



Transformadas de Lagrange

Camargo Badillo Luis Mauricio

11 de febrero de 2024

Ecuaciones Diferenciales II
Oscar Gabriel Caballero Martínez
Grupo 2602
Matemáticas Aplicadas y Computación

8. $f(t) = \cos(t)$

Calculamos la transformada de Lagrange de $f(t) = \cos(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt\end{aligned}$$

Integrando por partes, utilizando $u = \cos(t) \implies du = -\sin(t) dt$ y $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-\cos(t)e^{-st}}{s} \Big|_0^b - \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{\cos(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\cos(0)e^0}{s} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(t) dt\end{aligned}$$

Una vez más, integrando por partes con $u = \sin(t) \implies du = \cos(t) dt$ y $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, tenemos:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-\sin(t)e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{\sin(b)e^{-sb}}{s} + \frac{\sin(0)e^0}{s} \right] + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt$$

Estableciendo $a = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}a \\
 \implies a + \frac{1}{s^2}a &= \frac{1}{s} \\
 \implies a \left(\frac{1}{s^2} + 1 \right) &= \frac{1}{s} \\
 \implies a \left(\frac{1 + s^2}{s^2} \right) &= \frac{1}{s} \\
 \implies a &= \frac{s^2}{s(1 + s^2)} \\
 \implies a &= \frac{s}{s^2 + 1} \\
 \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{s}{s^2 + 1} \\
 \implies \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{s}{s^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

11. $f(t) = e^{4t}$

Calculamos la transformada de Lagrange de $f(t) = e^{4t}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{4t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{4t} dt \\
 &= \int_0^\infty e^{(4-s)t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(4-s)t} dt
 \end{aligned}$$

Sustituyamos con $u = (4 - s)t \implies du = 4 - s dt$:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{(4-s)b} e^u du \\
 &= \frac{1}{4 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^u) \Big|_0^{(4-s)b} \\
 &= \frac{1}{4 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{(4-s)b} - e^0) \\
 &= \frac{1}{4 - s} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} e^{(4-s)b} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Cuando $s > 4 \implies (4 - s) < 0$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4 - s} \left[\lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= \frac{1}{4 - s} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s - 4} \end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s - 4} \quad s > 4$$

12. $f(t) = e^{-2t}$

Calculamos la transformada de Lagrange de $f(t) = e^{-2t}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-2t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-2t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(-2-s)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(-2-s)t} dt \end{aligned}$$

Sustituyamos con $u = (-2 - s)t \implies du = -2 - s dt$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{(-2-s)b} e^u du \\ &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^u) \Big|_0^{(-2-s)b} \\ &= \frac{1}{-2 - s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{(-2-s)b} - e^0) \\ &= \frac{1}{-2 - s} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} e^{(-2-s)b} - 1 \right] \end{aligned}$$

Cuando $s > -2 \implies (-2 - s) < 0$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-2 - s} \left[\lim_{b \rightarrow -\infty} e^b - 1 \right] \\ &= \frac{1}{-2 - s} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s + 2} \end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s + 2} \quad s > -2$$

14. $f(t) = \sinh(3t)$

15. $f(t) = \cosh(6t)$

17. $f(t) = \cosh(at)$