Las matrices complejas hermíticas $2\times 2$ están formadas por cuatro números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ y $z_4 = x_4 + iy_4$. Entonces hemos denotado por $(A^{\dagger})^i_j$ la matriz adjunta de $A^i_j$. Vale decir, una matriz adjunta de otra será su transpuesta conjugada. Por transpuesta entendemos cambiar filas por columnas manteniendo la diagonal intacta, $A^i_j = A^j_i$. Por otro lado hemos definido $Tr(A)$ la traza de una matriz como la suma de los elementos de la diagonal. $Tr(A) = A^i_i$ A continuación ejemplificaremos estas dos definiciones

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\dagger} \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad y \quad Tr(A) = z_1 + z_4$$

Sin embargo, este par de definiciones funcionales serán suficiente para resolver este ejercicio.

1. Considere el espacio vectorial de matrices complejas $2\times 2$ con la siguiente definición:

$$\langle a|b\rangle = Tr(A^{\dagger}B) \equiv (A^{\dagger})^i_j B^j_i \equiv (A^*)^j_i B^j_i$$

de producto interno.

a. Compruebe si esta es una buena definición de producto interno

El producto interno definido en un espacio vectorial cumple con las sig propiedades:

1. Linealidad: $\langle \alpha a + \beta b|c\rangle = \alpha\langle a|c\rangle + \beta\langle b|c\rangle$
2. Positividad: $\langle a|a\rangle \geq 0$.
3. Simetría: $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$.

Esto para nuestro espacio de matrices se traduce en:

1. Linealidad

$$Tr((\alpha a + \beta b)^{\dagger} c) = \alpha Tr(a^{\dagger}c) + \beta Tr(b^{\dagger}c)$$

Demostración:

$$Tr((\alpha a + \beta b)^{\dagger} c) = Tr(\alpha a^{\dagger} c) + Tr(\beta b^{\dagger} c) = \alpha Tr(a^{\dagger}c) + \beta Tr(b^{\dagger}c)$$

2. Positividad

$$Tr(A^{\dagger}A) = (z_1)^2 + (z_3 z_3^*) + (z_2 z_2^*) + (z_4)^2$$

Demostración:

Como $z_1$ y $z_4 \in \mathbb{R}$ y $z_i z_i^* = a^2 + b^2$ (con $z = a + bi$), se resume en la suma de reales elevados al cuadrado lo que siempre será positivo o nulo.

3. Simetría: $Tr(A^{\dagger}B) = Tr(B^{\dagger}A)$

Demostración:

Sea $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$

entonces: $Tr(A^{\dagger}B) = z_1 c_1 + z_2 c_3 + z_3 c_2 + z_4 c_4$

$Tr(B^{\dagger}A) = c_1 z_1 + c_3 z_2 + c_2 z_3 + c_4 z_4$

Ahora $z_1, c_1, z_4$ y $c_4 \in \mathbb{R}$, y $c_3, z_2, c_2$ y $z_3 \in \mathbb{C}$ y el producto es conmutativo, por lo que

$$Tr(A^{\dagger}B) = Tr(B^{\dagger}A).$$

b) A partir de esa definición de producto interno construya la definición de norma asociada. Esta definición de norma se conoce como norma de Frobenious.

$$|a| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

$$\langle a|a\rangle = Tr(A^{\dagger}A)$$

Si $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \wedge A^{\dagger} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$ $\quad z_i = a_j + i b_j$

$$Tr(A^{\dagger}A) = (z_1)^2 + (z_2 z_2^*) + (z_3^* z_3) + (z_4)^2. \quad \text{con } z_1 \text{ y } z_2 \in \mathbb{R}.$$

$$= (a_1)^2 + (a_2)^2 + (b_2)^2 + (a_3)^2 + (b_3)^2 + (a_4)^2$$

$$|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + (a_4)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}. \quad \text{con } b_1 \text{ y } b_4 = 0.$$

$$|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2 + b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} z_i z_i^*} = \sqrt{z^i z_i^*}$$

*c*) A partir de la definición de norma de Frobenious, encuentra la expresión para la definición de distancia entre dos matrices $2 \times 2$

c) $\|A - B\|_F = \sqrt{Tr((A-B)^{\dagger}(A-B))}$

distancia $= \sqrt{Tr(A-B)^{\dagger}(A-B)}$

Propiedad de traza $Tr(X+y) = Tr(x) + Tr(y)$

$d = \sqrt{Tr(A^{\dagger}A - A^{\dagger}B - B^{\dagger}A - B^{\dagger}B)}$ $\quad Tr(A^{\dagger}B) = Tr(B^{\dagger}A)$

$d = \sqrt{Tr(A^{\dagger}A) - 2Tr(A^{\dagger}B) - tr(B^{\dagger}B)}$

*d*) Considere las Matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 \equiv \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y compruebe si esas matrices son ortogonales bajo la definición de producto interno de Frobenious

→ /* Demuestre que las matrices de Pauli son ortogonales bajo el prodcuto interno de Frobenious. */;

(%i1) sig1:matrix([0,1],[1,0]);

sig1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(%i2) sig2:matrix([0,-(%i)],[%i,0]);

sig2 $\begin{pmatrix} 0 & -\%i \\ \%i & 0 \end{pmatrix}$

(%i3) sig3:matrix([1,0],[0,-1]);

sig3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(%i4) sig4:matrix([1,0],[0,1]);

sig4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i5) c12 = sig1.sig2;

(%o5) $c12 = \begin{pmatrix} \%i & 0 \\ 0 & -\%i \end{pmatrix}$

(%i6) c13 = sig1.sig3;

(%o6) $c13 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(%i20) c14:sig1.sig4;

c14 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(%i8) c23:sig2.sig3;

c23 $\begin{pmatrix} 0 & \%i \\ \%i & 0 \end{pmatrix}$

(%i9) c24:sig2.sig4;

c24 $\begin{pmatrix} 0 & -\%i \\ \%i & 0 \end{pmatrix}$

(%i10) c34:sig3.sig4;

c34 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

→ /*La traza de las matrices es cero, por lo que el producto interno es cero, y por lo tanto son ortogonales */

*e*) Cuál es la distancia entre las Matrices de Pauli

→ **/* Encuentre la distancia entre las matrices de Pauli */;**

(%i23) **d12cuad:(sig1−sig2).(sig1−sig2);**

d12cuad $\begin{pmatrix} (1-\%i)\,(\%i+1) & 0 \\ 0 & (1-\%i)\,(\%i+1) \end{pmatrix}$

→ **/* d(σ1,σ2) = 4 */**

(%i21) **d13cuad:(sig1−sig3).(sig1−sig3);**

d13cuad $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

→ **/* d(σ1,σ3) = 4 */**

(%i22) **d14cuad:(sig1−sig4).(sig1−sig4);**

d14cuad $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

→ **/* d(σ1,σ4) = 4 */**

(%i25) **d23cuad:(sig2−sig3).(sig2−sig3);**

d23cuad $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

→ **/* d(σ2,σ3) = 4 */**

(%i25) **d23cuad:(sig2−sig3).(sig2−sig3);**

d23cuad $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

→ **/* d(σ2,σ3) = 4 */**

(%i18) **d24cuad:(sig2−sig4).(sig2−sig4);**

d24cuad $\begin{pmatrix} 2 & 2\,\%i \\ -(2\,\%i) & 2 \end{pmatrix}$

→ **/* d(σ2,σ3) = 4 */**

(%i26) **d34cuad:(sig3−sig4).(sig3−sig4);**

d34cuad $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

→ **/* d(σ3,σ4) = 4 */**

*f*) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman una base para ese espacio vectorial.

5. Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial de las matrices complejas $2 \times 2$ hermíticas, el conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

¿Es base para $\mathbb{V}$?

Para que un conjunto sea base de un espacio vectorial, estos deben

1) Pertenecer al espacio.
2) Ser linealmente dependientes / Generar el espacio vectorial.

Prueba de pertenencia:

$$\mathbb{V} = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid A = A^\dagger \}$$

- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_1^\dagger = \begin{pmatrix} 1^* & 0^* \\ & 1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_1 \in \mathbb{V}.$

- $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0^* & i^* \\ -i^* & 0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_2 \in \mathbb{V}.$

- $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_3^\dagger = \begin{pmatrix} 1^* & 0^* \\ 0^* & -1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_3 \in \mathbb{V}.$

- $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_4^\dagger = \begin{pmatrix} 1^* & 0^* \\ 0^* & 1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_4 \in \mathbb{V}.$

$$\therefore \beta \in \mathbb{V}$$

## Independencia lineal:

Planteamos la siguiente combinación lineal:

$$z_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(a_1+b_1 i) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (a_2+b_2 i) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + (a_3+b_3 i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (a_4+b_4 i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualamos según el principio de igualdad:

$$\begin{cases} a_3 + ib_3 + a_4 + ib_4 = 0 \\ a_1 + ib_1 - a_2 i + b_2 = 0 \\ a_1 + ib_1 + a_2 i - b_2 = 0 \\ -a_3 - ib_3 + a_4 + ib_4 = 0 \end{cases}$$

Descomponemos el S.E.L por sus partes reales o imaginarias:

$$\underbrace{\begin{cases} a_3 + a_4 = 0 & 1/ \\ a_1 + b_2 = 0 & 2/ \\ a_1 - b_2 = 0 & 3/ \\ -a_3 + a_4 = 0 & 4/ \end{cases}}_{1} \wedge \underbrace{\begin{cases} ib_3 + ib_4 = 0 & 1'/ \\ ib_1 - ia_2 = 0 & 2'/ \\ ib_1 + ia_2 = 0 & 3'/ \\ -ib_3 + ib_4 = 0 & 4'/ \end{cases}}_{2}$$

Sol 1:

de 1/: $a_3 = -a_4$

a 4/: $-(-a_4) + a_4 = 0$
$2a_4 = 0$
$a_4 = 0$

por lo que $a_4 = a_3 = 0$

y de 2/: $a_1 = -b_2$

a 3/: $(-b_2) - b_2 = 0$
$-2b_2 = 0$
$b_2 = 0$

por lo que $b_2 = a_1 = 0$.

Sol 2

De 1'/: $b_3 = -b_4$

a 4'/: $-i(-b_4) + ib_4 = 0$
$2ib_4 = 0$
$b_4 = 0$

por lo que $b_4 = b_3 = 0$

y De 2'/: $a_2 = b_1$

a 3'/: $ib_1 + i(b_1) = 0$
$2ib_1 = 0$
$b_1 = 0$

por lo que $b_1 = a_2 = 0$.

∴ Como $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$, $\beta$ es linealmente independiente.

Ahora bien, para que un conjunto linealmente independiente genere su espacio se debe cumplir que:

$$\dim(\mathbb{V}) = n(\beta) \rightsquigarrow \text{cardinal de } \beta$$

i,e el conjunto $\beta$ debe tener la misma cantidad de elementos que la dimensión del espacio.

¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{V}$?

Podemos ver a $\mathbb{V}$ las matrices pertenecientes a $M_{2x2}(\mathbb{C})$, tal que:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{pmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ a_3+ib_3 & a_4+ib_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-ib_1 & a_3-ib_3 \\ a_2-ib_2 & a_4-ib_4 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{a_1}+ib_1 = \cancel{a_1}-ib_1 \quad \wedge \quad a_2+ib_2 = a_3-ib_3 \quad \wedge \quad a_3+ib_3 = a_2-ib_2 \quad \wedge \quad \cancel{a_4}+ib_4 = \cancel{a_4}-ib_4$$

$$ib_1 - ib_1 = 0 \qquad a_2 = a_3 - ib_3 \rightarrow \cancel{a_3}+ib_3 = \cancel{a_3}-ib_3-ib_2 \qquad ib_4+ib_4 = 0$$

$$2ib_1 = 0 \qquad a_2 = a_3 - \frac{1}{2}ib_2 \qquad \cancel{i}b_3+\cancel{i}b_3 = -\cancel{i}b_2 \qquad 2ib_4 = 0$$

$$\underline{b_1 = 0} \qquad \underline{b_3 = -\frac{1}{2}b_2} \qquad \underline{b_4 = 0}$$

Con esto nos queda la forma general de los vectores de $\mathbb{V}$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \left(a_3 - \frac{1}{2}ib_2\right)+ib_2 \\ a_3 - \frac{1}{2}ib_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

como podemos observar el vector general tiene cuatro variables libres, por lo que podemos afirmar que $\mathbb{V}$ tiene dimensión cuatro, y por lo tanto

$\beta$ es base de $\mathbb{V}$.

Q.E.D.

*h*) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

$$A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+D\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}$$

$\sigma_1$ $\sigma_2$ $\sigma_3$ $\sigma_4$

$$\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+C&-iB+D\\iB+D&A-C\end{pmatrix}=\mathcal{H}$$

Si definimos $A, B, C, D \in \mathbb{C}$, no será posible crear un subespacio matricial puro, pues, las entradas siempre tendrán entradas complejas.

- Si $a \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow az = a(x+iy) = ax + iay \in \mathbb{C}$$

- Si $a, z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow az = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$
$$= x_1x_2 + i(x_1y_2+y_1x_2) - y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \in \mathbb{C}.$$

De manera que si sólo tomamos las matrices puras de la base, su generado no será puro.

2. Considere dos espacios vectoriales de polinomios de grado $\leq 2$, $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$. Se puede construir un espacio tesorial a partir de estos espacios vectoriales mediante el producto exterior $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$ de tal manera que cualquier polinomio en dos variables puede ser escrito como $\mathcal{T}_2(xy) = c^{ij}\left|\mathrm{e}_i^{\mathcal{P}}, \mathrm{e}_j^{\mathcal{G}}\right\rangle$. Donde $\{|\mathrm{e}_i^{\mathcal{P}}\rangle\}$ y $\left\{\left|\mathrm{e}_j^{\mathcal{G}}\right\rangle\right\}$ corresponden a bases ortogonales para los espacios vectoriales $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$, respectivamente.

   *a*) Considere el polinomio $p^{\mathcal{P}}(x) = x^2+x+3$ y expréselo en término de la base de polinomios de Legendre $\{|\mathrm{e}_i^{\mathcal{P}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$ (2ptos)

$$f(x) = x^2 + x + 3 = a_0 (1) + a_1 (x) + a_2 \left(3/2\, x^2 - 1/2\right)$$

$$= a_0 - \frac{1}{2} a_2 + a_1 x + \frac{3}{2} \quad {}^{2}$$

Nos queda:

$$\begin{cases} a_0 - \frac{1}{2} a_2 = 3 \rightarrow a_0 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \\ a_1 = 1 \\ \frac{3}{2} a_3 = 1 \rightarrow a_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

El polinomio f(x) expandido por los polinomios de legendre queda:

$$x^2 = \frac{10}{3} P_0(x) + P_1(x) + \frac{2}{3} P_2(x)$$

*b*) Seleccione ahora dos polinomios $p^{\mathcal{P}}(x) = x^2 + x + 3$ y $p^{\mathcal{G}}(y) = y + 1$. Construya el tensor, $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x, y) = p^{\mathcal{P}}(x) \otimes p^{\mathcal{G}}(y)$, mediante el producto exterior de esos polinomios. (2ptos)

$$p^{P}(x) \otimes p^{G}(y) = (x^2 + x + 3) \otimes (y + 1$$

$$= x^2(y+1) + x(y+1) + 3(y+1)$$

$$= x^2 y + x^2 + xy + x + 3y + 3$$

c) Elija las bases de monomios $\{1, x, x^2\}$ y $\{1, y, y^2\}$ e identifique las componentes $c^{ij}$ del tensor $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x,y)$ al expandir ese tensor respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$. (2ptos)

- $p^{P\otimes q} = p(x) \otimes q(x)$

$$= x^2y + x^2 + xy + x + 3y + 3$$

$$= (y+1)x^2 + (y+1)x + 3y + 3$$

$$= \underbrace{(y+1)}_{C^{11}} P_2(x) + \underbrace{(y+1)}_{C^{12}} P_1(x) + \underbrace{(3y+3)}_{C^{13}} P_0(x)$$

Expansión en la base $\{x^2, x, 1\}$

- $p^{P\otimes q} = p(x) \otimes q(x)$

$$= x^2y + x^2 + xy + x + 3y + 3$$

$$= (x^2 + x + 3)y + (x^2 + x + 3)$$

$$= \underbrace{0}_{C^{21}} P_2(y) + \underbrace{(x^2+x+3)}_{C^{22}} P_1(y) + \underbrace{(x^2+x+3)}_{C^{23}} P_0(y)$$

Expansión del tensor en base $\{y^2, y, 1\}$.

d) Ahora suponga las bases de polinomios de Legendre, $\{|e_i^{\mathcal{P}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$ y $\{|e_j^{\mathcal{G}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_j(y)\rangle\}$, para $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$. Calcule las componentes $\tilde{c}^{ij}$ del tensor $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x,y)$ respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$. (4ptos)

d) $x^2y + x^2 + xy + x + 3y + 3 = \tilde{C}^{11}(1) + \tilde{C}^{12}(x) + \tilde{C}^{13}\left(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\right)$

$(y+1)x^2 + (y+1)x + (3y+3) = \tilde{C}^{11}(1) + \tilde{C}^{12}(x) + \frac{3}{2}x^2\tilde{C}^{13} - \tilde{C}^{13}(1)\frac{1}{2}$

$\tilde{C}^{12} = y+1$

$(3y+3) = \tilde{C}^{11} - \frac{1}{2}\tilde{C}^{13} \to (3y+3) + \frac{y+1}{3} = \tilde{C}^{11} \to \tilde{C}^{11} = \frac{10y+10}{3}$

$\tilde{C}^{13} = \frac{2y+2}{3}$

$(x^2+x+3)y + (x^2+3) = \tilde{C}^{21}(1) + \tilde{C}^{22}(y) + \tilde{C}^{23}\left(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\right)$

$\tilde{C}^{23} = 0$

$\tilde{C}^{22} = x^2+x+3$

$\tilde{C}^{21} = x^2+3$

3. En un espacio vectorial Minkowskian, $\mathbb{M}$ construimos dos bases ortonormales que llamaremos tétrada.
Primero consideraremos una base de vectores “cartesianos” $\{|\mathrm{e}_t\rangle, |\mathrm{e}_x\rangle, |\mathrm{e}_y\rangle, |\mathrm{e}_z\rangle\}$ y construimos una tétrada de vectores $\{\mathbf{v} = v^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle, \mathbf{k} = k^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle, \mathbf{l} = v^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle, \mathbf{s} = v^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle\}$ con componentes

$$v^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En estas coordenadas cartesianas $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, suponemos ahora un sistema de unidades simplificas con la velocidad de la luz $c = 1$, y podemos representar el elemento de línea como

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 .$$

Las componentes del tensor métrico puede ser escritas en términos de la tétrada como

$$\eta_{\alpha\beta} = -v_\alpha v_\beta + k_\alpha k_\beta + l_\alpha l_\beta + s_\alpha s_\beta .$$

En general, las componentes de los vectores de la tétrada “cartesiana” unitaria satisfacen las condiciones de ortonormalidad $-v_\alpha v^\alpha = k_\alpha k^\alpha = l_\alpha l^\alpha = s_\alpha s^\alpha = 1$;
$v_\alpha k^\alpha = v_\alpha l^\alpha = v_\alpha s^\alpha = k_\alpha l^\alpha = k_\alpha s^\alpha = l_\alpha s^\alpha = 0$.

Igualmente podemos construir una tétrada dual $\left\{\tilde{\mathbf{v}}^\star = \tilde{v}_\alpha \langle\tilde{\mathrm{e}}^\alpha|, \tilde{\mathbf{k}}^\star = \tilde{k}_\alpha \langle\tilde{\mathrm{e}}^\alpha|, \tilde{\mathbf{l}}^\star = \tilde{l}_\alpha \langle\tilde{\mathrm{e}}^\alpha|, \tilde{\mathbf{s}}^\star = \tilde{s}_\alpha \langle\tilde{\mathrm{e}}^\alpha|\right\}$ para las coordenadas esféricas, , $(t, r, \theta, \phi) \equiv (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, a partir de una base $\left\{\langle\mathrm{e}^{\mathrm{t}}|, \langle\mathrm{e}^{\mathrm{r}}|, \langle\mathrm{e}^{\theta}|, \langle\mathrm{e}^{\phi}|\right\}$, con componentes $\tilde{v}_\alpha = (-1, 0, 0, 0)$, $\tilde{k}_\alpha = (0, 1, 0, 0)$, $\tilde{l}_\alpha = (0, 0, r, 0)$ y $\tilde{s}_\alpha = (0, 0, 0, r\,\mathrm{sen}\theta)$, de tal forma que en estas coordenadas representamos el elemento de línea como

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \equiv \mathrm{d}\tilde{s}^2 = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}\mathrm{d}\tilde{x}^\alpha\mathrm{d}\tilde{x}^\beta = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\,.$$

Obviamente

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = -\tilde{v}_\alpha\tilde{v}_\beta + \tilde{k}_\alpha\tilde{k}_\beta + \tilde{l}_\alpha\tilde{l}_\beta + \tilde{s}_\alpha\tilde{s}_\beta.$$

y esta tétrada también cumple con las relaciones de ortogonalidad antes mencionadas.

Las componentes de cualquier vector puede ser escritas en término de combinaciones lineales del la tétrada de la forma

$$a^\alpha = a_v v^\alpha + a_k k^\alpha + a_l l^\alpha + a_s s^\alpha = \tilde{a}_v\tilde{v}^\alpha + \tilde{a}_k\tilde{k}^\alpha + \tilde{a}_l\tilde{s}^\alpha + \tilde{a}_s\tilde{s}^\alpha\,.$$

Con todo lo anterior, considere el tensor de Maxwell en coordenadas cartesianas definido como:

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{otra vez con:} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde $\boldsymbol{E} = (E^x, E^y, E^z)$ y $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos respectivamente, medidos en coordenadas cartesianas por un observador $O$.

*a*) A partir de las condiciones de ortogonalidad para la tétrada $\left\{\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{l}}, \tilde{\mathbf{s}}\right\}$ en coordenadas esféricas, $(t, r, \theta, \phi) \equiv (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ encontrar sus componentes contravariantes (2ptos).

Recordemos que: $a_\sigma = \eta_{\alpha\sigma} a^\alpha$ y

$\tilde{v} = (-1,0,0,0)$
$\tilde{k} = (0,1,0,0)$
$\tilde{l} = (0,0,r,0)$
$\tilde{s} = (0,0,0,r\cdot \operatorname{sen}(\theta))$

- $v_\sigma = \eta_{\alpha\sigma} \tilde{v}^\alpha$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-1,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $k_\sigma = \eta_{\alpha\sigma} \tilde{k}^\alpha$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $l_\sigma = \eta_{\alpha\sigma} \tilde{l}^\alpha$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0,0,r,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $s_\sigma = \eta_{\alpha\sigma} \tilde{s}^\alpha$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0,0,0,r\cdot \operatorname{sen}(\theta)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r\cdot \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

*b*) Suponga las siguientes componentes cartesiana para un cuadrivector $a^\alpha = (5,3,2,1)$ y encuentre las componentes $(\tilde{a}^0, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \tilde{a}^3)$, en coordenadas esféricas. (2ptos)

b) Para encontrar las componentes $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ del cuadrivector $a^\alpha = (5,3,2,1)$

• Expresamos $a^\alpha$ como combinacion lineal de las componentes contra variantes de la tetrada en coordenadas esfercas

$$a^\alpha = \tilde{a}\,\tilde{v}_\alpha + \tilde{a}\,\tilde{k}_\alpha + \tilde{a}\,l_\alpha + \tilde{a}\,s_\alpha$$

• Usando las componentes halladas en el inciso a).

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}^\alpha \tilde{v}_\alpha = 5(1) + 3(0) + 2(0) + 1(0) = 5$$

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}^\alpha \tilde{k}_\alpha = 5(0) + 3(1) + 2(0) + 1(0) = 3$$

$$\tilde{a}_2 = \tilde{a}^\alpha \tilde{l}_\alpha = 5(0) + 3(0) + 2(r) + 1(0) = 2r$$

$$\tilde{a}_3 = \tilde{a}^\alpha \tilde{s}_\alpha = 5(0) + 3(0) + 2(0) + 1(r\sin\theta) = r \cdot \sin\theta$$

c) Compruebe que, en coordenadas cartesianas, se cumplen las siguientes proyecciones

$$F_{\mu\alpha} v^\mu v^\alpha = F_{\mu\alpha} k^\mu k^\alpha = F_{\mu\alpha} l^\mu l^\alpha = F_{\mu\alpha} s^\mu s^\alpha = 0;$$

$$F_{\mu\alpha} v^\mu k^\alpha = E^x; \quad F_{\mu\alpha} v^\mu l^\alpha = E^y; \quad F_{\mu\alpha} v^\mu k^\alpha = E^z .$$

Además complete las proyecciones faltantes. (2ptos)

<u>No entendimos el resto...</u>

<u>Nombres:</u>

Camila Valentina Castillo Lopéz – 2221748

Juan David Verano Ramírez – 2221093