詳細解答

§1 の問題解答

解 1.1 $(2,1)$ 成分は 9，第 2 行は $\begin{pmatrix} 9 & 10 \end{pmatrix}$，第 1 列は $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$.

解 1.2 (1) a_{11}, a_{22}, a_{33}

(2) 対角行列，スカラー行列，上三角行列，下三角行列の順にそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} \text{（ただし，} a_{11} = a_{22} = a_{33}\text{），}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

解 1.3 $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$，$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$

解 1.4 求める転置行列は 2×3 行列 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ となる．

解 1.5 (1) 対応する成分をそれぞれ比較すると，

$$a^2 + b^2 = 1,\ ab + bc = 0,\ b^2 + c^2 = 4.$$

第 2 式より，$b = 0$ または $c = -a$．$c = -a$ のとき，第 3 式より，

$$b^2 + a^2 = 4.$$

これは第 1 式に矛盾．よって，$b = 0$ とわかり，あとは a と c の値を決めればよい．
$b = 0$ のとき，第 1 式と第 3 式より，

$$a = \pm 1,\ c = \pm 2 \quad \text{（複号任意）}.$$

よって，求める a，b，c の値は

$$a = \pm 1,\ b = 0,\ c = \pm 2 \quad \text{（複号任意）}.$$

複号同順と複号任意　方程式などを解いたりして，例えば，解が

$$(x, y) = (a, b), (-a, -b)$$

と求められたときは，

$$x = \pm a,\ y = \pm b \quad \text{（複号同順）}$$

とまとめて書くことがある．一方，解が

$$(x, y) = (a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b)$$

と求められたときは，

$$x = \pm a,\ y = \pm b \quad (\text{複号任意})$$

とまとめて書くことがある．

(2) 対応する成分をそれぞれ比較すると，

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = 1 & \cdots\cdots① \\ 2ab = 2bc = 2ca = 1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より，

$$a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2}.$$

よって，②より，

$$a = b = c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\boxed{\textbf{解 1.6}}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{解 1.7}}$ (1) ${}^tA = A$ が成り立つ正方行列 A を対称行列という．

(2) (ア) 定理 1.1 より，$(1, 2)$ 成分と $(2, 1)$ 成分が等しくなればよいので，

$$a = a^2.$$

これを解くと，

$$a = 0, 1.$$

(イ) 定理 1.1 より，$(1, 2)$ 成分と $(2, 1)$ 成分，$(1, 3)$ 成分と $(3, 1)$ 成分，$(2, 3)$ 成分と $(3, 2)$ 成分がそれぞれ等しくなればよいので，

$$a = a^3,\ a^2 = a^6,\ a^5 = a^7.$$

第 1 式より，

$$a(1 - a^2) = 0$$

なので，

$$a = 0, \pm 1.$$

これらは第 2 式，第 3 式をみたすので，求める a の値は

$$a = 0, \pm 1.$$

解 1.8　(1) $i\delta_{ij}(=j\delta_{ij})$

(2) $(i,j)=(1,2),(2,3)$ のときにクロネッカーのデルタの値が 1 になるようにすればよいので，求める答えは $\delta_{i+1,j}$ である．

(3) $(i,j)=(2,1),(3,2)$ のときにクロネッカーのデルタの値が 1 になるようにすればよいので，求める答えは $\delta_{i,j+1}$ である．

補足　添字が複雑になるときは，混乱を避けるため，添字の間にコンマを入れて区切るとよい．例えば，$\delta_{i+1,j}$ のように書く．

解 1.9　$m \neq n$ のとき，

$$(\text{左辺}) \overset{\because \text{積和の公式}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[-\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}\right]dx$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x-\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^\pi = 0.$$

$m=n$ のとき，

$$(\text{左辺}) \overset{\because \text{半角の公式}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[x-\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^\pi = 1.$$

よって，

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \delta_{mn}.$$

積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},\quad \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

§ 2 の問題解答

解 2.1

$$(\text{与式}) = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 24 \\ 18 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 16 & 26 \\ 20 & 27 \end{pmatrix}.$$

補足　例題 2.1 と比較して，定理 2.5 の（1），(3）が成り立っていることを確認してみるとよい．

解 2.2　（1）(与式) $= \begin{pmatrix} 3\cdot 0+4\cdot 1+5\cdot 2 & 3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \end{pmatrix}$.

（2）(与式) $= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

（3）(与式) $= \begin{pmatrix} 7\cdot 5+8\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \end{pmatrix} = 83$.

補足　例題 2.2 と比較して，定理 2.5 の（2）が成り立っていることを確認してみるとよい．

解 2.3　まず，

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

したがって，$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零行列である．

解 2.4　（1）A，B をともに n 次の正方行列とする．$AB = BA$ が成り立つとき，A と B は可換であるという．

（2）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a^2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} a^2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a^3 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

よって，$AB = BA$ とすると，

$$2a = 2a^3.$$

すなわち，

$$2a(a^2-1) = 0.$$

したがって，求める a の値は

$$a = 0, \pm 1.$$

解 2.5　（1）(左辺) $= AB - BA = -(BA - AB) =$ (右辺).

(2) (左辺) $= AA - AA = O =$ (右辺).

(3) (左辺) $= [AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B] = (AB - BA)C$
$- C(AB - BA) + (BC - CB)A - A(BC - CB) + (CA - AC)B$
$- B(CA - AC) = ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC$
$+ ACB + CAB - ACB - BCA + BAC = O =$ (右辺).

解 2.6　与式の左辺を計算すると,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$+ (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = O.$$

よって, ケイリー - ハミルトンの定理が成り立つ.

解 2.7　(1) ${}^tA = A$ が成り立つ正方行列 A を対称行列という.

(2) ${}^tA = -A$ が成り立つ正方行列 A を交代行列という.

(3) (ア) ① + ② および ① − ② より,

$$A + {}^tA = 2X,\ A - {}^tA = 2Y.$$

よって,

$$X = \frac{1}{2}(A + {}^tA),\ Y = \frac{1}{2}(A - {}^tA).$$

(イ) (1.19) および定理 2.5 の (1), (3) を用いて計算すると,

$${}^tX = {}^t\left\{\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right\} = \frac{1}{2}{}^t(A + {}^tA) = \frac{1}{2}\left\{{}^tA + {}^t({}^tA)\right\} = \frac{1}{2}({}^tA + A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$$
$$= X$$
$${}^tY = {}^t\left\{\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right\} = \frac{1}{2}{}^t(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\left\{{}^tA - {}^t({}^tA)\right\} = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$$
$$= -Y.$$

よって, X は対称行列で, Y は交代行列である.

解 2.8　仮定より, $AB = BA$ で, また, ある自然数 m に対して, $B^m = O$ である. よって,

$$(AB)^m = \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{m\text{ 個}} = \underbrace{(AA\cdots A)}_{m\text{ 個}}\underbrace{(BB\cdots B)}_{m\text{ 個}} = A^mB^m = A^mO$$
$$= O.$$

したがって, AB はべき零行列である.

§3の問題解答

解 3.1

$$(\text{与式}) = \begin{pmatrix} A+A & B-B \\ O_{m,l}+O_{m,l} & C-2C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & O_{k,n} \\ O_{m,l} & -C \end{pmatrix}.$$

解 3.2　2 乗については例題 3.2 の結果を用いると，

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} E_m & A \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} E_m & 2A \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 3A \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix}.$$

補足　さらに，$k = 0, 1, 2, \cdots$ とすると，k に関する数学的帰納法を用いることにより，

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E_m & kA \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix}$$

を示すことができる（✍）.

解 3.3　2 次の正方行列 A，B，C を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定めると，

$$I = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} O & B \\ -B & O \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} O & C \\ -C & O \end{pmatrix},$$
$$A^2 = -E,\ B^2 = E,\ C^2 = E,$$
$$AB = C,\ BA = -C,\ BC = -A,\ CB = A,\ CA = B,\ AC = -B.$$

ただし，O は 2 次の零行列で，E は 2 次の単位行列.

よって，

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,$$
$$IJ = K,\ JI = -K,\ JK = I,\ KJ = -I,\ KI = J,\ IK = -J.$$

解 3.4

$$(\text{与式}) = \begin{pmatrix} O & O & A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} \\ O & O & A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} \\ O & O & A_{33}B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ O & C_{22} & C_{23} \\ O & O & O \end{pmatrix} = O_{3n,3n}.$$

解 3.5　まず，

$$AX = \begin{pmatrix} aX_{11} & aX_{12} \\ bX_{21} & bX_{22} \end{pmatrix},\ XA = \begin{pmatrix} aX_{11} & bX_{12} \\ aX_{21} & bX_{22} \end{pmatrix}.$$

よって，$AX = XA$ とすると，

$$aX_{12} = bX_{12},\ bX_{21} = aX_{21}.$$

すなわち

$$(a-b)X_{12}=0,\ (a-b)X_{21}=0.$$

$a\neq b$ より $a-b\neq 0$ となり，上の 2 式の両辺を $\frac{1}{a-b}$ 倍すると，X_{12}，X_{21} は零行列である．

解 3.6　n 次の列ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$ を (3.24) のように，

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

により定める．仮定より，任意の $i=1,2,\cdots,n$ に対して，

$$A\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$$

なので，

$$\begin{aligned}A=AE_n &\overset{\because (3.25)}{=} A\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{e}_1 & A\boldsymbol{e}_2 & \cdots & A\boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=O.\end{aligned}$$

よって，A は零行列である．

§4 の問題解答

解 4.1　(1) 基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行}-\text{第 1 行}\times 5]{\text{第 2 行}-\text{第 1 行}\times 3}\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\\0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行}+\text{第 2 行}\times 4]{\text{第 1 行}-\text{第 2 行}\times 2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

基本変形の最後の行列は階数標準形で，階数は 2 となる．

(2) 基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 3 行}-\text{第 2 行}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 3 列}-\text{第 1 列}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

基本変形の最後の行列は階数標準形で，階数は 2 となる．

(3) 基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 2 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times a} \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

$a=1$ と $a \neq 1$ の場合に分けて基本変形を行う．

$a=1$ のとき，さらに基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列} - \text{第 1 列}]{\text{第 2 列} - \text{第 1 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

基本変形の最後の行列は階数標準形で，階数は 1 となる．

$a \neq 1$ のとき，さらに基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} \times \frac{1}{1-a}]{\text{第 2 行} \times \frac{1}{1-a}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times (1+a)]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 2+a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}.$$

$a \neq 1$ の条件の下でさらに場合分けを行う．

$a=-2$ のとき，さらに基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列} + \text{第 2 列}]{\text{第 3 列} + \text{第 1 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

基本変形の最後の行列は階数標準形で，階数は 2 となる．

$a \neq -2$ のとき，さらに基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} \times \frac{1}{2+a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} + \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times (1+a)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

基本変形の最後の行列は階数標準形で，階数は 3 となる．

解 4.2　① 第 1 行 $-$ 第 2 行 $\times a$　② 第 1 行と第 2 行の入れ替え
③ 第 3 行 $\times a$　④ 第 3 行 $\times (1-a^2)$　⑤ 第 2 行と第 3 行の入れ替え　⑥ 2
⑦ 第 3 行 $\times \frac{1}{a(a^2-2)}$　⑧ 3

補足　さらに基本変形を行うと，$a=0,\pm\sqrt{2}$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列} - \text{第 2 列} \times a]{\text{第 3 列} - \text{第 1 列} \times (1-a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$a\neq 0,\pm\sqrt{2}$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times a]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times (1-a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，階数標準形が得られる．

解 4.3　(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 4.4　$\operatorname{rank} A=1$ より，$\mathbf{0}$ ではない A の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ が存在し，他の列は $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍となる．A の第 i 列が $\boldsymbol{a}$ の b_i 倍であるとし，

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A=\begin{pmatrix} b_1\boldsymbol{a} & b_2\boldsymbol{a} & \cdots & b_n\boldsymbol{a} \end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}.$$

よって，$A=\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$.

§5 の問題解答

解 5.1　(1) 係数行列を A，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし，拡大係数行列 $(A|\boldsymbol{b})$ の行に関する基本変形を行うと，

$$(A|\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 5]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

基本変形の最後の行列の第 3 行に注目し方程式に戻すと，$0 = 1$ となっており，これは矛盾である．よって，解は存在しない．また，係数行列の階数は 2 で，拡大係数行列の階数は 3 である．

(2) 係数行列を A，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ とし，拡大係数行列 $(A|\boldsymbol{b})$ の行に関する基本変形を行うと，

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} + \text{第 1 行} \times 2]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行} \times \left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 3]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

したがって，c を任意の定数として，$x_3 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = 1 + c,\ x_2 = -1 + c,\ x_3 = c.$$

また，係数行列および拡大係数行列の階数はともに 2 である．

(3) 係数行列を A，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし，拡大係数行列 $(A|\boldsymbol{b})$ の行に関する基本変形を行うと，

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行} + \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right).$$

基本変形の最後の行列の第 2 行に注目し方程式に戻すと，$0 = -1$ となっており，これは矛盾である．よって，解は存在しない．また，係数行列の階数は 2 で，拡大係数行列の階数は 3 である．

解 5.2　係数行列の行に関する基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} + \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 10x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

したがって，c_1，c_2 を任意の定数として，$x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$ とおくと，解は

$$x_1 = c_1 + 10c_2, \quad x_2 = -2c_1 - 7c_2, \quad x_3 = c_1,\ x_4 = c_2.$$

解 5.3　係数行列を A，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし，拡大係数行列 $(A|\boldsymbol{b})$ の行に関する基本変形を行うと，

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & p \\ 1 & -2 & 1 & q \\ 1 & 1 & -2 & r \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 2 行}]{\text{第 1 行} + \text{第 2 行} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & p+2q \\ 1 & -2 & 1 & q \\ 0 & 3 & -3 & r-q \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行} + \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & p+q+r \\ 1 & -2 & 1 & q \\ 0 & 3 & -3 & r-q \end{array}\right).$$

定理 5.1 より，求める条件は

$$p + q + r = 0.$$

解 5.4　まず，

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = y_2.$$

また，$(*)$ より，

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a_1\frac{dx}{dt} - a_2x = -a_2y_1 - a_1y_2.$$

よって，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -a_2y_1 - a_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

§6の問題解答

解 6.1　(1) 逆行列をもつ正方行列を正則であるという．

(2) (ア) 行に関する基本変形を行うと，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times a} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times c]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times (b-ac)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

よって，

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(イ) 行に関する基本変形を行うと，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行}]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

よって，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 6.2　(1)

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} & A_{11}X_{12} + A_{12}X_{22} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) $AX = E_{2n}$ とすると，(1) より，

$$A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} = E_n,\ A_{11}X_{12} + A_{12}X_{22} = O,\ A_{22}X_{21} = O,$$
$$A_{22}X_{22} = E_n.$$

A_{11}，A_{22} は正則なので，これを解くと，

$$X_{11} = A_{11}^{-1},\ X_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1},\ X_{21} = O,\ X_{22} = A_{22}^{-1}.$$

よって，A は正則で，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

解 6.3

(1) (与式) $= E_n(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) - A(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$

$$= E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1} - (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^m) = E_n - A^m.$$

(2) 何乗かすると零行列となる正方行列をべき零行列という．

(3) 仮定より，$A^m = O$ となる自然数 m が存在する．このとき，(1) より，

$$(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) = E_n.$$

よって，$E_n - A$ は

$$E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$$

を逆行列としてもつので，正則である．

解 6.4　① 同次　② 自明　③ 背理法　④ i_0　⑤ $\leq$　⑥ $<$　⑦ $|x_{i_0}|$　⑧ 0

補足　三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{1}$$

や，それから導かれる

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{2}$$

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \tag{3}$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \tag{4}$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \tag{5}$$

といった不等式は数学の様々な場面で用いられる重要な不等式である．

(2) は (1) と数学的帰納法を用いることにより，(3) は (1) において x を $x - y$，y を $y - z$ と置き換えることにより，(4) は (1) において x を $x - y$ と置き換えた不等式と y を $y - x$ と置き換えた不等式を合わせることにより，(5) は (4) において y を $-y$ と置き換えることにより，それぞれ示すことができる (✍)．

これらの不等式は § 22 で扱う内積空間に定まるノルムに対しても，まったく同様に成り立つ．

解 6.5　まず，

$$E_n + (E_n - A)(E_n + A)^{-1} = (E_n + A)(E_n + A)^{-1} + (E_n - A)(E_n + A)^{-1}$$

$$= (E_n + A + E_n - A)(E_n + A)^{-1} = 2E_n(E_n + A)^{-1} = 2(E_n + A)^{-1}.$$

よって，$E_n + (E_n - A)(E_n + A)^{-1}$ は $\dfrac{1}{2}(E_n + A)$ を逆行列としてもつので，正則である．

§7 の問題解答

解 7.1　(1) まず，

$$(\sigma\tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 2,\ (\sigma\tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(2) = 1,$$
$$(\sigma\tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(1) = 3.$$

よって，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

また，

$$(\tau\sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(3) = 1,\ (\tau\sigma)(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(1) = 3,$$
$$(\tau\sigma)(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(2) = 2.$$

よって，

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) まず，

$$(\sigma\tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(1) = 4,\ (\sigma\tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(4) = 3,$$
$$(\sigma\tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(3) = 2,\ (\sigma\tau)(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(2) = 1.$$

よって，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

また，

$$(\tau\sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(4) = 2,\ (\tau\sigma)(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(1) = 1,$$
$$(\tau\sigma)(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(2) = 4,\ (\tau\sigma)(4) = \tau(\sigma(4)) = \tau(3) = 3.$$

よって，

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

補足　とくに，置換の積は一般に可換でないことがわかる．

解 7.2　(1) まず，

$$1 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 3 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 5 \mapsto 2$$

なので，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\ 2\quad 5\ )(\ 1\quad 3\ )(\ 1\quad 7\ )(\ 1\quad 6\ )(\ 1\quad 4\ ).$$

よって，

$$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^5 = -1.$$

(2) まず，

$$1 \mapsto 7 \mapsto 3 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 2.$$

また，

$$6 \mapsto 6$$

なので，σ を巡回置換で表すときに 6 は用いる必要はない．

よって，

$$\sigma = (\ 2\quad 4\quad 5\ )(\ 1\quad 7\quad 3\ ) = (\ 2\quad 5\ )(\ 2\quad 4\ )(\ 1\quad 3\ )(\ 1\quad 7\ ).$$

したがって，

$$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^4 = 1.$$

解 7.3 (1)

$$\begin{aligned} f_\sigma(x_1,x_2,x_3) &= f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}) = f(x_{\varepsilon(1)},x_{\varepsilon(2)},x_{\varepsilon(3)}) \\ &= f(x_1,x_2,x_3) \\ &= x_1 + 2x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f_\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4) &= f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)}) \\ &= (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}) \\ &= (x_4 - x_2)(x_1 - x_3). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f_\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4) &= f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)}) \\ &= 1 + x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} + x_{\sigma(4)}^3 \\ &= 1 + x_4 + x_1x_3 + x_2^3. \end{aligned}$$

解 7.4 $i = 1, 2, \cdots, n$ とする．

$i \neq k_1, k_2, \cdots, k_r, l_1, l_2, \cdots, l_s$ のとき，

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i,\ (\tau\sigma)(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(i) = i.$$

ある $p = 1, 2, \cdots, r$ に対して $i = k_p$ となるとき，

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(\tau(k_p)) = \sigma(k_p) = k_{p+1}.$$

ただし，$p = r$ のときは $k_{p+1} = k_1$ と約束する．

一方，

$$(\tau\sigma)(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(\sigma(k_p)) = \tau(k_{p+1}) = k_{p+1}.$$

ある $q = 1, 2, \cdots, s$ に対して $i = l_q$ となるとき，

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(\tau(l_q)) = \sigma(l_{q+1}) = l_{q+1}.$$

ただし，$q = s$ のときは $l_{q+1} = l_1$ と約束する．

一方，

$$(\tau\sigma)(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(\sigma(l_q)) = \tau(l_q) = l_{q+1}.$$

よって，

$$\sigma\tau = \tau\sigma.$$

§8 の問題解答

解 8.1　(1) サラスの方法より，

$$(\text{与式}) = \cos\theta\cos\theta - (-\sin\theta)\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

(2) サラスの方法より，

$$(\text{与式}) = a\cdot a\cdot a + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot a\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot a - a\cdot 1\cdot 1 = a^3 - 3a + 2.$$

(3) 上三角行列の行列式は対角成分の積（定理 8.1）なので，

$$(\text{与式}) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

解 8.2　まず，

$$(\text{与式}) \overset{\because\ \text{例 } 8.3}{=} \left|\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} \overset{\because\ \text{サラスの方法}}{=} \{(a+1)^2 - 2^2\}\{(a-1)^2 - 0^2\}$$

$$= \{(a+1)+2\}\{(a+1)-2\}(a-1)^2 = (a+3)(a-1)^3.$$

よって，求める a の値は

$$a = -3, 1.$$

解 8.3　(1) ${}^tA = -A$ が成り立つ正方行列 A を交代行列という．

(2) n を自然数とし，A を奇数 $(2n-1)$ 次の交代行列とすると，

$$|A| \overset{\because\ \text{定理 } 8.3}{=} |{}^tA| = |-A| \quad (\because\ \text{交代行列の定義}) = (-1)^{2n-1}|A|$$

$$(\because\ \text{各列に定理 8.2 (2) の多重線形性を適用}) = -|A|.$$

よって，$2|A| = 0$ なので，

$$|A| = 0.$$

すなわち，奇数次の交代行列の行列式は 0 である．

解 8.4　(1) 逆行列をもつ正方行列を正則であるという．

(2)　$(\text{左辺}) = |P^{-1}(AP)| \overset{\because\ \text{定理 8.8}}{=} |(AP)P^{-1}| \overset{\because\ \text{積の結合律}}{=} |A(PP^{-1})| = |AE|$
$= (\text{右辺}).$

解 8.5　A を正則行列とすると，

$$AA^{-1} = E.$$

両辺の行列式をとると，

$$|AA^{-1}| = |E|.$$

定理 8.8 と $|E| = 1$ より，

$$|A||A^{-1}| = 1.$$

よって，

$$|A| \neq 0,\ |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

解 8.6　(1) 何乗かすると零行列となる正方行列をべき零行列という．

(2) A を自然数 n に対して $A^n = O$ となるべき零行列とすると，

$$|A^n| = |O|.$$

定理 8.8 と $|O| = 0$ より，

$$|A|^n = 0.$$

よって，

$$|A| = 0.$$

すなわち，べき零行列の行列式は 0 である．

解 8.7　A を直交行列とすると，

$$A^tA = E.$$

両辺の行列式をとると，

$$|A^tA| = |E|.$$

定理 8.8 と $|E| = 1$ より，

$$|A||^tA| = 1.$$

定理 8.3 より，

$$|A|^2 = 1.$$

よって，

$$|A| = \pm 1.$$

すなわち，直交行列の行列式は 1 または -1 である．

解 8.8

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \frac{d}{dx}\sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1\sigma(1)}(x)a_{2\sigma(2)}(x)\cdots a_{n\sigma(n)}(x)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{d}{dx} \big((\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)}(x) a_{2\sigma(2)}(x) \cdots a_{n\sigma(n)}(x) \big) \qquad (*)$$

$$\overset{\because\ \text{積の微分法}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)}(x) a_{2\sigma(2)}(x) \cdots \frac{d}{dx} a_{j\sigma(j)}(x) \cdots a_{n\sigma(n)}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)}(x) a_{2\sigma(2)}(x) \cdots \frac{d}{dx} a_{j\sigma(j)}(x) \cdots a_{n\sigma(n)}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det B_j(x).$$

よって，

$$\frac{d}{dx} \det A(x) = \sum_{j=1}^{n} \det B_j(x).$$

微分の線形性　$(*)$ の式変形では微分の基本的性質

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

を用いている．この式と

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx} f(x) \quad (c\ \text{はスカラー})$$

をあわせて，**微分の線形性**という．

§9 の問題解答

解 9.1

$$(\text{与式}) = a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{22}\tilde{a}_{22} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2}|a_{21}| + a_{22} \cdot (-1)^{2+2}|a_{11}|$$
$$= -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

解 9.2　(1) 第 3 列に関する余因子展開を用いると，

$$(\text{与式}) = 5 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{\because\ \text{定理 } 8.2\ (3)}{=} 0.$$

(2)

$$(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 100 & 99 & 99 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

($\because$ 第 2 行 − 第 1 行，第 3 行 − 第 1 行，第 4 行 − 第 1 行)

$$= 100 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\because \text{ 第 1 列に関する余因子展開})$$

$$\overset{\because\ \text{サラスの方法}}{=} 100(0+1+1-0-0-0) = 200.$$

解 9.3　(1) A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを A の (i,j) 余因子という.

(2) (i,j) 成分が A の (j,i) 余因子の n 次の正方行列を A の余因子行列という.

(3) $\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$

(4) ① O　② 0　③ 0　④ $|\tilde{A}|$　⑤ n

解 9.4　(1) 第 1 行に関する余因子展開を用いると,

$$|A| = a \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} - b \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} b & -d & c \\ c & a & -b \\ d & b & a \end{vmatrix}$$

$$- c \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & d & -b \\ d & -c & a \end{vmatrix} - d \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} b & a & -d \\ c & d & a \\ d & -c & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\because\ \text{サラスの方法}}{=} a(a^3 - bcd + bcd + ac^2 + ad^2 + ab^2)$$

$$+ b(a^2b + bd^2 + bc^2 - acd + acd + b^3) - c(abd - abd - c^3 - cd^2 - a^2c - b^2c)$$

$$+ d(b^2d + a^2d + c^2d + d^3 - abc + abc)$$

$$= a \cdot a(a^2+b^2+c^2+d^2) + b \cdot b(a^2+b^2+c^2+d^2) - c(-c)(a^2+b^2+c^2$$

$$+ d^2) + d \cdot d(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

(2) 求める解を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とおくと, クラメルの公式と (1) の計算より,

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & -b & -c & -d \\ 0 & a & -d & c \\ 0 & d & a & -b \\ 0 & -c & b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2} \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$(\because \text{ 第 1 列に関する余因子展開}) \quad = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2} \cdot a(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & 1 & -c & -d \\ b & 0 & -d & c \\ c & 0 & a & -b \\ d & 0 & b & a \end{vmatrix} = \frac{-1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\begin{vmatrix} b & -d & c \\ c & a & -b \\ d & b & a \end{vmatrix}$$

$$(\because \text{ 第 2 列に関する余因子展開}) = \frac{-1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\cdot b(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$= -\frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & -b & 1 & -d \\ b & a & 0 & c \\ c & d & 0 & -b \\ d & -c & 0 & a \end{vmatrix} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & d & -b \\ d & -c & a \end{vmatrix}$$

($\because$ 第 3 列に関する余因子展開)

$$= \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\cdot\{-c(a^2+b^2+c^2+d^2)\} = -\frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

$$x_4 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & -b & -c & 1 \\ b & a & -d & 0 \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & b & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\begin{vmatrix} b & a & -d \\ c & d & a \\ d & -c & b \end{vmatrix}$$

$$(\because \text{ 第 4 列に関する余因子展開}) = \frac{-1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\cdot d(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$= -\frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

よって，

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix}.$$

解 9.5 n を 2 以上の自然数とし，$A = (a_{ij})_{n\times n}$ を n 次の対称行列とする．A の第 i 行と第 j 行を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の正方行列を A_{ij} とおくと，A は対称行列なので，

$$ {}^tA_{ij} = A_{ji}. \qquad (*)$$

よって，$\tilde{A}$ を A の余因子行列とすると，

$(\tilde{A}$ の (j,i) 成分$) = (A$ の (i,j) 余因子$)$ ($\because$ 余因子行列の定義)

$= (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ ($\because$ 余因子の定義) $\overset{\because \text{ 定理 } 8.3}{=} (-1)^{i+j}|{}^tA_{ij}| \overset{\because (*)}{=} (-1)^{j+i}|A_{ji}|$

$= (A$ の (j,i) 余因子$)$ ($\because$ 余因子の定義)

$= (\tilde{A}$ の (i,j) 成分$)$ ($\because$ 余因子行列の定義).

したがって，

$$ {}^t\tilde{A} = \tilde{A}. $$

すなわち，対称行列の余因子行列は対称行列である．

§10 の問題解答

解 10.1　(1) まず，サラスの方法を用いると，

$$ \begin{aligned} (\text{与式}) &= 1\cdot 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3\cdot 1^2 + 1\cdot 1\cdot 2^2 - 1\cdot 2\cdot 1^2 - 1\cdot 1\cdot 3^2 - 1\cdot 3\cdot 2^2 \\ &= 18 + 3 + 4 - 2 - 9 - 12 = 2. \end{aligned} $$

次に，ヴァンデルモンドの行列式を用いると，

$$ (\text{与式}) = (2-1)(3-1)(3-2) = 1\cdot 2\cdot 1 = 2. $$

(2) 求める行列式はヴァンデルモンドの行列式なので，

$$ (\text{与式}) = \prod_{1\le i<j\le n}(j-i) = (n-1)!(n-2)!(n-3)!\cdots 2!. $$

解 10.2

(1)

$$ (\text{与式}) = \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} $$

$\left(\because\ \text{第 } 1 \text{ 列} - \text{第 } (n+1) \text{ 列 } \times a_1,\ \text{第 } 2 \text{ 列} - \text{第 } (n+1) \text{ 列 } \times a_2,\ \ldots,\ \text{第 } n \text{ 列} - \text{第 } (n+1) \text{ 列 } \times a_n\right)$

$$ \overset{\because\ \text{定理 } 8.1}{=} (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n). $$

(2)

$$ (\text{与式}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} $$

$(\because\ \text{第 } 2 \text{ 行} - \text{第 } 1 \text{ 行},\ \text{第 } 3 \text{ 行} - \text{第 } 1 \text{ 行},\ \ldots,\ \text{第 } n \text{ 行} - \text{第 } 1 \text{ 行})$

$$ \overset{\because\ \text{定理 } 8.1}{=} 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)(n-1) = (n-1)!. $$

解 10.3　① 1　② 1

③　第 2 列 − 第 1 列，第 3 列 − 第 1 列，$\cdots$，第 $(k+1)$ 列 − 第 1 列　④　k

⑤　第 1 行　⑥　1　⑦　1

解 10.4　(1) 2 次の交代行列は $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ と表され，

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2.$$

よって，$P = \pm a$ とおくと，P は a の多項式で，

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = P^2.$$

(2) 4 次の交代行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

と表され，

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a & d & e \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -a & 0 & e \\ -b & -d & f \\ -c & -e & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ c \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \\ -c & -e & -f \end{vmatrix} \quad (\because \text{第 1 行に関する余因子展開})$$

$$\overset{\because \text{サラスの方法}}{=} -a(-cdf + bef - af^2) + b(be^2 - cde - aef) - c(-adf + bde - cd^2)$$

$$= 2acdf - 2abef + a^2f^2 + b^2e^2 - 2bcde + c^2d^2 = (af - be + cd)^2.$$

よって，

$$P = \pm(af - be + cd)$$

とおくと，P は a，b，c，d，e，f の多項式で，

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = P^2.$$

パフィアン　一般に，n を自然数，$A = (a_{ij})_{2n \times 2n}$ を $2n$ 次の交代行列とし，

$$P = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

とおくと，

$$|A| = P^2$$

が成り立つ．この P を A の**パフィアン**という［⇨［佐武］p.85］．

解 10.5　題意をみたす f を定数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n を用いて

$$f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_{n-1}x^{n-2} + a_nx^{n-1}$$

と表しておくと,

$$y_i = f(x_i) = a_1 + a_2x_i + \cdots + a_{n-1}x_i^{n-2} + a_nx_i^{n-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

すなわち, a_1, a_2, $\cdots$, a_n は連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

の解である. ここで, $(*)$ の係数行列は n 次の正方行列で, その行列式はヴァンデルモンドの行列式に等しく

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

となる. 仮定より, x_1, x_2, $\cdots$, x_n は互いに異なるから, 上の行列式は 0 ではない. したがって, $(*)$ は一意的な解をもつ. すなわち, 題意をみたす f が一意的に存在する.

§11 の問題解答

解 11.1　(11.15) より,

$$(\text{与式}) = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 - 6\cdot 2 & 6\cdot 1 - 4\cdot 3 & 4\cdot 2 - 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

補足　例題 11.1 と比較して, 定理 11.2 の (1) の交代律が成り立っていることを確認してみるとよい.

解 11.2　定理 11.1 より, 求める面積は

$$\left|\det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\right| = |-\cos^2\theta - \sin^2\theta| = |-1| = 1.$$

解 11.3　定理 11.4 およびヴァンデルモンドの行列式より, 求める体積は

$$\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}\right| = |(b-a)(c-a)(c-b)|.$$

解 11.4　(1) 行列式の交代性より,

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

となる．また，(11.18) より，

$$\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}.$$

よって，(1) が成り立つ．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{aligned} x &= (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3. \end{aligned}$$

よって，(2) が成り立つ．

解 11.5　(1) 求める直線の方程式は (11.23) より，

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6-1 & 5-2 & 4-3 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$x = 1 + 5t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3 + t.$$

(2) 求める直線の方程式は (11.23) より，

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 9-3 & 6-2 & 3-1 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$x = 3 + 6t,\ y = 2 + 4t,\ z = 1 + 2t.$$

または，$1 + 2t$ を s とおくと，

$$x = 3s,\ y = 2s,\ z = s.$$

解 11.6　(1) 法線ベクトルを求めると，

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - (-2)(-1) & (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，求める平面の方程式は (11.28) より，

$$-3(x-1)-3(y-2)-3(z-3)=0.$$

すなわち，

$$x+y+z=6.$$

(2) 法線ベクトルを求めると，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 4-1\cdot 3 & 1\cdot 2-1\cdot 4 & 1\cdot 3-1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって，求める平面の方程式は (11.28) より，

$$(x-1)-2(y-1)+(z-1)=0.$$

すなわち，

$$x-2y+z=0.$$

解 11.7

$$\text{(左辺)} \overset{\because\ (11.18)}{=} \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\because\ \text{定理 } 8.3}{=} \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \overset{\because\ \text{定理 } 8.8}{=} \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{y} & \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{x} & \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{y} & \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{c}{}^t\boldsymbol{x} & \boldsymbol{c}{}^t\boldsymbol{y} & \boldsymbol{c}{}^t\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \det\begin{pmatrix} \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle & \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}\rangle & \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\rangle & \langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\rangle & \langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}\rangle & \langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\rangle & \langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{z}\rangle \end{pmatrix} = \text{(右辺)}$$

なので，題意の等式が成り立つ．ただし，$(*)$ では，等式

$$\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{x} = \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle$$

などが成り立つことを用いた．

§ 12 の問題解答

解 12.1　(1) まず，

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O,\ A^4 = A^5 = \cdots = O.$$

よって，

$$\exp A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots$$
$$= E + A + \frac{1}{2}A^2 + O + \cdots + O + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \frac{1}{2}\lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) A はすべての成分が 1 の n 次の正方行列なので，k を自然数とすると，A^k の成分はすべて n^{k-1} となる．よって，

$$\exp A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{n}{2!}A + \frac{n^2}{3!}A + \cdots = E + \frac{1}{n}\left(n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \cdots\right)A$$
$$= E + \frac{e^n - 1}{n}A \quad \left(\because\ e^n = 1 + \frac{1}{1!}n + \frac{1}{2!}n^2 + \cdots + \frac{1}{k!}n^k + \cdots\right).$$

解 12.2

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + N,\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表しておく．このとき，λE と N は可換で，

$$N^2 = O.$$

また，例題 12.1 より，

$$\exp(\lambda E) = e^\lambda E.$$

よって，

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \exp(\lambda E + N) \overset{\because\ 定理\ 12.1\ (1)}{=} \exp(\lambda E)\exp N$$
$$= (e^\lambda E)\left(E + \frac{1}{1!}N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{k!}N^k + \cdots\right)$$
$$= (e^\lambda E)(E + N + O + \cdots + O + \cdots) = (e^\lambda E)(E + N) = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

解 12.3 A は交代行列なので，

$${}^t(\exp A) \overset{\because\ 定理\ 12.2}{=} \exp{}^tA \overset{\because\ {}^tA = -A}{=} \exp(-A) \overset{\because\ 定理\ 12.1\ (2)}{=} (\exp A)^{-1}.$$

よって，

$$(\exp A)^{-1} = {}^t(\exp A)$$

となり，$\exp A$ は直交行列である．

解 12.4 ① (i, i) ② $a_{ij}b_{ji}$ ③ BA ④ $(AB)B^{-1}$ ⑤ A

解 12.5 (1)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE + bJ,\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表しておく．このとき，aE と bJ は可換で，

$$J^2 = -E.$$

また，例題 12.1 より，

$$\exp(aE) = e^a E.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\exp\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp(aE + bJ) \overset{\because\ \text{定理 12.1（1）}}{=} \exp(aE)\exp(bJ) \\
&= (e^a E)\exp(bJ) = (e^a E)\left(E + bJ - \frac{b^2}{2!}E - \frac{b^3}{3!}J + \cdots\right) \\
&= e^a\left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \cdots\right)E + e^a\left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \cdots\right)J \\
&= e^a(\cos b)E + e^a(\sin b)J \quad (\because\ \text{三角関数に対するマクローリン展開}) \\
&= \begin{pmatrix} e^a\cos b & e^a\sin b \\ -e^a\sin b & e^a\cos b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

（2）

$$A^2 = B^2 = O$$

なので，

$$\begin{aligned}
(\exp A)(\exp B) &= \left(E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots\right) \\
&\qquad \times\left(E + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{k!}B^k + \cdots\right) \\
&= (E + A + O + \cdots + O + \cdots)(E + B + O + \cdots + O + \cdots) \\
&= (E + A)(E + B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

また，（1）より，

$$\exp(A + B) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

補足　とくに，A と B が可換でないときは，定理 12.1 の（1）は必ずしも成り立たないことがわかる．

（3）$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ とおくと，仮定より，

$$A^2 = -m^2\pi^2 E.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\exp A &= E + A - \frac{m^2\pi^2}{2!}E - \frac{m^2\pi^2}{3!}A + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{m^2\pi^2}{2!} + \frac{m^4\pi^4}{4!} - \cdots\right)E + \frac{1}{m\pi}\left(m\pi - \frac{m^3\pi^3}{3!} + \frac{m^5\pi^5}{5!} - \cdots\right)A
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos m\pi)E + \frac{\sin m\pi}{m\pi}A \\
&= \begin{cases} E & (m \text{ は偶数}) \\ -E & (m \text{ は奇数}). \end{cases}
\end{aligned}
$$

解 12.6

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2-b^2 & -bc & ca \\ -bc & -c^2-a^2 & -ab \\ ca & -ab & -b^2-c^2 \end{pmatrix}
$$

なので，

$$
A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -a^2-b^2 & -bc & ca \\ -bc & -c^2-a^2 & -ab \\ ca & -ab & -b^2-c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = -r^2A.
$$

よって，$k = 0, 1, 2, \cdots$ とすると，

$$
A^{2k+2} = (-1)^k r^{2k} A^2,\ A^{2k+1} = (-1)^k r^{2k} A.
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\exp A &= E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}(-r^2A) + \frac{1}{4!}(-r^2A^2) + \cdots \\
&= E + \frac{1}{r}\left(r - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} - \cdots\right)A + \frac{1}{r^2}\left\{1 - \left(1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \cdots\right)\right\}A^2 \\
&= E + \frac{\sin r}{r}A + \frac{1-\cos r}{r^2}A^2 \quad (\because \text{ 三角関数に対するマクローリン展開}).
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\exp A = E + \frac{\sin r}{r}A + \frac{1-\cos r}{r^2}A^2.
$$

§ 13 の問題解答

解 13.1　(1) 和やスカラー倍に関して閉じているベクトル空間の空ではない部分集合を部分空間という．

(2) (a) $\mathbf{0} \in W$ (b) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ (c) $c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in W$ ならば，$c\boldsymbol{x} \in W$，の 3 つである．

(3) (ア) $x_1 = 0$，$x_2 = 0$ は方程式

$$
x_1 + 2x_2 = 3
$$

をみたさないので，$\mathbf{0} \notin W$．よって，W は定理 13.3 の部分空間の条件 (1) をみたさない．したがって，W は $\mathbf{R}^2$ の部分空間ではない．

（イ）$c=-1$ とおくと，$c \in \mathbf{R}$．また，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$x_1=1$，$x_2=0$ は不等式

$$x_1 \geq 0 \tag{$*$}$$

をみたすので，$\boldsymbol{x} \in W$．しかし，

$$c\boldsymbol{x} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で，$x_1=-1$，$x_2=0$ は不等式 $(*)$ をみたさないので，$c\boldsymbol{x} \notin W$．よって，W は定理 13.3 の部分空間の条件（3）をみたさない．したがって，W は $\mathbf{R}^2$ の部分空間ではない．

解 13.2　（1）［部分空間の条件（1）］定理 13.3 の部分空間の条件（1）より，$\mathbf{0} \in W_1$ かつ $\mathbf{0} \in W_2$．よって，$\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$．

［部分空間の条件（2）］$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1 \cap W_2$ とすると，定理 13.3 の部分空間の条件（2）より，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_2$．よって，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_1 \cap W_2$．

［部分空間の条件（3）］$c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすると，定理 13.3 の部分空間の条件（3）より，$c\boldsymbol{x} \in W_1$ かつ $c\boldsymbol{x} \in W_2$．よって，$c\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$．

　したがって，定理 13.3 より，$W_1 \cap W_2$ は V の部分空間である．

（2）［部分空間の条件（1）］定理 13.3 の部分空間の条件（1）より，$\mathbf{0} \in W_1$，$\mathbf{0} \in W_2$．よって，

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2.$$

［部分空間の条件（2）］$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2 \in W_1+W_2$　（$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_1$，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in W_2$）とすると，定理 13.3 の部分空間の条件（2）より，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \in W_1$，$\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2 \in W_2$．よって，

$$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2) \in W_1+W_2.$$

［部分空間の条件（3）］$c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_1+W_2$　（$\boldsymbol{x} \in W_1$，$\boldsymbol{y} \in W_2$）とすると，定理 13.3 の部分空間の条件（3）より，$c\boldsymbol{x} \in W_1$，$c\boldsymbol{y} \in W_2$．よって，

$$c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y} \in W_1+W_2.$$

　したがって，定理 13.3 より，W_1+W_2 は V の部分空間である．

解 13.3　一般に，$\mathbf{R}[t]_n$ の元は実数 c_1，c_2，c_3，$\cdots$，c_{n+1} を用いて

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_{n+1} t^n = \sum_{k=1}^{n+1} c_k t^{k-1}$$

と表されることに注意する．

［部分空間の条件（1）］明らかに，$0 \in \mathbf{R}[t]_n$ である．

［部分空間の条件（2）］

$$\sum_{k=1}^{n+1} c_k t^{k-1}, \sum_{k=1}^{n+1} d_k t^{k-1} \in \mathbf{R}[t]_n \quad (c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{n+1}, d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{n+1} \in \mathbf{R})$$

とすると，

$$c_1 + d_1, c_2 + d_2, c_3 + d_3, \cdots, c_{n+1} + d_{n+1} \in \mathbf{R}.$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n+1} c_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} d_k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} (c_k + d_k) t^{k-1} \in \mathbf{R}[t]_n.$$

［部分空間の条件（3）］

$$c \in \mathbf{R}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} c_k t^{k-1} \in \mathbf{R}[t]_n$$

とすると，

$$cc_1, cc_2, cc_3, \cdots, cc_{n+1} \in \mathbf{R}$$

なので，

$$c \sum_{k=1}^{n+1} c_k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} (cc_k) t^{k-1} \in \mathbf{R}[t]_n.$$

したがって，定理 13.3 より，$\mathbf{R}[t]_n$ は $\mathbf{R}[t]$ の部分空間である．

解 13.4　まず，W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間であると仮定する．このとき，定理 13.3 の部分空間の条件（1）より，$O \in W$．ただし，O は l 行 m 列の零行列である．よって，W を定める条件式に $X = O$ を代入すると，$C = O$ となる．

逆に，$C = O$ であると仮定すると，

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = O\}.$$

［部分空間の条件（1）］明らかに，$O \in W$ である．

［部分空間の条件（2）］$X, Y \in W$ とすると，

$$A(X+Y)B = AXB + AYB = O + O = O.$$

よって，$X + Y \in W$．

［部分空間の条件（3）］$c \in \mathbf{R}$，$X \in W$ とすると，

$$A(cX)B = c(AXB) = cO = O.$$

よって，$cX \in W$．

したがって，定理 13.3 より，W は $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間である．

以上より，W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのは $C = O$ のときに限る．

解 13.5　対角成分以外と (n, n) 成分がすべて 0 で，その他の対角成分がすべて 1 の

$M_n(\mathbf{R})$ の元を X_1，(n,n) 成分が 1 で，その他の成分がすべて 0 の $M_n(\mathbf{R})$ の元を X_2，すなわち，

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \text{\huge 0} & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \text{\huge 0} \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ \text{\huge 0} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$|X_1| = |X_2| = 0$$

なので，$X_1, X_2 \in W$．しかし，$X_1 + X_2 = E$ なので，

$$|X_1 + X_2| = 1.$$

よって，$X_1 + X_2 \notin W$.

　したがって，定理 13.3 の部分空間の条件（2）の条件をみたさないので，W は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間ではない．

解 13.6　対偶を示す．すなわち，$W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_2 \not\subset W_1$ ならば，$W_1 \cup W_2$ は V の部分空間とならないことを示す．$W_1 \not\subset W_2$ より，$\boldsymbol{x} \notin W_2$ となる $\boldsymbol{x} \in W_1$ が存在する．また，$W_2 \not\subset W_1$ より，$\boldsymbol{y} \notin W_1$ となる $\boldsymbol{y} \in W_2$ が存在する．ここで，背理法により，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \notin W_1 \cup W_2$ であることを示す．$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_1 \cup W_2$ であると仮定する．このとき，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_1$ または $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_2$．$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_1$ のとき，W_1 は V の部分空間で $\boldsymbol{x} \in W_1$ なので，

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x} \in W_1.$$

これは上で導いた $\boldsymbol{y} \notin W_1$ であることに矛盾．同様に，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W_2$ のときも矛盾が導かれる．よって，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \notin W_1 \cup W_2$．したがって，定理 13.3 の部分空間の条件（2）をみたさないので，$W_1 \cup W_2$ は V の部分空間とならない．

P, Q : 命題

$P \Longrightarrow Q$　（P ならば Q）

$\Updownarrow$ 同値

$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$　（Q でないならば P でない）

図　対偶

§14 の問題解答

解 14.1　(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_m$ が自明な 1 次関係しかもたないとき，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_m$ は 1 次独立であるという．$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_m$ が 1 次独立でないとき，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_m$ は 1 次従属であるという．

(2)（ア）サラスの方法より，

$$\begin{aligned}\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right| &= 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1 \\ &= 4 \neq 0.\end{aligned}$$

よって，定理 14.3 より，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

（イ）

$$\begin{aligned}\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \right| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{\because\ \text{例 } 8.3}{=} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.\end{aligned}$$

よって，定理 14.3 より，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ は 1 次従属である．

解 14.2　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ についての同次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の係数行列の基本変形を行うと，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 2 行} \times 3]{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 1 行} \times 2]{\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

したがって，c を任意の定数として $x_3 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = -3c,\ x_2 = 2c,\ x_3 = c$$

となり，上の連立 1 次方程式は自明でない解をもつので，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属である．

解 14.3　(1) V の部分集合

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \in W_1,\ \boldsymbol{y} \in W_2\}$$

を W_1 と W_2 の和空間という．

(2) まず，

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \in W_1,\ \boldsymbol{y} \in W_2\} \quad (\because \text{(1) の和空間の定義}) \\ &= \{c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m + d_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{y}_n | c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_n \in \mathbf{R}\} \\ &(\because W_1,\ W_2 \text{ の条件}) \quad = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n \rangle_{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

よって，

$$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n \rangle_{\mathbf{R}}.$$

解 14.4　(1) まず，$\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{x}$，$A^2\boldsymbol{x}$，$\cdots$，$A^{m-1}\boldsymbol{x}$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{x} + c_2A\boldsymbol{x} + c_3A^2\boldsymbol{x} + \cdots + c_mA^{m-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad (c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m \in \mathbf{R}) \qquad (*)$$

を考える．$(*)$ の両辺に左から A^{m-1} を掛けて，仮定 $A^m = O$ を用いると，

$$c_1A^{m-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

仮定より，$A^{m-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので，定理 14.1 より，$A^{m-1}\boldsymbol{x}$ は 1 次独立である．よって，$c_1 = 0$.

次に，$l = 1, 2, 3, \cdots, m-1$ に対して，

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_l = 0$$

が成り立つと仮定する．$(*)$ より，

$$c_{l+1}A^l\boldsymbol{x} + c_{l+2}A^{l+1}\boldsymbol{x} + \cdots + c_mA^{m-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \qquad (**)$$

$(**)$ の両辺に左から A^{m-l-1} を掛けて，仮定 $A^m = O$ を用いると，

$$c_{l+1}A^{m-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

$A^{m-1}\boldsymbol{x}$ は 1 次独立なので，$c_{l+1} = 0$.

したがって，

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0$$

となり，$\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{x}$，$A^2\boldsymbol{x}$，$\cdots$，$A^{m-1}\boldsymbol{x}$ は自明な 1 次関係しかもたないので，これらは 1 次独立である．

(2)
$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & A\boldsymbol{x} & A^2\boldsymbol{x} & \cdots & A^{m-1}\boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

とおき，$\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$ についての同次連立 1 次方程式

$$By = \mathbf{0} \qquad (***)$$

を考える．このとき，B は $n \times m$ 行列であることに注意する．

定理 4.1 より，$\operatorname{rank} B \leq n$ である．

一方, (1) より，$(***)$ は自明な解しかもたない．よって，定理 5.2 の (1) より，$\operatorname{rank} B = m$.

したがって，$m \leq n$ が示された．

(3) $A^3 = O$ なので，

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} A^3\boldsymbol{x} & A^2\boldsymbol{x} & A\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A^2\boldsymbol{x} & A\boldsymbol{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^2\boldsymbol{x} & A\boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，

$$AP = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) より，P は正則であることに注意し，両辺に左から P^{-1} を掛けると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 15 の問題解答

解 15.1　係数行列の行に関する基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

となり，$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$ とおくと，解は

$$x_1 = -c_1 - c_2,\ x_2 = -c_1 + c_2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$$

と表されるので，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ -c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，解空間 W は

$$W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

となる．さらに，解空間の次元は $\dim W = 2$ で，例えば，$c_1 = 1$，$c_2 = 0$ および

$c_1 = 0$，$c_2 = 1$ とした $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が 1 組の基本解である．

解 15.2　まず，例 15.3 より，$\dim \mathbf{R}^3 = 3$ であることに注意する．また，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$(\because \text{第 3 行に関する余因子展開}) \overset{\because\ \text{サラスの方法}}{=} \cos\theta\cos\theta - (-\sin\theta)(\sin\theta) = 1.$$

よって，定理 14.3 より，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．したがって，定理 15.3 より，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底である．

解 15.3　$\dim \mathbf{R}^4 = 4$ なので，定理 15.3 より，$\mathbf{R}^4$ が $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ で生成されないのは $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属のときである．ここで，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\because\ \text{例 8.3}}{=} \left| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} \overset{\because\ \text{サラスの方法}}{=} \{(a+1)^2 - 4\}(a-1)^2$$

$$= (a+3)(a-1)^3.$$

定理 14.3 より，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3 = 0$$

なので，求める値は

$$a = -3, 1.$$

解 15.4　x_{ij} を行列 $X \in W$ の (i,j) 成分，E_{ij} を行列単位とする（単位行列と混同しないように注意せよ［⇨ **例 15.4**］）．

（1）対称行列の成分は $x_{ij} = x_{ji}$（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）をみたすので，

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}E_{ii} + \sum_{1 \le i < j \le n} x_{ij}(E_{ij} + E_{ji}).$$

ただし，$\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n}$ は $1 \le i < j \le n$ をみたすすべての自然数 i，j について，和をとることを意味する．ここで，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}$ は n 個の項の和で，$1 \le i < j \le n$ をみたす自然数 i，j の組 (i,j) の個数は

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

なので，$\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n}$ は $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の項の和である．よって，W の次元は

$$\dim W = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

また，$\{E_{ii}\ (i = 1, 2, \cdots, n),\ E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le n)\}$ は W の基底である．

（2）交代行列の成分は $x_{ij} = -x_{ji}$（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）をみたすので，

$$X = \sum_{1 \le i < j \le n} x_{ij}(E_{ij} - E_{ji}).$$

ここで,（1）で示したように，$\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n}$ は $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の項の和である．よって，W の次元は

$$\dim W = \frac{n(n-1)}{2}.$$

また，$\{E_{ij} - E_{ji}\ (1 \le i < j \le n)\}$ は W の基底である．

（3）上三角行列 X は

$$X = \sum_{1 \le i \le j \le n} x_{ij}E_{ij}$$

と表される．ここで，$1 \le i \le j \le n$ をみたす自然数 i，j の組 (i,j) の個数は

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

なので，$\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}$ は $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の項の和である．よって，W の次元は

$$\dim W = \frac{n(n+1)}{2}.$$

また，$\{E_{ij}\ (1 \le i \le j \le n)\}$ は W の基底である．

（4）トレースの定義式 (12.21) と条件 $\mathrm{tr}\, X = 0$ より，

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = 0$$

なので，

$$X = \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i \ne j}} x_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}(E_{ii} - E_{nn}).$$

ここで，(n,n) 成分以外の X の成分の個数は n^2-1．よって，W の次元は

$$\dim W = n^2 - 1.$$

また，$\{E_{ij}\ (i \ne j),\ E_{ii} - E_{nn}\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)\}$ は W の基底である．

解 15.5　（1）$\Leftrightarrow$（2）:（1）を仮定する．このとき，部分空間に対する次元定理より，

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0.$$

よって，

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

すなわち，（2）が成り立つ．上の議論は逆にたどることもできるので，（2）を仮定すると，（1）が成り立つ．

（2）$\Rightarrow$（3）:（2）を仮定する．$\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \quad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 \in W_2)$$

と 2 通りに表されたとする．このとき，

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{x}_2.$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W_1$ より，左辺は W_1 の元で，$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 \in W_2$ より，右辺は W_2 の元なので，

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{x}_2 \in W_1 \cap W_2.$$

よって，仮定より，

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

すなわち，

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2.$$

したがって，（3）が成り立つ．

（3）$\Rightarrow$（2）:（3）を仮定する．$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすると，

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{x} & + & (-\boldsymbol{x}) & = \boldsymbol{0} = & \boldsymbol{0} & + & \boldsymbol{0} \\ \Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap \\ W_1 & & W_2 & & W_1 & & W_2 \end{array}$$

なので，仮定より，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．よって，

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}.$$

すなわち，(2) が成り立つ．

以上より，(1)～(3) は互いに同値である．

§16 の問題解答

解 16.1　求める成分を x_1，x_2，x_3 とすると，(16.8) より，x_1，x_2，x_3 は連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v},$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

の解である．係数行列を A，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とし，拡大係数行列 $(A|\boldsymbol{b})$ の行に関する基本変形を行うと，

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 2 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行} \times(-1)]{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 行} + \text{第 3 行} \times 3]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} + \text{第 2 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

したがって，$\boldsymbol{v}$ の成分は

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{2}.$$

解 16.2　求める基底変換行列を P とすると，(16.19) より，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} P. \qquad (*)$$

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & E_3 \end{pmatrix}$ に対して，行に関する基本変形を行うと，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} \times \left(-\frac{1}{12}\right)]{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times 2]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array}\right).$$

よって，$(*)$ の両辺に左から $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けると，

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 10 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 16.3　① P　② Q

③ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} PQ$

なので，求める答えは PQ.

④ $Q^{-1}P^{-1}$

解 16.4　(1) $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2$$

と一意的に表したときの x_1，x_2 を基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の成分という.

(2) 等式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} P$$

をみたす 2 次の正方行列 P を基底変換 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} \to \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ の基底変換行列という.

(3) 定理 16.3 より，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{\because\ \text{定理 } 6.1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$y_1 = -1,\ y_2 = 2.$$

解 16.5　(1) $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$，$f_4(t)$ の形より，ただちに

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

とわかる．

(2) P は上三角行列なので，

$$|P| = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \neq 0$$

よって，定理 16.2 より，$\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$ は $\mathbf{R}[t]_3$ の基底である．

§ 17 の問題解答

解 17.1　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ とすると，

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = g(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) \quad (\because\ \text{合成写像の定義}) \quad = g(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}))$$
$$(\because\ f\ \text{は線形写像}) \quad = g(f(\boldsymbol{x})) + g(f(\boldsymbol{y})) \quad (\because\ g\ \text{は線形写像})$$
$$= (g \circ f)(\boldsymbol{x}) + (g \circ f)(\boldsymbol{y}) \quad (\because\ \text{合成写像の定義}).$$

よって，

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) + (g \circ f)(\boldsymbol{y})$$

となり，定義 17.1 の (1) の性質が成り立つ．

また，$c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in U$ とすると，

$$(g \circ f)(c\boldsymbol{x}) = g(f(c\boldsymbol{x})) \quad (\because\ \text{合成写像の定義}) \quad = g(cf(\boldsymbol{x})) \quad (\because\ f\ \text{は線形写像})$$
$$= cg(f(\boldsymbol{x})) \quad (\because\ g\ \text{は線形写像}) \quad = c(g \circ f)(\boldsymbol{x}) \quad (\because\ \text{合成写像の定義}).$$

よって，

$$(g \circ f)(c\boldsymbol{x}) = c(g \circ f)(\boldsymbol{x})$$

となり，定義 17.1 の (2) の性質が成り立つ．

したがって，$g \circ f$ は線形写像である．

解 17.2　まず，2 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立で，A の列ベクトルからどの 3 個を選んでもそれらは 1 次従属である．よって，定理 17.5 より，$\mathrm{rank}\, A = 2$ で，$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底である．

次に，同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を考えると，

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

よって，$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$ とおくと，解は

$$x_1 = 0,\ x_2 = -2c_1,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$$

と表されるので，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\mathrm{Ker}\, f_A = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\, c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

となり，例えば，$c_1 = 1$，$c_2 = 0$ および $c_1 = 0$，$c_2 = 1$ とした $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が $\mathrm{Ker}\, f_A$ の 1 組の基底である．

さらに，上の計算より，f_A の階数 $\mathrm{rank}\, f_A$ および退化次数 $\mathrm{null}\, f_A$ はそれぞれ

$$\mathrm{rank}\, f_A = \dim(\mathrm{Im}\, f_A) = 2,\ \mathrm{null}\, f_A = \dim(\mathrm{Ker}\, f_A) = 2$$

である．よって，

$$\mathrm{rank}\, f_A + \mathrm{null}\, f_A = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbf{R}^4$$

となり，f_A に対して次元定理

$$\mathrm{rank}\, f_A + \mathrm{null}\, f_A = \dim \mathbf{R}^4$$

が成り立つ．

解 17.3　$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}_V \quad (c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbf{R})$$

を考えると，

$$f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m) = f(\mathbf{0}_V).$$

f は線形写像で，$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ なので，

$$c_1 f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 f(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + c_m f(\boldsymbol{x}_m) = \mathbf{0}_W.$$

仮定より，$f(\boldsymbol{x}_1)$，$f(\boldsymbol{x}_2)$，$\cdots$，$f(\boldsymbol{x}_m)$ は 1 次独立なので，

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

よって，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ は 1 次独立である．

解 17.4　(1)（$\Rightarrow$）を示す：f が全射であると仮定する．まず，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, f$ ($\boldsymbol{x} \in V$) とすると，f の値域は W なので，$f(\boldsymbol{x}) \in W$．よって，$\mathrm{Im}\, f \subset W$．逆に，$\boldsymbol{y} \in W$ とすると，仮定より，f は全射なので，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in V$ が存在する．よって，$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$．すなわち，$W \subset \mathrm{Im}\, f$．したがって，$\mathrm{Im}\, f = W$ である．

（$\Leftarrow$）を示す：$\mathrm{Im}\, f = W$ であると仮定する．$\boldsymbol{y} \in W$ とすると，仮定より，W は $\mathrm{Im}\, f$ に等しいので，$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$．よって，像の定義式 (17.19) より，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in V$ が存在する．したがって，f は全射である．

以上より，f が全射であることと $\mathrm{Im}\, f = W$ は同値である．

(2)（$\Rightarrow$）を示す：f が単射であると仮定する．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると，

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W \quad (\because \text{ 核の定義式（17.19）}) \quad = f(\mathbf{0}_V) \quad (\because \text{ 線形写像の性質}).$$

仮定より，f は単射なので，(17.3) より，$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_V$．よって，$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_V\}$ である．

（$\Leftarrow$）を示す：$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_V\}$ であると仮定する．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ をみたすとすると，f は線形写像なので，

$$f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W.$$

すなわち，$f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W$ なので，核の定義式 (17.19) より，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\, f$．仮定より，$f$ の核の元は $\mathbf{0}_V$ のみなので，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}_V$．すなわち，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$．よって，$f$ は単射である．

したがって，f が単射であることと $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_V\}$ は同値である．

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ および任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して，

$$f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}) \qquad (*)$$
$$f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x}) \qquad (**)$$

が成り立つことを示せばよい．

まず，逆写像の定義より，

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}.$$

一方，

$f(f^{-1}(\boldsymbol{x})+f^{-1}(\boldsymbol{y}))=f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))+f(f^{-1}(\boldsymbol{y}))$ $(\because f$ は線形写像$)$ $=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ $(\because$ 逆写像の定義$)$.

よって，

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))=f(f^{-1}(\boldsymbol{x})+f^{-1}(\boldsymbol{y})).$$

f は単射なので，$(*)$ が成り立つ．

次に，逆写像の定義より，

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x}))=c\boldsymbol{x}.$$

一方，

$$f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))=cf(f^{-1}(\boldsymbol{x}))\quad(\because f\text{ は線形写像})\quad=c\boldsymbol{x}\quad(\because\text{ 逆写像の定義}).$$

よって，

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x}))=f(cf^{-1}(\boldsymbol{x})).$$

f は単射なので，$(**)$ が成り立つ．

したがって，f^{-1} は W から V への線形写像である．

解 17.5　（$\Rightarrow$）を示す：$f\circ f$ が零写像であると仮定する．$f(\boldsymbol{x})\in \mathrm{Im}\,f$（$\boldsymbol{x}\in V$）とすると，仮定より，$f\circ f$ は零写像なので，

$$f(f(\boldsymbol{x}))=(f\circ f)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}.$$

よって，$f(\boldsymbol{x})\in \mathrm{Ker}\,f$．したがって，$\mathrm{Im}\,f\subset \mathrm{Ker}\,f$ である．

（$\Leftarrow$）を示す：$\mathrm{Im}\,f\subset \mathrm{Ker}\,f$ であると仮定する．$\boldsymbol{x}\in V$ とすると，$f(\boldsymbol{x})\in \mathrm{Im}\,f$．仮定より，$\mathrm{Im}\,f$ は $\mathrm{Ker}\,f$ に含まれているので，

$$\boldsymbol{0}=f(f(\boldsymbol{x}))=(f\circ f)(\boldsymbol{x}).$$

よって，$f\circ f$ は零写像である．

以上より，$f\circ f$ が零写像であることと $\mathrm{Im}\,f\subset \mathrm{Ker}\,f$ は同値である．

解 17.6　(1) $f+g\in V^*$ を示す：任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ および任意の $c\in\mathbf{R}$ に対して，

$$(f+g)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(f+g)(\boldsymbol{x})+(f+g)(\boldsymbol{y})\qquad\text{(i)}$$
$$(f+g)(c\boldsymbol{x})=c(f+g)(\boldsymbol{x})\qquad\text{(ii)}$$

が成り立つことを示せばよい．

まず，

$$\begin{aligned}(f+g)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})&=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\quad(\because f+g\text{ の定義})\\&=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{y})\quad(\because\text{ 線形写像の性質}).\end{aligned}$$

一方，$f+g$ の定義より，

$$(f+g)(\boldsymbol{x})+(f+g)(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{y}).$$

よって，(i) が成り立つ．

次に，

$$(f+g)(c\boldsymbol{x}) = f(c\boldsymbol{x}) + g(c\boldsymbol{x}) \quad (\because\ f+g \text{ の定義}) = cf(\boldsymbol{x}) + cg(\boldsymbol{x})$$
$$(\because \text{ 線形写像の性質}).$$

一方，

$$c(f+g)(\boldsymbol{x}) = c(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) \quad (\because\ f+g \text{ の定義}) \overset{\because \text{ 定義 } 13.1\,(6)}{=} cf(\boldsymbol{x}) + cg(\boldsymbol{x}).$$

よって，(ii) が成り立つ．

したがって，$f+g \in V^*$．

$cf \in V^*$ を示す：任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ および任意の $d \in \mathbf{R}$ に対して，

$$(cf)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (cf)(\boldsymbol{x}) + (cf)(\boldsymbol{y}) \tag{iii}$$
$$(cf)(d\boldsymbol{x}) = d(cf)(\boldsymbol{x}) \tag{iv}$$

が成り立つことを示せばよい．

まず，

$$(cf)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = cf(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \quad (\because\ cf \text{ の定義}) \quad = c(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}))$$
$$(\because \text{ 線形写像の性質}) \overset{\because \text{ 定義 } 13.1\,(6)}{=} cf(\boldsymbol{x}) + cf(\boldsymbol{y}).$$

一方，cf の定義より，

$$(cf)(\boldsymbol{x}) + (cf)(\boldsymbol{y}) = cf(\boldsymbol{x}) + cf(\boldsymbol{y}).$$

よって，(iii) が成り立つ．

次に，

$$(cf)(d\boldsymbol{x}) = cf(d\boldsymbol{x}) \quad (\because\ cf \text{ の定義}) = cdf(\boldsymbol{x}) \quad (\because \text{ 線形写像の性質}).$$

一方，

$$d(cf)(\boldsymbol{x}) = dcf(\boldsymbol{x}) \quad (\because\ cf \text{ の定義}) \quad = cdf(\boldsymbol{x}).$$

よって，(iv) が成り立つ．

したがって，$cf \in V^*$．

(2)［ベクトル空間の条件 (1)（和の交換律）］$f, g \in V^*$ とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \quad (\because\ f+g \text{ の定義}) \quad = g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})$$
$$(\because\ \mathbf{R} \text{ に対する和の交換律}) \quad = (g+f)(\boldsymbol{x}) \quad (\because\ g+f \text{ の定義}).$$

よって，

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = (g+f)(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので，

$$f+g=g+f.$$

［ベクトル空間の条件（2）（和の結合律）］$f,g,h\in V^*$ とすると，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，

$$((f+g)+h)(\boldsymbol{x})=(f+g)(\boldsymbol{x})+h(\boldsymbol{x})\quad(\because\ (f+g)+h\ \text{の定義})$$
$$=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})+h(\boldsymbol{x})\quad(\because\ f+g\ \text{の定義})=f(\boldsymbol{x})+(g+h)(\boldsymbol{x})$$
$$(\because\ g+h\ \text{の定義})\quad=(f+(g+h))(\boldsymbol{x})\quad(\because\ f+(g+h)\ \text{の定義}).$$

よって，

$$((f+g)+h)(\boldsymbol{x})=(f+(g+h))(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので，

$$(f+g)+h=f+(g+h).$$

［ベクトル空間の条件（3）］$\mathbf{0}_{V^*}$ を V から $\mathbf{R}$ への零写像とすると，任意の $f\in V^*$ および任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，

$$(f+\mathbf{0}_{V^*})(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\mathbf{0}_{V^*}(\boldsymbol{x})\quad(\because\ f+\mathbf{0}_{V^*}\ \text{の定義})=f(\boldsymbol{x})+0$$
$$(\because\ \mathbf{0}_{V^*}\ \text{の定義})\quad=f(\boldsymbol{x})\quad(\because\ 0\ \text{は}\ \mathbf{R}\ \text{の零ベクトル})$$

同様に，

$$(\mathbf{0}_{V^*}+f)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}).$$

よって，

$$(f+\mathbf{0}_{V^*})(\boldsymbol{x})=(\mathbf{0}_{V^*}+f)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので，

$$f+\mathbf{0}_{V^*}=\mathbf{0}_{V^*}+f=f.$$

したがって．$\mathbf{0}_{V^*}$ は V^* の零ベクトルである．

［ベクトル空間の条件（4）（スカラー倍の結合律）］$c,d\in\mathbf{R}$，$f\in V^*$ とすると，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，

$$(c(df))(\boldsymbol{x})=c(df)(\boldsymbol{x})\quad(\because\ c(df)\ \text{の定義})\quad=cdf(\boldsymbol{x})\quad(\because\ df\ \text{の定義})$$
$$=((cd)f)(\boldsymbol{x})\quad(\because\ (cd)f\ \text{の定義}).$$

よって，

$$(c(df))(\boldsymbol{x})=((cd)f)(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので，

$$c(df)=(cd)f.$$

［ベクトル空間の条件（5）（分配律 I）］$c,d\in\mathbf{R}$，$f\in V^*$ とすると，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，

$$((c+d)f)(\boldsymbol{x})=(c+d)f(\boldsymbol{x})\quad(\because\ (c+d)f\ \text{の定義})\quad=cf(\boldsymbol{x})+df(\boldsymbol{x})$$
$$(\because\ \mathbf{R}\ \text{に対する分配律 I})=(cf)(\boldsymbol{x})+(df)(\boldsymbol{x})\quad(\because\ cf,\ df\ \text{の定義})$$

$= (cf + df)(\boldsymbol{x})$　($\because$ $cf + df$ の定義).

よって，
$$((c+d)f)(\boldsymbol{x}) = (cf + df)(\boldsymbol{x}).$$
$\boldsymbol{x}$ は任意なので，
$$(c+d)f = cf + df.$$
［ベクトル空間の条件（6）（分配律 II）］$c \in \mathbf{R}$，$f, g \in V^*$ とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$(c(f+g))(\boldsymbol{x}) = c(f+g)(\boldsymbol{x})$　($\because$ $c(f+g)$ の定義)　$= c(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}))$
($\because$ $f+g$ の定義) $= cf(\boldsymbol{x}) + cg(\boldsymbol{x})$　($\because$ $\mathbf{R}$ に対する分配律 II)
$= (cf)(\boldsymbol{x}) + (cg)(\boldsymbol{x})$　($\because$ cf，cg の定義)
$= (cf + cg)(\boldsymbol{x})$　($\because$ $cf + cg$ の定義).

よって，
$$(c(f+g))(\boldsymbol{x}) = (cf + cg)(\boldsymbol{x}).$$
$\boldsymbol{x}$ は任意なので，
$$c(f+g) = cf + cg.$$
［ベクトル空間の条件（7）］$f \in V^*$ とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$(1f)(\boldsymbol{x}) = 1f(\boldsymbol{x})$　($\because$ $1f$ の定義)　$= f(\boldsymbol{x})$
($\because$ $\mathbf{R}$ に対するベクトル空間の条件（7）).

よって，
$$(1f)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$
$\boldsymbol{x}$ は任意なので，
$$1f = f.$$
［ベクトル空間の条件（8）］$f \in V^*$ とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$(0f)(\boldsymbol{x}) = 0f(\boldsymbol{x})$　($\because$ $0f$ の定義)　$= 0$
($\because$ $\mathbf{R}$ に対するベクトル空間の条件（8）)　$= \mathbf{0}_{V^*}(\boldsymbol{x})$　($\because$ $\mathbf{0}_{V^*}$ の定義).

よって，
$$(0f)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_{V^*}(\boldsymbol{x}).$$
$\boldsymbol{x}$ は任意なので，
$$0f = \mathbf{0}_{V^*}.$$
　以上の（1）～（8）より，V^* はベクトル空間となる．

（3）まず，f_1，f_2，$\cdots$，f_n の 1 次関係
$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = \mathbf{0}_{V^*} \quad (c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbf{R})$$
を考える．$j = 1, 2, \cdots, n$ とすると，

$$0 = \mathbf{0}_{V^*}(\boldsymbol{a}_j) = (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)(\boldsymbol{a}_j)$$
$$= c_1 f_1(\boldsymbol{a}_j) + c_2 f_2(\boldsymbol{a}_j) + \cdots + c_n f_n(\boldsymbol{a}_n) = c_1\delta_{1j} + c_2\delta_{2j} + \cdots + c_n\delta_{nj} = c_j. \quad (*)$$

よって,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

したがって，f_1，f_2，$\cdots$，f_n は自明な 1 次関係しかもたないので，これらは 1 次独立である．

次に，任意の $f \in V^*$ に対して，$j = 1, 2, \cdots, n$ とすると，$(*)$ の計算より，

$$(f(\boldsymbol{a}_1)f_1 + f(\boldsymbol{a}_2)f_2 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)f_n)(\boldsymbol{a}_j) = f(\boldsymbol{a}_j).$$

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は V の基底なので，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$(f(\boldsymbol{a}_1)f_1 + f(\boldsymbol{a}_2)f_2 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)f_n)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので,

$$f = f(\boldsymbol{a}_1)f_1 + f(\boldsymbol{a}_2)f_2 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)f_n.$$

よって, V^* は f_1，f_2，$\cdots$，f_n で生成される．

以上および定義 15.1 より，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ は V^* の基底である．

§18 の問題解答

解 18.1　まず,

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

よって，求める表現行列を A とおくと,

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A.$$

したがって,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{\because\ \text{定理 } 6.1}{=} -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & -20 & 5 \\ 5 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

または，例 18.2 の方法で計算すると，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\because \text{定理 } 6.1}{=} -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -20 & 5 \\ 5 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 18.2　表現行列の定義式 (18.1) より，それぞれ

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} A,$$
$$\begin{pmatrix} g(\boldsymbol{a}_1) & g(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} B$$

なので，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} (f+g)(\boldsymbol{a}_1) & (f+g)(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (f+g)(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1)+g(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2)+g(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n)+g(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{a}_1) & g(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} B \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} (A+B).
\end{aligned}$$

よって，基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ に関する $f+g$ の表現行列は $A+B$ である．

また，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} (cf)(\boldsymbol{a}_1) & (cf)(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (cf)(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cf(\boldsymbol{a}_1) & cf(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & cf(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} \\
&= c\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} A \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} (cA).
\end{aligned}$$

よって，基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ に関する cf の表現行列は cA である．

解 18.3　A の (k, i) 成分を a_{ki}，B の (j, k) 成分を b_{jk} とおくと，$i = 1, 2, \cdots, n$ のとき，

$$(g \circ f)(\boldsymbol{a}_i) = g(f(\boldsymbol{a}_i)) \quad (\because \text{合成写像の定義})$$

$$= g(a_{1i}\boldsymbol{b}_1 + a_{2i}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{b}_m) \quad (\because \text{表現行列 } A \text{ の定義}) \quad = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} g(\boldsymbol{b}_k)$$

$$(\because \text{線形写像の性質}) \quad = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}(b_{1k}\boldsymbol{c}_1 + b_{2k}\boldsymbol{c}_2 + \cdots + b_{lk}\boldsymbol{c}_l)$$

$$(\because \text{表現行列 } B \text{ の定義}) \quad = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \sum_{j=1}^{l} b_{jk}\boldsymbol{c}_j = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{ki} \boldsymbol{c}_j.$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_{jk}a_{ki}$ は BA の (j,i) 成分なので，求める表現行列は BA である．

補足　線形写像の合成写像の表現行列を考えると，**2・3** で定義した行列の積が自然なものであることがわかる．

$$
\begin{tikzcd}
& V \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \\
& \mathbf{R}^m \arrow[dr, "B"] & \\
U \cong \mathbf{R}^n \arrow[ur, "A"] \arrow[rr, "BA"'] & & \mathbf{R}^l \cong W
\end{tikzcd}
$$

図　合成写像の表現行列

f をベクトル空間 V からベクトル空間 W への線形写像，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ をそれぞれ V，W の基底，A を基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ に関する f の表現行列とする．このとき，

$$f \text{ は同型写像} \iff m = n \text{ で，} A \text{ は正則}$$

である．さらに，f が同型写像のとき，基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する f^{-1} の表現行列は A^{-1} であることがわかる（✍）．

解 18.4　（1）背理法により示す．f が全射であると仮定すると，問 17.4 の（1）より，

$$\mathrm{Im}\, f = V. \tag{i}$$

また，f が単射であると仮定すると，問 17.4 の（2）より，

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_V\}. \tag{ii}$$

さらに，仮定

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f \tag{iii}$$

および線形写像に対する次元定理

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim V$$

より，

$$\dim V = 2\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2\dim(\mathrm{Ker}\, f). \tag{iv}$$

よって，(i)，(ii) のいずれの場合も $\dim V = 0$ となるので，V は零空間である．これは V が零空間ではないことに矛盾する．したがって，f は全射でも単射でもない．

(2) $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r \in \mathrm{Im}\, f$ および仮定 (iii) より，

$$f(\boldsymbol{b}_1) = \cdots = f(\boldsymbol{b}_r) = \boldsymbol{0}. \tag{v}$$

$\boldsymbol{a}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_r$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r + d_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0} \quad (c_1, \cdots, c_r, d_1, \cdots, d_r \in \mathbf{R}) \tag{vi}$$

を考えると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &= f(\boldsymbol{0}) \quad (\because \text{ 線形写像の性質}) \\
&\overset{\because\ (\mathrm{vi})}{=} f(c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r + d_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{b}_r) \\
&= c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + c_r f(\boldsymbol{a}_r) + d_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + d_r f(\boldsymbol{b}_r) \quad (\because \text{ 線形写像の性質}) \\
&= c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r \quad (\because\ \boldsymbol{b}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_r \text{ の定義および (v)}).
\end{aligned}$$

よって，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0}.$$

$\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底なので，

$$c_1 = \cdots = c_r = 0. \tag{vii}$$

(vii) を (vi) に代入すると，

$$d_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0}.$$

$\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底なので，

$$d_1 = \cdots = d_r = 0.$$

したがって，

$$c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_r = 0$$

となり，$\boldsymbol{a}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_r$ は自明な 1 次関係しかもたないので，$\boldsymbol{a}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_r$ は 1 次独立である．

(3) (iv) より，

$$\dim V = 2r.$$

$\boldsymbol{a}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_r$ は V の 1 次独立な $2r$ 個のベクトルなので，定理 15.3 より，これらは V の基底である．

(4) $\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_r$ の定義および (v) より，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_r) & f(\boldsymbol{b}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{b}_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_r & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ E & O \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ただし，O は r 次の零行列，E は r 次の単位行列である．よって，求める表現行列は $\begin{pmatrix} O & O \\ E & O \end{pmatrix}$ である．

§19 の問題解答

解 19.1　［部分空間の条件（1）］同次連立 1 次方程式は自明な解 $\mathbf{0}$ をもつから，$\mathbf{0} \in \widetilde{W}(\lambda)$.

［部分空間の条件（2）］$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \widetilde{W}(\lambda)$ とすると，ある自然数 k，l が存在し

$$(\lambda E - A)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ (\lambda E - A)^l \boldsymbol{y} = \mathbf{0}.$$

m を $m \geq k$，$m \geq l$ をみたす自然数とすると，

$$(\lambda E - A)^m (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\lambda E - A)^m \boldsymbol{x} + (\lambda E - A)^m \boldsymbol{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

よって，

$$(\lambda E - A)^m (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}.$$

すなわち，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \widetilde{W}(\lambda)$.

［部分空間の条件（3）］$c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}(\lambda)$ とすると，ある自然数 k が存在し

$$(\lambda E - A)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

なので，

$$(\lambda E - A)^k (c\boldsymbol{x}) = c(\lambda E - A)^k \boldsymbol{x} = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

よって，

$$(\lambda E - A)^k (c\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

すなわち，$c\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}(\lambda)$.

　したがって，定理 13.3 より，$\widetilde{W}(\lambda)$ は $\mathbf{R}^n$ の部分空間である．

解 19.2　（1）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．

$\boxed{\text{Step 1}}$　A の固有値を求める．A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - (-1)(-2) = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

よって，A の固有値 λ は固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ の解なので，$\lambda = 0, 3$ である．

$\boxed{\text{Step 2}}$　固有値 $\lambda = 0$ に対する A の 1 つの固有ベクトルと固有空間 $W(0)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

において $\lambda=0$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$-A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-x_1-x_2=0,\ -2x_1-2x_2=0$$

となり，$c\in\mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_2=c$ とおくと，解は

$$x_1=-c,\ x_2=c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，例えば，$c=1$ とした $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求める 1 つの固有ベクトルである．また，固有空間 $W(0)$ は

$$W(0)=\left\{c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\middle|\, c\in\mathbf{R}\right\}$$

である．

$\boxed{\text{Step 3}}$　固有値 $\lambda=3$ に対する A の 1 つの固有ベクトルと固有空間 $W(3)$ を求める．

$(*)$ において $\lambda=3$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(3E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

が得られる．すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$2x_1-x_2=0,\ -2x_1+x_2=0$$

となり，$c\in\mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は

$$x_1=c,\ x_2=2c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表されるので，例えば，$c=1$ とした $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が求める 1 つの固有ベクトルである．また，固有空間 $W(3)$ は

$$W(3) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$$

である．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．

$\boxed{\text{Step 1}}$　A の固有値を求める．A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{\because \text{サラスの方法}}{=} (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)+0$$

$$+0-0-4(\lambda-3)-4(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)-8(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)\{(\lambda-1)(\lambda-3)-8\} = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda-5) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5).$$

よって，A の固有値 λ は固有方程式 $\phi_A(\lambda)=0$ の解なので，$\lambda=-1,2,5$ である．

$\boxed{\text{Step 2}}$　固有値 $\lambda=-1$ に対する A の 1 つの固有ベクトルと固有空間 $W(-1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

において $\lambda=-1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，

$$(-E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

係数行列 $-E-A$ に対して行に関する基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} \times (-\frac{1}{2})]{\text{第 1 行} \times (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} + \text{第 1 行} \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} + \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$x_1 - 2x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_3 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = 2c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，例えば，$c=1$ とした $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求める 1 つの固有ベクトルである．また，固有空間 $W(-1)$ は

$$W(-1) = \left\{ c\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$$

である．

$\boxed{\text{Step 3}}$ 固有値 $\lambda = 2$ に対する A の 1 つの固有ベクトルと固有空間 $W(2)$ を求める．

$(*)$ において $\lambda = 2$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(2E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られる．係数行列 $2E - A$ に対して行に関する基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} \times(-1)]{\text{第 2 行} + \text{第 1 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} + \text{第 3 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$x_1 - 2x_2 = 0,\ 2x_2 + x_3 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_2 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = 2c,\ x_2 = c,\ x_3 = -2c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ c \\ -2c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と表されるので，例えば，$c=1$ とした $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ が求める 1 つの固有ベクトルである．また，固有空間 $W(2)$ は

$$W(2)=\left\{c\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\middle| c\in\mathbf{R}\right\}$$

である．

$\boxed{\text{Step 4}}$　固有値 $\lambda=5$ に対する A の 1 つの固有ベクトルと固有空間 $W(5)$ を求める．

$(*)$ において $\lambda=5$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(5E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

が得られる．係数行列 $5E-A$ に対して行に関する基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行}\times\frac{1}{2}]{\text{第 1 行}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行}+\text{第 3 行}\times 2}$$
$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行}+\text{第 1 行}]{\text{第 2 行}-\text{第 1 行}}\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix}.$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$-2x_1+x_2=0,\ -2x_1+x_3=0$$

となり，$c\in\mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は

$$x_1=c,\ x_2=2c,\ x_3=2c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\2c\\2c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

と表されるので，例えば，$c=1$ とした $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ が求める 1 つの固有ベクトルである．

また，固有空間 $W(5)$ は

$$W(5) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$$

である．

(3)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．

$\boxed{\text{Step 1}}$　A の固有値を求める．A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{\because\ \text{サラスの方法}}{=} (\lambda-2)^3 - 1 - 1$$
$$- (\lambda-2) - (\lambda-2) - (\lambda-2) = (\lambda-2)^3 - 3(\lambda-2) - 2$$
$$= \{(\lambda-2)+1\}\{(\lambda-2)^2 - (\lambda-2) - 2\}$$
$$= (\lambda-1)\{(\lambda-2)+1\}\{(\lambda-2)-2\} = (\lambda-1)^2(\lambda-4).$$

よって，A の固有値 λ は固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ の解なので，$\lambda = 1$ (重解), 4 である．

$\boxed{\text{Step 2}}$　固有値 $\lambda = 1$ に対する A の 1 つの固有ベクトルと固有空間 $W(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，

$$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

となり，$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ を任意の定数とすると，解は

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = -c_1 - c_2.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，例えば，$c_1 = 1$，$c_2 = 0$ とした $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が求める 1 つの固有ベクトルである．また，固有空間 $W(1)$ は

$$W(1) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

である．

$\boxed{\text{Step 3}}$　固有値 $\lambda = 4$ に対する A の 1 つの固有ベクトルと固有空間 $W(4)$ を求める．

$(*)$ において $\lambda = 4$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(4E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られる．係数行列 $4E - A$ に対して行に関する基本変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times (-1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} + \text{第 2 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 3 行} + \text{第 1 行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \frac{1}{3}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} + \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって，方程式に戻すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_3 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = c,\ x_2 = c,\ x_3 = c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，例えば，$c = 1$ とした $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求める 1 つの固有ベクトルである．

また，固有空間 $W(4)$ は

$$W(4) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$$

である．

解 19.3　まず，

$$\mathrm{tr}\, A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,\ |A| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - 11 \cdot \frac{1}{9} = -1.$$

よって，2 次の正方行列に対するケイリー - ハミルトンの定理 (19.27) より，

$$A^2 - A - E = O.$$

したがって，

$$\begin{aligned} f(A) &= A^4 - A^3 - A^2 + 9A - E = A^2(A^2 - A - E) + 9A - E \\ &= A^2 O + 9 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 11 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 99 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 99 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

解 19.4　(1) 任意のベクトルを零ベクトルへ対応させる線形写像を零写像という．
(2) $\boldsymbol{x}$ を固有値 λ に対する f の固有ベクトルとすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= f^m(\boldsymbol{x}) \quad (\because f^m \text{ は零写像}) \quad = f^{m-1}(f(\boldsymbol{x})) \overset{\because (19.2)}{=} f^{m-1}(\lambda \boldsymbol{x}) \\ &= \lambda f^{m-1}(\boldsymbol{x}) \quad (\because f^{m-1} \text{ は線形写像}) \quad = \cdots = \lambda^m \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

すなわち，$\boldsymbol{x}$ は 1 次関係

$$\lambda^m \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

をみたす．固有ベクトルの定義より，$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ なので，定理 14.1 より，$\boldsymbol{x}$ は 1 次独立である．よって，$\boldsymbol{x}$ は自明な 1 次関係しかもたないので，$\lambda^m = 0$．したがって，$\lambda = 0$．すなわち，f の固有値は 0 のみである．

解 19.5　n を自然数とし，A を奇数 $(2n-1)$ 次の直交行列とする．A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ に $\lambda = 1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} \phi_A(1) &= |E - A| \overset{\because |A|=1}{=} |A||E - A| \overset{\because \text{定理 } 8.3}{=} |{}^t A||E - A| \\ &\overset{\because \text{定理 } 8.8}{=} |{}^t A(E - A)| \overset{\because {}^t AA = E}{=} |{}^t A - E| \overset{\because \text{定理 } 8.3}{=} |A - E| \\ &= (-1)^{2n-1}|E - A| (\because \text{各列に定理 } 8.2 \text{ (2) の多重線形性を適用}) = -\phi_A(1). \end{aligned}$$

よって，

$$\phi_A(1) = -\phi_A(1).$$

したがって，$\phi_A(1) = 0$．すなわち，A は 1 を固有値にもつ．

§ 20 の問題解答

解 20.1 $\boxed{\text{Step 1}}$ 基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する Ψ の表現行列を求める．$f(t) \in \mathbf{R}[t]_2$ とすると，$f(t) = 1$ のとき，

$$\Psi(f(t)) = \Psi(1) = 1 + \frac{d}{dt}1 = 1 + 0 = 1,$$

$f(t) = t$ のとき，

$$\Psi(f(t)) = \Psi(t) = -t + \frac{d}{dt}t = -t + 1,$$

$f(t) = t^2$ のとき，

$$\Psi(f(t)) = \Psi(t^2) = (-t)^2 + \frac{d}{dt}t^2 = t^2 + 2t$$

なので，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \Psi(1) & \Psi(t) & \Psi(t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t+1 & t^2+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 2t+t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する Ψ の表現行列を A とおくと，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ Ψ の固有値を求める．Ψ の固有多項式は

$$\phi_\Psi(\lambda) = \phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

よって，Ψ の固有値 λ は固有方程式 $\phi_\Psi(\lambda) = 0$ の解なので，$\lambda = -1, 1$ (重解) である．

$\boxed{\text{Step 3}}$ 固有値 $\lambda = -1$ に対する Ψ の固有空間 $W(-1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{c} = \mathbf{0} \tag{$*$}$$

において $\lambda = -1$ を代入し，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とすると，

$$(-E - A)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-2c_1 - c_2 = 0,\ -2c_3 = 0$$

となり，$k \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$c_1 = k$ とおくと，解は

$$c_1 = k,\ c_2 = -2k,\ c_3 = 0.$$

したがって，

$$c_1 \cdot 1 + c_2 t + c_3 t^2 = k \cdot 1 + (-2k)t + 0 \cdot t^2 = k - 2kt = k(1-2t)$$

と表されるので，固有空間 $W(-1)$ は

$$W(-1) = \{k(1-2t) | k \in \mathbf{R}\}$$

である．

$\boxed{\text{Step 4}}$ 固有値 $\lambda = 1$ に対する Ψ の固有空間 $W(1)$ を求める．$(*)$ において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(E - A)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られる．すなわち，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-c_2 = 0,\ 2c_2 - 2c_3 = 0$$

となり，$k \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$c_1 = k$ とおくと，解は

$$c_1 = k,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0.$$

したがって，

$$c_1 \cdot 1 + c_2 t + c_3 t^2 = k \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 = k$$

と表されるので，固有空間 $W(1)$ は

$$W(1) = \{k | k \in \mathbf{R}\}$$

である．

解 20.2　(1)［部分空間の条件 (1)］$M_2(\mathbf{R})$ の零ベクトルは 2 次の零行列 O で，W の定義より，$O \in W$.

［部分空間の条件 (2)］$X, Y \in W$ とすると，X，Y は $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ を用いて

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

と表される．このとき，

$$X+Y=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ x_2+y_2 & x_1+y_1 \end{pmatrix}.$$

ここで，

$$x_1+y_1, x_2+y_2 \in \mathbf{R}$$

なので，$X+Y \in W$.

［部分空間の条件（3)］$c \in \mathbf{R}$，$X \in W$ とすると，X は $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ を用いて

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

と表される．このとき，

$$cX=c\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cx_1 & cx_2 \\ cx_2 & cx_1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$cx_1, cx_2 \in \mathbf{R}$ なので，$cX \in W$.

　したがって，定理 13.3 より，W は $M_2(\mathbf{R})$ の部分空間である．

(2) $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=x_1E_1+x_2E_2. \qquad (*)$$

よって，W は E_1，E_2 で生成される．

　また，$(*)$ より，

$$x_1E_1+x_2E_2=O$$

と仮定すると，

$$x_1=x_2=0.$$

　したがって，E_1，E_2 は 1 次独立である．

　以上および定義 15.1 より，$\{E_1, E_2\}$ は W の基底である．

解 20.3　Step 1　基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する Ψ の表現行列を求める．$f(t) \in \mathbf{R}[t]_2$ とすると，$f(t)=1$ のとき，

$$\Psi(f(t))=\Psi(1)=2\cdot 1+\int_0^1 1dt=2+[t]_0^1=2+(1-0)=3,$$

$f(t)=t$ のとき，

$$\Psi(f(t))=\Psi(t)=2t+\int_0^1 tdt=2t+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=2t+\frac{1}{2}(1^2-0^2)=2t+\frac{1}{2},$$

$f(t)=t^2$ のとき，

$$\Psi(f(t))=\Psi(t^2)=2t^2+\int_0^1 t^2dt=2t^2+\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=2t^2+\frac{1}{3}(1^3-0^3)=2t^2+\frac{1}{3}$$

なので，

$$\begin{pmatrix} \Psi(1) & \Psi(t) & \Psi(t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2t+\frac{1}{2} & 2t^2+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2}+2t & \frac{1}{3}+2t^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって，基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する Ψ の表現行列を A とおくと，

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Step 2　Ψ の固有値を求める．Ψ の固有多項式は

$$\phi_\Psi(\lambda) = \phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

よって，Ψ の固有値 λ は固有方程式 $\phi_\Psi(\lambda) = 0$ の解なので，$\lambda = 2$ (重解)$, 3$ である．

補足　さらに，固有値 2 および 3 に対する固有空間はそれぞれ

$$W(2) = \{k_1(1-2t) + k_2(1-3t^2) | k_1, k_2 \in \mathbf{R}\},\ W(3) = \{k | k \in \mathbf{R}\}$$

であることがわかる（✍）．

解 20.4　① 表現　② 正則　③ $\mathbf{0}$　④ A^{-1}　⑤ $\mathbf{0}$　⑥ 自明

解 20.5　$\dim V = n$ とする．V の基底を選んでおき，f，g の表現行列をそれぞれ A，B とする．このとき，f は同型写像なので，A は n 次の正則行列で，B は n 次の正方行列である．よって，

$$\phi_{AB}(t) = |tE - AB| \overset{\because\ \text{問}\,8.4}{=} |A^{-1}(tE-AB)A| = |tE - BA|$$
$$= \phi_{BA}(t).$$

したがって，AB と BA の固有多項式は等しい．

補足　f が同型写像とは限らなくても，f を同型写像で近似することにより，$g \circ f$ と $f \circ g$ の固有多項式は等しいことがわかる．

§ 21 の問題解答

解 21.1　(1) A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - (-3)(-2) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-4).$$

よって，A の固有値 λ は固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ の解なので，$\lambda = -1, 4$ である．したがって，A は 2 個の異なる固有値 $\lambda = -1, 4$ をもつので，定理 21.3 より，A は対角化可能である．

(2) まず，固有値 $\lambda = -1$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = -1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$(-E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-2x_1 - 3x_2 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_1 = 3c$ とおくと，解は

$$x_1 = 3c,\ x_2 = -2c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ -2c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と表されるので，ベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = -1$ に対する A の固有ベクトルである．

次に，固有値 $\lambda = 4$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda = 4$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(4E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が得られる．すなわち，

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$3x_1 - 3x_2 = 0,\ -2x_1 + 2x_2 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = c,\ x_2 = c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，ベクトル $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 4$ に対する A の固有ベクトルである．

以上より，

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は正則なので逆行列 P^{-1} をもち，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となり，A は P によって対角化される．

解 21.2　①　固有値　②　正則　③　0　④　0　⑤　零

解 21.3　(1) まず，固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める．同次連立1次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，

$$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-x_2 - x_3 = 0$$

となり，$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$ とおくと，解は

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = -c_2.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，固有空間 $W(1)$ は

$$W(1) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

である．

次に，固有値 $\lambda = 2$ に対する A の固有空間 $W(2)$ を求める．$(*)$ において $\lambda = 2$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(2E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られる．すなわち，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad -x_3 = 0, \quad x_3 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = c, \quad x_2 = c, \quad x_3 = 0.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されるので，固有空間 $W(2)$ は

$$W(2) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$$

である．

以上より，

$$\dim W(1) + \dim W(2) = 2 + 1 = 3 = A \text{ の次数}$$

なので，定理 21.4 より，A は対角化可能である．

(2)（1）の計算より，

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ は固有値 $\lambda = 1$ に対する 1 次独立な固有ベクトルで，

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{p}_3$ は固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルである．よって，

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は正則なので逆行列 P^{-1} をもち，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となり，A は P によって対角化される．

解 21.4　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく．

$b = 0$ のとき，A はスカラー行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となるので，任意の 2 次の正則行列 P に対して，

$$P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

よって，A は対角化可能である．

$b \neq 0$ のとき，A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 - (-b) \cdot 0 = (\lambda - a)^2.$$

よって，A の固有値 λ は固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ の解なので，$\lambda = a$ (重解) である．ここで，固有値 $\lambda = a$ に対する A の固有空間 $W(a)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

において $\lambda = a$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$(aE - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-bx_2 = 0$$

となり，$b \neq 0$ より，

$$x_2 = 0$$

で，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数とすると，

$$x_1 = c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されるので，固有空間 $W(a)$ は

$$W(a) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$$

である．このとき，

$$\dim W(a) = 1 \neq 2 = A \text{ の次数}$$

なので，定理 21.4 より，A は対角化可能でない．

以上より，A が対角化可能であるための必要十分条件は $b = 0$ である．

解 21.5　(1) A に対して基本変形を行い，A が零行列 O へ変形されるとき，$A = O$. よって，$r = 0$ のとき，$A = O$. このとき，任意の n 次の正則行列 P に対して，

$$P^{-1}AP = O.$$

したがって，A は対角化可能である．

(2) 定理 6.4 より，A は正則行列である．よって，A の逆行列 A^{-1} が存在する．$A^2 = A$ の両辺に A^{-1} を掛けると，A は単位行列 E に等しい．このとき，任意の n 次の正則行列 P に対して，

$$P^{-1}AP = E.$$

したがって，A は対角化可能である．

(3) $\mathrm{Im}\, f$ の定義式 (17.19) より，各 $i = 1, 2, \cdots, r$ に対して，ある $\boldsymbol{b}_i \in V$ が存在し，$\boldsymbol{a}_i = A\boldsymbol{b}_i$ と表される．A はべき等行列だから，

$$A\boldsymbol{a}_i = A(A\boldsymbol{b}_i) = A^2\boldsymbol{b}_i = A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{a}_i.$$

また，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_r\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底なので，$\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{0}$. よって，$\boldsymbol{a}_i$ は固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルである．

(4) $\mathrm{Ker}\, f$ の定義式 (17.19) より，各 $i = r+1, r+2, \cdots, n$ に対して，

$$A\boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

ここで，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0} \quad (c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbf{R}) \qquad (**)$$

を考える．$(**)$ の両辺に左から A を掛けると，(3) と $(*)$ より，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \mathbf{0}.$$

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底なので，

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$$

これを $(**)$ に代入すると，

$$c_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1}+c_{r+2}\boldsymbol{a}_{r+2}+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}.$$

$\{\boldsymbol{a}_{r+1},\boldsymbol{a}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底なので，

$$c_{r+1}=c_{r+2}=\cdots=c_n=0.$$

よって，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立である．

（5）（4）より，A は n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ をもつ．よって，定理 21.2 より，A は対角化可能である．

§ 22 の問題解答

解 22.1　［内積の条件（1）］$f(t),g(t)\in\mathbf{R}[t]_n$ とすると，

$$\langle g(t),f(t)\rangle=\int_{-1}^{1}g(t)f(t)dt=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)dt=\langle f(t),g(t)\rangle$$

よって，

$$\langle g(t),f(t)\rangle=\langle f(t),g(t)\rangle.$$

［内積の条件（2）］$f(t),g(t),h(t)\in\mathbf{R}[t]_n$ とすると，

$$\begin{aligned}\langle f(t)+g(t),h(t)\rangle&=\int_{-1}^{1}(f(t)+g(t))h(t)dt=\int_{-1}^{1}(f(t)h(t)+g(t)h(t))dt\\&=\int_{-1}^{1}f(t)h(t)dt+\int_{-1}^{1}g(t)h(t)dt=\langle f(t),h(t)\rangle+\langle g(t),h(t)\rangle.\end{aligned}$$

よって，

$$\langle f(t)+g(t),h(t)\rangle=\langle f(t),h(t)\rangle+\langle g(t),h(t)\rangle.$$

［内積の条件（3）］$c\in\mathbf{R}$，$f(t),g(t)\in\mathbf{R}[t]_n$ とすると，

$$\langle cf(t),g(t)\rangle=\int_{-1}^{1}cf(t)g(t)dt=c\int_{-1}^{1}f(t)g(t)dt=c\langle f(t),g(t)\rangle.$$

よって，

$$\langle cf(t),g(t)\rangle=c\langle f(t),g(t)\rangle.$$

［内積の条件（4）］$f(t)\in\mathbf{R}[t]_n$ とすると，

$$\langle f(t),f(t)\rangle=\int_{-1}^{1}(f(t))^2\,dt\geq 0.$$

すなわち，

$$\langle f(t),f(t)\rangle\geq 0.$$

ここで，$\langle f(t),f(t)\rangle=0$ と仮定すると，

$$(f(t))^2=0.$$

すなわち，

$$f(t) = 0.$$

したがって，定義 22.1 より，$(\mathbf{R}[t]_n, \langle\ ,\ \rangle)$ は内積空間である．

解 22.2　まず，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \quad (\because \text{ 内積の条件（1）}) \quad = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle$$
$$(\because \text{ 内積の条件（2）}) \quad = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \quad (\because \text{ 内積の条件（1）}).$$

よって，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle.$$

また，

$$\langle \boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y} \rangle = \langle c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \quad (\because \text{ 内積の条件（1）}) \quad = c\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$$
$$(\because \text{ 内積の条件（3）}) \quad = c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \quad (\because \text{ 内積の条件（1）}).$$

よって，

$$\langle \boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y} \rangle = c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

解 22.3　標準内積を行列の転置や積を用いて表すと，

$$\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{y}) \overset{\because \text{ 積の結合律}}{=} ({}^t\boldsymbol{x}A)\boldsymbol{y} = ({}^t\boldsymbol{x}\,{}^t({}^tA))\boldsymbol{y} \overset{\because \text{ 定理 2.5（2）}}{=} {}^t({}^tA\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$$
$$= \langle {}^tA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

よって，

$$\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle = \langle {}^tA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

補足　一般に，f を内積空間 V の線形変換とすると，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して

$$\langle \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle {}^tf(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle$$

が成り立つような V の線形変換 ${}^tf$ が一意的に存在する．${}^tf$ を f の**転置変換**という．さらに，同じ基底を選んでおくと，転置変換の表現行列はもとの線形変換の表現行列の転置行列となることがわかる（✍）．

解 22.4　（1）W が V の和およびスカラー倍により，ベクトル空間となるとき，W を V の部分空間という．

（2）（a）$\mathbf{0} \in W$（b）$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$（c）$c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in W$ ならば，$c\boldsymbol{x} \in W$，の 3 つである．

（3）$\boldsymbol{y} \in W$ を任意に選んでおく．

［部分空間の条件（1）］(22.13) より，

$$\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \rangle = 0.$$

$\boldsymbol{y}$ は任意なので，$\mathbf{0} \in W^\perp$.

［部分空間の条件（2）］$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W^\perp$ とすると，

$$\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle \quad (\because \text{内積の条件（2）}) \quad = 0 + 0 = 0.$$

$\boldsymbol{y}$ は任意なので，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W^\perp$.

［部分空間の条件（3）］$c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in W^\perp$ とすると，

$$\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \quad (\because \text{内積の条件（3）}) \quad = c \cdot 0 = 0.$$

$\boldsymbol{y}$ は任意なので，$c\boldsymbol{x} \in W^\perp$.

よって，$W^\perp$ は V の部分空間である．

（4）$\boldsymbol{x} \in W \cap W^\perp$ とすると，$\boldsymbol{x} \in W$ かつ $\boldsymbol{x} \in W^\perp$ なので，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0.$$

内積の条件（4）より，$\boldsymbol{x} = 0$．よって，

$$W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

（5）$\boldsymbol{x} \in W^\perp$，$\boldsymbol{y} \in W$ とすると，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

と表される．このとき，

$$\begin{aligned} 0 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= c_1 \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + c_2 \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\qquad (\because \text{（22.18）第 1 式}) \\ &= c_1(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot (-1)) + c_2(x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot (-1)) \\ &= c_1(x_1 - x_3) + c_2(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

すなわち，

$$c_1(x_1 - x_3) + c_2(x_2 - x_3) = 0.$$

c_1，c_2 は任意なので，

$$x_1 - x_3 = 0, \ x_2 - x_3 = 0.$$

よって，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数とすると，

$$x_1 = c, \ x_2 = c, \ x_3 = c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，

$$W^{\perp} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

解 22.5　［内積の条件（1）］$X, Y \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とすると，

$$\langle Y, X \rangle = \mathrm{tr}\,({}^tYX) \overset{\because\ \text{問 12.4（1）}}{=} \mathrm{tr}\,{}^t({}^tYX) \overset{\because\ \text{定理 2.5（2）}}{=} \mathrm{tr}\,({}^tX{}^t({}^tY)) =$$
$$\mathrm{tr}\,({}^tXY) = \langle X, Y \rangle.$$

よって，

$$\langle Y, X \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

［内積の条件（2）］$X, Y, Z \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とすると，

$$\begin{aligned}\langle X, Y+Z \rangle &= \mathrm{tr}\,\left\{{}^tX(Y+Z)\right\} = \mathrm{tr}\,({}^tXY + {}^tXZ) = \mathrm{tr}\,({}^tXY) + \mathrm{tr}\,({}^tXZ) \\ &= \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle.\end{aligned}$$

よって，

$$\langle X, Y+Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle.$$

［内積の条件（3）］$X, Y \in M_{m,n}(\mathbf{R})$，$c \in \mathbf{R}$ とすると，

$$\langle cX, Y \rangle = \mathrm{tr}\,\left({}^t(cX)Y\right) = \mathrm{tr}\,(c{}^tXY) = c\,\mathrm{tr}\,({}^tXY) = c\langle X, Y \rangle.$$

よって，

$$\langle cX, Y \rangle = c\langle X, Y \rangle.$$

［内積の条件（4）］$X = (x_{ij})_{m \times n} \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とすると，$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，${}^tXX$ の (j, j) 成分は $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2$ となるので，

$$\langle X, X \rangle = \mathrm{tr}\,({}^tXX) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 \geq 0.$$

ここで，$\langle X, X \rangle = 0$ と仮定すると，任意の $i = 1, 2, \cdots, m$，$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$x_{ij} = 0.$$

すなわち，X は零行列である．

　したがって，定義 22.1 より，$(M_{m,n}(\mathbf{R}), \langle\ ,\ \rangle)$ は内積空間である．

§23 の問題解答

解 23.1　まず，

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次に，

$$\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2'\|} \boldsymbol{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

さらに，

$$\boldsymbol{b}_3' = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2 \rangle \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_3'\|} \boldsymbol{b}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解 23.2　(1) ${}^tAA = E$ をみたす正方行列 A を直交行列という．
(2) まず，

$$\begin{aligned} {}^t(AB)(AB) &\overset{\because\ \text{定理 } 2.5\ (2)}{=} {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBEB \quad (\because\ A\ \text{は直交行列}) \\ &= {}^tBB = E \quad (\because\ B\ \text{は直交行列}). \end{aligned}$$

よって，

$${}^t(AB)(AB) = E.$$

すなわち，AB は直交行列である．
(3) A を直交行列とすると，

$${}^tAA = E$$

なので，定理 6.3 より，A は正則で，

$$A^{-1} = {}^tA.$$

このとき，

$${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

すなわち，

$${}^t(A^{-1})A^{-1} = E.$$

よって，A^{-1} も直交行列である．

解 23.3　2 次の直交行列を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．直交行列の定義式 (23.32) に A を代入すると，

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

左辺を計算して，右辺と対応する成分を比較すると，

$$a^2 + c^2 = 1,\ ab + cd = 0,\ b^2 + d^2 = 1.$$

第 1 式と第 3 式より，$0 \leq \theta < 2\pi$，$0 \leq \varphi < 2\pi$ をみたす θ, φ を用いて，

$$a = \cos\theta,\ c = \sin\theta,\ b = \sin\varphi,\ d = \cos\varphi$$

と表すことができる．第 2 式と加法定理より，

$$\sin(\theta + \varphi) = 0.$$

$0 \leq \theta + \varphi < 4\pi$ なので，

$$\theta + \varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi.$$

よって，

$$(\sin\varphi, \cos\varphi) = \begin{cases} (-\sin\theta, \cos\theta) & (\theta + \varphi = 0, 2\pi), \\ (\sin\theta, -\cos\theta) & (\theta + \varphi = \pi, 3\pi). \end{cases}$$

したがって，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}).$$

補足　直交行列の行列式は 1 または -1 であった［⇨ **問 8.7**］．行列式が 1 の直交行列を**特殊直交行列**ともいう．n 次の特殊直交行列全体の集合を考えると，$\mathrm{O}(n)$ と同様に群となる．これを n 次の**特殊直交群**といい，$\mathrm{SO}(n, \mathbf{R})$ または $\mathrm{SO}(n)$ と書く [1]．問 23.3 にも見られるように，n 次の特殊直交行列を $\mathbf{R}^n$ の元に掛けることは回転を意味することがわかる．このことから，$\mathrm{SO}(n)$ を**回転群**ともいう．

行列を用いて表される群としては，その他に正則な n 次の実正方行列全体の集合 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$，行列式が 1 の n 次の実正方行列全体の集合 $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ が重要である．これらはそれぞれ**実一般線形群**，**実特殊線形群**という [2]．

解 23.4　A が直交行列であると仮定する．A を

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

と列ベクトルに分割しておくと，仮定より，

---

1) SO の S は「特殊」を意味する英単語 “special”（スペシャル）の頭文字である．

2) GL の G，L はそれぞれ「一般」,「線形」を意味する英単語 “general”（ジェネラル），“linear”（リニア）の頭文字である．

$$ {}^t\!AA = E $$

なので，

$$ \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = E. $$

よって，

$$ {}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n). $$

ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．したがって，

$$ \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = \delta_{ij} $$

となるので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$，すなわち，$A$ の n 個の列ベクトルは $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底である．

さらに，上の計算は逆にたどることもできる．

解 23.5　$j = 1, 2, \cdots, n$ とし，

$$ \boldsymbol{b}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\boldsymbol{a}_k $$

と表しておく．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は正規直交基底なので，

$$ \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle \overset{\because (22.19)}{=} \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k \rangle \overset{\because (23.2)}{=} \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\delta_{ik} = p_{ij}. $$

さらに，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ も正規直交基底なので，

$$ \begin{aligned} \delta_{ij} = \langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} p_{ki}\boldsymbol{a}_k, \sum_{l=1}^{n} p_{lj}\boldsymbol{a}_l \right\rangle &\overset{\because (22.19)}{=} \sum_{k,l=1}^{n} p_{ki}p_{lj}\langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l \rangle \\ &\overset{\because (23.2)}{=} \sum_{k,l=1}^{n} p_{ki}p_{lj}\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj} \end{aligned} $$

よって，

$$ \sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj} = \delta_{ij}. $$

すなわち，n 次の正方行列 $(p_{ij})_{n\times n} = (\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle)_{n\times n}$ は直交行列である．

§ 24 の問題解答

解 24.1　(1) まず，A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-6) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-7).$$

よって，A の固有値 λ は固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ の解なので，$\lambda = 2, 7$ である．

次に，固有値 $\lambda = 2$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 2$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$(2E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$-x_1 - 2x_2 = 0,\ -2x_1 - 4x_2 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_2 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = -2c,\ x_2 = c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，ベクトル $\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 2$ に対する A の固有ベクトルである．

さらに，固有値 $\lambda = 7$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda = 7$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，同次連立 1 次方程式

$$(7E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られる．すなわち，

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$4x_1 - 2x_2 = 0,\ -2x_1 + x_2 = 0$$

となり，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は

$$x_1 = c,\ x_2 = 2c.$$

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表されるので，ベクトル $\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 7$ に対する A の固有ベクトルである．

上で得られたベクトルを正規化すると，

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{q}_1\|}\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{q}_2\|}\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

これを並べたものを P とおくと，

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

このとき，P は直交行列なので逆行列 P^{-1} をもち，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となり，A は直交行列 P によって対角化される．

(2) まず，

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき，グラム・シュミットの直交化法を用いて，$W(0)$ の基底 $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\}$ から正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ を求めると，

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{q}_1\|}\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{q}_2 - \langle \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{p}_1 \rangle \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{p}_2'\|}\boldsymbol{p}_2' = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

次に，固有値 $\lambda = 14$ に対する A の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を正規化したものを $\boldsymbol{p}_3$ とおくと，$\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

したがって，

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列なので逆行列 P^{-1} をもち，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

となり，A は直交行列 P によって対角化される．

解 24.2　A を直交行列とし，$\boldsymbol{x}$ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとすると，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}. \tag{$*$}$$

よって，

$${}^t\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} \overset{\because\ {}^tAA=E}{=} {}^t(\overline{{}^tAA\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} \overset{\because\ (*)}{=} {}^t(\overline{{}^tA}\,\overline{\lambda\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} = {}^t({}^tA\,\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} \quad (\because\ A \text{ は実行列})$$

$$= \overline{\lambda}{}^t\overline{\boldsymbol{x}}{}^t({}^tA)\boldsymbol{x} \quad (\because\ \text{定理 2.5（2），（3）}) \quad = \overline{\lambda}{}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x} \overset{\because\ (*)}{=} \overline{\lambda}{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\lambda\boldsymbol{x} = |\lambda|^2\, {}^t\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}.$$

すなわち，

$${}^t\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = |\lambda|^2\, {}^t\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}.$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は固有ベクトルなので，(24.8) より，

$${}^t\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} \neq 0.$$

したがって，

$$|\lambda|^2 = 1$$

なので，$|\lambda| = 1$．すなわち，直交行列の固有値は絶対値 1 の複素数である．

解 24.3　$(\Longrightarrow)$：${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = 0$ であると仮定する．A の固有値を重複度も込めて λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n とする．A の固有値はすべて 0 以上なので，次の（1）〜（3）のいずれか 1 つがなりたつとしてよい．

（1）$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
（2）$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r > 0$，$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0 \quad (0 < r < n)$
（3）$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n > 0$

また，A は対称行列なので，直交行列 P が存在し，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表される．

（1）のとき，A は零行列となるので，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

（2），（3）のとき，

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$$

とおくと，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ より，

$$0 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) \overset{\because\, {}^tP = P^{-1}}{=} {}^t\boldsymbol{y}P^{-1}AP\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 & (\text{(2) のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 & (\text{(3) のとき}). \end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = \cdots = y_r = 0 & (\text{(2) のとき}) \\ y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0 & (\text{(3) のとき}). \end{cases}$$

したがって，

$$P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}.$$

すなわち，$P^{-1}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり，両辺に左から P を掛けると，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

$(\Longleftarrow)$：$A\boldsymbol{x} = 0$ であると仮定する．このとき，

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{0} = 0.$$

よって，

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = 0.$$