Tarea 3: Transformadas de Laplace

Camargo Badillo Luis Mauricio

11 de febrero de 2024

Ecuaciones Diferenciales II
Oscar Gabriel Caballero Martínez
Grupo 2602
Matemáticas Aplicadas y Computación

Índice

2. $f(t) = c$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = c$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c\} &= \int_0^\infty e^{-st}(c) \\
&= \int_0^\infty ce^{-st} \\
&= c\int_0^\infty e^{-st} \\
&= \lim_{b\to\infty} c\int_0^b e^{-st}\ dt
\end{aligned}$$

Sustiuimos con $u = -st \implies du = -s\ dt$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{c}{s}\left[\int_0^{-sb} e^u\ du\right] \\
&= -\frac{c}{s}\lim_{b\to\infty}\left[e^u\Big|_0^{-sb}\right] \\
&= -\frac{c}{s}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-sb} - e^0\right] \\
&= -\frac{c}{s}\left[\lim_{b\to\infty} e^{-sb} - 1\right]
\end{aligned}$$

Cuando $s > 0 \implies -s < 0$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c}{s}\left[\lim_{b\to-\infty} e^{b} - 1\right] \\
&= -\frac{c}{s}[0 - 1] \\
&= \frac{c}{s}
\end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s} \qquad s > 0$$

5. $f(t) = t^3$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = t^3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^3\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^3\ dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t^3\ dt \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Enfoquémonos en la integral en sí. Para resolverla, integramos por partes, utilizando $u = t^3 \implies du = 3t^2\ dt$ y $dv = e^{-st}\ dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{-st}t^3\ dt &= \left(-\frac{t^3e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^b + \frac{3}{s}\int_0^b e^{-st}t^2\ dt \\
&= \left(-\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s}\right) + \frac{3}{s}\int_0^b e^{-st}t^2\ dt \\
&= -\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s}\int_0^b e^{-st}t^2\ dt \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Observemos que tenemos otra integral. Resolvámosla también por partes, utilizando $u = t^2 \implies du = 2t\ dt$ y $dv = e^{-st}dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{-st}t^2\ dt &= \left(-\frac{t^2e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^b + \frac{2}{s}\int_0^b e^{-st}t\ dt \\
&= \left(-\frac{b^2e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s}\right) + \frac{2}{s}\int_0^b e^{-st}t\ dt \\
&= -\frac{b^2e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s}\int_0^b e^{-st}t\ dt \\
&= -\frac{b^2e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s}\int_0^b e^{-st}t\ dt \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Una vez más, tenemos otra integral. Otra vez resolvamos por partes utilizando $u = t \implies du = dt$ y $dv = e^{-st}\ dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{-st}t\ dt &= \left(-\frac{te^{-st}}{s}\right)\Big|_0^b + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\ dt \\
&= \left(-\frac{be^{-sb}}{s} + \frac{0}{s}\right) + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\ dt \\
&= -\frac{be^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\ dt \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Tenemos una última integral, pero esta vez la resolveremos con una sustitución $u = -st \implies du = -s\ dt$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{-st}\ dt &= -\frac{1}{s}\int_0^{-sb} e^u\ du \\
&= -\frac{1}{s}\left(e^u\right)\big|_0^{-sb} \\
&= -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-s(0)}}{s} \\
&= -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Sustituyendo todas estas expresiones donde corresponden, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^3\} &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}t^3\ dt && (5.1)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s}\int_0^b e^{-st}t^2\ dt\right] && \text{sust. } (5.2)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s}\left(-\frac{b^2e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s}\int_0^b e^{-st}t\ dt\right)\right] && \text{sust. } (5.3)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s}\left(-\frac{b^2e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s}\left[-\frac{be^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}dt\right]\right)\right] && \text{sust. } (5.4)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s}\left(-\frac{b^2e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s}\left[-\frac{be^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\left(-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\right)\right]\right)\right] && \text{sust. } (5.5)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s}\left(-\frac{b^2e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s}\left[-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right]\right)\right]\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s}\left(-\frac{b^2e^{-sb}}{s} - \frac{2be^{-sb}}{s^2} - \frac{2e^{-sb}}{s^3} + \frac{2}{s^3}\right)\right]\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} - \frac{3b^2e^{-sb}}{s^2} - \frac{6be^{-sb}}{s^3} - \frac{6e^{-sb}}{s^4} + \frac{6}{s^4}\right]\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^3e^{-sb}}{s} - \frac{3b^2e^{-sb}}{s^2} - \frac{6be^{-sb}}{s^3} - \frac{6e^{-sb}}{s^4}\right] + \frac{6}{s^4}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-sb}\left(-\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3}\right)\right] + \frac{6}{s^4}
\end{aligned}$$

Notemos que $g(b) = e^{-sb}$ cambia más rápidamente que $h(b) = -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3}$, por lo que el límite seguirá la tendencia de $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = 0$ y no la de $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3}\right] = \infty$:

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{6}{s^4}\\
&= \frac{6}{s^4}\\
&= \frac{3!}{s^4}
\end{aligned}$$

Con esto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} \qquad s > 0$$

6. $f(t) = t^n$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = t^n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^n\ dt\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t^n\ dt
\end{aligned}$$

Resolvamos esta integral por sustitución, utilizando $u = st \implies du = s\ dt$:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^b e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n \ du \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^b e^{-u} u^n \ du \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-u} u^n \ du \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n \ du \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

A partir de este punto, para poder continuar hará falta demostrar que lo siguiente se cumple:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \ dx = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.2}$$

6.1. Caso base $n = 0$

Demostremos por inducción. Iniciemos con el caso base cuando $n = 0$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} x^0 dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} x^0 dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b \right] \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-b} + e^0 \right] \\
&= -\lim_{b\to-\infty} e^b + 1 \\
&= 0 + 1 \\
&= 1 \\
&= 0!
\end{aligned}
$$

6.2. Hipótesis de Inducción $(n = k)$

Establezcamos como hipótesis de inducción que la igualdad se cumple con $n = k$, dada una $k \in \mathbb{N}$ particular:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k \ dx = k!$$

6.3. Caso $(n = k + 1)$

Para finalizar la demostración, dado el caso base y la hipótesis de inducción, hace falta demostrar que se cumple la igualdad con $n = k + 1$; por demostrar:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{k+1} \ dx = (k+1)! \tag{6.3}$$

Iniciamos expresando la integral impropia como el límite de una integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{k+1}\ dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}x^{k+1}\ dx$$

Ahora, integramos por partes utilizando $u = x^{k+1} \implies du = (k+1)x^k\ dx$ y $dv = e^{-x}\ dx \implies v = -e^{-x}$, obteniendo:

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-x^{k+1}e^{-x}\right)\Big|_0^b + (k+1)\int_0^b e^{-x}x^k\ dx\right]$$

Observemos que podemos utilizar la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-x^{k+1}e^{-x}\right)\Big|_0^b + (k+1)k!\right]\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-b^{k+1}e^{-b} + 0^{k+1}e^{0}\right) + (k+1)k!\right]\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-b^{k+1}e^{-b}\right) + (k+1)k!\right]\\
&= -\lim_{b\to\infty} b^{k+1}e^{-b} + (k+1)k! \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Notemos que podemos reescribir el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{b\to\infty} b^{k+1}e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{k+1}}{e^b}$$

Este límite se indetermina, pero podemos utilizar la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} b^{k+1}e^{-b} &= \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{d}{db}\left(b^{k+1}\right)}{\frac{d}{db}\left(e^b\right)}\\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{(k+1)b^k}{e^b}\\
&= (k+1)\lim_{b\to\infty}\frac{b^k}{e^b}
\end{aligned}$$

Este límite también se indetermina, así que continuemos utilizando la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} b^{k+1}e^{-b} &= (k+1)\lim_{b\to\infty}\frac{\frac{d}{db}\left(b^{k}\right)}{\frac{d}{db}\left(e^b\right)}\\
&= (k+1)\lim_{b\to\infty}\frac{kb^{k-1}}{e^b}\\
&= (k+1)k\lim_{b\to\infty}\frac{b^{k-1}}{e^b}
\end{aligned}$$

Una vez más, este límite se indetermina, pero notemos que las derivadas del numerador seguirán el mismo patrón hasta alcanzar $\frac{d}{db}(b) = 1$, con los exponentes acumulándose como un producto que escala al límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} b^{k+1}e^{-b} &= (k+1)k(k-1)(k-2)(\dots)\lim_{b\to\infty}\frac{\frac{d}{db}(b)}{\frac{d}{db}(e^b)} \\
&= (k+1)!\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} \\
&= (k+1)!\lim_{b\to\infty} e^{-b} \\
&= (k+1)!\lim_{b\to-\infty} e^{b} \\
&= (k+1)!(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En otras palabras, como $g(b) = e^{-b}$ cambia más rápidamente que $h(b) = b^{k+1}$, el límite sigue la tendencia de $\lim_{b\to\infty} g(b) = 0$ y no la de $\lim_{b\to\infty} h(b) = \infty$.

Regresando a (6.4), entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}\,dx &= 0 + (k+1)k! \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

Esto es igual que (6.3), así que efectivamente hemos podido demostrar por inducción que (6.2) se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

Con ello, podemos regresar a (6.1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{1}{s^{n+1}}(n!) \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

8. $f(t) = \cos(t)$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = \cos(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\,dt
\end{aligned}$$

Integrando por partes, utilizando $u = \cos(t) \implies du = -\sin(t)\,dt$ y $dv = e^{-st}\,dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left.\frac{-\cos(t)e^{-st}}{s}\right|_0^b - \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\sin(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\cos(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\cos(0)e^0}{s}\right] - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\sin(t)\,dt\right]
\end{aligned}$$

Cuando $s > 0 \implies -s < 0$, por lo que, bajo ese supuesto, $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = \lim_{b\to-\infty} e^{b} = 0$, obteniendo así:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\sin(t)\ dt\right] \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\sin(t)\ dt
\end{aligned}$$

Una vez más, integrando por partes con $u = \sin(t) \implies du = \cos(t)\ dt$ y $dv = e^{-st}\ dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left[\left.\frac{-\sin(t)e^{-st}}{s}\right|_0^b + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt\right] \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\left(\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\sin(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\sin(0)e^{0}}{s}\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt\right]\right) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt\right] \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt$$

Estableciendo $a = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt$, tenemos:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}a \\
\implies a + \frac{1}{s^2}a &= \frac{1}{s} \\
\implies a\left(\frac{1}{s^2} + 1\right) &= \frac{1}{s} \\
\implies a\left(\frac{1+s^2}{s^2}\right) &= \frac{1}{s} \\
\implies a &= \frac{s^2}{s(1+s^2)} \\
\implies a &= \frac{s}{s^2+1} \\
\implies \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos(t)\ dt &= \frac{s}{s^2+1} \\
\implies \int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\ dt &= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1} \qquad s > 0$$

9. $f(t) = \sin(at)$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = \sin(at)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \sin(at)\ dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at)\ dt
\end{aligned}$$

Integrando por partes, utilizando $u = \sin(at) \implies du = a\cos(at)\ dt$ y $dv = e^{-st}\ dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-\sin(at)e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(at)\ dt \right] \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\sin(ab)e^{-sb}}{s} + \frac{\sin(0)e^0}{s} \right] + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(at)\ dt \right]
\end{aligned}$$

Cuando $s > 0 \implies -s < 0$, por lo que, bajo ese supuesto, $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = \lim_{b\to-\infty} e^b = 0$, obteniendo así:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(at)\ dt \right] \\
&= \frac{a}{s} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \cos(at)\ dt
\end{aligned}$$

Una vez más, integrando por partes con $u = \cos(at) \implies du = -a\sin(at)\ dt$ y $dv = e^{-st}\ dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{s} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-\cos(at)e^{-st}}{s} \Big|_0^b - \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(at)\ dt \right] \\
&= \frac{a}{s} \left(\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\cos(ab)e^{-sb}}{s} + \frac{\cos(0)e^0}{s} \right] - \lim_{b\to\infty} \left[\frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(at)\ dt \right] \right) \\
&= \frac{a}{s} \left(\frac{1}{s} - \lim_{b\to\infty} \left[\frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(at)\ dt \right] \right) \\
&= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at)\ dt
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at)\ dt = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at)\ dt$$

Estableciendo $c = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\sin(at)\ dt$, tenemos:

$$\begin{aligned}
c &= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}c \\
\implies c + \frac{a^2}{s^2}c &= \frac{a}{s^2} \\
\implies c\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) &= \frac{a}{s^2} \\
\implies c\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) &= \frac{a}{s^2} \\
\implies c &= \frac{as^2}{s^2(s^2+a^2)} \\
\implies c &= \frac{a}{a^2+s^2} \\
\implies \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\sin(at)\ dt &= \frac{a}{a^2+s^2} \\
\implies \int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\ dt &= \frac{a}{a^2+s^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{a^2+s^2} \qquad s > 0$$

11. $f(t) = e^{4t}$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = e^{4t}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{4t}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{4t}\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{(4-s)t}\ dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(4-s)t}\ dt
\end{aligned}$$

Sustituyamos con $u = (4-s)t \implies du = 4 - s\ dt$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4-s} \lim_{b\to\infty} \int_0^{(4-s)b} e^u\ du \\
&= \frac{1}{4-s} \lim_{b\to\infty} \left.(e^u)\right|_0^{(4-s)b} \\
&= \frac{1}{4-s} \lim_{b\to\infty} \left(e^{(4-s)b} - e^0\right) \\
&= \frac{1}{4-s} \left[\lim_{b\to\infty} e^{(4-s)b} - 1\right]
\end{aligned}$$

Cuando $s > 4 \implies (4-s) < 0$, por lo que podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4-s}\left[\lim_{b\to-\infty} e^{b} - 1\right] \\
&= \frac{1}{4-s}(0-1) \\
&= \frac{1}{s-4}
\end{aligned}
$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s-4} \qquad s > 4$$

12. $f(t) = e^{-2t}$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = e^{-2t}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-2t}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{-2t}\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{(-2-s)t}\ dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(-2-s)t}\ dt
\end{aligned}
$$

Sustituyamos con $u = (-2-s)t \implies du = -2-s\ dt$:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{-2-s}\lim_{b\to\infty}\int_0^{(-2-s)b} e^{u}\ du \\
&= \frac{1}{-2-s}\lim_{b\to\infty}\left.(e^{u})\right|_0^{(-2-s)b} \\
&= \frac{1}{-2-s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{(-2-s)b} - e^{0}\right) \\
&= \frac{1}{-2-s}\left[\lim_{b\to\infty} e^{(-2-s)b} - 1\right]
\end{aligned}
$$

Cuando $s > -2 \implies (-2-s) < 0$, por lo que podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{-2-s}\left[\lim_{b\to-\infty} e^{b} - 1\right] \\
&= \frac{1}{-2-s}(0-1) \\
&= \frac{1}{s+2}
\end{aligned}
$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2} \qquad s > -2$$

14. $f(t) = \sinh(3t)$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = \sinh(3t)$:

$$\mathcal{L}\{\sinh(3t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\sinh(3t)\ dt$$

Recordemos que $\sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$, así que:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{3t} - e^{-3t})\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(3-s)t} - e^{(-3-s)t}\ dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(3-s)t}\ dt - \int_0^\infty e^{(-3-s)t}\ dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b e^{(3-s)t}\ dt - \int_0^b e^{(-3-s)t}\ dt\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo con $u = (3-s)t \implies du = 3 - s\ dt$ y $v = (-3-s)t \implies dv = -3 - s\ dt$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3-s}\int_0^{(3-s)b} e^u\ du - \frac{1}{-3-s}\int_0^{(-3-s)b} e^u\ du\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3-s}\ (e^u)\big|_0^{(3-s)b} + \frac{1}{3+s}\ (e^u)\big|_0^{(-3-s)b}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(3-s)b} - 1}{3-s} + \frac{e^{(-3-s)b} - 1}{3+s}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{(3+s)e^{(3-s)b} - 3 - s + (3-s)e^{(-3-s)b} - 3 + s}{9 - s^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{(3+s)e^{(3-s)b} - 6 + (3-s)e^{(-3-s)b}}{9 - s^2}\right] \\
&= \frac{1}{2(9-s^2)}\left[(3+s)\lim_{b\to\infty} e^{(3-s)b} + (3-s)\lim_{b\to\infty} e^{(-3-s)b} - 6\right]
\end{aligned}$$

Cuando $s > 3 \implies (3-s) < 0 \wedge (-3-s) < 0$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(9-s^2)}\left[(3+s)\lim_{b\to-\infty} e^b + (3-s)\lim_{b\to-\infty} e^b - 6\right] \\
&= \frac{1}{2(9-s^2)}\left[(3+s)0 + (3-s)0 - 6\right] \\
&= \frac{1}{2(9-s^2)}(-6) \\
&= \frac{3}{s^2 - 9}
\end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\sinh(3t)\} = \frac{3}{s^2 - 9}$$

15. $f(t) = \cosh(6t)$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = \cosh(6t)$:

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cosh(6t)\ dt$$

Recordemos que $\cosh(u) = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$, así que:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{6t} + e^{-6t}\right)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(6-s)t} + e^{(-6-s)t}\ dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(6-s)t}\ dt + \int_0^\infty e^{(-6-s)t}\ dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b e^{(6-s)t}\ dt + \int_0^b e^{(-6-s)t}\ dt\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo con $u = (6-s)t \implies du = 6 - s\ dt$ y $v = (-6-s)t \implies dv = -6 - s\ dt$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{6-s}\int_0^{(6-s)b} e^u\ du + \frac{1}{-6-s}\int_0^{(-6-s)b} e^u\ du\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{6-s}\left(e^u\right)\Big|_0^{(6-s)b} - \frac{1}{6+s}\left(e^u\right)\Big|_0^{(-6-s)b}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(6-s)b}-1}{6-s} - \frac{e^{(-6-s)b}-1}{6+s}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{(6+s)e^{(6-s)b} - 6 - s - (6-s)e^{(-6-s)b} + 6 - s}{36-s^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{(6+s)e^{(6-s)b} - 2s - (6-s)e^{(-6-s)b}}{36-s^2}\right] \\
&= \frac{1}{2(36-s^2)}\left[(6+s)\lim_{b\to\infty}e^{(6-s)b} + (6-s)\lim_{b\to\infty}e^{(-6-s)b} - 2s\right]
\end{aligned}$$

Cuando $s > 6 \implies (6-s) < 0 \wedge (-6-s) < 0$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(36-s^2)}\left[(6+s)\lim_{b\to-\infty}e^b + (6-s)\lim_{b\to-\infty}e^b - 2s\right] \\
&= \frac{1}{2(36-s^2)}\left[(6+s)0 + (6-s)0 - 2s\right] \\
&= \frac{1}{2(36-s^2)}(-2s) \\
&= \frac{s}{s^2-36}
\end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \frac{s}{s^2-9}$$

17. $f(t) = \cosh(at)$

Calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = \cosh(at)$:

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cosh(at)\ dt$$

Recordemos que $\cosh(u) = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$, así que:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at} + e^{-at}\right)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(a-s)t} + e^{(-a-s)t}\ dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(a-s)t}\ dt + \int_0^\infty e^{(-a-s)t}\ dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b e^{(a-s)t}\ dt + \int_0^b e^{(-a-s)t}\ dt\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo con $u = (a-s)t \implies du = a - s\ dt$ y $v = (-a-s)t \implies dv = -a - s\ dt$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}\int_0^{(a-s)b} e^u\ du + \frac{1}{-a-s}\int_0^{(-a-s)b} e^u\ du\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}\ (e^u)\Big|_0^{(a-s)b} - \frac{1}{a+s}\ (e^u)\Big|_0^{(-a-s)b}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)b}-1}{a-s} - \frac{e^{(-a-s)b}-1}{a+s}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{(a+s)e^{(a-s)b} - a - s - (a-s)e^{(-a-s)b} + a - s}{a^2-s^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{(a+s)e^{(a-s)b} - 2s - (a-s)e^{(-a-s)b}}{a^2-s^2}\right] \\
&= \frac{1}{2(a^2-s^2)}\left[(a+s)\lim_{b\to\infty} e^{(a-s)b} + (a-s)\lim_{b\to\infty} e^{(-a-s)b} - 2s\right]
\end{aligned}$$

Cuando $s > a \implies (a-s) < 0 \wedge (-a-s) < 0$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(a^2-s^2)}\left[(a+s)\lim_{b\to-\infty} e^b + (a-s)\lim_{b\to-\infty} e^b - 2s\right] \\
&= \frac{1}{2(a^2-s^2)}\left[(a+s)0 + (a-s)0 - 2s\right] \\
&= \frac{1}{2(a^2-s^2)}(-2s) \\
&= \frac{s}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$