Algèbre linéaire

Cours 3

1 Valeurs propres et vecteurs propres

Soit V un espace vectoriel sur un corps K et T un opérateur linéaire sur V.

Définition 1. Un scalaire $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de T s'il existe un vecteur $v \in V$ non nul tel que

$$T(v) = \lambda v.$$

Le vecteur v est alors appelé un **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ.

Exemple 2. Considérons l'opérateur différentiel $D = \frac{d}{dt}$ sur l'espace des fonctions différentiables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ différent de zéro, la fonction e^{at} est un vecteur propre de D correspondant à la valeur propre a. En effet,

$$D(e^{at}) = \frac{de^{at}}{dt} = ae^{at}.$$

Soit A une matrice carrée avec les éléments dans un corps K. Elle peut être vue comme un opérateur linéaire sur K^n. Les notions de valeurs propres et vecteurs propres se transposent donc sur les matrices.

Définition 3. Un scalaire $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $v \in K^n$ non nul tel que

$$Av = \lambda v.$$

Le vecteur v est alors appelé un **vecteur propre** de A correspondant à la valeur propre λ.

Propriété 4. Les vecteurs propres correspondant à la même valeur propre λ forment un sous-espace vectoriel de K^n : si u et v sont des vecteurs propres, alors, quel que soit $k \in K$, les vecteurs ku et $u + v$ sont aussi des vecteurs propres correspondant à λ.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} A(ku) &= kAu = k\lambda u = \lambda(ku), \\ A(u+v) &= Au + Av = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v). \end{aligned}$$

Par définition, ku et $u+v$ sont des vecteurs propres de A correspondant à la valeur propre λ. □

Définition 5. Le **polynôme caractéristique** de A est défini de la manière suivante :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Exemple 6. Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Proposition 7. Un scalaire λ est une valeur propre de A si, et seulement si, il est une racine du polynôme caractéristique de A :

$$p_A(\lambda) = 0.$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de A. Par définition, il existe un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$. Ceci est équivalent à

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Puisque cette équation possède une solution $v \neq 0$, la matrice est nécessairement singulière ce qui implique $\det(A - \lambda I) = 0$.

Supposons maintenant que λ vérifie $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. Cela implique qu'il existe une solution non nulle v à l'équation

$$(A - \lambda I)v = 0 \iff Av = \lambda v.$$

Par définition, λ est donc une valeur propre de A et v est un vecteur propre correspondant. □

Exemple 8. Trouvons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Nous avons déjà trouvé son polynôme caractéristique. Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Ce sont donc $\lambda = 4$ et $\lambda = -1$.

Trouvons maintenant les vecteurs propres correspondants. Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre correspondant à $\lambda = 4$. Il vérifie l'équation

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système d'équations sur x et y est équivalent à une équation

$$3x - 2y = 0,$$

d'où $y = \frac{3}{2}x$. Tous les vecteurs propres sont donc de la forme $v = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix}$. Par exemple, en choisissant $x = 2$, on obtient $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tous les autres vecteurs propres correspondant à $\lambda = 4$ sont des multiples de v.

De la même manière, si $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = -1$, alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient $2x+2y = 0$ d'où $y = -x$. Tous les vecteurs propres correspondant à la valeur propre -1 sont des multiples de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 9. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

L'équation $\lambda^2 + 1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, si la matrice A est considérée comme une matrice sur $\mathbb{R}$, alors elle n'a pas de valeurs propres. Si A est une matrice sur $\mathbb{C}$, alors ses valeurs propres sont $\lambda = i$ et $\lambda = -i$.

Cet exemple montre l'importance du corps K dans la notion de valeur propre.

Proposition 10. Des matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et, par conséquent, les mêmes valeurs propres.

Démonstration. En effet, si $A = PBP^{-1}$ où P est une matrice inversible, alors

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I) = \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B - \lambda I)\det(P^{-1}) = \det(B - \lambda I) = p_B(\lambda). \end{aligned}$$

□

Remarque 11. La réciproque n'est pas vraie : si A et B ont le même polynôme caractéristique, elles ne sont pas nécessairement semblables. Considérons, par exemple, les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \lambda^2.$$

Montrons que A et B ne sont pas semblables. En effet, quelque soit une matrice P,

$$PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A.$$

La remarque suivante permet d'écrire directement le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A), \quad (1)$$

où $\operatorname{tr}(A)$ est la trace de A définie comme la somme de ces éléments diagonaux.

On peut généraliser cette propriété à des matrices d'ordre arbitraire $n \times n$. Soit $k \leq n$. Considérons les sous-matrices $k \times k$ de A dont les éléments diagonaux se trouvent sur la diagonale principale de A. Notons M_k la somme des déterminants de toutes ces matrices. Alors,

$$p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}M_1\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}M_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)M_{n-1}\lambda + M_n.$$

Notons que $M_1 = \operatorname{tr}(A)$ et $M_n = \det(A)$. Si $n = 2$, on obtient bien la formule (1). Pour des matrices 3×3, la formule prend la forme suivante :

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2 - M_2\lambda + \det(A),$$

où

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2 Diagonalisation

Nous sommes prêts à formuler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A soit diagonalisable (semblable à une matrice diagonale).

Théorème 12. Une matrice carrée $n \times n$ A est semblable à une matrice diagonale Λ si et seulement si A a n vecteurs propres linéairement indépendants. Dans ce cas, les éléments diagonaux de Λ sont les valeurs propres.

Démonstration. Supposons que A possède n vecteurs propres indépendants. Par définition des valeurs propres, nous avons :

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1, \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2, \\ \ldots \\ Av_n &= \lambda_n v_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Si on note P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ et Λ la matrice diagonale avec les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale, on peut écrire ces égalités sous forme matricielle :

$$AP = P\Lambda.$$

Puisque les vecteurs propres sont indépendants, la matrice P est inversible. En multipliant les deux côtés par P^{-1} à droite, on obtient

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

Par définition, la matrice A est semblable à la matrice diagonale Λ.

Pour montrer la réciproque, supposons qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale Λ telles que $A = P\Lambda P^{-1}$. Ceci est équivalent à $AP = P\Lambda$. Si $v_1, \ldots, v_n$ sont les colonnes de P, alors on peut écrire la dernière égalité matricielle sous la forme (2). Par définition, $v_1, \ldots, v_n$ sont des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les éléments diagonaux de Λ. Nous avons donc montré que si A est semblable à une matrice diagonale, elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants. $\square$

Exemple 13. Considérons à nouveau la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Nous avons trouvé ses valeurs propres (4 et -1) et les vecteurs propres correspondants : $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On vérifie directement que v et w sont linéairement indépendants. Par conséquent, d'après le théorème 12, la matrice A est diagonalisable. Plus précisément,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Comment peut-on vérifier si une matrice donnée a n vecteurs propres indépendants ? Nous allons établir des propriétés qui permettrons de répondre à cette question.

Proposition 14. Des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres *distinctes* sont linéairement indépendants.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de vecteurs k. Si $k = 1$, le vecteur v_1 est linéairement indépendant puisqu'il est non nul. Supposons que cette propriété est vraie pour $k - 1$ vecteurs propres correspondants à $k - 1$ valeurs propres distinctes.

Prenons maintenant k vecteurs propres $v_1, \ldots, v_k$ correspondant à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Pour montrer qu'ils sont indépendants, supposons que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \tag{3}$$

et montrons que tous les scalaires α_i sont nuls. En multipliant cette égalité par A, on obtient

$$\alpha_1 A v_1 + \cdots + \alpha_k A v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0.$$

On peut par ailleurs multiplier (3) par λ_k :

$$\alpha_1 \lambda_k v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0.$$

En soustrayant cette égalité de la précédente, on obtient

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0.$$

Puisque $v_1, \ldots, v_{k-1}$ sont indépendants d'après l'hypothèse de récurrence, tous les coefficients $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k)$ sont nuls. Comme les valeurs propres sont distinctes, nous avons $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$ et donc $\alpha_i = 0$, pour $i = 1, \ldots, k - 1$. En substituant ces valeurs dans (3), on obtient

$$\alpha_k v_k = 0,$$

d'où $\alpha_k = 0$, puisque v_k est un vecteur propre et donc différent de zéro. La proposition est démontrée. □

Corollaire 15. Si A possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Le cas de n valeurs propres distinctes n'est pas le seul où la matrice est diagonalisable. Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est le suivant :

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(1-\lambda),$$

puisque la matrice est triangulaire et donc son déterminant est égal au produit des éléments diagonaux. Nous en déduisons que les valeurs propres de A sont $\lambda = 3$ et $\lambda = 1$.

Trouvons les vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$. Soit $v = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top$ un tel vecteur. Nous avons donc le système suivant pour déterminer x, y et z :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que ce système est équivalent à une seule équation

$$-2z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0.$$

On en déduit que tous les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 3 ont la forme $\begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}^\top$ avec x et y arbitraires. On peut donc trouver deux vecteurs propres indépendants qui correspondent à $\lambda = 3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Trouvons maintenant les vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$. Si $v = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top$, alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à deux équations :

$$\begin{aligned} 2x - 2z &= 0, \\ 2y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

On obtient $x = z$ et $y = z$, donc les vecteurs propres sont de la forme $v = \begin{pmatrix} z & z & z \end{pmatrix}^\top$ avec z arbitraire. Ils sont donc tous des multiples de

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que le vecteur v_3 est indépendant de tous les vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ d'après la proposition 14. Par conséquent, les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont trois vecteurs propres linéairement indépendants et donc A est diagonalisable. Plus précisément, $A = P\Lambda P^{-1}$ avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Résumons cet exemple : il existe des matrices qui n'ont pas n valeurs propres distinctes mais qui sont tout de même diagonalisables.

Remarque 16. La matrice P n'est pas unique. En effet, on pourrait choisir d'autres vecteurs propres sans changer le résultat (à condition de choisir v_1 et v_2 indépendants). Par exemple,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice Λ est unique aux permutations des éléments diagonaux près. C'est-à-dire, les éléments diagonaux sont toujours 3, 3 et 1 mais leur ordre peut être différent. Par exemple, A est également semblable à la matrice diagonale suivante :

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une matrice $\tilde{P}$ correspondante, il faut changer de la même manière l'ordre des colonnes de P : $\tilde{P} = \begin{pmatrix} v_1 & v_3 & v_2 \end{pmatrix}$. Par exemple,

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec chacune de ces matrices, on a $A = \tilde{P}\tilde{\Lambda}\tilde{P}^{-1}$.