Les séries chronologiques ou temporelles :

Description et Représentations

I. Introduction et définitions

1°) Définition

Une série chronologique, ou série temporelle, est une série d'observations ordonnées chronologiquement (les observations sont repérées dans le temps).

Elles sont extrêmement utilisées dans une grande variété de domaines. On peut citer : l'économie (taux de chômage, PNB ...), la finance (cours d'action, taux d'intérêt, ...), l'écologie (pollution à l'ozone, au CO, ...), le transport (avec l'exemple célèbre du trafic aérien international), la démographie…

Exemple1 :

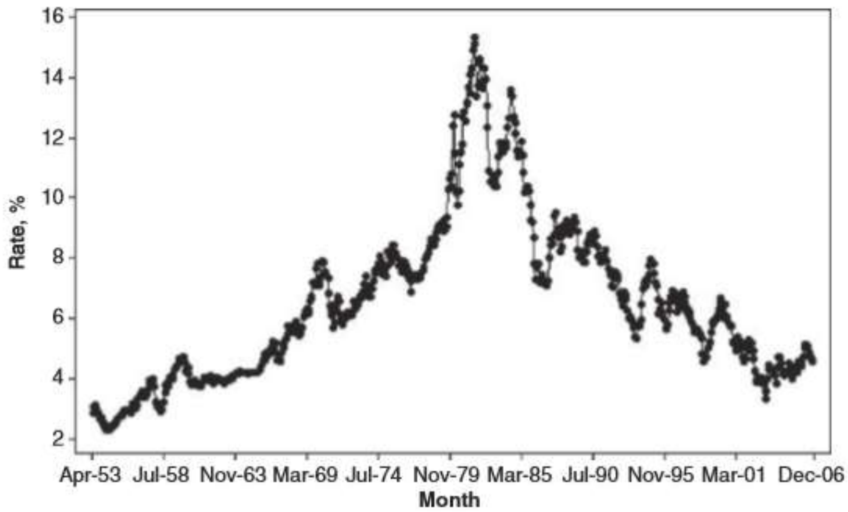
Cet exemple retrace le nombre mensuel de créations d'entreprises en France de janvier à juin 2005.

Tableau 1: Évolution mensuelle des créations d'entreprises en France

	Nombre de créations d'entreprises
janvier	24966
février	26942
mars	26790
avril	25684
mai	25050
juin	26566

Source : Insee Conjoncture, Bulletin d'informations rapides, numéro 2005, 11 juillet 2005

Figure 1: Time series plot of the market yield on US Treasury Securities at 10-year constant maturity. Source: US Treasury



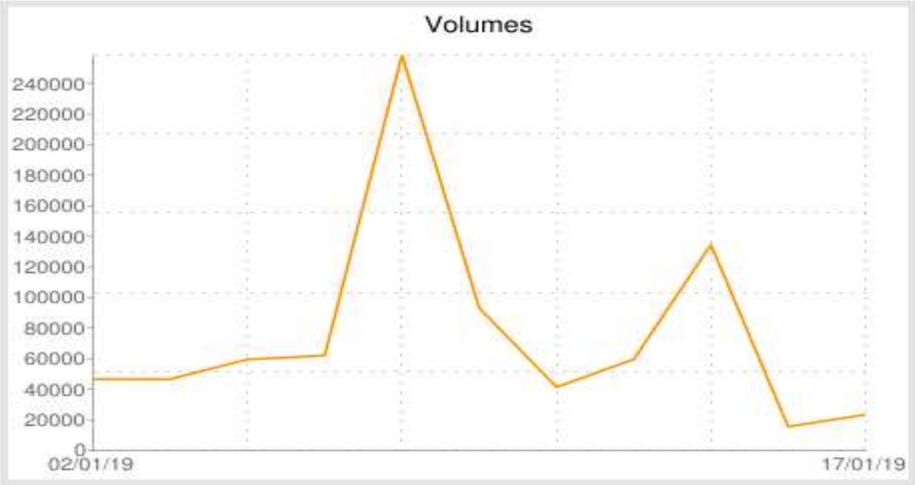
2°) Périodicité

Les séries chronologiques peuvent être annuelles, trimestrielles, mensuelles, hebdomadaires, journalières et même infra-journalières.

Exemple2

Le cours d'une action peut être connu heure après heure et même minute après minute, voire de façon instantanée. Le graphique de la figure 2 ci-après retrace ainsi l'évolution du cours de l'action France Telecom, de minute en minute, le 12 juillet 2005, entre 9 h et 10 h.

Figure 2 Cours de l'action France Telecom



Evolution du cours de l'action Tunis air

Source : http://www.bvmt.com.tn/fr/historique-cotations?code=TN0001200401

À l'inverse, certaines données sont disponibles beaucoup plus rarement. On aura alors des observations sporadiques qui permettront de retracer l'évolution sur une longue période, mais avec une périodicité irrégulière.

Pour représenter graphiquement les séries chronologiques, on mettra toujours le temps en abscisse et les valeurs de la variable en ordonnée. La représentation la plus habituelle est le nuage de points. Mais il est fréquent que l'on relie les points entre eux.

Séance	Ouv.	Clô.	+ haut	+ bas	CMP	Nb. Tr.	Qté	Cap.
02/01/2019	0.780	0.760	0.790	0.760	0.760	64	47626	36206.660
03/01/2019	0.760	0.740	0.760	0.740	0.745	62	48775	36339.340
04/01/2019	0.740	0.720	0.740	0.720	0.721	65	61339	44244.810
07/01/2019	0.710	0.690	0.710	0.690	0.697	73	64345	44856.090
08/01/2019	0.670	0.690	0.690	0.650	0.662	169	258550	171098.860
09/01/2019	0.690	0.670	0.690	0.670	0.674	71	94750	63844.760
10/01/2019	0.690	0.690	0.690	0.670	0.682	65	42433	28923.850
11/01/2019	0.700	0.730	0.730	0.690	0.714	85	61051	43587.540
15/01/2019	0.730	0.720	0.750	0.720	0.738	96	136153	100448.220
16/01/2019	0.740	0.720	0.740	0.720	0.722	38	16983	12265.680
17/01/2019	0.700	0.710	0.720	0.690	0.699	32	24142	16876.570

http://www.bvmt.com.tn/fr/historique-cotations?code=TN0001200401

3°) Tendance, variations saisonnières et accidentelles

L'observation des séries chronologiques permet de distinguer trois composantes principales. La première de ces composantes, **la tendance ou trend**, *donne le sens de l'évolution sur la durée*. La seconde composante, ce sont **les variations saisonnières ou périodiques**. La troisième composante, ce sont **les variations accidentelles**.

Ces trois composantes ne sont pas toujours simultanément présentes dans une série chronologique. Certaines séries n'ont pas de tendance, d'autres n'ont aucune composante périodique. D'autres enfin, ne connaissent aucune variation accidentelle.

Tableau 2 Trafic aérien international de janvier 1949 à décembre 1960 (milliers)

	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
Janvier	112	115	145	171	196	204	242	284	315	340	360	417
Février	118	126	150	180	196	188	233	277	301	318	342	391
Mars	132	141	178	193	236	235	267	317	356	362	406	419
Avril	129	135	163	181	235	227	269	313	348	348	396	461
Mai	121	125	172	183	229	234	270	318	355	363	420	472
Juin	135	149	178	218	243	264	315	374	422	435	472	535
Juillet	148	170	199	230	264	302	364	413	465	491	548	622
Août	148	170	199	242	272	293	347	405	467	505	559	606
Septembre	136	158	184	209	237	259	312	355	404	404	463	508
Octobre	119	133	162	191	211	229	274	306	347	359	407	461
Novembre	104	114	146	172	180	203	237	271	305	310	362	390
Décembre	118	140	166	194	201	229	278	306	336	337	405	432

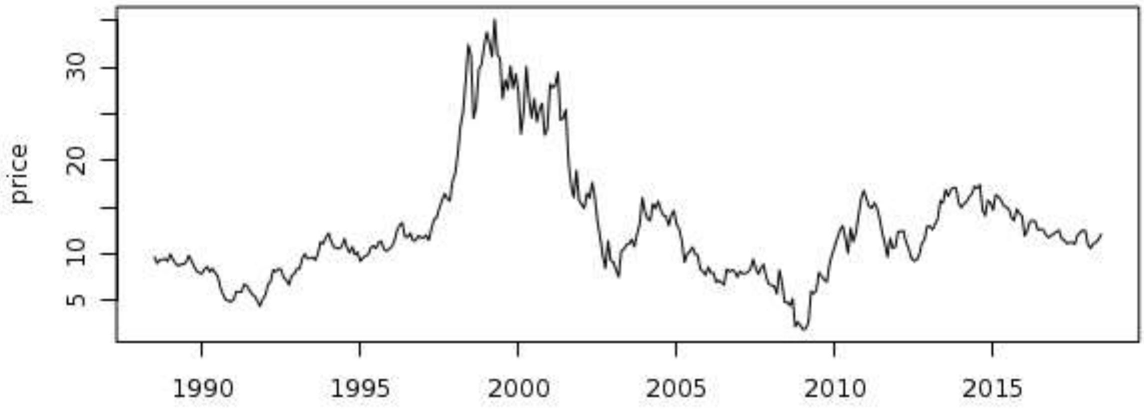
La première étape consiste à tracer les données, ce qui est fait sur la figure ci-après. On peut déjà faire quelques remarques préliminaires :

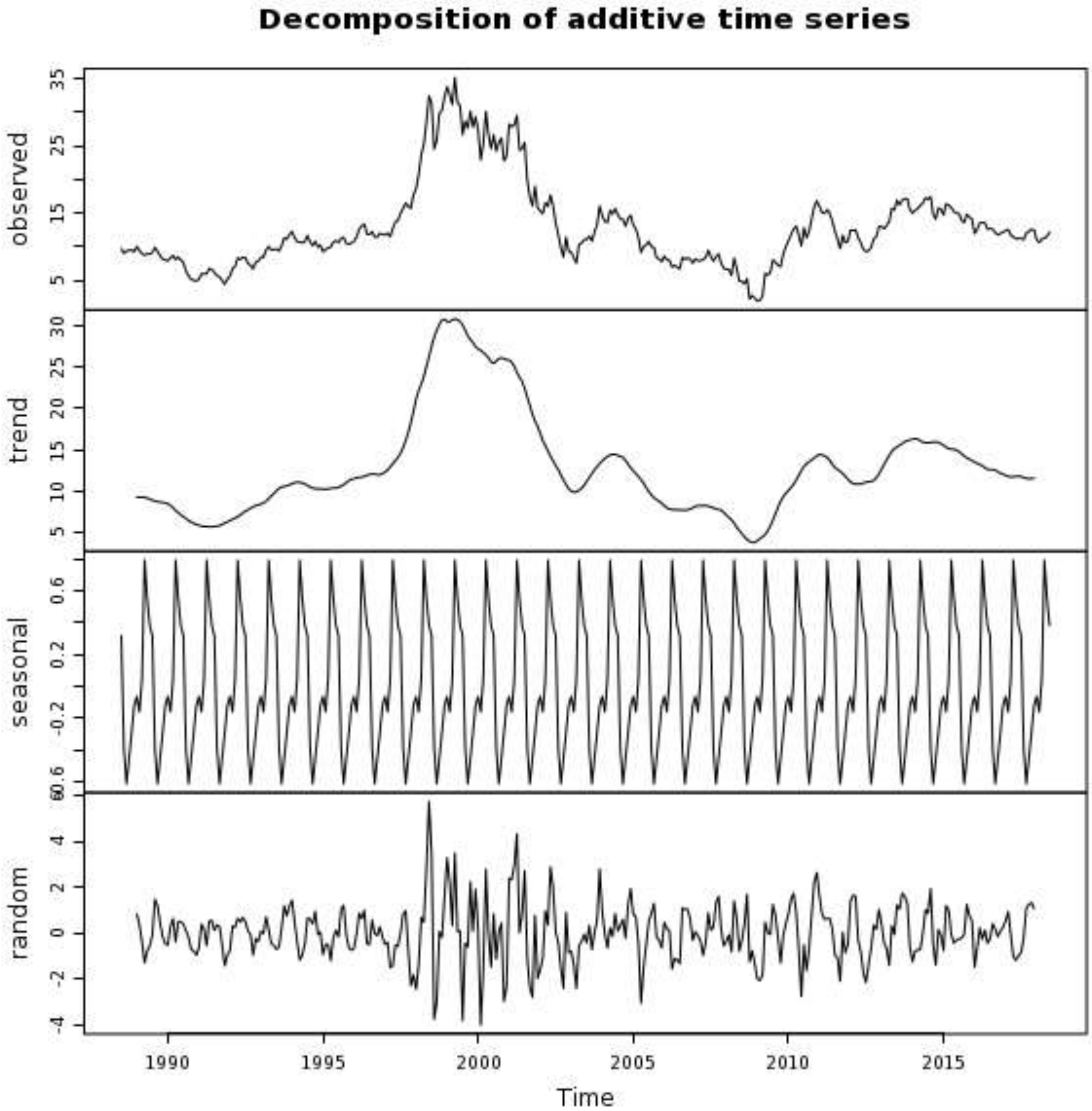
- Augmentation régulière du trafic ;
- Fluctuation saisonnière : augmentation de novembre à juillet-août, avec un creux vers le mois d'avril, puis diminution jusqu'en novembre.
- Les données sont de plus en plus dispersées.

Cependant certains points mériteraient d'être éclaircis ; par exemple :

- L'augmentation se fait-elle de façon constante, exponentielle, etc.?
- La fluctuation saisonnière est-elle constante au fil du temps ?
- Que se passe-t-il, indépendamment de la tendance à la hausse et des fluctuations saisonnières?

Pour faire vite, disons que les deux premières questions reviennent à étudier la partie déterministe de la série que l'on visualise aisément ; la dernière vise à analyser la structure aléatoire - "le bruit" - qui reste une fois que l'on a extrait la partie déterministe. Dans ce chapitre on étudiera essentiellement la partie déterministe en préparant le terrain pour la partie aléatoire.



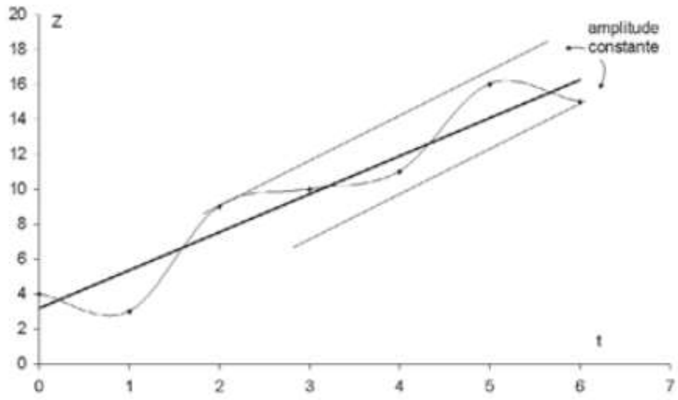


4°) Modèle multiplicatif et modèle additif

L'observation des séries chronologiques permet de distinguer deux grand types de séries : celles qui se conforment au modèle multiplicatif et celles qui se conforment au modèle additif.

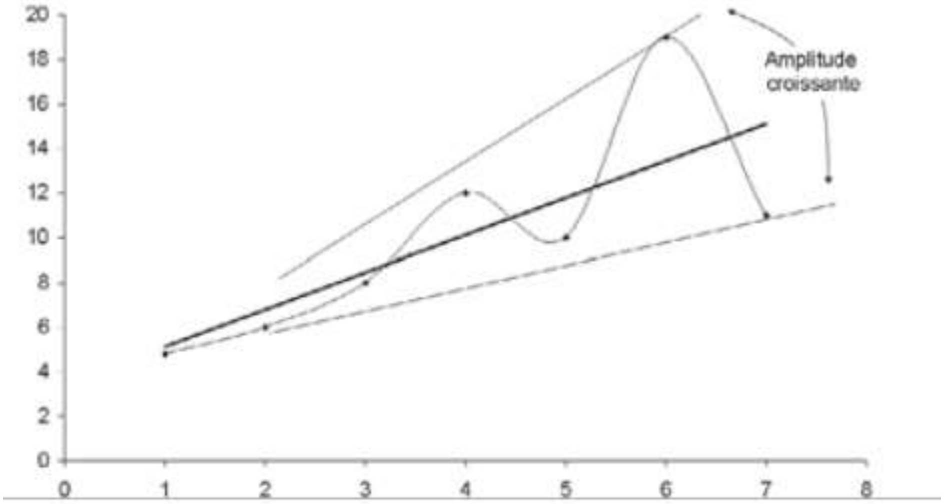
Dans le modèle additif, les variations autour du trend demeurent dans une bande de variation à peu près constante :

Figure 3 Modèle additif



Dans le modèle multiplicatif, au contraire, les variations autour du trend s'amplifient :

Figure 4 Modèle multiplicatif



Le plus simple pour déterminer le modèle le mieux adapté à une série chronologique particulière est de faire un graphique, d'y ajouter le trend linéaire et d'observer les fluctuations autour du trend. Si ces fluctuations sont régulières, il s'agit d'un modèle additif. Si, au contraire, elles s'amplifient, il s'agit d'un modèle multiplicatif.

Remarque

Dans le cas de données saisonnières (par exemple des données trimestrielles), on peut aussi calculer la moyenne annuelle de la variable et, ensuite, pour chaque trimestre, on retranche de la valeur du trimestre la valeur de la moyenne annuelle et on obtient un écart. Il suffit alors de comparer les écarts. Si les écarts ne cessent d'augmenter avec le temps, on en conclut que le modèle est multiplicatif. Sinon, c'est que le modèle est additif.

II. DÉTERMINATION DU TREND D'UNE SÉRIE TEMPORELLE

Le « trend », autrement dit la tendance, est ce qui, au-delà des variations saisonnières ou accidentelles d'une série, indique le sens de son évolution. Autrement dit, le trend nous renseigne sur le fait de savoir si la variable augmente, diminue ou reste stable de façon tendancielle. Pour déterminer le trend ou la tendance d'une série, il y a deux méthodes principales :

- ***La régression linéaire : où l'on calcule les coefficients a et b d'une droite, qui représentera la tendance.***
- ***La méthode des moyennes mobiles.***

1°) La détermination du trend par la régression linéaire

On calcule les coefficients a et b de la droite de régression. Z

$$\mathbf{z = a * t + b}$$

Exemple :

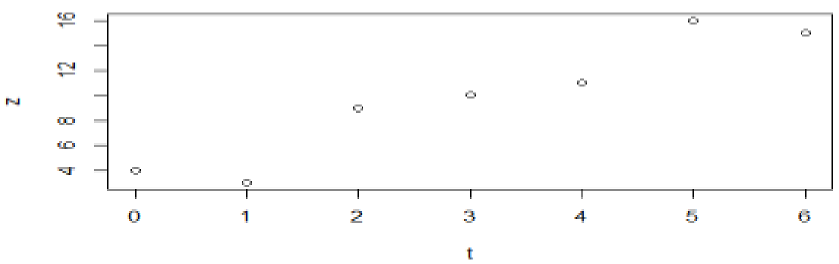
Soit le tableau suivant, qui donne l'évolution d'une série chronologique en fonction du temps, repéré par l'indice t.

Tableau 3 fonction du temps

t	0	1	2	3	4	5	6
z	4	3	9	10	11	16	15

Le graphique en « nuages de points » de cette série chronologique est illustré par cette figure :

Figure 5Nuage de points



Nous allons déterminer le trend de cette série par une droite y = ax+b, en calculant les coefficients d'après les formules de la régression linéaire.

$$a = \frac{\sum_i t_i z_i - n\bar{t}\bar{z}}{\sum_i t_i^2 - n\left(\bar{t}\right)^2} \qquad b = \bar{z} - a\bar{t}$$

Tableau 4 Tableau de calcul

t_i	z_i	z_it_i	t_i^2	$z_it_i^2$
0	4	0	0	0
1	3	3	1	3
2	9	18	4	36
3	10	30	9	90
4	11	44	16	176
5	16	80	25	400
6	15	90	36	540
21	**68**	**265**	**91**	**1245**

$$\sum_{i=1}^{7} t_i z_i = 265 \qquad \overset{=}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{7} t_i}{7} = \frac{21}{7} = 3 \qquad \overset{=}{z} = \frac{\sum_{i=1}^{7} z_i}{7} = \frac{68}{7} = 9{,}714 \qquad \sum_{i=1}^{6} t_i^2 = 91$$

$$a = \frac{\sum_i z_i t_i - n\overset{==}{tz}}{\sum_i t_i^2 - n\left(\overset{=}{t}\right)^2} = \frac{265 - 7\times3\times9{,}714}{91 - 7\times3^2} = \frac{61}{28} = 2{,}18 \qquad b = \overset{=}{z} - a\overset{=}{t} = 9{,}714 - 2{,}17\times3 = 3{,}2$$

Sous R :

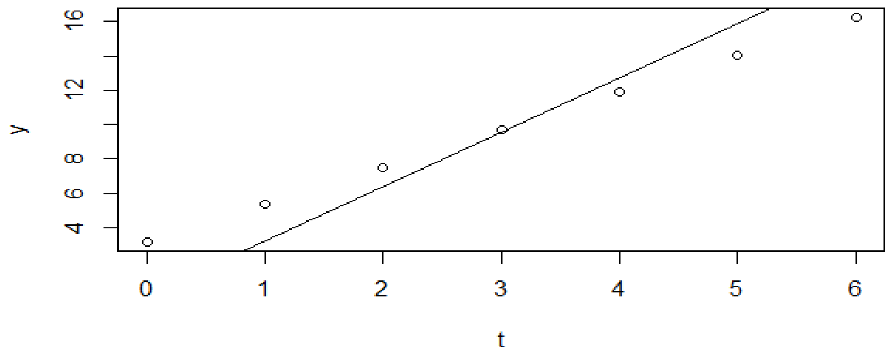
```
> t=c(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)
> z=c(4, 3, 9, 10, 11, 16, 15)
> plot(t,z)
> lm(z~t)

Call:
lm(formula = z ~ t)

Coefficients:
(Intercept)            t
      3.179        2.179
```

On obtient donc l'équation du trend suivante :

$$ft = 2{,}179\ t + 3{,}179$$



2°) La détermination du trend par la méthode des moyennes mobiles

La méthode des moyennes mobiles consiste à calculer la moyenne des valeurs qui entourent chaque valeur et à remplacer la valeur par cette moyenne.

$$\widehat{y_t} = \frac{1}{2l+1} \sum_{i=t-l}^{t+l} y_t$$

Elle est également connue comme une méthode de lissage car elle agit comme un filtre passe bas et donc élimine le bruit. Le calcul de la moyenne mobile dépend d'un paramètre l appelé la largeur de fenêtre. Ce paramètre correspond au nombre d'observations inclues dans le calcul de la moyenne glissante effectuée.

Plus l est grand plus le lissage est important (jusqu'à atteindre la fonction constante égale à la moyenne).

Exemple : Les données du tableau suivant donne l'évolution du cours de clôture de l'action.

Date	Cours de clôture(€)	Ordre 2	Ordre 3
13/07/2005	24,66		
12/07/2005	24,61	24,635	
11/07/2005	24,73	24,67	24,666
08/07/2005	24,53	24,63	24,623
07/07/2005	24,01	24,27	24,42
06/07/2005	24,16	24,09	24,23
05/07/2005	24	24,08	24,06
04/07/2005	24,18	24,09	24,11
01/07/2005	24,27	24,23	24,15
30/06/2005	24,16	24,22	24,20
29/06/2005	23,8	23,98	24,08
28/06/2005	22,6	23,20	23,52
27/06/2005	22,58	22,59	22,99
24/06/2005	22,66	22,62	22,61
23/06/2005	22,93	22,80	22,72
22/06/2005	22,97	22,95	22,85
21/06/2005	23,02	23,00	22,97
20/06/2005	22,85	22,94	22,95
17/06/2005	22,94	22,90	22,94
16/06/2005	22,68	22,81	22,82
15/06/2005	22,48	22,58	22,70
14/06/2005	22,6	22,54	22,59
13/06/2005	22,74	22,67	22,61

La troisième colonne donne les moyennes mobiles d'ordre 2 qui sont calculées en prenant les moyennes des cours deux à deux. Elle est rarement utilisée.

À titre d'exemple, les deux premières moyennes mobiles d'ordre 2 s'obtiennent ainsi :

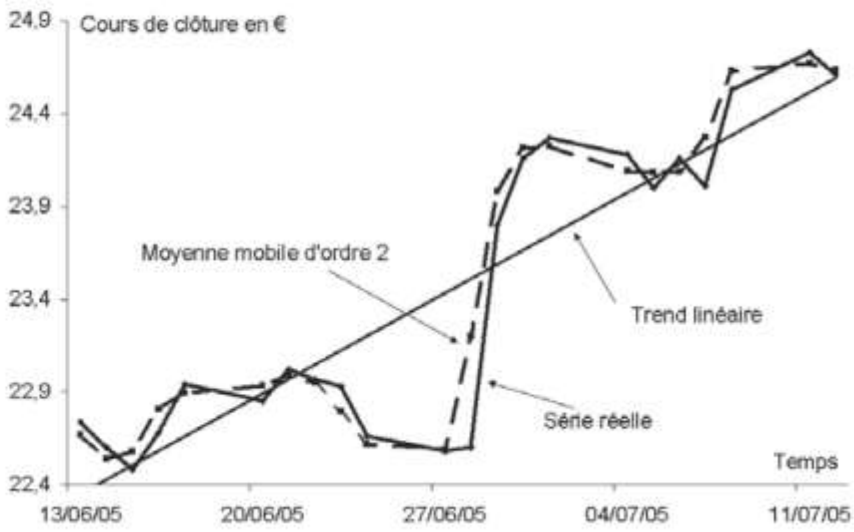
$$\frac{24{,}66+24{,}61}{2}=24{,}635 \qquad \frac{24{,}61+24{,}73}{2}=24{,}67$$

La quatrième colonne donne **les moyennes mobiles d'ordre 3** qui sont calculées en prenant les moyennes des cours trois à trois.

A titre d'exemple :

$$\frac{24{,}66+24{,}61+24{,}73}{3}=24{,}666 \qquad \frac{24{,}61+24{,}73+24{,}53}{3}=24{,}623$$

Pour avoir le trend mobile, il suffit de reporter sur un graphique les moyennes obtenues.



Lorsque la méthode de détermination par le trend linéaire apparaît trop grossière, ou lorsque par exemple il n'y a pas de raison de penser qu'il existe une composante saisonnière et qu'on veut juste gommer les variations accidentelles, alors la méthode des moyennes mobiles peut être un bon moyen d'obtenir une série ajustée ou une série lissée comme on dit parfois.

Le plus simple, lorsque l'on fait les calculs avec un tableur, est de déterminer le trend par les deux méthodes. À noter que plus la série est longue, plus on peut augmenter l'ordre de calcul des moyennes.

3°) LES VARIATIONS SAISONNIÈRES (modèle additif)

La saisonnalité correspond aux variations saisonnières "pures". Beaucoup de phénomènes pratiques sont soumis à cette composante saisonnière. Certains produits se vendent mieux l'été que l'hiver (glaces, boissons, loisirs…) d'autres se vendent mieux aux périodes de vacances scolaires (théâtre, cinéma, sport, voyage…). L'appellation de variation saisonnière ne signifie pas pour autant que la composante saisonnière se répartisse sur l'année, même si c'est souvent le cas. Il y a aussi des récurrences de type saisonnier à l'intérieur d'un mois, d'une semaine, voire d'un jour. Certains produits se vendent mieux certains jours et à certaines heures…(en cours de la semaine, weekend,…).

Dans l'objectif de déterminer la série corrigée des variations saisonnière ou série CVS, On procède alors au calcul de la composante saisonnière et le coefficient saisonnier. L'intérêt de ce calcul est d'obtenir une série chronologique dont l'évolution est débarrassée de la composante saisonnière qui parfois masque la tendance. On parle ainsi de « dessaisonalisation.

Pour obtenir une série corrigée des variations saisonnières, ou série CVS, on procède en trois étapes :

(1) on calcule la composante saisonnière,

(2) on en déduit le coefficient saisonnier et

(3) on retranche le coefficient saisonnier de la série originale.

Dans l'exemple qui suit, nous supposerons que la série suit un modèle additif, l'application au cas multiplicatif étant légèrement différente.

Ci-après, les étapes du calcul de la série CVS sont détaillées, puis appliquées à un exemple concret :

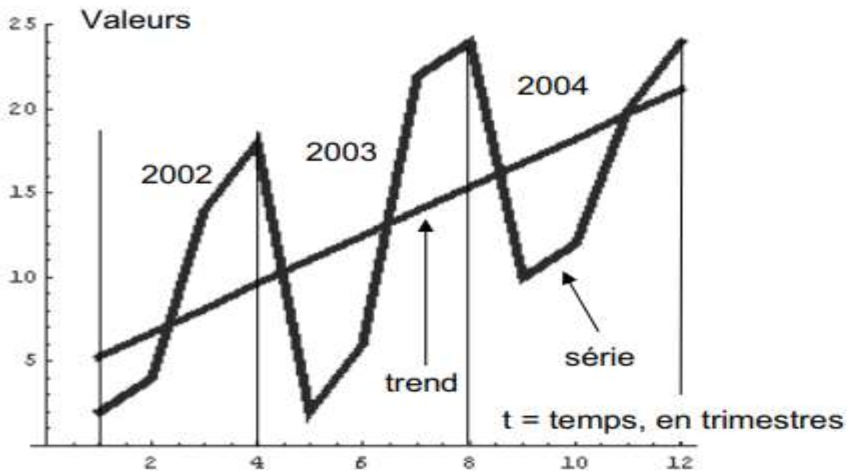
1) Détermination de l'équation du trend par régression linéaire.

2) Calcul des coefficients saisonniers.

3) Détermination de la série CVS

Exemple : Soit le tableau suivant, qui donne l'évolution d'une série chronologique trimestrielle.

2002				2003				2004			
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
2	4	14	18	2	6	22	24	10	12	20	24



T=c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)

Z=c(2, 4, 14, 18, 2, 6, 22, 24, 10, 12, 20, 24)

Le graphique montre la série et son trend (pour le calcul de l'équation du trend, voir ci-après), révèle deux caractéristiques, qu'il nous est nécessaire de vérifier pour employer la méthode proposée :

1) D'une part, la série étudiée suit **un modèle additif.** En effet, les variations autour du trend ne semblent pas s'amplifier avec le temps.

2) D'autre part, il existe bien **une composante saisonnière, ici trimestrielle**, qui se superpose à une tendance à la hausse. On note en effet qu'à l'intérieur de chacun des trois cycles annuels, la variable débute à un niveau faible au premier trimestre, puis augmente à chaque trimestre pour atteindre un **maximum au dernier trimestre**, avant de repartir à la baisse au début de l'année suivante.

1) Détermination de l'équation du trend

Les calculs intermédiaires sont :

$$\sum_{i=1}^{12} t_i y_i = 1234 \qquad \bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i}{12} = \frac{158}{12} = 13,1667$$

$$\bar{\bar{t}} = \frac{\sum_{i=1}^{12} t_i}{12} = \frac{79}{12} = 6,583 \qquad \sum_{i=1}^{12} t_i^2 = 650$$

$$a = \frac{\sum_i y_i t_i - n\bar{\bar{t}}\bar{\bar{y}}}{\sum_i t_i^2 - n\left(\bar{\bar{t}}\right)^2} \cong 1,44755 \qquad b = \bar{\bar{y}} - a\bar{\bar{t}} = 3,757$$

On obtient donc l'équation du trend suivante :

$$f_i = at_i + b = 1,44755t_i + 3,75757576$$

ti	y_i	y_it_i	t_i^2	$y_it_i^2$
1	2	2	1	2
2	4	8	4	16
3	14	42	9	126
4	18	72	16	288
5	2	10	25	50
6	6	36	36	216
7	22	154	49	1078
8	24	192	64	1536
9	10	90	81	810
10	12	120	100	1200
11	20	220	121	2420
12	24	288	144	3456
79	**158**	**1234**	**650**	**11198**

2) Calcul des coefficients saisonniers

Pour calculer les coefficients saisonniers, il faut d'abord isoler la composante saisonnière de la série. Pour ce faire, il convient de calculer les valeurs tendancielles, soit fi pour i =1 à 12, grâce à l'équation du trend, puis de retrancher fi de yi

Par exemple, quand i = 1, on a :

$$f_1 = 1,44755245 \times 1 + 3,75757576 = 5,20512821$$

La composante saisonnière quand t=1 est donc :

$$S_1 = y_1 - f_1 = 2\text{-}5,20512821 = -3,205128205$$

En réitérant le calcul pour les 12 valeurs, on obtient le tableau

t_i	y_i	f_i	$S_i = y_i - f_i$
1	2	5,205128205	-3,205128205
2	4	6,652680653	-2,652680653
3	14	8,1002331	5,8997669
4	18	9,547785548	8,452214452
5	2	10,995338	-8,995337995
6	6	12,44289044	-6,442890443
7	22	13,89044289	8,10955711
8	24	15,33799534	8,662004662
9	10	16,78554779	-6,785547786
10	12	18,23310023	-6,233100233
11	20	19,68065268	0,319347319
12	24	21,12820513	2,871794872

Les 4 coefficients saisonniers s'obtiennent en faisant la moyenne arithmétique des composantes saisonnières (dernière colonne du tableau, Si) pour 2002, 2003 et 200On obtient :

C1 = (1/3)(S1+S5+S9) = -3,205128205+ -8,995337995+-6,785547786 = - 6,328671329

C2 = (1/3)(-2,652680653+-6,442890443+ -6,233100233) = - 5,10955711

C3 = (1/3)(5,8997669+8,10955711+2,871794872) = 4,776223776

C4 = (1/3)(8,452214452 +8,662004662+2,871794872) = 6,662004662

3) Détermination de la série CVS

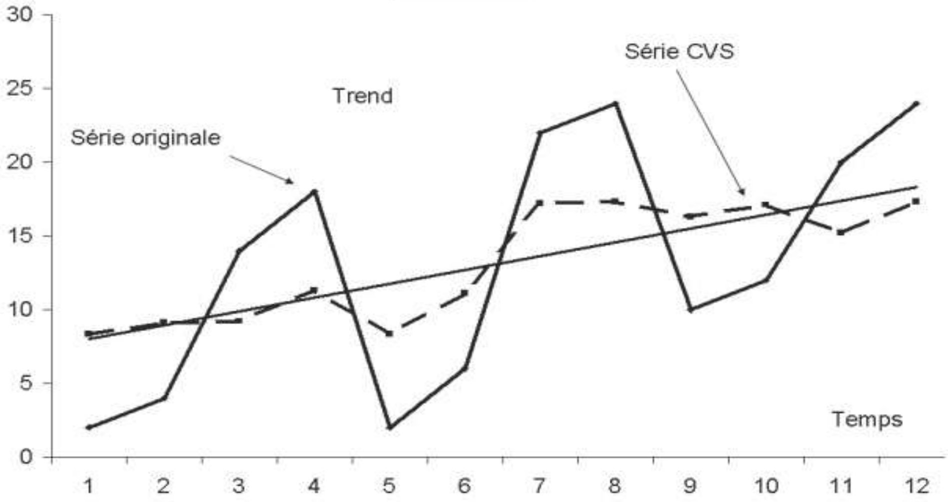
La série corrigée des variations saisonnières, dite « série CVS » s'obtient en retranchant les coefficients saisonniers de la série. Désignons par yi * la série CVS :

$$y_i^* = y_i - C_i^{'}$$

où Ci ' représente le coefficient saisonnier, éventuellement corrigé (ici cela n'a pas été nécessaire). La dernière colonne du tableau ci-après donne la série CVS.

Le graphique illustré par la figure fait apparaître que la série CVS épouse davantage le trend que la série originale. C'est normal puisque l'on a effacé les variations saisonnières.

t_i	y_i	$y_i^* = y_i - C_i^{'}$
1	2	8,328671329
2	4	9,10955711
3	14	9,223776224
4	18	11,33799534
5	2	8,328671329
6	6	11,10955711
7	22	17,22377622
8	24	17,33799534
9	10	16,32867133
10	12	17,10955711
11	20	15,22377622
12	24	17,33799534



On notera néanmoins que la méthode est loin d'être parfaite. En effet, les variations saisonnières sont atténuées mais non supprimées. Cela vient du fait que la méthode ne permet pas de décomposer très finement les variations saisonnières et les variations accidentelles que nous allons étudier maintenant.

LES VARIATIONS ACCIDENTELLES

Les variations accidentelles sont ce qui reste lorsqu'on a enlevé le trend de la série ajustée des variations saisonnières. Comme on vient de le voir, la décomposition entre les variations accidentelles et les variations saisonnières est loin d'être parfaite.

Introduction

Les variables soumises à des variations périodiques ne sont pas toutes d'un modèle simplement additif, c'est à dire qui sont constantes pour chaque saison.

Certaines variables verront les caractéristiques saisonnières s'amplifier ou se réduire avec le temps.

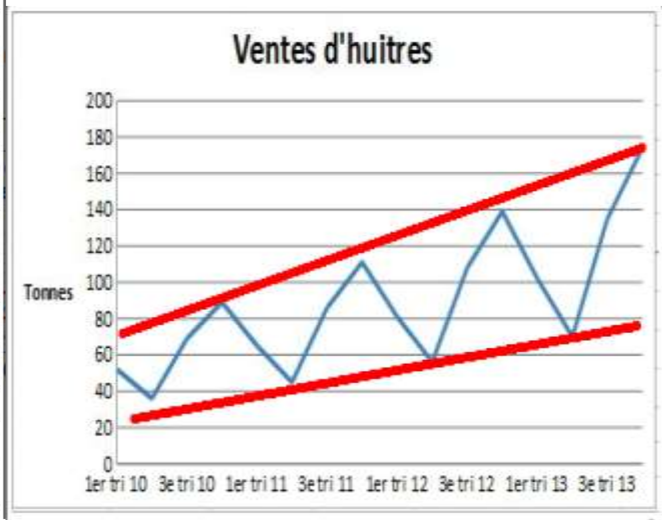
Dans cette partie, nous étudierons le modèle multiplicatif de la forme

$y_t = f_t \times s_t \times \varepsilon_t$ avec $t = 1, \ldots, T$.

Dans ce modèle, l'amplitude de la composante saisonnière et du bruit n'est plus constante au cours du temps : elles varient au cours du temps proportionnellement à la tendance *ft* .

Pour illustrer cette partie, nous développerons l'exemple suivant :

	Ventes d'huitres
1er tri 10	52
2e tri 10	36
3e tri 10	69
4e tri 10	89
1er tri 11	65
2e tri 11	45
3e tri 11	86
4e tri 11	111
1er tri 12	81
2e tri 12	56
3e tri 12	108
4e tri 12	139
1er tri 13	102
2e tri 13	70
3e tri 13	135
4e tri 13	174



Le nuage de points est limité par deux droites qui ne sont pas parallèles (entonnoir).

2. Correction des variations saisonnières

Série initiale					Moyenne mobile d'ordre 4			
	tr1	tr2	tr3	tr4	tr1	tr2	tr3	tr4
année 2010	52	36	69	89			63,125	65,875
année 2011	65	45	86	111	69,125	74	78,75	82,125
année 2012	81	56	108	139	86,25	92,5	98,625	103
année 2013	102	70	135	174	108,125	115,875		

Si la série *y t* possède une composante saisonnière de période *p* alors l'application d'une moyenne mobile d'ordre *p* supprime cette saisonnalité

Pour comparer la série lissée avec la série initiale, on cherchera à obtenir les valeurs pour les mêmes dates d'observation.

Dans tous les cas on fait *la moyenne de p observations (1/p). Pour obtenir une moyenne mobile* pour le temps t, on retiendra 2k + 1 observations, en pondérant les deux extrêmes par ½ .

$$\text{Exemple : } mm_{4,3} = \frac{1}{4}\left(\frac{Y_1}{2} + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \frac{Y_5}{2}\right)$$

Calcul des coefficients saisonniers

On calculera les coefficients saisonniers St que l'on centre pour obtenir St' et on obtient ainsi la série corrigée des variations saisonnières yt'= yt / St'.

Première étape :

On calcule les coefficients saisonniers St en calculant Yt/ mmp,t .

Par exemple, Y3/ mm4,3 = 69/63,125 = 1,093

Les résultats sont résumés ci-dessous.

	tr1	tr2	tr3	tr4
Yt/mm4t			1,093	1,351
	0,94	0,608	1,092	1,352
	0,939	0,605	1,095	1,35
	0,943	0,604		
Saison St	S1= (0,94+0,939+0,943)/3=	S2= (0,608+0,605+0,604)/3=	S3= (1,093+1,092+1,095)/3=	S4= (1,351+1,352+1,35)/3=
	0,94	0,606	1,093	1,351

Les coefficients saisonniers ne doivent pas modifier le sens des données, ils doivent être neutres au sens de la multiplication, c'est à dire que leur produit doit être égal à 1.

Ici la somme des coefficients saisonniers est égal à

S1 + S2 + S3 + S4 = 3,99.

C = 3,99/4 = 0,9975

On procédera au centrage des coefficients pour obtenir de nouveaux coefficients centrés :

St'= St /C

	tr1	tr2	tr3	tr4	Saison St	Saison centrée St'=S/C
St=Yt / mm4,t			1,093	1,351	0,94	0,943
	0,94	0,608	1,092	1,352	0,606	0,607
	0,939	0,605	1,095	1,35	1,093	1,096
	0,943	0,604			1,351	1,354

coefficients centrés

On obtient ainsi la série corrigée des variations saisonnières $y_t' = y_t / S_t'$

calcul des données corrigées

Série initiale	Série corrigée des variations saisonnières Yt/St'
52	
36	
69	62,956
89	65,731
65	68,929
45	74,135
86	78,467
111	81,979
81	85,896
56	92,257
108	98,540
139	102,659
102	108,165
70	115,321
135	
174	

Modèle de prévision

Soit le modèle multiplicatif $y_t = f_t \times s_t \times \varepsilon_t$ avec t =1, ... , T.

Dans ce paragraphe, on souhaite faire de la prévision. Pour cela, il faut estimer la tendance. Ici, on se limitera au cas où la tendance est linéaire

$f_t = \alpha t + \beta$

On estime a et b de l'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

- On calcule les f t
- On calcule les ratios : y t / f t (appelé rapport saisonnier)
- On calcule la moyenne arithmétique des écarts pour chaque saison
- On corrige si la moyenne des moyennes n'est pas égale à 1 (on divise par la valeur de la moyenne)
- On obtiendra alors la série corrigée des variations saisonnières

$$a = \frac{cov(Y,t)}{Var(t)} = \frac{(\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} i\, Y_i) - \bar{Y}\bar{t}}{(\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} i^2) - \bar{t}^2}$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{t} \text{ avec } \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{T} Y_i}{T} \text{ et } \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{T} i}{T}$$

calcul des paramètres du modèle linéaire

Y_t	t	$t*Y_t$	t*t
52	1	52	1
36	2	72	4
69	3	207	9
89	4	356	16
65	5	325	25
45	6	270	36
86	7	602	49
111	8	888	64
81	9	729	81
56	10	560	100
108	11	1188	121
139	12	1668	144
102	13	1326	169
70	14	980	196
135	15	2025	225
174	16	2784	256
moyenne	moyenne	somme	somme
88,625	8,5	14032	1496

a = (14032/16 –88,625*8,5)/ (1496/16 – (8,5*8,5)) = 5,821

b= 88,625 - (5,821*8,5) = 39,15

Calcul de la tendance linéaire

Série initiale	Tendance linéaire ft=39,15 + 5,821 t
52	44,971
36	50,792
69	56,613
89	62,434
65	68,255
45	74,076
86	79,897
111	85,718
81	91,539
56	97,36
108	103,181
139	109,002
102	114,823
70	120,644
135	126,465
174	132,286

Calcul des ratios

Série initiale	Tendance linéaire ft=39,15 + 5,821 t	Yt / ft
52	44,971	1,156
36	50,792	0,709
69	56,613	1,219
89	62,434	1,426
65	68,255	0,952
45	74,076	0,607
86	79,897	1,076
111	85,718	1,295
81	91,539	0,885
56	97,36	0,575
108	103,181	1,047
139	109,002	1,275
102	114,823	0,888
70	120,644	0,58
135	126,465	1,067
174	132,286	1,315

On calcule la moyenne des écarts pour chaque saison

Série initiale	Y_t / f_t	Saison
52	1,156	S1= (1 ,156+0,952+0,885+0,888)/4=0,97025
36	0,709	S2=(0,709+0,607+0,575+0,58)/4=0,61775
69	1,219	S3= (1,219+1 ,076+1,047+1,067)/4=1,10225
89	1,426	S4= (1,426+1,295+1,275+1,315)/4=1,32775
65	0,952	
45	0,607	moyenne des saisons
86	1,076	(0,97025+0,61775+1,10225+1,32775)/4= 1,0045
111	1,295	
81	0,885	
56	0,575	
108	1,047	
139	1,275	
102	0,888	
70	0,58	
135	1,067	
174	1,315	

valeurs de la série prédite

• On corrige si la moyenne des saisons n'est pas égale à 1 (on divise par la valeur de la moyenne. Dans notre exemple, la moyenne des saisons est égale à 1,0045 que l'on peut considérer nulle.

• On obtiendra alors la série prédite par le modèle multiplicatif

Prévisions des ventes d'huîtres

Série initiale	Tendance linéaire ft=39,15 + 5,821 t	Vente d'huitres prédites ft*St
52	44,971	43,6331
36	50,792	31,3768
69	56,613	62,4017
89	62,434	82,8967
65	68,255	66,2244
45	74,076	45,7604
86	79,897	88,0665
111	85,718	113,8121
81	91,539	88,8157
56	97,36	60,1441
108	103,181	113,7313
139	109,002	144,7274
102	114,823	111,407
70	120,644	74,5278
135	126,465	139,396
174	132,286	175,6427