Rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice și transcendente

Realizat de Bozian Camelia, cl. a 12-a “B”

OBIECTIVELE PROIECTULUI:

- recunoaște prezența soluțiilor unei ecuații algebrice sau transcendente pe un interval dat;
- separa intervalele domeniului de definiție a unei funcții f(x), care vor conține exact o soluție a ecuației f(x) = 0;
- utiliza algoritmii de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente prin metoda bisecției, metoda coardelor și metoda tangentelor;
- elabora programe de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente prin metoda bisecției, metoda coardelor și metoda Newton;

GENERALITĂȚI:

Se consideră ecuația de forma f(x)=0, unde funcția f: I   R ,este continua pe intervalul I.

- Orice valoare ξ, pentru care expresia f(ξ) = 0 este adevărată, se numește **zerou** al funcției f(x) sau **soluţie** a ecuației f(x) = 0
- Ecuația f(x)=0 se numește **algebrică**, dacă pentru calcularea valorii funcției f(x), după valoarea dată x, se folosesc doar operații aritmetice și cea de ridicare la putere cu exponent rațional. Ecuația are nu este algebrică se numește ecuație **transcendentă**.

EXEMPLE:

Ecuații algebrice:

- $x^3 - 9*x^2 + 24*x - 19$;
- $x^5 - 5*x + 7$;
- $3x^2 - 18*x + 24$.

Ecuații transcendente:

- $\lg x + x^2 - \operatorname{tg} x + 2$;
- $2^x - 3*x + 1/x$;
- $\cos x + \sin x$.

Procesul de calcul numeric al rădăcinilor reale ale ecuațiilor de forma f(x)=0 se divizează în două etape principale:

1. ***Izolarea (separarea, localizarea) rădăcinilor***, adică determinarea unor intervale suficient de înguste, astfel încât fiecare din ele să conțină câte o singură rădăcină a ecuației f(x)=0

2. **Micşorarea** pe cît mai mult posibil a fiecărui din aceste intervale (dacă se pune problema determinării tuturor soluțiilor) sau a unuia din ele (dacă trebuie de determinat doar una din soluții).

IZOLAREA RĂDĂCINILOR

- Deseori, la izolarea rădăcinilor se aplică ***metoda grafică***. Pentru aceasta se construiește graficul funcției y=f(x) și, dacă ξ este abscisă puntului de intersecție a graficului cu axa **Ox, atunci f(**ξ)=0. De exemplu, în figura 3.2.1, abscisele punctelor de intersecție(ξ1, ξ2, ξ3) ale curbei y=f(x) cu axa Ox reprezintă rădăcinele ecuației f(x)=0

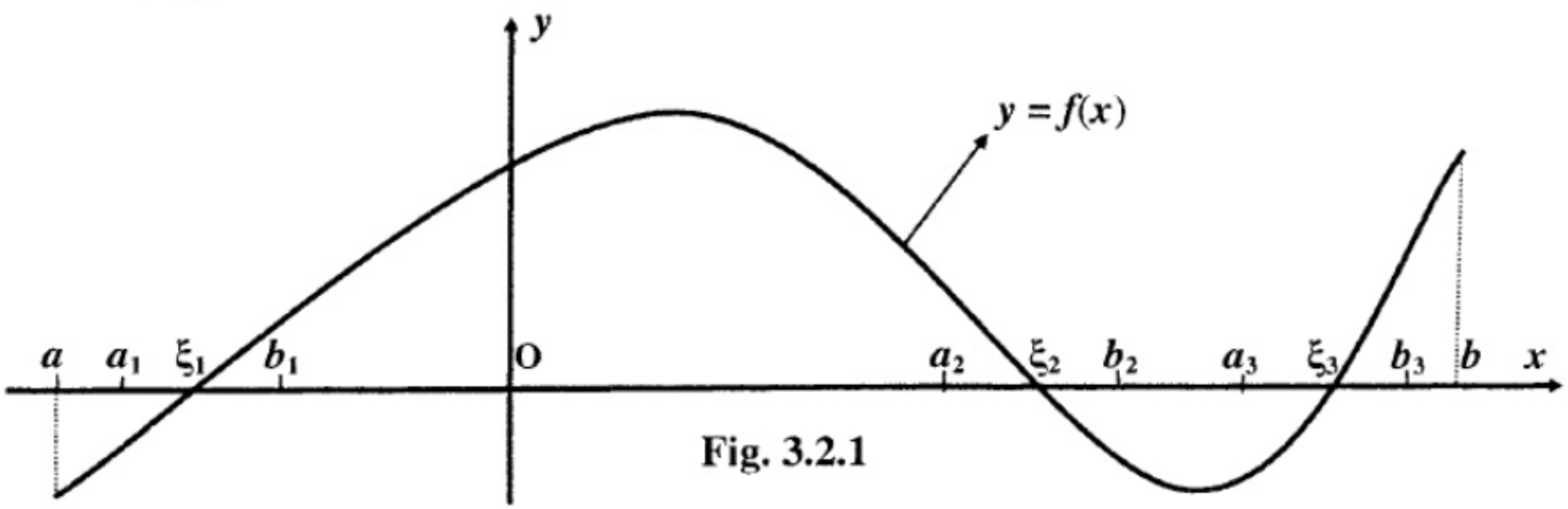


Fig. 3.2.1

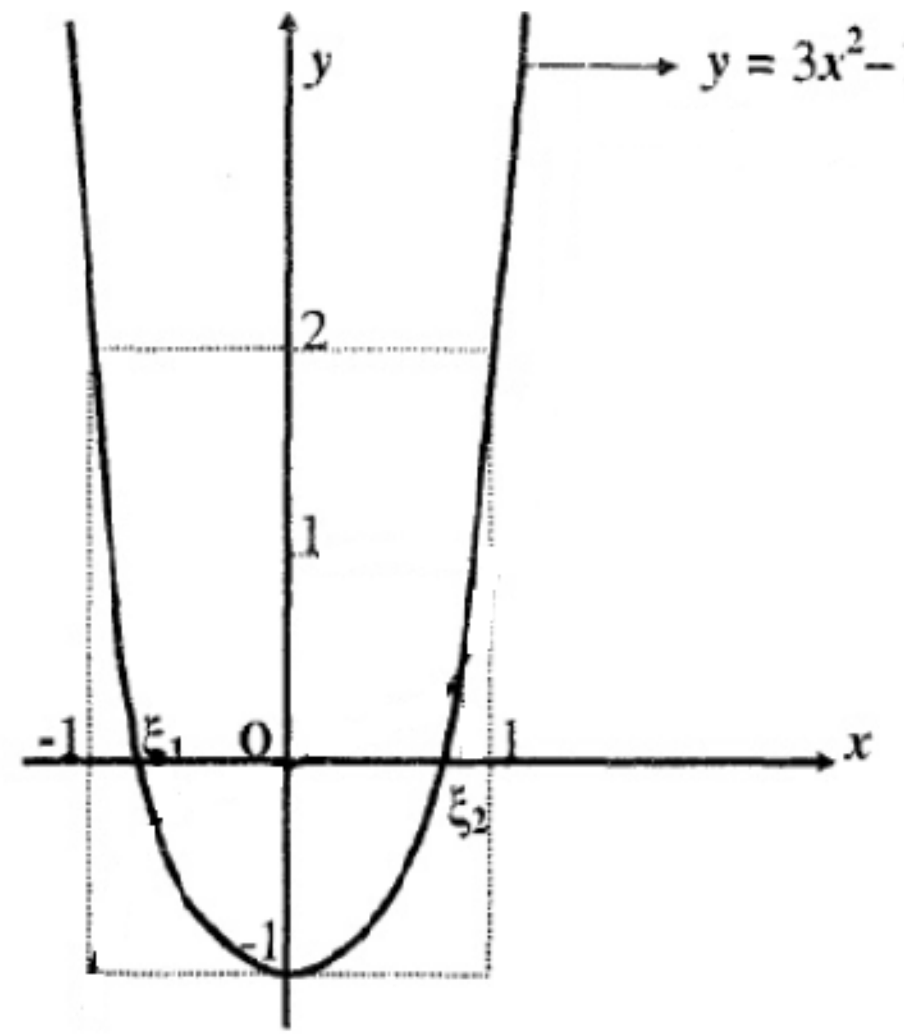
IZOLAREA RĂDĂCINILOR

Fie există $f'(x)$ pe I. Atunci izolarea rădăcinilor poate fi realizată prin ***metoda analitică***, care presupune următoarea succesiune de acțiuni:

1. Se află derivata $f'(x)$;
2. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$;
3. Se compune tabelul semnelor valorilor $f(x)$;
4. Se selectează intervalele, la extremitățile cărora funcția are valori de semne opuse. Acestea conțin cîte o singură rădăcină a ecuației în studiu.

IZOLAREA RĂDĂCINILOR

- **Exemplul 1** Să se izoleze grafic rădăcinile reale ale ecuației **f(x)=3*x^2-1=0**
- **Rezolvare.** Construim graficul funcției y=3*x^2-1. Conform figurii, ecuația are doua rădăcini reale ξ1, care aparține (-1,0) și ξ2, care aparține (0,1). Întrucît o ecuație de gradul doi posedă exact 2 rădăcini, iar în azul dat toate doua sunt reale, decade necesitatea demonstrării uniității lor pe intervalele respetive.



IZOLAREA RĂDĂCINILOR

- **Exemplul 2** Să se localizeze prin metoda analitiă rădăcinile reale ale ecuației **f(x)=x^3+3*x^2-1=0**, pe intervalul [-3,2].
- **Rezolvare.** Funcția f(x) este derivabilă pe intervalul [-3,2]. Găsim f'(x)=3*x^2+6*x. Rezolvăm ecuația f'(x)=0 : 3*x^2+6*x=0 ; x(x+2)=0; x1=0; x2=-2. Alcătuim tabelul semnelor funcției:

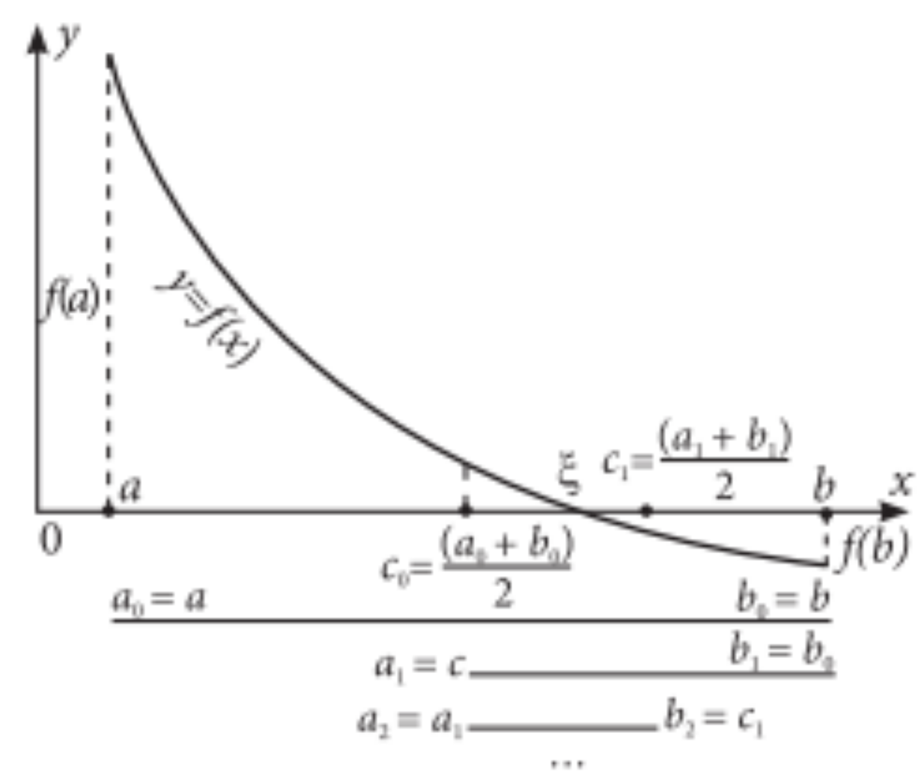
x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-	+	+	-	+	+

- Deoarece au loc 3 alternanțe de semne ale funcției f(x), conchidem că ecuația are 3 rădăcini reale în studiu, care se conțin respetiv în intervalele: (-3,-2); (-1,0); (0,1).

METODA BISECȚIEI

Una dintre cele mai simple metode de determinare a unei soluţii a ecuaţiei f(x) = 0 este ***metoda bisecţiei***. Metoda presupune determinarea punctului de mijloc c al segmentului [a, b], apoi calculul valorii f(c). Dacă f(c) = 0, atunci c este soluția exactă a ecuației.

În caz contrar, soluția este căutată pe unul dintre segmentele [a, c] și [c, b]. Ea va aparţine segmentului pentru care semnul funcției în extremităţi este diferit. Dacă f(a) × f(c) > 0, atunci soluția e căutată în continuare pe segmentul [a1, b1], unde a1 primește valoarea c, iar b1 – valoarea b. În caz contrar, a1 primeşte valoarea a, iar b1 – valoarea c. Procesul de divizare se reia pe segmentul [a1, b1], repetîndu-se pînă cînd nu se obține soluția exactă sau devierea soluției calculate c*i* de la cea exactă nu devine suficient de mică.



Eroarea metodei

$$|\xi - c_i| < \varepsilon = |b_i - a_i|.$$

ALGORITMIZAREA METODEI

Pornind de la descrierea matematică a metodei, putem separa două cazuri distincte de oprire a procesului de calcul al soluției ecuației $f(x)=0$ pentru metoda bisecției:

A1. Algoritmul de calcul pentru un număr prestabilit n de divizări consecutive:

Pasul 0. Inițializare: $i \Leftarrow 0$.

Pasul 1. Determinarea mijlocului segmentului $c \Leftarrow (a+b)/2$.

Pasul 2. Reducerea segmentului ce conține soluția: dacă $f(c) = 0$, atunci soluția calculată este $x = c$. SFÎRȘIT.
În caz contrar, dacă $f(a) \times f(c) > 0$, atunci $a \Leftarrow c$; $b \Leftarrow b$, altfel $a \Leftarrow a$; $b \Leftarrow c$.

Pasul 3. $i \Leftarrow i + 1$. Dacă $i = n$, atunci soluția calculată este $x=(a+b)/2$. SFÎRȘIT.

În caz contrar, se revine la pasul 1.

A2. Algoritmul de calcul pentru o precizie2 ε dată:

Pasul 1. Determinarea mijlocului segmentului $c \Leftarrow (a+b)/2$.

Pasul 2. Dacă $f(c) = 0$, atunci soluția calculată este $x = c$. SFÎRȘIT.
În caz contrar, dacă $f(a) \times f(c) > 0$, atunci $a \Leftarrow c$; $b \Leftarrow b$, altfel $a \Leftarrow a$; $b \Leftarrow c$.

Pasul 3. Dacă $|b - a| < \varepsilon$, atunci soluția calculată este $x=(a+b)/2$.
SFÎRȘIT.
În caz contrar, se revine la pasul 1.

• **Exemplul 1** Să se determine o rădăcină a ecuației x4 + 2x3 – x –1 = 0 pe segmentul [0, 1] pentru 16 divizări consecutive.

```
program cn05;
var   a,b,c: real;
      i,n:integer;

function f(x:real):real;
begin f:=sqr(sqr(x))+2*x*sqr(x)-x-1;end;
begin a:=0; b:=1; n:=16;
      for i:=1 to n do
        begin c:=(b+a)/2;
           writeln('i=',i:3,' x=',c:10:8,' f(x)=',f(c):12:8);
           if f(c)=0 then break³
           else if f(c)*f(a)>0 then a:=c else b:=c;
        end;
end.
```

```
i= 1 x=0.50000000 f(x)= -1.18750000
i= 2 x=0.75000000 f(x)= -0.58984375
...
i= 15 x=0.86679077 f(x)= 0.00018565
i= 16 x=0.86677551 f(x)= 0.00009238
```

METODA COARDELOR

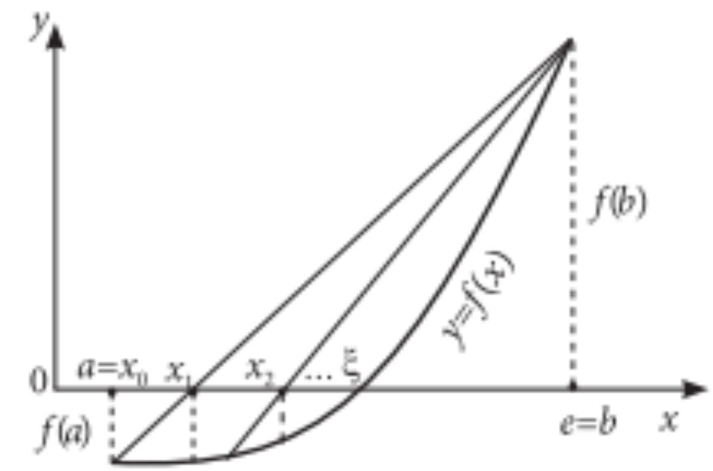
Fie dată funcția f(x), care posedă următoarele proprietăți:

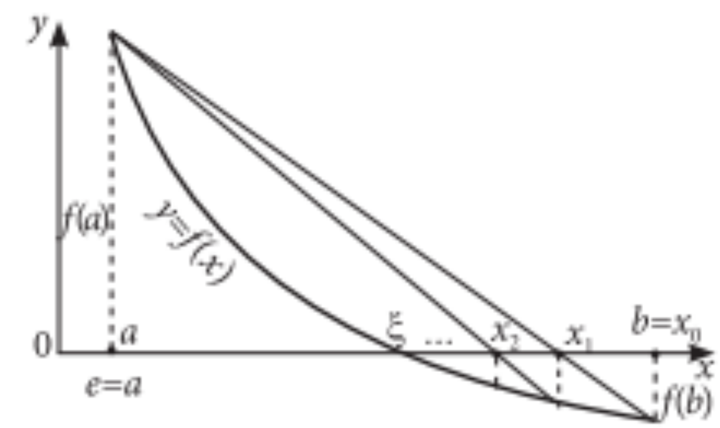
1. f(x) continuă pe segmentul [a,b] și f(a)*f(b)<0;
2. pe segmentul [a,b] există f'(x) diferit de zero și f''(x) diferit de zero.

Metoda coardelor presupune alegerea în calitate de aproximare a soluției punctului determinat de intersecția dreptei ce trece prin punctele (a,f(a)) și (b,f(b)) cu axa Ox.

Primul grafic - Apropierea succesivă de soluția ecuației. Extremitatea fixă – b.

Al doilea grafic - Apropierea succesivă de soluția ecuației. Extremitatea fixă – a.





Eroarea metodei

$$\left|\frac{M_1 - m_1}{m_1}\right| \times \left|x_i - x_{i-1}\right| \le \varepsilon.$$

ALGORITMIZAREA METODEI

A1. Algoritmul de calcul pentru un număr prestabilit n de aproximări succesive:
Pasul 1.Determinarea extremităţii fixe e şi a aproximării x_0 : $c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a);$
dacă f(c) × f(a) < 0, atunci e ⇐ a, x_0 ⇐ b, altfel e⇐b, x_0 ⇐ a; i ⇐ 0.

Pasul 2.Calculul x_{i+1} conform formulei $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(e)-f(x_i)}(e-x_i).$

Pasul 3.Dacă i + 1 = n, atunci soluţia calculată x⇐x_i. SFÎRŞIT.

În caz contrar, i ⇐ i+1 şi se revine la pasul 2.

A2. Algoritmul de calcul pentru o exactitate ε dată:

Deoarece în formula de estimare a erorii figurează mărimile M1 şi m1 ,
atunci cînd valorile lor nu sînt indicate în enunţul problemei, este necesară
descrierea analitică a f ′(x) şi calcularea M1 şi m1 .
Pasul 1. Determinarea extremităţii fixe e şi a aproximării x_0 :
$c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a);$ dacă f(c) × f(a) < 0, atunci e ⇐ a, x_0 ⇐ b,
altfel e ⇐ b, x_0 ⇐ a; i⇐0.

Pasul 2. Calculul x_{i+1} conform formulei $\left|\frac{M_1-m_1}{m_1}\right| \times |x_{i+1}-x_i| \leq \varepsilon$
Pasul 3. Dacă $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(e)-f(x_i)}(e-x_i).$, atunci soluţia calculată x ⇐ xi .
SFÎRŞIT.
În caz contrar, i ⇐ i+1 şi se revine la pasul 2.

<u>Exemplul 1</u> Fie dată funcția f(x) = ln(xsinx). Să se calculeze soluția aproximativă a ecuației f(x) = 0 pe segmentul [0,5; 1,5] pentru 10 aproximări succesive, utilizînd metoda coardelor.

```
program cn07;
var   a,b,e,c,x: real;
      n,i: integer;

function f(x:real):real;
begin  f:=ln(x*sin(x));end;
begin a:=0.5; b:=1.5; n:=10;
      {determinarea extremitatii fixe e si a aproximarii initiale x0}
      c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
      if f(c)*f(a)>0 then begin e:=b; x:=a; end
      else begin e:=a; x:=b; end;
        {calculul iterativ al solutiei}
        for i:=1 to n do
           begin x:= x-(f(x))/(f(e)-f(x))*(e-x);
        writeln(x:10:8,' ',f(x):12:8);
           end;
end.
```

```
i= 1 x=1.27995775 f(x)= 0.20392348
i= 2 x=1.18251377 f(x)= 0.09028687
...
i= 9 x=1.11427651 f(x)= 0.00016577
i= 10 x=1.11420523 f(x)= 0.00006678
```

METODA NEWTON

Fie dată funcția f(x), care posedă următoarele proprietăți:

1. f(x) continuă pe segmentul [a,b] și f(a)*f(b)<0;
2. pe segmentul [a,b] există f’(x) diferit de zero și f’’(x) diferit de zero, continui, și semnul lor pe [a,b] este constant.

Se va încerca rezolvarea problemei prin trasarea consecutivă a unor tangente la graficul funcției, prima dintre ele fiind construită prin extremitatea E0 (x0 , y0) a segmentului [a, b], extremitate pentru care se respectă condiția: $f(x0) \times f''(x0) > 0$.

Fie că tangenta cu numărul i intersectează axa 0x în punctul xi. Următoarea tangentă (i+1) va fi trasată prin punctul Ei+1 cu coordonatele (xi, f (xi)) și va intersecta axa absciselor în punctul xi+1. Şirul de valori x0, x1, x2, ..., xi, xi+1, ... va converge către soluția ecuației f (x) = 0. Această metodă de calcul al soluției ecuației f (x)=0 este numită metoda tangentelor sau Newton.

ALGORITMIZAREA METODEI

A1. Algoritmul de calcul pentru un număr dat de aproximări succesive:

Pentru a realiza acest algoritm, este suficient să fie cunoscute descrierile analitice pentru f (x) şi f ′(x). Dacă descrierea f ′(x) nu este indicată în enunț, urmează să fie calculată. Aproximarea inițială se deduce utilizînd procedeul similar determinării extremității fixe pentru metoda coardelor.

Pasul 1.Determinarea aproximării inițiale x0: $c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b-a);$

dacă f(c) × f(a) < 0, atunci x0⇐ a, altfel x0 ⇐ b; i ⇐ 0.

Pasul 2. Se calculează xi+1 conform formulei $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$

Pasul 3. Dacă i+1 = n, atunci soluția calculată x ⇐ xi+1.

SFÎRŞIT.

În caz contrar, i ⇐ i+1, apoi se revine la pasul 2.

A2. Algoritmul de calcul pentru o exactitate ε dată:
În formula de estimare a erorii figurează mărimile M2 și m1. Atunci cînd valorile lor nu sînt indicate în enunțul problemei, este necesară o preprocesare matematică pentru stabilirea M2 și m1. Suplimentar sînt necesare descrierile analitice pentru f (x) și f ′(x).

Pasul 1. Determinarea aproximării inițiale x0: $c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a);$

dacă f(c) × f(a) < 0, atunci x0⇐ a, altfel x0 ⇐ b: i ⇐ 0.

Pasul 2. Se calculează xi+1 conform formulei $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$

Pasul 3. Dacă $\frac{M_2}{2m_1}(x_{i+1} - x_i)^2 \le \varepsilon$, atunci soluția calculată x ⇐ xi+1. SFÎRȘIT.

În caz contrar, i ⇐ i+1 și se revine la pasul 2.

Exemplul 1 Fie dată funcția f(x) = x3 – 2x2 + x – 3. Să se scrie un program care va calcula soluția ecuației f(x) = 0 pe segmentul [2, 15] pentru 10 aproximări succesive, utilizînd metoda Newton.

```
program cn09;
var a, b, x, c : real;
   i, n: integer;
function f(z:real):real;
      begin f:=z*z*z-2*z*z+z-3; end;
function fd1(z:real):real;
      begin fd1:=3*z*z-4*z+1; end;
begin   a:=2.1; b:=15; n:=10; i:=0;
        c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
        if f(c)*f(a)<0 then x:=a else x:=b;
        while i<n do
        begin   i:=i+1;
                x:=x-f(x)/fd1(x);
        writeln('i=',i:2,' x=',x:15:12, ' f=',f(x):15:12);
        end;
end.
```

```
i= 1 x= 10.23214285700  f=869.11072454000
i= 2 x= 7.06207637180   f=256.52261987000
...
i= 9 x= 2.17455942470   f= 0.00000009329
i=10 x= 2.17455941030   f= 0.00000000001
```