



## **Tarea 3: Transformadas de Laplace**

Camargo Badillo Luis Mauricio

*11 de febrero de 2024*

Ecuaciones Diferenciales II  
Oscar Gabriel Caballero Martínez  
Grupo 2602  
**Matemáticas Aplicadas y Computación**

# Índice

<b>2.</b>	$f(t) = c$	<b>2</b>
<b>5.</b>	$f(t) = t^3$	<b>2</b>
<b>6.</b>	$f(t) = t^n$	<b>4</b>
6.1.	Caso base $n = 0$	5
6.2.	Hipótesis de Inducción ( $n = k$ )	5
6.3.	Caso ( $n = k + 1$ )	5
<b>8.</b>	$f(t) = \cos(t)$	<b>7</b>
<b>9.</b>	$f(t) = \sin(at)$	<b>9</b>
<b>11.</b>	$f(t) = e^{4t}$	<b>10</b>
<b>12.</b>	$f(t) = e^{-2t}$	<b>11</b>
<b>14.</b>	$f(t) = \sinh(3t)$	<b>12</b>
<b>15.</b>	$f(t) = \cosh(6t)$	<b>13</b>
<b>17.</b>	$f(t) = \cosh(at)$	<b>14</b>

## 2. $f(t) = c$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = c$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(c) \\ &= \int_0^{\infty} ce^{-st} \\ &= c \int_0^{\infty} e^{-st} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} c \int_0^b e^{-st} dt\end{aligned}$$

Sustituimos con  $u = -st \implies du = -s dt$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}&= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{c}{s} \left[ \int_0^{-sb} e^u du \right] \\ &= -\frac{c}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ e^u \Big|_0^{-sb} \right] \\ &= -\frac{c}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ e^{-sb} - e^0 \right] \\ &= -\frac{c}{s} \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} - 1 \right]\end{aligned}$$

Cuando  $s > 0 \implies -s < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}&= -\frac{c}{s} \left[ \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= -\frac{c}{s} [0 - 1] \\ &= \frac{c}{s}\end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s} \quad s > 0$$

## 5. $f(t) = t^3$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = t^3$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^3\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^3 dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st}t^3 dt\end{aligned} \tag{5.1}$$

Enfoquémonos en la integral en sí. Para resolverla, integramos por partes, utilizando  $u = t^3 \Rightarrow du = 3t^2 dt$  y  $dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ :

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} t^3 dt &= \left( -\frac{t^3 e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^b + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt \\ &= \left( -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s} \right) + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt \\ &= -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt\end{aligned}\quad (5.2)$$

Observemos que tenemos otra integral. Resolvámosla también por partes, utilizando  $u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$  y  $dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ :

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} t^2 dt &= \left( -\frac{t^2 e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^b + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \\ &= \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s} \right) + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \\ &= -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \\ &= -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt\end{aligned}\quad (5.3)$$

Una vez más, tenemos otra integral. Otra vez resolvamos por partes utilizando  $u = t \Rightarrow du = dt$  y  $dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} t dt &= \left( -\frac{t e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \left( -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{0}{s} \right) + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt\end{aligned}\quad (5.4)$$

Tenemos una última integral, pero esta vez la resolveremos con una sustitución  $u = -st \Rightarrow du = -s dt$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} dt &= -\frac{1}{s} \int_0^{-sb} e^u du \\ &= -\frac{1}{s} (e^u) \Big|_0^{-sb} \\ &= -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-s(0)}}{s} \\ &= -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\end{aligned}\quad (5.5)$$

Sustituyendo todas estas expresiones donde corresponden, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^3 dt \quad (5.1)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \int_0^b e^{-st} t^2 dt \right] \quad \text{sust. (5.2)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \int_0^b e^{-st} t dt \right) \right] \quad \text{sust. (5.3)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \left[ -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \right] \right) \right] \quad \text{sust. (5.4)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \left[ -\frac{b e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \left( -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right) \right] \right) \right] \quad \text{sust. (5.5)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} + \frac{2}{s} \left[ -\frac{b e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right] \right) \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} + \frac{3}{s} \left( -\frac{b^2 e^{-sb}}{s} - \frac{2b e^{-sb}}{s^2} - \frac{2e^{-sb}}{s^3} + \frac{2}{s^3} \right) \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} - \frac{3b^2 e^{-sb}}{s^2} - \frac{6b e^{-sb}}{s^3} - \frac{6e^{-sb}}{s^4} + \frac{6}{s^4} \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3 e^{-sb}}{s} - \frac{3b^2 e^{-sb}}{s^2} - \frac{6b e^{-sb}}{s^3} - \frac{6e^{-sb}}{s^4} \right] + \frac{6}{s^4}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ e^{-sb} \left( -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3} \right) \right] + \frac{6}{s^4}$$

Notemos que  $g(b) = e^{-sb}$  cambia más rápidamente que  $h(b) = -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3}$ , por lo que el límite seguirá la tendencia de  $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} = 0$  y no la de  $\lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3} \right] = \infty$ :

$$\begin{aligned} &= 0 + \frac{6}{s^4} \\ &= \frac{6}{s^4} \\ &= \frac{3!}{s^4} \end{aligned}$$

Con esto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} \quad s > 0$$

## 6. $f(t) = t^n$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = t^n$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^n dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^n dt \end{aligned}$$

Resolvamos esta integral por sustitución, utilizando  $u = st \implies du = s dt$ :

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^b e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n du \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^b e^{-u} u^n du \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-u} u^n du \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n du
\end{aligned} \tag{6.1}$$

A partir de este punto, para poder continuar hará falta demostrar que lo siguiente se cumple:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n! \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.2}$$

### 6.1. Caso base $n = 0$

Demostremos por inducción. Iniciemos con el caso base cuando  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} x^0 dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} x^0 dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ (-e^{-x}) \Big|_0^b \right] \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-b} + e^0] \\
&= - \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b + 1 \\
&= 0 + 1 \\
&= 1 \\
&= 0!
\end{aligned}$$

### 6.2. Hipótesis de Inducción ( $n = k$ )

Establezcamos como hipótesis de inducción que la igualdad se cumple con  $n = k$ , dada una  $k \in \mathbb{N}$  particular:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k dx = k!$$

### 6.3. Caso ( $n = k + 1$ )

Para finalizar la demostración, dado el caso base y la hipótesis de inducción, hace falta demostrar que se cumple la igualdad con  $n = k + 1$ ; por demostrar:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{k+1} dx = (k + 1)! \tag{6.3}$$

Iniciamos expresando la integral impropia como el límite de una integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{k+1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} x^{k+1} dx$$

Ahora, integramos por partes utilizando  $u = x^{k+1} \implies du = (k+1)x^k dx$  y  $dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x}$ , obteniendo:

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ (-x^{k+1} e^{-x}) \Big|_0^b + (k+1) \int_0^b e^{-x} x^k dx \right]$$

Observemos que podemos utilizar la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ (-x^{k+1} e^{-x}) \Big|_0^b + (k+1)k! \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ (-b^{k+1} e^{-b} + 0^{k+1} e^0) + (k+1)k! \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ (-b^{k+1} e^{-b}) + (k+1)k! \right] \\ &= - \lim_{b \rightarrow \infty} b^{k+1} e^{-b} + (k+1)k! \end{aligned} \tag{6.4}$$

Notemos que podemos reescribir el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b^{k+1} e^{-b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{k+1}}{e^b}$$

Este límite se indetermina, pero podemos utilizar la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} b^{k+1} e^{-b} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{db}(b^{k+1})}{\frac{d}{db}(e^b)} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(k+1)b^k}{e^b} \\ &= (k+1) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^k}{e^b} \end{aligned}$$

Este límite también se indetermina, así que continuemos utilizando la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} b^{k+1} e^{-b} &= (k+1) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{db}(b^k)}{\frac{d}{db}(e^b)} \\ &= (k+1) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{k b^{k-1}}{e^b} \\ &= (k+1)k \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{k-1}}{e^b} \end{aligned}$$

Una vez más, este límite se indetermina, pero notemos que las derivadas del numerador seguirán el mismo patrón hasta alcanzar  $\frac{d}{db}(b) = 1$ , con los exponentes acumulándose como

un producto que escala al límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow \infty} b^{k+1} e^{-b} &= (k+1)k(k-1)(k-2)(\dots) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{db}(b)}{\frac{d}{db}(e^b)} \\
&= (k+1)! \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^b} \\
&= (k+1)! \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} \\
&= (k+1)! \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b \\
&= (k+1)!(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En otras palabras, como  $g(b) = e^{-b}$  cambia más rápidamente que  $h(b) = b^{k+1}$ , el límite sigue la tendencia de  $\lim_{b \rightarrow \infty} g(b) = 0$  y no la de  $\lim_{b \rightarrow \infty} h(b) = \infty$ .

Regresando a (6.4), entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} x^{k+1} dx &= 0 + (k+1)k! \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

Esto es igual que (6.3), así que efectivamente hemos podido demostrar por inducción que (6.2) se cumple  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Con ello, podemos regresar a (6.1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{1}{s^{n+1}}(n!) \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

## 8. $f(t) = \cos(t)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \cos(t)$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt
\end{aligned}$$

Integrando por partes, utilizando  $u = \cos(t) \implies du = -\sin(t) dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\cos(t)e^{-st}}{s} \Big|_0^b - \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\cos(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\cos(0)e^0}{s} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right]
\end{aligned}$$



Cuando  $s > 0 \implies -s < 0$ , por lo que, bajo ese supuesto,  $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} = \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b = 0$ , obteniendo así:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s} - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \end{aligned}$$

Una vez más, integrando por partes con  $u = \sin(t) \implies du = \cos(t) dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\sin(t)e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\sin(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\sin(0)e^0}{s} \right] + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \right) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt$$

Estableciendo  $a = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt$ , tenemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}a \\ \implies a + \frac{1}{s^2}a &= \frac{1}{s} \\ \implies a \left( \frac{1}{s^2} + 1 \right) &= \frac{1}{s} \\ \implies a \left( \frac{1 + s^2}{s^2} \right) &= \frac{1}{s} \\ \implies a &= \frac{s^2}{s(1 + s^2)} \\ \implies a &= \frac{s}{s^2 + 1} \\ \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{s}{s^2 + 1} \\ \implies \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1} \quad s > 0$$

## 9. $f(t) = \sin(at)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \sin(at)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt\end{aligned}$$

Integrando por partes, utilizando  $u = \sin(at) \implies du = a \cos(at) dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\sin(at)e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(at) dt \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\sin(ab)e^{-sb}}{s} + \frac{\sin(0)e^0}{s} \right] + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(at) dt \right]\end{aligned}$$

Cuando  $s > 0 \implies -s < 0$ , por lo que, bajo ese supuesto,  $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} = \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b = 0$ , obteniendo así:

$$\begin{aligned}&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(at) dt \right] \\ &= \frac{a}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(at) dt\end{aligned}$$

Una vez más, integrando por partes con  $u = \cos(at) \implies du = -a \sin(at) dt$  y  $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ , tenemos:

$$\begin{aligned}&= \frac{a}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\cos(at)e^{-st}}{s} \Big|_0^b - \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt \right] \\ &= \frac{a}{s} \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\cos(ab)e^{-sb}}{s} + \frac{\cos(0)e^0}{s} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt \right] \right) \\ &= \frac{a}{s} \left( \frac{1}{s} - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{a}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt \right] \right) \\ &= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt$$

Estableciendo  $c = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} c \\
 \Rightarrow c + \frac{a^2}{s^2} c &= \frac{a}{s^2} \\
 \Rightarrow c \left( 1 + \frac{a^2}{s^2} \right) &= \frac{a}{s^2} \\
 \Rightarrow c \left( \frac{s^2 + a^2}{s^2} \right) &= \frac{a}{s^2} \\
 \Rightarrow c &= \frac{as^2}{s^2(s^2 + a^2)} \\
 \Rightarrow c &= \frac{a}{a^2 + s^2} \\
 \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(at) dt &= \frac{a}{a^2 + s^2} \\
 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) dt &= \frac{a}{a^2 + s^2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{a^2 + s^2} \quad s > 0$$

**11.**  $f(t) = e^{4t}$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{4t}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{4t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{4t} dt \\
 &= \int_0^\infty e^{(4-s)t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(4-s)t} dt
 \end{aligned}$$

Sustituyamos con  $u = (4-s)t \Rightarrow du = 4-s dt$ :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4-s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{(4-s)b} e^u du \\
 &= \frac{1}{4-s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^u) \Big|_0^{(4-s)b} \\
 &= \frac{1}{4-s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{(4-s)b} - e^0) \\
 &= \frac{1}{4-s} \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(4-s)b} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Cuando  $s > 4 \implies (4 - s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4 - s} \left[ \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= \frac{1}{4 - s} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s - 4} \end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s - 4} \quad s > 4$$

**12.**  $f(t) = e^{-2t}$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{-2t}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-2t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-2t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(-2-s)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(-2-s)t} dt \end{aligned}$$

Sustituyamos con  $u = (-2 - s)t \implies du = -2 - s dt$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{(-2-s)b} e^u du \\ &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^u) \Big|_0^{(-2-s)b} \\ &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{(-2-s)b} - e^0) \\ &= \frac{1}{-2 - s} \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-2-s)b} - 1 \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > -2 \implies (-2 - s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-2 - s} \left[ \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= \frac{1}{-2 - s} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s + 2} \end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s + 2} \quad s > -2$$

#### 14. $f(t) = \sinh(3t)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \sinh(3t)$ :

$$\mathcal{L}\{\sinh(3t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sinh(3t) dt$$

Recordemos que  $\sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ , así que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{3t} - e^{-3t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(3-s)t} - e^{(-3-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(3-s)t} dt - \int_0^{\infty} e^{(-3-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_0^b e^{(3-s)t} dt - \int_0^b e^{(-3-s)t} dt \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo con  $u = (3-s)t \implies du = 3-s dt$  y  $v = (-3-s)t \implies dv = -3-s dt$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{3-s} \int_0^{(3-s)b} e^u du - \frac{1}{-3-s} \int_0^{(-3-s)b} e^u du \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{3-s} (e^u)|_0^{(3-s)b} + \frac{1}{3+s} (e^u)|_0^{(-3-s)b} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(3-s)b} - 1}{3-s} + \frac{e^{(-3-s)b} - 1}{3+s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(3+s)e^{(3-s)b} - 3-s + (3-s)e^{(-3-s)b} - 3+s}{9-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(3+s)e^{(3-s)b} - 6 + (3-s)e^{(-3-s)b}}{9-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2(9-s^2)} \left[ (3+s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(3-s)b} + (3-s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-3-s)b} - 6 \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > 3 \implies (3-s) < 0 \wedge (-3-s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(9-s^2)} \left[ (3+s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b + (3-s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 6 \right] \\ &= \frac{1}{2(9-s^2)} [(3+s)0 + (3-s)0 - 6] \\ &= \frac{1}{2(9-s^2)} (-6) \\ &= \frac{3}{s^2-9} \end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\sinh(3t)\} = \frac{3}{s^2-9}$$

## 15. $f(t) = \cosh(6t)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \cosh(6t)$ :

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh(6t) dt$$

Recordemos que  $\cosh(u) = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u})$ , así que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{6t} + e^{-6t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(6-s)t} + e^{(-6-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(6-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-6-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_0^b e^{(6-s)t} dt + \int_0^b e^{(-6-s)t} dt \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo con  $u = (6-s)t \Rightarrow du = 6-s dt$  y  $v = (-6-s)t \Rightarrow dv = -6-s dt$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{6-s} \int_0^{(6-s)b} e^u du + \frac{1}{-6-s} \int_0^{(-6-s)b} e^u du \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{6-s} (e^u)|_0^{(6-s)b} - \frac{1}{6+s} (e^u)|_0^{(-6-s)b} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(6-s)b} - 1}{6-s} - \frac{e^{(-6-s)b} - 1}{6+s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(6+s)e^{(6-s)b} - 6-s - (6-s)e^{(-6-s)b} + 6-s}{36-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(6+s)e^{(6-s)b} - 2s - (6-s)e^{(-6-s)b}}{36-s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2(36-s^2)} \left[ (6+s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(6-s)b} + (6-s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-6-s)b} - 2s \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > 6 \Rightarrow (6-s) < 0 \wedge (-6-s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(36-s^2)} \left[ (6+s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b + (6-s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 2s \right] \\ &= \frac{1}{2(36-s^2)} [(6+s)0 + (6-s)0 - 2s] \\ &= \frac{1}{2(36-s^2)} (-2s) \\ &= \frac{s}{s^2-36} \end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \frac{s}{s^2-9}$$

## 17. $f(t) = \cosh(at)$

Calculamos la transformada de Laplace de  $f(t) = \cosh(at)$ :

$$\mathcal{L}\{\cosh(6t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh(at) dt$$

Recordemos que  $\cosh(u) = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u})$ , así que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{at} + e^{-at}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} + e^{(-a-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-a-s)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_0^b e^{(a-s)t} dt + \int_0^b e^{(-a-s)t} dt \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo con  $u = (a-s)t \implies du = a-s dt$  y  $v = (-a-s)t \implies dv = -a-s dt$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{a-s} \int_0^{(a-s)b} e^u du + \frac{1}{-a-s} \int_0^{(-a-s)b} e^u du \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{a-s} (e^u)|_0^{(a-s)b} - \frac{1}{a+s} (e^u)|_0^{(-a-s)b} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(a-s)b} - 1}{a-s} - \frac{e^{(-a-s)b} - 1}{a+s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(a+s)e^{(a-s)b} - a-s - (a-s)e^{(-a-s)b} + a-s}{a^2 - s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(a+s)e^{(a-s)b} - 2s - (a-s)e^{(-a-s)b}}{a^2 - s^2} \right] \\ &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} \left[ (a+s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(a-s)b} + (a-s) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-a-s)b} - 2s \right] \end{aligned}$$

Cuando  $s > a \implies (a-s) < 0 \wedge (-a-s) < 0$ , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} \left[ (a+s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b + (a-s) \lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 2s \right] \\ &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} [(a+s)0 + (a-s)0 - 2s] \\ &= \frac{1}{2(a^2 - s^2)} (-2s) \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

Así, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$