



# Transformadas de Laplace

Camargo Badillo Luis Mauricio

*11 de febrero de 2024*

Ecuaciones Diferenciales II  
Oscar Gabriel Caballero Martínez  
Grupo 2602  
**Matemáticas Aplicadas y Computación**

## 2. $f(t) = c$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = c$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(c) \\ &= \int_0^{\infty} ce^{-st} \\ &= c \int_0^{\infty} e^{-st} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} c \int_0^b e^{-st} dt\end{aligned}$$

Sustituimos con  $u = -st \implies du = -s dt$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}&= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{c}{s} \left[ \int_0^{-sb} e^u du \right] \\ &= -\frac{c}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ e^u \Big|_0^{-sb} \right] \\ &= -\frac{c}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ e^{-sb} - e^0 \right] \\ &= -\frac{c}{s} \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} - 1 \right]\end{aligned}$$

Cuando  $s > 0 \implies -s < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}&= -\frac{c}{s} \left[ \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= -\frac{c}{s} [0 - 1] \\ &= \frac{c}{s}\end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s} \quad s > 0$$

## 5. $f(t) = t^3$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = t^3$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^3\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^3 dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st}t^3 dt\end{aligned} \tag{5.1}$$

Enfoquémonos en la integral en sí. Para resolverla, integramos por partes, utilizando  $u = t^3 \implies du = 3t^2 dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ :

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} t^3 dt &= \left( -\frac{t^3 e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^b + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt \\ &= \left( -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s} \right) + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt \\ &= -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt\end{aligned}\tag{5.2}$$

Observemos que tenemos otra integral. Resolvámosla también por partes, utilizando  $u = t^2 \implies du = 2t dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ :

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} t^2 dt &= \left( -\frac{t^2 e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^b + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \\ &= \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s} \right) + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \\ &= -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \\ &= -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt\end{aligned}\tag{5.3}$$

Una vez más, tenemos otra integral. Otra vez resolvamos por partes utilizando  $u = t \implies du = dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} t dt &= \left( -\frac{t e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \left( -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s} \right) + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt\end{aligned}\tag{5.4}$$

Tenemos una última integral, pero esta vez la resolveremos con una sustitución  $u = -st \implies du = -s dt$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} dt &= -\frac{1}{s} \int_0^{-sb} e^u du \\ &= -\frac{1}{s} (e^u) \Big|_0^{-sb} \\ &= -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-s(0)}}{s} \\ &= -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Sustituyendo todas estas expresiones donde corresponden, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^3 dt \quad (5.1)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt \right] \quad \text{sust. (5.2)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \right) \right] \quad \text{sust. (5.3)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \left[ -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \right] \right) \right] \quad \text{sust. (5.4)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \left[ -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \left( -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right) \right] \right) \right] \quad \text{sust. (5.5)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \left[ -\frac{b e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right] \right) \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} - \frac{2b e^{-sb}}{s^2} - \frac{2e^{-sb}}{s^3} + \frac{2}{s^3} \right) \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} - \frac{3b^2 e^{-sb}}{s^2} - \frac{6b e^{-sb}}{s^3} - \frac{6e^{-sb}}{s^4} + \frac{6}{s^4} \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} - \frac{3b^2 e^{-sb}}{s^2} - \frac{6b e^{-sb}}{s^3} - \frac{6e^{-sb}}{s^4} \right] + \frac{6}{s^4}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ e^{-sb} \left( -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3} \right) \right] + \frac{6}{s^4}$$

$$= \left( \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \right) \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3} \right] \right) + \frac{6}{s^4}$$

Observemos que cuando  $s > 0 \implies -s < 0$ , por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} &= \left( \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b \right) \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3} \right] \right) + \frac{6}{s^4} \\ &= 0 \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3} \right] + \frac{6}{s^4} \\ &= 0 + \frac{6}{s^4} \\ &= \frac{6}{s^4} \\ &= \frac{3!}{s^4} \end{aligned}$$

Con esto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} \quad s > 0$$

8.  $f(t) = \cos(t)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \cos(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt\end{aligned}$$

Integrando por partes, utilizando  $u = \cos(t) \implies du = -\sin(t) dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\cos(t)e^{-st}}{s} \Big|_0^b - \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\cos(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\cos(0)e^0}{s} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt\end{aligned}$$

Una vez más, integrando por partes con  $u = \sin(t) \implies du = \cos(t) dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , tenemos:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\sin(t)e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\sin(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\sin(0)e^0}{s} \right] + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt$$

Estableciendo  $a = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}a \\
 \implies a + \frac{1}{s^2}a &= \frac{1}{s} \\
 \implies a \left( \frac{1}{s^2} + 1 \right) &= \frac{1}{s} \\
 \implies a \left( \frac{1 + s^2}{s^2} \right) &= \frac{1}{s} \\
 \implies a &= \frac{s^2}{s(1 + s^2)} \\
 \implies a &= \frac{s}{s^2 + 1} \\
 \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{s}{s^2 + 1} \\
 \implies \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{s}{s^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

**11.**  $f(t) = e^{4t}$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{4t}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{4t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{4t} dt \\
 &= \int_0^\infty e^{(4-s)t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(4-s)t} dt
 \end{aligned}$$

Sustituyamos con  $u = (4 - s)t \implies du = 4 - s dt$ :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{(4-s)b} e^u du \\
 &= \frac{1}{4 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^u) \Big|_0^{(4-s)b} \\
 &= \frac{1}{4 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{(4-s)b} - e^0) \\
 &= \frac{1}{4 - s} \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(4-s)b} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Cuando  $s > 4 \implies (4 - s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4 - s} \left[ \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= \frac{1}{4 - s} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s - 4} \end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s - 4} \quad s > 4$$

**12.**  $f(t) = e^{-2t}$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{-2t}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-2t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-2t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(-2-s)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(-2-s)t} dt \end{aligned}$$

Sustituyamos con  $u = (-2 - s)t \implies du = -2 - s dt$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{(-2-s)b} e^u du \\ &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^u) \Big|_0^{(-2-s)b} \\ &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{(-2-s)b} - e^0) \\ &= \frac{1}{-2 - s} \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-2-s)b} - 1 \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > -2 \implies (-2 - s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-2 - s} \left[ \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= \frac{1}{-2 - s} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s + 2} \end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s + 2} \quad s > -2$$

#### 14. $f(t) = \sinh(3t)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \sinh(3t)$ :

$$\mathcal{L}\{\sinh(3t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sinh(3t) dt$$

Recordemos que  $\sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ , así que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{3t} - e^{-3t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(3-s)t} - e^{(-3-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(3-s)t} dt - \int_0^{\infty} e^{(-3-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_0^b e^{(3-s)t} dt - \int_0^b e^{(-3-s)t} dt \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo con  $u = (3-s)t \implies du = 3-s dt$  y  $v = (-3-s)t \implies dv = -3-s dt$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{3-s} \int_0^{(3-s)b} e^u du - \frac{1}{-3-s} \int_0^{(-3-s)b} e^u du \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{3-s} (e^u)|_0^{(3-s)b} + \frac{1}{3+s} (e^u)|_0^{(-3-s)b} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(3-s)b} - 1}{3-s} + \frac{e^{(-3-s)b} - 1}{3+s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(3+s)e^{(3-s)b} - 3-s + (3-s)e^{(-3-s)b} - 3+s}{9-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(3+s)e^{(3-s)b} - 6 + (3-s)e^{(-3-s)b}}{9-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2(9-s^2)} \left[ (3+s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(3-s)b} + (3-s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-3-s)b} - 6 \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > 3 \implies (3-s) < 0 \wedge (-3-s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(9-s^2)} \left[ (3+s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b + (3-s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 6 \right] \\ &= \frac{1}{2(9-s^2)} [(3+s)0 + (3-s)0 - 6] \\ &= \frac{1}{2(9-s^2)} (-6) \\ &= \frac{3}{s^2-9} \end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\sinh(3t)\} = \frac{3}{s^2-9}$$



## 15. $f(t) = \cosh(6t)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \cosh(6t)$ :

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh(6t) dt$$

Recordemos que  $\cosh(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ , así que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{6t} + e^{-6t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(6-s)t} + e^{(-6-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(6-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-6-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_0^b e^{(6-s)t} dt + \int_0^b e^{(-6-s)t} dt \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo con  $u = (6-s)t \implies du = 6-s dt$  y  $v = (-6-s)t \implies dv = -6-s dt$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{6-s} \int_0^{(6-s)b} e^u du + \frac{1}{-6-s} \int_0^{(-6-s)b} e^u du \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{6-s} (e^u)|_0^{(6-s)b} - \frac{1}{6+s} (e^u)|_0^{(-6-s)b} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(6-s)b} - 1}{6-s} - \frac{e^{(-6-s)b} - 1}{6+s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(6+s)e^{(6-s)b} - 6-s - (6-s)e^{(-6-s)b} + 6-s}{36-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(6+s)e^{(6-s)b} - 2s - (6-s)e^{(-6-s)b}}{36-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2(36-s^2)} \left[ (6+s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(6-s)b} + (6-s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-6-s)b} - 2s \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > 6 \implies (6-s) < 0 \wedge (-6-s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(36-s^2)} \left[ (6+s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b + (6-s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 2s \right] \\ &= \frac{1}{2(36-s^2)} [(6+s)0 + (6-s)0 - 2s] \\ &= \frac{1}{2(36-s^2)} (-2s) \\ &= \frac{s}{s^2-36} \end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \frac{s}{s^2-9}$$

## 17. $f(t) = \cosh(at)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \cosh(at)$ :

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh(at) dt$$

Recordemos que  $\cosh(u) = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u})$ , así que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{at} + e^{-at}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} + e^{(-a-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-a-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_0^b e^{(a-s)t} dt + \int_0^b e^{(-a-s)t} dt \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo con  $u = (a-s)t \implies du = a-s dt$  y  $v = (-a-s)t \implies dv = -a-s dt$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{a-s} \int_0^{(a-s)b} e^u du + \frac{1}{-a-s} \int_0^{(-a-s)b} e^u du \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{a-s} (e^u)|_0^{(a-s)b} - \frac{1}{a+s} (e^u)|_0^{(-a-s)b} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(a-s)b} - 1}{a-s} - \frac{e^{(-a-s)b} - 1}{a+s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(a+s)e^{(a-s)b} - a-s - (a-s)e^{(-a-s)b} + a-s}{a^2 - s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(a+s)e^{(a-s)b} - 2s - (a-s)e^{(-a-s)b}}{a^2 - s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} \left[ (a+s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(a-s)b} + (a-s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-a-s)b} - 2s \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > a \implies (a-s) < 0 \wedge (-a-s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} \left[ (a+s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b + (a-s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 2s \right] \\ &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} [(a+s)0 + (a-s)0 - 2s] \\ &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} (-2s) \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$