Rermerciements

Les transparents de ce chapitre sont une modification marginale des transparents d'Agathe Guilloux.

Plan du chapitre 1

1. Equations linéaires
   - Systèmes d'équations linéaires
   - Opérations élémentaires, équivalence
   - Existence ? Unicité ?
2. Méthode du pivot de Gauss
   - Matrices échelonnées, échelonnée réduite
   - Caractérisation des solutions
   - Existence et unicité des solutions
   - Algorithme du pivot de Gauss
3. Équations de vecteurs
   - Combinaison linéaire
   - Espace engendré
4. Équations matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
   - Produit matriciel
   - 3 formes équivalentes pour les systèmes linéaires
5. Indépendance linéaire
   - Système homogène
   - Indépendance linéaire de vecteurs
   - Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice
   - Cas spéciaux
   - Caractérisation de la dépendance linéaire
6. Introduction aux applications linéaires
   - Produit matrice-vecteur
   - Application
   - Application linéaire
7. La matrice d'une application linéaire
   - La matrice identité
   - Matrice d'une application linéaire

Equations linéaires

- Une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

EXEMPLE :

$$\begin{array}{ccc} 4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 & \text{et} & x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{réarrangé} & & \text{réarrangé} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3x_1 - 5x_2 = -2 & & 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6} \end{array}$$

- Non linéaire

$$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$$

Un **système d'équations linéaires** ou un **système linéaire** $\mathcal{S}$ de m équations à n inconnues :

> Une collection de m équations linéaires avec les mêmes n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

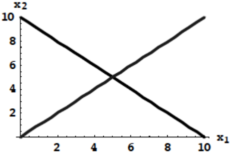
Une **solution** d'un système linéaire

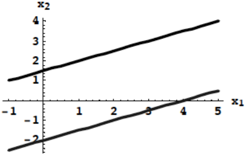
> Une liste $(s_1, s_2, ..., s_n)$ de nombres qui sont solutions de chaque équation.

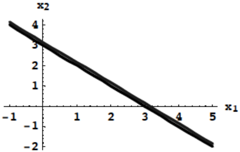
EXEMPLES $m = 2$ équations à $n = 2$ variables :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_3 : \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

une unique solution — **pas de solution** — **une infinité de solution**







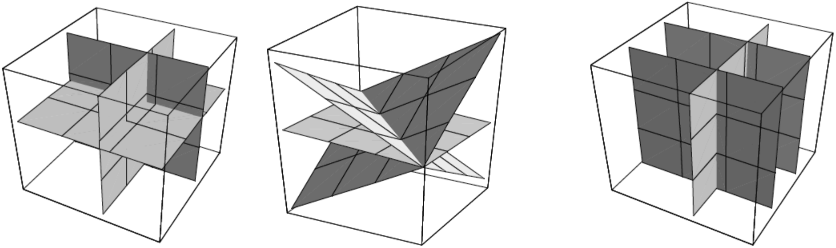
Proposition

Un système d'équations linéaires a

- (i) exactement une solution ou
- (ii) une infinité de solutions ou
- (iii) pas de solution.

EXEMPLE Trois équations à 3 variables. Chaque équation définit un plan dans l'espace, il y a 3 possibilités :

- i) les plans s'intersectent en un point (solution unique)
- ii) les plans s'intersectent en une ligne (infinité de solutions)
- iii) il n'a pas de point commun aux 3 plans



L'**ensemble des solutions** d'un système linéaire est

- l'ensemble de toutes les solutions du système.

Systèmes équivalents :

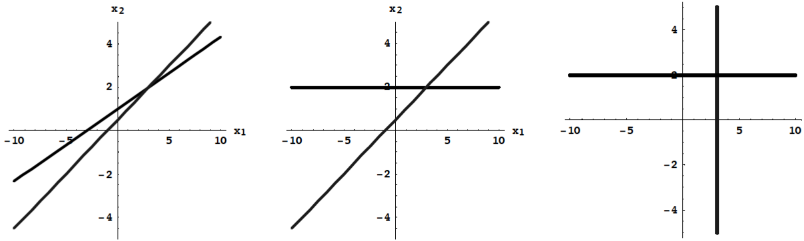
- 2 systèmes linéaires sont équivalents quand ils ont le même ensemble de solutions.

Stratégie pour résoudre un système

- Remplacer le système par un système équivalent plus facile à résoudre

EXAMPLE :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Notation matricielle

Au système $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ on associe

- la **matrice des coefficients** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
- la **matrice augmentée** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

On peut faire les calculs directement sur la matrice augmentée :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition : opérations élémentaires sur les lignes

1. *(Transvection)* Ajouter à une ligne le multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
2. *(Permutation)* Permuter (ou échanger) de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$.
3. *(Dilatation)* Multiplier une ligne par un scalaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

Définition : matrices lignes-équivalentes

Ce sont deux matrices qui peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par une suite de opérations élémentaires sur les lignes.

Propriété sur l'équivalence en ligne

Si les matrices augmentées de deux systèmes linéaires sont lignes-équivalentes, les deux systèmes ont le même ensemble de solutions

EXEMPLE :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

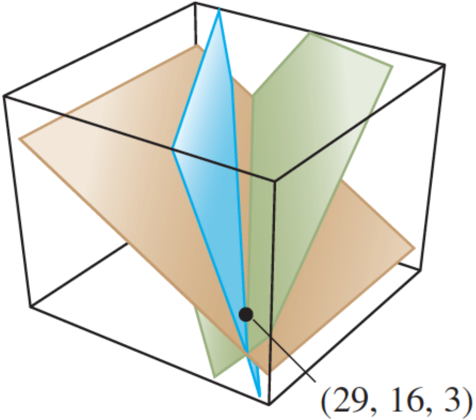
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = 16 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad = -3 \\ \quad\quad x_2 \quad = 16 \\ \quad\quad\quad x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \quad\quad = 29 \\ \quad x_2 \quad = 16 \\ \quad\quad x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution : $(29, 16, 3)$
Check : Est ce que $(29, 16, 3)$ est une solution du système de départ ?

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$



(29)	-2(16)	+3	=	29	-32	+3	=	0
	2(16)	-8(3)	=		32	-24	=	8
-4(29)	+5(16)	+9(3)	=	-116	+80	+27	=	-9

1. **Existence** : est ce que le système admet ou moins une solution ? Si oui, on dit que le système est **consistant**.
2. **Unicité** : si une solution existe, est-elle unique ?

EXEMPLE : Existence ?

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 -{}} 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

Dans cet exemple, le système a été réduit à une forme triangulaire :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - 2{}} x_2 - 4x_3 = 4 \\ \phantom{x_1 - 2x_2 - 4{}} x_3 = 3 \end{cases}$$

C'est suffisant pour s'assurer que le système admet une **unique solution**. Pourquoi ?

EXEMPLE : Est ce que ce système admet des solutions ?

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - 6x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

- Les opérations sur les lignes donnent

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- Système obtenu
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ \qquad 3x_2 - 6x_3 = 8 \\ \qquad\qquad 0x_3 = -3 \end{cases}$$
- Ce système n'admet pas de solution ! Pourquoi ? On dit qu'il est **inconsistant.**

EXAMPLE : Pour quelles valeurs de h le système admet des solutions (est consistant) ?

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 = 4 \\ -2x_1 + 6x_2 = h \end{cases}$$

Solution : Il faut le rendre triangulaire.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ -2 & 6 & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ -2 & 6 & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & h + \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

La 2ième équation est $0x_1 + 0x_2 = h + \frac{8}{3}$. Le système est donc consistant quand $h + \frac{8}{3} = 0$ ou $h = \frac{-8}{3}$.

Méthode du pivot de Gauss

Définition : matrice échelonnée

1. Toutes les lignes non-nulles sont au-dessus de toute ligne nulle.
2. Chaque **pivot** (c.à.d. la 1ière entrée non-nulle en partant de la gauche) d'une ligne est dans une colonne à droite du pivot de la ligne précédente.
3. Toutes les entrées d'une colonne sous un pivot sont nulles.

EXEMPLES : Formes échelonnées

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}$$

Définition : matrice échelonnée et réduite

4. Le coefficient du pivot sur chaque ligne non-nulle est 1.
5. Chaque pivot est la seule entrée non-nulle sur sa colonne.

EXEMPLES (suite) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Théorème

Chaque matrice est ligne-équivalente à une et seulement une matrice échelonnée et réduite.

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

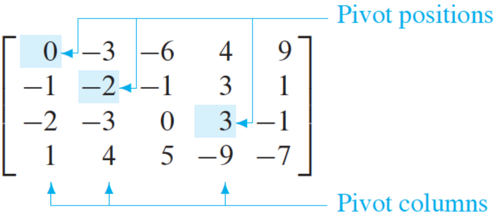
Solution On commence par échanger les lignes

$$\begin{array}{c} \text{Pivot} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\ \text{Pivot column} \end{array}$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Matrice originale :



Il y a au plus un pivot par ligne. Il y a au plus un pivot par colonne.

Exercice

Réduire à la forme échelonnée puis à la forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Solution (Étape 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

On a le 1er pivot. On cache la 1ere ligne et la 1ere colonne (celle du pivot) et on recommence avec la matrice en bas à gauche.

Solution (Étape 2)

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ (forme échelonnée)}$$

Solution (Étape 3 : finale)

En commençant le pivot le plus à droite, et en remontant par étape,

- on crée des 0 au dessus de chaque pivot.
- Enfin on remet les coefficients des pivots à 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{(forme échelonnée réduite)}$$

Variable libre / Variable liée

- On appelle **variable liée** toute variable qui correspond à un pivot.
- On appelle **variable libre** toutes les variables qui ne sont pas en position de pivot.

EXEMPLE :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ correspond au système

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \quad + 3x_4 & = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 8x_4 & = 5 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_5 & = 7 \end{cases}$$

- les colonnes pivot sont les 1, 3, 5
- les variables liées sont x_1, x_3, x_5
- les variables libres sont x_2, x_4

Étape finale de la résolution

Après avoir obtenu la forme échelonnée réduire,

- on la récrit sous forme d'un système d'équations
- puis on écrit chaque variable liée à partir des variables libres et des constantes

EXEMPLE : Le système $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \quad + 3x_4 &= 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 8x_4 &= 5 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_5 &= 7 \end{cases}$ se récrit $\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ est libre} \\ x_3 = 5 + 8x_4 \\ x_4 \text{ est libre} \\ x_5 = 7 \end{cases}$

L'ensemble des solutions s'écrit

$$\{(-6x_2 - 3x_4, x_2, 5 + 8x_4, x_4, 7), x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

EXEMPLE : $\begin{cases} \quad\quad\quad\quad\quad 3x_2 - \; 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ \quad\quad 3x_1 - 7x_2 + \; 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ -cx_4 + 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 \quad\quad\quad + 6x_5 = 15 \end{cases}$

On avait obtenu la forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Il n'y a pas d'équation la forme $0 = c$, avec $c \neq 0$, donc le système est consistant
- Il y a 2 variables libres x_3 et x_4

$\boxed{\textbf{Système consistant avec variable(s) libre(s)}}$ $\implies$ **infinité de solutions.**

EXEMPLE : $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$ On cherche la forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On revient au système $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -3 \\ \qquad\quad x_2 = 3 \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Système consistant}\\ \textbf{pas de variable libre}\end{array}}$ $\Longrightarrow$ **solution unique.**

Théorème sur l'existence et l'unicité des solutions

1. Un système linéaire est consistant (admet des solutions) si et seulement si la matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b \end{pmatrix}$$
avec $b \neq 0$.
2. Si un système linéaire est consistant alors il admet
   - une solution unique (quand il n'y a pas de variable libre) ou
   - une infinité de solutions (quand il y a au moins une variable libre)

Résumé de l'algorithme du pivot de Gauss

1. Ecrire la matrice augmentée du système
2. Obtenir la forme échelonnée. Puis décider si le système
   - consistant : on passe à l'étape 3
   - ou non : on s'arrête
3. Obtenir la forme échelonnée réduite.
4. Ecrire le système qui correspond à la forme échelonnée réduite
5. Ecrire l'ensemble des solutions en exprimant chaque variable liée à l'aide des variables libres

Équations de vecteurs

Définition : vecteur

Un **vecteur** est une matrice à une seule colonne. Dans $\mathbf{R}^n$, les vecteurs ont n entrées :

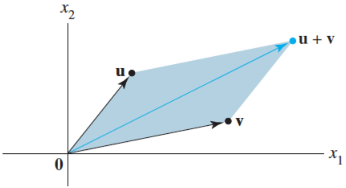
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^2$ Le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est le point de coordonnées (x_1, x_2) dans le plan.

$\mathbf{R}^2$ est l'ensemble de tous les points sur le plan.

Définition : addition de vecteurs

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $\mathbf{R}^2$ sont représentés comme des points du plan, alors $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ correspond au 4ième point du parallélogramme dont les autres points sont $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.



Opérations sur les vecteurs

Pour tous vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ dans $\mathbf{R}^n$ et tous réels c et d

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + -\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
7. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

Définition : combinaison linéaire

Soient les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ dans $\mathbf{R}^n$ et des réels $c_1, c_2, \ldots, c_p$, le vecteur $\mathbf{y}$ défini par

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

est appelé **combinaison linéaire** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ avec les poids $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

EXEMPLES : Combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \qquad \frac{1}{3}\mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2, \qquad \mathbf{0}$$

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Exprimer chacun des vecteurs ci-dessous comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice

Soient $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Est-ce que $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, et $\mathbf{a}_3$?

Solution : D'après la définition, le vecteur $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, et $\mathbf{a}_3$ si nous pouvons trouver des réels x_1, x_2, x_3 tels que

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}.$$

Dans l'exercice précédent, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ et $\mathbf{b}$ sont les colonnes de la matrice augmentée

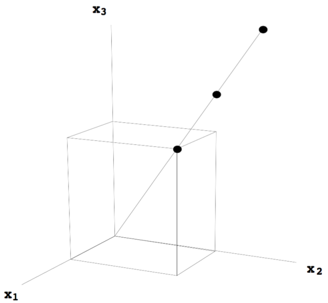
$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b} \end{array} \end{array}$$

La solution de $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ s'obtient en résolvant le système linéaire de matrice augmentée $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b} \end{pmatrix}$.

Proposition

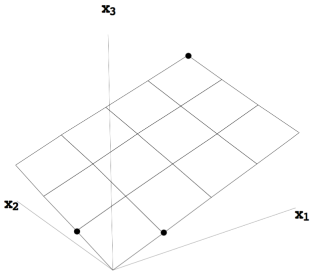
Une équation de vecteurs $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ a la même solution que le système linéaire dont la matrice augmentée est $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{pmatrix}$.
En particulier, $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ si et seulement si il y a une solution au système linéaire correspondant.

Espace engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^3$



- $\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}$ et $1.5\mathbf{v}$ sont sur la même ligne.
- Ici Vect($\mathbf{v}$) est la ligne passant par l'origine et formée de l'ensemble des vecteurs de la forme $c\mathbf{v}$.

EXEMPLE : Quels sont les points $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ et $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ sur le graphe ci-dessous ?.



- $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ et $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ sont tous sur le même plan
- Ici $\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est le plan formé des vecteurs de la forme $x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}$.

Définition : espace engendré

Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ dans $\mathbf{R}^n$; alors

$$\mathrm{Vect}\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\right)$$

est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p,$$

avec $x_1, x_2, \ldots, x_p$ réels.

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner un vecteur dans $\mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
2. Décrire $\mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ géométriquement.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$. Est-ce que $\mathbf{b}$ est dans le plan engendré par les colonnes de A ?

Équations matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Les combinaisons linéaires peuvent être vues comme des produits matrice-vecteur

Définition :

Si A est une matrice de taille $m \times n$, avec les colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, et si $\mathbf{x}$ est un vecteur dans $\mathbf{R}^n$, alors le **produit de A et $\mathbf{x}$**, noté $A\mathbf{x}$, est la combinaison linéaire des colonnes de A avec comme poids les entrées correspondantes dans $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\ \mathbf{a}_1 + x_2\ \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + -6 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 9 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Exercice

Écrire le système d'équations correspondant à la matrice augmentée ci-dessous, puis l'écrire sous forme d'une équation de vecteur enfin sous la forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec un vecteur $\mathbf{b}$ de taille 2×1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3 formes équivalentes pour les systèmes linéaires

On peut écrire de manière équivalente

- un système linéaire d'équations $\left(\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b}\end{pmatrix}\right)$
- une équation de vecteur $(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b})$
- une équation de matrice $(A\mathbf{x} = \mathbf{b})$.

Théorème

Si A est une matrice de taille $m \times n$, avec pour colonnes $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, et si $\mathbf{b}$ est dans $\mathbf{R}^m$, alors l'équation matricielle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a la même solution que l'équation de vecteurs

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

qui a également la même solution que le système linéaire de matrice augmentée

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b}\end{pmatrix}$$

Propriété

L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution si et seulement si $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est-elle consistante pour tout $\mathbf{b}$?

Système linéaire

Pivot de Gauss $[A\ b]$

Vecteurs (équation, combinaison)

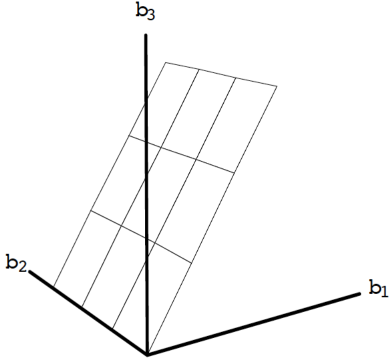
$$\underset{m,n}{A}\ \underset{n,1}{x} = \underset{m,1}{b}$$

nb lignes

nb de colonne

Solution : La matrice augmentée correspondant à $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ -3 & -11 & -14 & b_2 \\ 2 & 8 & 10 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_3 \end{pmatrix}.$$
Donc $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'est pas consistante pour tous les $\mathbf{b}$ puisque certains choix de $\mathbf{b}$ rendent $-2b_1 + b_3$ non nul.

En conclusion $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est consistante si $-2b_1 + b_3 = 0$ (c'est l'équation d'un plan $\mathbf{R}^3$)



On dit que les colonnes de A engendrent un plan dans $\mathbf{R}^3$.

Quand une matrice engendre $\mathbb{R}^m$

Matrice engendrant $\mathbb{R}^m$

On dit que **les colonnes** de $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_p \end{pmatrix}$ **engendrent** $\mathbf{R}^m$ si *tous* les vecteurs $\mathbf{b}$ dans $\mathbf{R}^m$ sont des combinaisons linéaires de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$. On note

$$\mathrm{Vect}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p) = \mathbf{R}^m.$$

$$A = \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right]$$

Théorème

Soit A une matrice $m \times n$, alors il y a équivalence entre

- Pour tout b dans $\mathbf{R}^m$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution.
- Tout tout b dans $\mathbf{R}^m$ est une combinaison linéaire des colonnes de A.
- Les colonnes de A engendrent R^m.
- A a un pivot sur chaque ligne.

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est-elle consistante pour tout $\mathbf{b}$?

Exercice

Est-ce que les colonnes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathbf{R}^3$?

Indépendance linéaire

Un système **homogène** tel que

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overset{b}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

peut être vu comme une équation de vecteur s

$$\boxed{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Cette équation de vecteurs a une solution triviale ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$). Est-ce l'unique ?

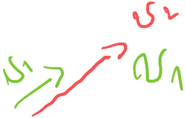
Définition :Indépendance linéaire

- Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ dans $\mathbb{R}^n$ est **linéairement indépendant** quand l'équation de vecteurs
$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$
a seulement la solution triviale $(0, 0, \ldots, 0)$
- L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ est **linéairement dépendant** quand il existe $c_1, \ldots, c_p$, non tous nuls tels que
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$
$$\uparrow$$
relation de dépendance linéaire
(quand les poids ne sont pas tous nuls)

Si le système admet plusieurs solutions

$\alpha_1 \neq 0 \qquad x_1 v_1 = -\sum_{j=2}^{p} x_j v_j$

$$\boxed{v_1 = -\sum \frac{\alpha_j}{\alpha_1} v_j}$$



$v_1 \in \mathbb{R}^2$ $v_2 \in \mathbb{R}^2$ si v_1 est linéairement dépendant de v_2

alors $v_1 = \alpha v_2$

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$A = [v_1\ v_2\ v_3]$ $\quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Déterminer si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sont linéairement indépendants.
- Si possible, trouver une relation de dépendance entre eux.

Si le système $Ax = b$ possède une solution unique alors v_1, v_2, v_3 sont $\underline{\perp\!\!\!\perp}$ sinon v_1, v_2, v_3 sont dependants

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 18 \\ 0 & -1 & 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cancel{\perp\!\!\!\perp}$$

x_1 et x_2 sont liées (car pivot)

x_3 est libre $\quad \underline{x_3 = \alpha \in \mathbb{R}}$

$x_2 = 18\alpha$

$x_1 = -2x_2 + 3\alpha$

$= -36\alpha + 3\alpha$

$= -33\alpha$

Une relation de dépendance linéaire comme

$$\alpha = 1 \Rightarrow \quad -33 \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}} + 18 \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}} + 1 \overset{v_3}{\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

peut être écrite comme une équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -33 \\ 18 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chaque dépendance linéaire entre les colonnes de A correspond à une solution non-triviale $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Définition : Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice

Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a **seulement** la solution triviale. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Considérons l'ensemble contenant seulement un vecteur non-nul $\{\mathbf{v}_1\}$

La seule solution de $x_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ est $x_1 = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$. $x_1 = 0$

$$\boxed{\text{Donc } \{\mathbf{v}_1\} \text{ est linéairement indépendant quand } \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}.}$$

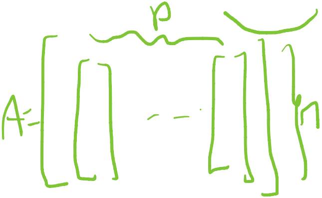
Exercice

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

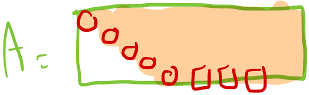
- Déterminer si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant.
- Déterminer si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

Propriété (fondamentale en analyse des données)

- Un ensemble de deux vecteurs est linéairement dépendant s'ils sont multiples l'un de l'autre.
- Un ensemble de deux vecteurs est linéairement indépendant s'ils ne sont pas multiples l'un de l'autre.



$p > n$



Propriété

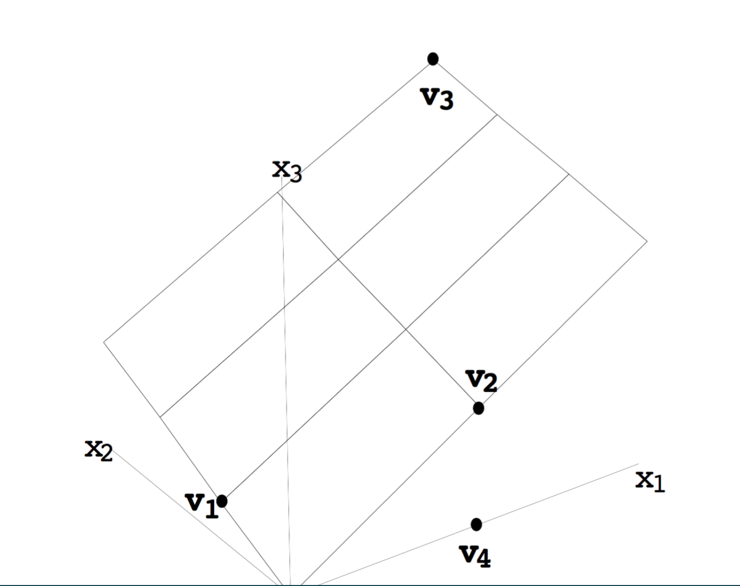
Un ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ sont linéairement dépendants si $p > n$.

4 vecteurs $\in \mathbb{R}^3$ $\quad v_1 \quad v_3 \quad v_2 \quad v_4$

$$v_1 = \sum_{j=2}^{4} \alpha_j v_j$$

Exercice

Considérons l'ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ dans $\mathbf{R}^3$ sur la figure. Sont-ils linéairement indépendants ?



Exercice

Avec le moins de calculs possibles, déterminer si les ensembles de vecteurs suivants sont linéairement indépendants

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$
2. Les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
4. $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Propriété

Un ensemble $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de p vecteurs est linéairement dépendant si et seulement si au moins un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres. En fait, si S est linéairement dépendant, et $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, alors il existe un vecteur $\mathbf{v}_j$ $(j \geq 2)$ qui est combinaison linéaire des précédents $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$.

Introduction aux applications linéaires

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{b} \in \mathbb{R}^m \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

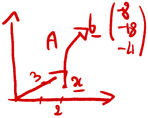
On peut voir le produit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:d'une autre façon :

la matrice A agit sur $\mathbf{x}$ par multiplication pour produire un nouveau vecteur $A\mathbf{x}$ ou $\mathbf{b}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

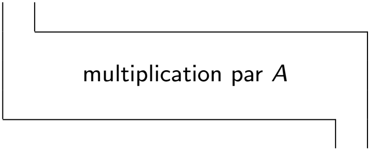
$\in \mathbb{R}^2 \qquad \in \mathbb{R}^3$



Produit matrice-vecteur (2)

Si A est une matrice $m \times n$ et **b** une vecteur de $\mathbb{R}^m$, il y a équivalence entre

- résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- trouver tous les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ qui sont transformés en le vecteur **b** dans $\mathbf{R}^m$ par la multiplication par A



transformation
"*machine*"

Définition : application

Une application T de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ est une règle qui assigne à chaque vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{R}^n$ un vecteur $T(\mathbf{x})$ dans $\mathbf{R}^m$.

$$T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

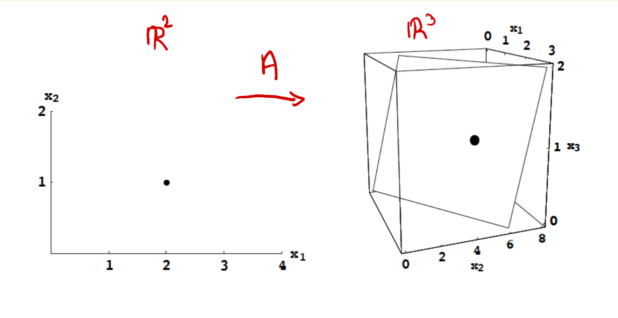
Définitions

- $\mathbf{R}^n$ est le **domaine de départ** de T
- $\mathbf{R}^m$ est le **domaine d'arrivée** de T
- $T(\mathbf{x})$ dans $\mathbf{R}^m$ est l'**image** de $\mathbf{x}$ par la transformation T
- L'ensemble des images $T(\mathbf{x})$ est l'**image** de T $\quad Im(T)$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Définissons une transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Alors si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$



Exercice

Soient $A \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On définit la transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

1. Trouver $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{R}^3$ dont l'image par T est $\mathbf{b}$.
2. Existe-t-il plus d'un $\mathbf{x}$ dont l'image par T est $\mathbf{b}$?
3. Determiner si $\mathbf{c}$ est dans l'image de la transformation T.

① $Ax = b$ $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$

$\square$ variable liée
$\square$ variable libre

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad b \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -5 & 10 & -15 & -10 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \quad x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Supposons $x_2 = x_3 = 0$ alors $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

③ $A\underline{x} = c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ -5 & 10 & -15 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right] \end{array} \quad S = \emptyset$$

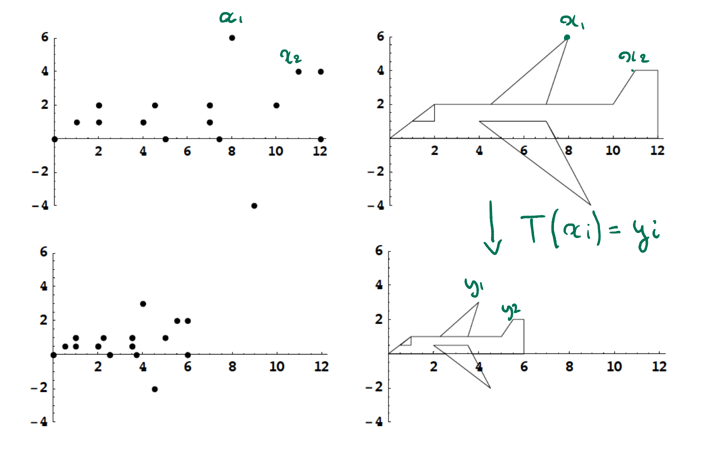
IMPOSSIBLE
$c \notin \mathrm{Im}(T)$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix}$. L'application $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ est un exemple de **contraction**.

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Propriété du produit matrice-vecteur

Si A est une matrice de taille $m \times n$, alors l'application $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ a les propriétés suivantes :

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \underline{\ Au\ } + \underline{\ Av\ } = T(u) + T(v)$$

et

$$T(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = \underline{\ c\ } A\mathbf{u} = \underline{\ c\ } T(\mathbf{u})$$

pour tous $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ dans $\mathbf{R}^n$ et tout réel c.

Définition : application linéaire

Une application T est **linéaire** si :

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dans le domaine de départ de T.
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u}$ dans le domaine de départ de T et tout réel c.

Propriétés

- Tout produit matrice-vecteur est une application linéaire
- Si T est une application linéaire alors

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \qquad \text{and} \qquad T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = c\mathbf{T}(\mathbf{u}) + d\mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

IL SUFFIT DE PRENDRE

$c = 0$, $T(c\,\underline{u}) = \overbrace{c\,T(\underline{u})}^{0}$

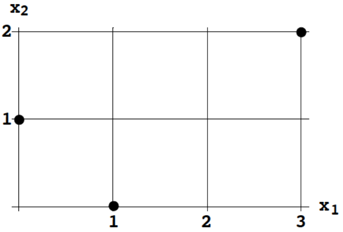
$\underline{u}' = c\underline{u}$ $\quad \underline{v}' = d\underline{v}$

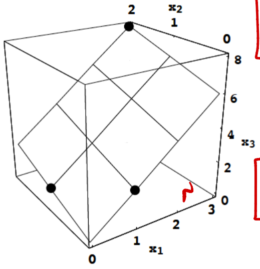
$T(\underline{u}' + \underline{v}') = T(\underline{u}') + T(\underline{v}') = T(c\underline{u}) + T(d\underline{v})$

$= cT(\underline{u}) + dT(\underline{v})$.

Exercice

Soient $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Supposons que $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ est une transformation linéaire qui evnoie $\mathbf{e}_1$ sur $\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sur $\mathbf{y}_2$. Trouver les images de $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.





$$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= 3\underline{e_1} + 2\underline{e_2}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$= x_1\underline{e_1} + x_2\underline{e_2}$$

$$\underline{T(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)} = 3T(\mathbf{e}_1) + 2T(\mathbf{e}_2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\8\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\2x_1+x_2\end{pmatrix}$$

Exercice

Definissons $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tel que $T(x_1, x_2, x_3) = (|x_1 + x_3|, 2 + 5x_2)$. Montrer que T n'est pas une application linéaire.

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

ON A

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}|1+1|\\2+5\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|-1-1|\\2-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$$

SI T ÉTAIT LINÉAIRE ALORS

$$T\left(-1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = -1 \times T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$$

DONC T N'EST PAS UNE APP. LIN.

La matrice d'une application linéaire

Definition : matrice identité

- I_n est une matrice de taille $n \times n$ avec des 1 sur la diagonale (gauche à droite) et des 0 ailleurs. La i-ième colonne de I_n est notée $\mathbf{e}_i$.
- Pour $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{R}^n$,

$$I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$I_3\mathbf{x} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{T(\underline{x})} = \underline{\mathbf{x}}$$

On a dit que si $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est une application linéaire alors

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}).$$

Exercice

Les colonnes de $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Supposons que T est une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^3$ avec

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $T(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}$$

$$T\left(\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2)$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

- Soit $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application linéaire. Alors il existe une unique matrice A telle que
$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n.$$
- De plus, A est la matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes de A sont les vecteurs $T(\mathbf{e}_j)$, où $\mathbf{e}_j$ est la j-ième colonne de la matrice identité dans $\mathbf{R}^n$.

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \qquad \underset{\uparrow}{T(\mathbf{e}_2)} \qquad \cdots \qquad T(\mathbf{e}_n)]$$

image de $\mathbf{e}_2$ par T

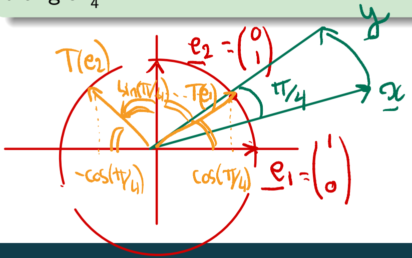
matrice de l'application linéaire T

Exercice

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 + 0x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Exercice

Trouver la matrice de l'application linéaire $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de rotation autour de l'origine et d'angle $\frac{\pi}{4}$.



$$A = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & +\sin(\pi/4) \end{bmatrix}$$

$A\underline{x} = y$

$= \quad A$

$A\underline{x} = y$