Chapitre 3

Déterminants

3.1 Définition par récurrence des déterminants

Définition 1 *Soit* $A \in M_n(I\!R)$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & ...a_{1j}... & a_{1n} \\ . & . & \\ . & . & \\ a_{i1} & ...\ a_{ij}\ ... & a_{in} \\ . & . & \\ . & . & \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On définit par récurrence une application "déterminant" notée :

$$\begin{array}{cccc} \det : & M_n(I\!R) & \rightarrow & I\!R \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

de la manière suivante :

- *Si* $n = 1$, *c'est-à-dire* $A = (a)$ *alors* $\det(A) = a$

Si $n > 1$: soit A_{ij} la matrice extraite de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1\ 1} & & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & & a_{1\ n} \\ . & ... & . & & ... & . \\ a_{i-1\ 1} & . & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & . & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & . & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & . & a_{i+1\ n} \\ . & ... & . & & ... & . \\ a_{n\ 1} & & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & & a_{n\ n} \end{pmatrix} \in M_{n-1}(I\!R) \tag{3.1}$$

alors

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\det(A_{11}) + ... + (-1)^{k+1} a_{1k}\det(A_{1k}) \\ &\quad +... + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(A_{1n}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarque : le déterminant de A est noté

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple 1 *:*

– $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-1) \times 2 = 5$$

plus généralement

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

– $n = 3$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (1-5) - 2 \times (-2+1) - 3 \times (-10+1) \\ &= 25 \end{aligned}$$

plus généralement, pour une matrice carrée A d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

le déterminant s'écrit :

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

3.2 Déterminants - Formes multilinéaires

Nous admettons le théorème suivant qui exprime les propriétés fondamentales des déterminants comme formes multilinéaires alternées :

Théorème 1 *Propriétés des déterminants*

1. *Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne. Si l'écriture en colonnes de A est*
$$A = (C_1, C_2, ..., C_n)$$
alors
   (a)
$$\det(C_1, ..., \lambda C_j, ..., C_n) = \lambda \det(C_1, ..., C_j, ..., C_n) \tag{3.3}$$
   (b)
$$\det\left(C_1, ..., C_j + C'_j, ..., C_n\right) = \det(C_1, ..., C_j, ..., C_n) + \det\left(C_1, ..., C'_j, ..., C_n\right) \tag{3.4}$$
2. *Le déterminant est une forme alternée : si on permute deux colonnes, le déterminant change de signe*
$$\det(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_n) = -\det(C_1, ..., C_j, ..., C_i, ..., C_n) \tag{3.5}$$
3. *Si deux colonnes sont identiques le déterminant est nul.*

Exemple 2
$n = 2$
$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$$
$n = 3$:
$$\begin{vmatrix} a & a & a' \\ b & b & b' \\ c & c & c' \end{vmatrix} = abc' - ab'c - abc' + ab'c + a'bc - a'bc = 0$$

Corollaire 1

1. *Si une colonne est combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul.*
En effet, sans perte de généralité, supposons que
$$C_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j C_j$$
*alors l'application "*det*" étant multilinéaire*
$$\det\left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j C_j, C_2, ..., C_i, ..., C_n\right) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \det(C_j, C_2, ..., C_i, ..., C_n)$$
mais chaque élément de cette somme contient deux colonnes identiques et est donc nul.

2. *Si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, le déterminant ne change pas de valeur.*
   En effet, toujours à cause de la multilinéarité

$$\det\left(C_1,...,C_i+\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j C_j,...,C_n\right) = \det\left(C_1,...,C_i,...,C_n\right) + \sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j \det\left(C_1,...,C_j,...,C_n\right)$$

   et

$$\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j \det\left(C_1,...,C_j,...,C_n\right)=0$$

   puisque chaque terme contient deux colonnes identiques.

Proposition 1 *Le déterminant de A est identique à celui de ${}^tA$:*

$$\det(A)=\det\left({}^tA\right) \tag{3.6}$$

Cette propriété entraîne donc que l'application "det" possède les mêmes propriétés vis à vis des lignes que des colonnes.

3.3 Calcul pratique des déterminants

3.3.1 Cofacteurs

Définition 2 *On appelle* ***cofacteur*** *de a_{ij} le scalaire :*

$$c_{ij}=cof\left(a_{ij}\right)=(-1)^{i+j}\det A_{ij} \tag{3.7}$$

où A_{ij} est la matrice introduite en (3.1). *La matrice $C=(c_{ij})$ est appelée matrice des cofacteurs de A ou plus simplement* ***comatrice*** *de A.*

Exemple 3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$cof(1)=(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=0 \quad cof(-1)=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=6$$

Avec cette notation, la formule de définition (3.2) s'écrit :

$$\det A=a_{11}cof\left(a_{11}\right)+a_{12}cof\left(a_{12}\right)+...+a_{1n}cof\left(a_{1n}\right)$$

(développement suivant la première ligne de det A)

En fait le déterminant est identique si on développe suivant une ligne ou une colonne quelconque de A.

Proposition 2

$$\det A = a_{i1} cof\,(a_{i1}) + a_{i2} cof\,(a_{i2}) + ... + a_{in} cof\,(a_{in}) \tag{3.8}$$

(développement suivant la $i^{ème}$ ligne de det A)

Proposition 3

$$\det A = a_{1j} cof\,(a_{1j}) + a_{2j} cof\,(a_{2j}) + ... + a_{nj} cof\,(a_{nj}) \tag{3.9}$$

(développement suivant la $j^{ème}$ colonne de det A)

il faut donc privilégier la ligne i (ou la colonne j) qui contient le maximum de coefficients $a_{ik} = 0$ (ou $a_{kj} = 0$)

Exemple 4 *en développant suivant la deuxième colonne*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^5 \times (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Remarque :

dans le cas d'une matrice diagonale ou triangulaire, le déterminant est tout simplement égal au produit des termes diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ...0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times ... \times a_{nn} \tag{3.10}$$

il suffit en fait de développer consécutivement suivant la première colonne. En particulier

$$\det(I_n) = 1 \tag{3.11}$$

3.3.2 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes

Nous allons réécrire les propriétés de "forme multilinéaire alternée" du déterminant et expliquer de quelle façon on peut les exploiter pour le calcul pratique d'un déterminant.

Considérons un déterminant quelconque Δ d'ordre n. Si on note par $L_1, ..., L_n$ les lignes de Δ et par $C_1, C_2, ..., C_n$ ses colonnes :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ ... \\ L_n \end{vmatrix} = |C_1, C_2, ..., C_n| \tag{3.12}$$

On note par Δ' le déterminant qu'on obtient quand on applique une des opérations élémentaires suivantes :

1. Permutation de deux lignes : $L_i \longleftrightarrow L_j$
$$\Delta' = -\Delta$$
2. Produit par un scalaire : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$
$$\Delta' = \lambda\Delta$$
3. Ajout d'une combinaison linéaire : $L_i \longleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$
$$\Delta' = \Delta$$

On a évidemment les mêmes propriétés vis à vis des colonnes.

Dans la pratique, on essaye d'utiliser ces opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes pour faire apparaître un nombre maximum de coefficients nuls sur une même ligne ou une même colonne.

Exemple 5

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}^{L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1}$$

où on a remplacé L_3 la $3^{\text{ème}}$ ligne de Δ par $L_3 + 2L_1$, opération qui laisse inchangé Δ. Puis, en développant suivant la troisième ligne

$$\Delta = (-1)^6 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

et si on développe le déterminant d'ordre 3 obtenu suivant la $3^{\text{ème}}$ colonne

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8$$

3.3.3 Règle de Sarrus

Pour les déterminants d'ordre $n = 3$, nous avons la règle de calcul suivante :

Proposition 4 *(Règle de Sarrus)*

$$\left|\begin{array}{ccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \\ & \searrow & & \times & & \times \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \\ & \swarrow & & \times & & \times \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \end{array}\right. \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & & a_{12} \\ & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} \\ & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} \end{array}\right. \tag{3.13}$$

On écrit d'abord le déterminant d'ordre 3 *et on reproduit "à côté" les deux premières colonnes. Le déterminant s'écrit alors comme une somme de* 6 *termes, trois affectés d'un signe* $+$ *et trois d'un signe* $-$:

- *On associe le signe* $+$ *au produit des trois termes de chaque diagonale principale :*
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
- *et le signe* $-$ *au produit des trois termes de chaque seconde diagonale :*
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Cette règle s'applique uniquement pour les déterminants d'ordre n=3.

Exemple 6 *pour calculer*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

on écrit

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}$$

ce qui nous donne

$$\det A = (0 + 6 - 1) - (-4 + 1 + 0) = 8$$

3.4 Déterminant d'un endomorphisme, d'un produit de matrices

Soit E un $I\!R - EV$ de dimension n et soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

Définition 3 *Soit* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *une famille de* n *vecteurs de* E*. On appelle déterminant de cette famille, et on note* $\det(x_1, x_2, ..., x_n)$ *le déterminant de la matrice carrée d'ordre* n :

$$X = (x_{ij}) = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

Exemple 7 *Déterminant de la famille des vecteurs de la base canonique*

$$\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\\.\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\.\\0\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}0\\.\\.\\1\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & & ... & 0\\0 & 1 & 0 & . & .\\. & 0 & & & 0\\0 & ... & & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

d'où

$$\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\\.\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\.\\0\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}0\\.\\.\\1\end{pmatrix}\right) = \det I_n = 1 \tag{3.15}$$

Remarques :

1. le déterminant d'une famille de vecteurs est indépendant de la base dans laquelle on écrit ces vecteurs.
2. Si un des vecteur est combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul
$$\det(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow \{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ liée}$$
ce qui est équivalent à dire
$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ est une base } \Leftrightarrow \det(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0 \tag{3.16}$$

Définition 4 *Soit* f *un endomorphisme de* E*. On appelle déterminant de* f *par rapport à la base* B *et on note* $\det_B f$*, le déterminant de la famille*

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$$

Il s'agit en fait, du déterminant de la matrice associée à f *dans la base* $(e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$\det_B f = \det(mat_B(f)) \tag{3.17}$$

Proposition 5 *Soit* f *un endomorphisme de* E*. Soient* $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *et* $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ *deux bases de* E *alors*

$$\det_B f = \det_{B'} f = \det f \tag{3.18}$$

Ce qui signifie que la valeur du déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

Proposition 6 *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une famille de vecteurs de E, alors*

$$\det\left(f\left(X_1\right), f\left(X_2\right), ..., f\left(X_n\right)\right) = \det f \cdot \det\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) \tag{3.19}$$

Proposition 7 *Soient f et g deux endomorphismes de E*
et soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E alors

$$\det g \circ f = \det f \cdot \det g \tag{3.20}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \det g \circ f &= \det\left(g \circ f\left(e_1\right), g \circ f\left(e_2\right), ..., g \circ f\left(e_n\right)\right) \\ &= \det g \cdot \det\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), ..., f\left(e_n\right)\right) \end{aligned}$$

D'où enfin

$$\det g \circ f = \det g \cdot \det f$$

Proposition 8 *Soient*

$$A \in M_n(I\!R) \qquad et\ B \in M_n(I\!R)$$

Alors

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \tag{3.21}$$

De plus, si A est inversible, on a

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tag{3.22}$$

Preuve

Considérons les deux endomorphismes f et g associés respectivement aux deux matrices A et B. On a :

$$\det(g \circ f) = \det g \cdot \det f = \det B \cdot \det A$$

Or la matrice associée à $g \circ f$ est $A \cdot B$ d'où

$$\det(A \cdot B) = \det g \cdot \det f = \det B \cdot \det A$$

A inversible donc $A \cdot A^{-1} = I$. On a alors :

$$1 = \det I_n = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

3.5 Inverse d'une matrice carrée

Théorème 2 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_n(I\!R)$ *et* C *la matrice des cofacteurs de* A *définie par* (3.7) *. Alors*

$$A.^tC = {}^tC.A = \det(A).I_n \tag{3.23}$$

en particulier si A *est une matrice inversible* $(\det A \neq 0)$ *alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad {}^tC \tag{3.24}$$

Remarque : A est inversible si et seulement si

$$\det A \neq 0$$

Preuve : Rappelons que

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \triangle_{kj} \quad (3.2)$$

où

$$\triangle_{kj} = \det A_{kj}$$

A_{kj} étant la matrice définie par (3.1) . Considérons alors la matrice $B = (b_{ij}) \in M_n(I\!R)$ définie par :

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \triangle_{ji}}{\det A}$$

On a

$$A \cdot B = (d_{ij}) \in M_n(I\!R) \qquad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj} \tag{3.25}$$

où

$$d_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times (-1)^{k+j} \triangle_{jk} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \times (-1)^{k+j} \triangle_{jk}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} \times (-1)^{k+j} \triangle_{kj}}$$

1^{er}Cas : $i \neq j$

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \times (-1)^{k+j} \triangle_{jk}$ correspond au déterminant de la matrice A calculé selon la ligne j avec ligne j = ligne i ; d'où un déterminant nul.

$2^{ème}$ Cas : $i = j$

$$d_{ii} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \times (-1)^{i+k} \triangle_{ik}}{\det A} = 1$$

$$A \cdot B = I \quad et \quad B = A^{-1}.$$

D'où le résultat

$$A^{-1} = (b_{ij}) \in M_n(I\!R) \text{ avec } b_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} \triangle_{ji}.$$

Exemple 8 *Soit la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A est une matrice triangulaire donc $\det A = 1$ et A est inversible. La matrice C des cofacteurs de A est donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6 Application au calcul du rang

Définition 5 *Soit $A \in M_{n,p}(I\!R)$. On appelle mineur d'ordre r de A $(r \leq \inf(n,p))$, tout déterminant d'une matrice carrée d'ordre r extraite de A.*

Exemple 9 *le déterminant de la partie quadrillée de la matrice A est un mineur d'ordre 3*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

est un autre mineur d'ordre 3 de A alors que

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

est un mineur d'ordre 2 de A.

Théorème 3 *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, le rang de A est égal à l'ordre maximal d'un mineur non nul de A.*

Exemple 10

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

donc $rg(A) = 3$

Exemple 11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\det A = 0$ *donc* $rg(A) < 3$.
- *tous les mineurs d'ordre* 2 *sont nuls*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- *au moins un mineur d'ordre* 1 *est non nul (en fait ils sont tous non nuls)*

$$|1| = 1$$

donc $rg(A) = 1$

Remarques :

1. $$rg(A) \leq \inf(n, p)$$

2. $$\begin{aligned} rg(A) &= \text{nombre de vecteurs lignes linéairement indépendants} \\ &= \text{nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants} \end{aligned}$$

3. Si f est une application linéaire de E dans F et si B_E est une base de E et B_F une base de F, le rang de f est le rang de la matrice de f relativement aux bases B_E et B_F :
$$rg(f) = rg\left(mat_{B_E,B_F}(f)\right) \tag{3.26}$$

4. Le rang d'une application f est indépendant des bases B_E et B_F. En particulier, deux matrices semblables ont le même rang.

5. Si $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ est une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n et X la matrice de cette famille alors le rang de $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$:

$$rg\,\{x_1, x_2, ..., x_p\} = rg\,(X)$$

en particulier, si $n = p$ (la famille comprend n vecteurs) :

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ est une base } \Leftrightarrow \det X \neq 0 \tag{3.27}$$