数学III(微積) 課題33

令和 4 年 12 月 16 日

TE 科 3 年　　番	氏名	

1 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}=0$ について各問に答えよ.

(1) C_1, C_2 を任意定数として関数 $x=C_1e^{-2t}+C_2$ は一般解であることを示せ.

(2) 初期条件 $t=0$ のとき $x=1$, $\dfrac{dx}{dt}=2$ を満たす特殊解を求めよ.

(3) 境界条件 $t=0$ のとき $x=0$, $t=1$ のとき $x=1$ を満たす特殊解を求めよ.

2 関数が線形独立であることを示せ.

(1) $\log t,\quad t\log t$

(2) $e^{\alpha t},\quad e^{\beta t}\quad (\alpha\neq\beta$ は定数$)$

(3) $e^{\alpha t},\quad te^{\alpha t}\quad (\alpha$ は定数$)$

(4) $e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t\quad (\alpha, \beta$ は定数, $\beta\neq 0)$

3 $L(x)=\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+x$, $R(t)=t^2+5t+3$ とする. 各問に答えよ.

(1) $x=e^{-t}$, $x=te^{-t}$ は斉次微分方程式 $L(x)=0$ の解であることを示せ.

(2) 斉次微分方程式 $L(x)=0$ の一般解を求めよ.

(3) $x=t^2+t-1$ は微分方程式 $L(x)=R(t)$ の解であることを示せ.

(4) 微分方程式 $L(x)=R(t)$ の一般解を求めよ.

$\boxed{1}$

(1) xの式より

$$\frac{dx}{dt} = -2c_1 e^{-2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4c_1 e^{-2t}$$

与式に代入すると　$4c_1e^{-2t} - 4c_1e^{-2t} = 0$ が成り立つ

よって2つの任意定数を持つから $x = c_1e^{-2t} + c_2$ は一般解である

(2)
$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = -2c_1 \end{cases}$$

$c_1 = -1$

$c_2 = 2$ より

$$\underline{x = -e^{-2t} + 2} \quad //$$

(3) $0 = c_1 + c_2$

$1 = c_1e^{-2} + c_2$

$$\begin{cases} c_1(e^{-2}-1) = 1 \\ c_2(1-e^{-2}) = 1 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{e^{-2}-1}$$

$$c_2 = \frac{1}{1-e^{-2}}$$

$$x = \frac{e^{-2t}}{e^{-2}-1} + \frac{1}{1-e^{-2}}$$

$\boxed{2}$

(1) $W(\log t, t\log t) = \begin{vmatrix} \log t & t\log t \\ \frac{1}{t} & \log t + 1 \end{vmatrix} = (\log t)^2 + \log t - \log t$

$= (\log t)^2 \neq 0$ より

線形独立

(2) $W(e^{\alpha t}, e^{\beta t}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} & e^{\beta t} \\ \alpha e^{\alpha t} & \beta e^{\beta t} \end{vmatrix} = \beta e^{\alpha t + \beta t} - \alpha e^{\alpha t + \beta t}$

$= (\beta - \alpha) e^{(\alpha+\beta)t} \neq 0$ より

線形独立

(3) $W(e^{\alpha t}, te^{\alpha t}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ \alpha e^{\alpha t} & e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} \end{vmatrix} = e^{2\alpha t} + \alpha te^{2\alpha t} - \alpha te^{2\alpha t}$

$= e^{2\alpha t} \neq 0$ より

線形独立

(4) $W(e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t & \alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t \end{vmatrix}$

$= \alpha e^{2\alpha t}\sin\beta t\cos\beta t + \beta e^{2\alpha t}\cos^2\beta t - \alpha e^{2\alpha t}\cos\beta t\sin\beta t + \beta e^{2\alpha t}\sin^2\beta t$

$= \beta e^{2\alpha t} \neq 0$ より

~~線形独立~~

$\boxed{3}$

(1) $x = e^{-t}$ のとき

$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}$ $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ より $L(x) = e^{-t} + 2(-e^{-t}) + e^{-t} = 0$ より 解

$x = te^{-t}$ のとき

$\frac{dx}{dt} = e^{-t} - te^{-t}$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$

$= -2e^{-t} + te^{-t}$ より $L(x) = -2e^{-t} + te^{-t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} + te^{-t} = 0$ より 解

(2) $W(e^{-t}, te^{-t}) = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t} \neq 0$ より

線形独立.

従って, $C_1 C_2$ を任意定数として $x = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t}$

(3) $x = t^2 + t - 1$

$\frac{dx}{dt} = 2t + 1$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 2$

$L(x) = 2 + 4t + 2 + t^2 + t - 1$

$= t^2 + 5t + 3 = R(t)$

(4)

(2)(3)より

$x = t^2 + t - 1 + (C_1 + C_2 t)e^{-t}$