Chapitre 2

Matrices

2.1 Définitions-Généralités

Définition 1 *On appelle **matrice** de type (n,p) un tableau de réels a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, i désignant la ligne et j désignant la colonne :*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & ...a_{1j}... & a_{1n} \\ . & . & \\ . & . & \\ a_{i1} & ...\ a_{ij}\ ... & a_{in} \\ . & . & \\ . & . & \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

a_{ij} s'appelle le terme général de la matrice.

La matrice A est notée

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq p}$$

La matrice peut être aussi notée en colonnes ou en lignes :

$$A = (C_1, C_2, ..., C_p) \quad \text{où } C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \quad \text{où } L_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \tag{2.3}$$

On note $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de type (n,p).

Exemple 1 *:*

– *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

est de type $(3,4)$.

– *La matrice de type* $(1,4)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice ligne.

– *La matrice de type* $(4,1)$

$$C = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice colonne.

2.2 Opérations sur les matrices

Soient les matrices A et B :

$$A = (a_{ij}) \in M_{(n,p)}(I\!R) \text{ et } B = (b_{ij}) \in M_{(n,p)}(I\!R)$$

Définition 2 *On définit la somme des deux matrices :*

$$A + B = (c_{ij}) \in M_{(n,p)}(I\!R) \quad \textit{avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

et la multiplication par un scalaire $\lambda \in I\!R$:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \quad \lambda \cdot A \in M_{(n,p)}(I\!R)$$

Proposition 1 *L'ensemble* $M_{(n,p)}(I\!R)$ *muni de ces deux opérations est un espace vectoriel de dimension* np.

– $0_{M_{(n,p)}(I\!R)}$ est la matrice nulle.
– La base canonique de $M_{(n,p)}(I\!R)$ est composée des np matrices E_{ik} où E_{ik} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le terme situé sur la $i^{ème}$ ligne, $k^{ème}$ colonne qui vaut 1 :

$$E_{ik} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & k & & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & ... & . & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & ... & ... & 0 \\ . & ... & 0 & ... & ... & . \\ 0 & ... & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 3 *On appelle* ***transposée*** *de A et on note ${}^tA$ ou bien A', la matrice ${}^tA = (b_{ij})$, avec*

$$b_{ij} = a_{ji}$$

Si $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ alors ${}^tA \in M_{(p,n)}(\mathbb{R})$.

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Proposition 2 *la transposée vérifie les propriétés suivantes :*

1. $${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$
2. $${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$$
3. $${}^t({}^tA) = A$$

Remarque : L'application qui à une matrice associe sa transposée est un isomorphisme de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ sur $M_{(p,n)}(\mathbb{R})$.

2.3 Produit matriciel

Définition 4 *Soient les matrices A et B*

$$A = (a_{ij}) \in M_{(n,p)}(\mathbb{R}) \text{ et } B = (b_{ij}) \in M_{(p,q)}(\mathbb{R})$$

On définit le produit des deux matrices par la matrice :

$$A.B = (c_{ij}) \; ; \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

On a

$$(A.B) \in M_{(n,q)}(\mathbb{R})$$

Exemple 3 *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On a

$$A.B = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 3\times(-1) & 2\times 2 + 3\times(-2) \\ 4\times 1 + 5\times(-1) & 4\times 2 + 5\times(-2) \\ 6\times 1 + 7\times(-1) & 6\times 2 + 7\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarques :

1. Le produit matriciel n'est pas commutatif

$$A_{(n,p)}B_{(p,q)} \neq B_{(p,q)}A_{(n,p)}$$

   Ce dernier produit n'a d'ailleurs aucun sens. En fait le produit matriciel est défini uniquement pour les matrices telles que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit est égal au nombre de lignes de la matrice de droite.

2. $$A \cdot B = 0 \quad \nRightarrow \quad A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0$$

3. $$A \cdot B = A \cdot C \quad \nRightarrow \quad B = C$$

Proposition 3 *Propriétés du produit matriciel*

1. *Le produit des matrices est associatif :*

$$A_{(p,q)}(B_{(q,m)}C_{(m,n)}) = \left(A_{(p,q)}B_{(q,m)}\right)C_{(m,n)}$$

2. *Le produit des matrices est distributif à gauche et à droite par rapport à l'addition.*
   Soient les matrices A_1, A_2, B et C. On a

$$(A_1 + A_2)\,B = A_1B + A_2B$$

   avec

$$A_1 \in M_{(n,p)}(\mathbb{R}) \quad A_2 \in M_{(n,p)}(\mathbb{R}) \quad B \in M_{(p,m)}(\mathbb{R})$$

   De même

$$C\,(A_1 + A_2) = CA_1 + CA_2$$

   avec

$$C \in M_{(q,n)}(\mathbb{R})$$

3. $${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

2.4 Matrices carrées

2.4.1 Définitions

Définition 5 $A = (a_{ij}) \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ *est une* ***matrice carrée*** *si $n = p$. On dit alors que la matrice est carrée d'ordre n et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $M_{(n)}(\mathbb{R})$.*

Définition 6 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_{(n)}(I\!R)$. *On appelle* ***trace*** *de* A *la somme des éléments diagonaux de la matrice :*

$$Tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2.4}$$

Exemple 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Tr\,(A) = -1 + 4 + 2 = 5$$

2.4.2 Matrices particulières

1. La matrice telle que $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

est la **matrice unité** ou identité : c'est la matrice de l'identité sur $I\!R^n$:

$$\forall A \in M_{(n)}(I\!R) : A.I_n = I_n.A = A$$

2. Une matrice est diagonale si $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$, on la note

$$D = diag\,(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) \tag{2.6}$$

Exemple 5

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = diag\,(2, 5, 9)$$

3. Une matrice est scalaire si elle est diagonale et si tous les termes de la diagonale sont égaux. A est donc scalaire si

$$\exists \lambda \in I\!R,\ A = \lambda I_n \tag{2.7}$$

4. Une matrice est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall (i, j)$. Dans ce cas

$${}^{t}\!A = A \tag{2.8}$$

5. Une matrice est triangulaire supérieure si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i > j$$

Exemple 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. De même une matrice est triangulaire inférieure si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i < j$$

2.4.3 Puissances d'une matrice

Définition 7 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{(n)}(\mathbb{R})$, pour tout entier p, on définit par récurrence la puissance $p^{\text{ème}}$ de A :*

$$\begin{cases} A^1 = A \\ A^p = A.A^{p-1} \end{cases}$$

par convention

$$A^0 = I_n$$

1. **Proposition 4** *Si $D = diag\,(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ alors pour tout entier p,*

$$D^p = diag\,(a_{11}^p, a_{22}^p, ..., a_{nn}^p) \tag{2.9}$$

Exemple 7

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Théorème 1 *Formule du binôme*
Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Si $A.B = B.A$ alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k \cdot B^{p-k} \tag{2.10}$$

Exemple 8 *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et calculons A^n ; on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J + 2I_3$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^n = (J + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k J^k (2I_3)^{n-k}$$

et donc

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \cdot \complement_n^k J^k$$

Comme

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = 0 \quad \text{la matrice nulle}$$

On en déduit que

$$A^n = 2^n \cdot I_3 + n2^{n-1}J + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} J^2$$

D'où enfin

$$A^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8 & 4 & n(n+3) \\ 0 & 8 & 4n \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2.4.4 Matrices inversibles

Définition 8 *$A \in M_{(n)}(\mathbb{R})$ est **inversible** si*

$$\exists B \in M_{(n)}(\mathbb{R}) : A.B = B.A = I_n$$

I_n étant la matrice identité.
L'inverse de A lorsqu'il existe, est noté A^{-1}.

Exemple 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Le calcul de A^{-1} n'est pas toujours aussi simple !

Théorème 2 *A est inversible si-et-seulement-si ${}^tA$ est inversible.*

Preuve

$$A^{-1}A = I_n \quad \Rightarrow \quad {}^t\left(A^{-1}A\right) = {}^tI_n = I_n$$

$\Rightarrow$

$${}^tA\ {}^t\left(A^{-1}\right) = I_n$$

et inversement.

Théorème 3 *Soient les matrices $A \in M_{(n)}(I\!R)$ et $B \in M_{(n)}(I\!R)$.*
Si A et B sont inversibles, alors $A.B$ est inversible et

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

Preuve
On a

$$\begin{aligned} A.A^{-1} &= A^{-1}.A = I \\ B.B^{-1} &= B^{-1}.B = I \end{aligned}$$

D'où

$$(A.B).B^{-1}.A^{-1} = A.\left(B.B^{-1}\right).A^{-1} = A.A^{-1} = I$$

2.5 Matrices et applications linéaires

2.5.1 Matrice associée à une application linéaire

Soit E un $I\!R-EV$ de dimension p et soit $B_E = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une base de E.

Soit F un $I\!R-EV$ de dimension n et soit $B_F = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une base de F.

Soit f une application linéaire de E vers F.

L'image de B_E par l'application linéaire f peut être définie par l'image par f de chacun des vecteurs u_j, $1 \leqslant j \leqslant p$; cette image se décompose sur la base B_F :

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \qquad a_{ij} \in I\!R$$

Considérons le vecteur $x \in E$:

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j u_j$$

et le vecteur y image de x par l'application f, $y \in F$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

$$y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(u_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

d'où

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) v_i$$

ou encore

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \qquad \forall i = 1, ..., n \tag{2.11}$$

Si on représente x et y par les matrices colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

alors la formule (2.11) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$AX = Y \tag{2.12}$$

$A = (a_{ij}) \in M_{(n,p)}(I\!R)$ est appelée la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases B_E de E et B_F de F :

$$A = Mat_{B_E,B_F}(f) \tag{2.13}$$

Remarques :

1. Si f est un endomorphisme de E et B une base de E, la matrice de f relativement à B est notée

$$A = mat_B(f)$$

2. Si l'écriture en colonnes de A est

$$A = (C_1, C_2, ..., C_p)$$

alors C_j est formée par les composantes du vecteur $f(u_j)$ dans la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & ... & f(u_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{array}$$

Exemple 10 *f est l'application linéaire de $I\!R^3$ dans $I\!R^2$ définie par*

$$\begin{cases} f(e_1) & = 2e'_1 - e'_2 \\ f(e_2) & = e'_1 \\ f(e_3) & = -e'_1 + 3e'_2 \end{cases}$$

$B = (e_1, e_2, e_3)$ et $B' = (e'_1, e'_2)$ désignent respectivement les bases canoniques de $I\!R^3$ et $I\!R^2$. La matrice de f relativement aux bases B et B' est

$$A = mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5.2 Application linéaire associée à une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{(n,p)}(I\!R)$.
Etant donné les bases canoniques

$$B = (e_1, e_2, ..., e_p) \text{ de } I\!R^p \qquad B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n) \text{ de } I\!R^n$$

on peut associer à A, l'application linéaire f définie de $I\!R^p$ dans $I\!R^n$ par :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i^{'} \quad \forall j \in \{1, 2, ..., p\}$$

On a alors

$$A = Mat_{B,B'}(f)$$

2.5.3 Matrice associée à la composée de deux applications linéaires

Soient E, F et G trois espaces vectoriels réels ; soient B_E, B_F et B_G des bases respectives de E, F et G.

Considérons l'application linéaire $f : E \to F$ et sa matrice associée A dans les bases B_E, B_F et l'application linéaire $g : F \to G$ et sa matrice associée B dans les bases B_F et B_G. Alors la matrice associée à la composée $g \circ f$ dans les bases B_E et B_G est $C = B \times A$:

$$mat_{B_E,B_G}(g \circ f) = mat_{B_F,B_G}(g) . mat_{B_E,B_F}(f) \qquad (2.14)$$

2.5.4 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 9 *Soit $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n; à chaque vecteur x_i on associe la matrice colonne X_i :*

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i \rightsquigarrow X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ . \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice de la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ la matrice X de type (n,p) dont les colonnes sont les X_j, $j = 1, ..., p$

$$X = (x_{ij}) = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

2.5.5 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice associée.

En effet, si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de E, $(f(e_1), .f(e_2), .., f(e_p))$ est une famille génératrice de $f(E) = \operatorname{Im} f$.

Or $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p)$ constituent les p colonnes formant la matrice associée à f. On a donc,

$$\dim \operatorname{Im} f = rg(A) = rg(f) \tag{2.15}$$

Remarque : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne associée au vecteur $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$l'équation $AX = 0$ signifie que $x \in \ker f$.

Exemple 11 *Cherchons le rang de la matrice $A \in M_{(4,5)}(I\!R)$.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3$

En effet, on peut vérifier que la famille de vecteurs colonne :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a pour rang 3.

Remarque : pour $A \in M_{(n,p)}(I\!R)$ on a

$$rg(A) \leqslant \inf(n,p) \qquad rg(A) = rg\left({}^t\!A\right)$$

On ne change donc pas le rang de A en permutant les lignes et les colonnes de la matrice.

2.6 Changement de base

Soit E un $I\!R - EV$, soient $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases de E.

Définition 10 *On appelle **matrice de passage** de la base B à la base B', la matrice de $(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ dans la base B; on la note $P_{BB'}$.*

Exemple 12 *$E = \mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et les vecteurs*

$$\begin{cases} e'_1 & = e_1 + e_2 \\ e'_1 & = e_1 - e_2 \\ e'_3 & = e_3 \end{cases}$$

$B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base et

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques :

1. Une matrice de passage correspond à un changement de bases. Les colonnes de $P_{BB'}$ sont formées des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' dans l'ancienne base B.
2. $$P_{BB'} = mat_{BB'}(Id_E) \tag{2.16}$$
3. $P_{BB'}$ est inversible et $P_{BB'}^{-1}$ est la matrice de passage de B' à B.

Proposition 5 *Soient $B \quad B' \quad B''$ 3 bases de E :*

$$P_{BB''} = P_{BB'}.P_{B'B''} \tag{2.17}$$

Proposition 6 *Formule de changement de bases :*

Soit $x \in E$, ses décompositions sur B et B' s'écrivent :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$$

Soient les matrices colonnes X et X' associées à x :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$$

alors

$$X = P_{BB'}X' \qquad X' = P_{B'B}X \tag{2.18}$$

En effet si $P_{BB'} = (P_{ij})$:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \qquad j = 1, ..., n$$

et

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

d'où

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et on en conclut que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \qquad i = 1, ..., n \tag{2.19}$$

ou encore

$$X = P_{BB'} X'$$

Exemple 13 *Dans* $I\!R^2$ *soient* $B = (e_1, e_2)$ *la base canonique et* $B' = (e'_1, e'_2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{2} (e'_1 + e'_2) \\ e_2 = \frac{1}{2} (e'_1 - e'_2) \end{array} \right.$$

et

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} e'_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} e'_2$$

donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

2.7 Changement de matrice d'une application linéaire

Théorème 4 *Soit f une application linéaire d'un espace E de dimension p dans un espace F de dimension n.*

Soient $B_E = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ et $B'_E = \left\{u'_1, u'_2, ..., u'_p\right\}$ deux bases de E et P la matrice de passage de B_E à B'_E.

Soient $B_F = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $B'_F = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ deux bases de F et Q la matrice de passage de B_F à B'_F.

Soient A la matrice de f dans les bases B_E et B_F et A' la matrice de f dans les bases B'_E et B'_F :

$$A = Mat_{B_E, B_F}(f) \quad et \quad A' = Mat_{B'_E, B'_F}(f)$$

On a alors :

$$A' = Q^{-1} A P \tag{2.20}$$

Preuve la relation

$$y = f(x) \iff \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i u_i \right) \iff \sum_{i=1}^{n} y'_i v'_i = f\left(\sum_{i=1}^{p} x'_i u'_i \right)$$

et se traduit matriciellement par les deux équations correspondant aux deux couples de bases de E et F :

$$Y = AX \quad Y' = A'X'$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} {y'}_1 \\ . \\ . \\ . \\ y'_n \end{pmatrix}$$

mais ces matrices colonnes sont liées par les relations :

$$X = PX' \qquad Y = QY'$$

On peut écrire Y de deux façons

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = AX \\ Y = QY' \end{array} \right. \Longrightarrow QY' = AX$$

on a alors

$$QY' = APX' \quad \text{et} \quad QA'X' = APX'$$

D'où enfin

$$QA' = AP \quad \text{et} \quad A' = Q^{-1}AP$$

Remarque : Lorsque F et E coïncident et que f est un endomorphisme, ce résultat s'écrit :

$$A' = P^{-1}AP \tag{2.21}$$

On dira dans ce cas, que les matrices A et A' sont **semblables**.