g est une application linéaire.

3.

$$\begin{array}{rcl} h : I\!R^2 & \to & I\!R \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & 2x_1^2 + x_2 \end{array}$$

h n'est pas une application linéaire.

L'ensemble des applications linéaires définies de E dans F est noté $\pounds\,(E, F)$.

Théorème 1 *$(\pounds\,(E, F), +, .)$ est un espace vectoriel réel.*

Définition 13 *On appelle* ***isomorphisme*** *toute application linéaire bijective. On appelle* ***endomorphisme*** *toute application linéaire définie de l'ensemble E dans lui-même. On note $\pounds\,(E)$, l'ensemble des endomorphismes de E.*

2.2 Propriétés

Prop 6 *Conséquences directes de la définition:*

1.

$$f(0_E) = 0_F \qquad (\lambda = 0)$$

2.

$$\forall v \in E : \quad f(-v) = -f(v) \quad (\lambda = -1)$$

3. somme récurrente:

$$(v_1, v_2, ..., v_n) \in E^n : \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)$$

Prop 7 *Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille liée de n vecteurs de E. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors la famille $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ est liée.*

Preuve:
$(v_1, v_2, ..., v_n)$ liée, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, non tous nuls tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0_E$$

donc

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) = f(0_E) = 0_F$$

ou encore

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + ... + \lambda_n f(v_n) = 0_F$$

ainsi $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ est une famille liée.

Prop 8 *Soit $f : E \to F$ linéaire alors:*

1. *si A est un sous-espace vectoriel de E alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

2. *si B est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve:

1. On a
$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$
Soit y_1 et y_2 deux éléments de $f(A)$:
$$\exists x_1 \in A : y_1 = f(x_1) \qquad \exists x_2 \in A : y_2 = f(x_2)$$
et si λ_1, λ_2 sont des réels
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in f(A)$$
donc $f(A)$ est stable par combinaisons linéaires, c'est un sous-espace vectoriel de F.

2. On a
$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$
Soit x_1 et x_2 deux éléments de $f^{-1}(B)$:
$$y_1 = f(x_1) \in B \qquad y_2 = f(x_2) \in B$$
or B est un sous-espace vectoriel donc stable par combinaisons linéaires, si λ_1, λ_2 sont des réels
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in B$$
mais
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in B$$
donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$ donc $f^{-1}(B)$ est stable par combinaisons linéaires, c'est un sous-espace vectoriel de E.

2.3 Image et Noyau

Définition 14 *On désigne par* $\operatorname{Im} f$ *l'ensemble des images des éléments de E qu'on appelle aussi* ***l'ensemble image*** *de E.*

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) : x \in E\}$$

$\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Définition 15 *Considérons le sous-espace vectoriel$\{0_F\}$; $\quad f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le* ***noyau*** *de f et on le note* $\ker f$.

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{v \in E : f(v) = 0_F\}$$

Exemple 16 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

Determiner $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

- *On a*

  $$x = (x_1, x_2) \in \ker f \Longleftrightarrow f(x_1, x_2) = (0,0) \Longleftrightarrow (x_1, 0) = (0,0) \Longleftrightarrow x_1 = 0$$

  donc $\ker f = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} = Vect(e_2)$ *droite vectorielle engendrée par* $e_2 = (0,1)$.

- *On a*

  $$\operatorname{Im} f = \left\{f(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\} = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\} = Vect(e_1)$$

  droite vectorielle engendrée par $e_1 = (1,0)$.

2.4 Applications dans les espaces de dimension finie

Théorème 2 ***Théorème de la dimension:*** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et soit* $f : E \to F$ *linéaire alors*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim E$$

Définition 16 *On appelle rang de* f *et on note* $rg(f)$ *la dimension du sous-espace vectoriel* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4 *Determiner* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3)$$

Solution

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

donc $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = 3$.
et $x \in \ker f$ entraîne

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

donc $\ker f = vect(0,1,1)$ et $\dim \ker f = 1$. D'après le théorème de la dimension finie

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$$

donc $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

D'une façon générale,une application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, à $x \in \mathbb{R}^p$ associe $y = f(x) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

chaque y_i est une fonction linéaire de $x_1, x_2, ..., x_p$:

$$\forall i = 1, ..., n \qquad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$$

les a_{ij} : $i = 1, ..., n \qquad j = 1, ..., p$ sont des réels.

On dira (voir module 2) que les coefficients (a_{ij}) forment la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.