SECCION 1.3.6.

PUNTO 5

a) $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^{\dagger} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \begin{cases} z_1 = z_1^* \text{ Real} \\ z_4 = z_4^* \text{ Real} \\ z_2 = z_3^* \text{ Complejo} \end{cases}$

Matrices Paulin

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \overset{\sigma_1^T}{\begin{pmatrix} 0+0i & 1+0i \\ 1+0i & 0+0i \end{pmatrix}} = \overset{\sigma_1^*}{\begin{pmatrix} 0-0i & 1-0i \\ 1-0i & 0-0i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1^{\dagger}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \overset{\sigma_2^T}{\begin{pmatrix} 0+0i & 0+i \\ 0-i & 0+0i \end{pmatrix}} = \overset{\sigma_2^*}{\begin{pmatrix} 0+0i & 0-i \\ 0+i & 0-0i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2^{\dagger}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \overset{\sigma_3^T}{\begin{pmatrix} 1+0i & 0+0i \\ 0+0i & -1+0i \end{pmatrix}} = \overset{\sigma_3^*}{\begin{pmatrix} 1-0i & 0-0i \\ 0-0i & 1-0i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_3^{\dagger}$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overset{\sigma_0}{\begin{pmatrix} 1+0i & 0+0i \\ 0+0i & 1+0i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1-0i & 0-0i \\ 0-0i & 1-0i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma^{0\dagger}$$

Independencia lineal

$$\begin{vmatrix} 0+0i & 0+0i & 1+0i & -1+0i \\ 1+0i & 0-i & 0+0i & 0+0i \\ 1+0i & 0+i & 0+0i & 0+0i \\ 0+0i & 0+0i & -1+0i & 1+0i \end{vmatrix} = -4i \quad \text{L.I}$$

b) $\langle a|b\rangle = Tr(A^{\dagger}B)$

$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i - i$

$Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_2) = Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i - i = 0$

$\langle \sigma_1|\sigma_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_3) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_1|\sigma_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_0) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_2|\sigma_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i - i = 0$

$Tr(\sigma_2^{\dagger}\sigma_3) = Tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_2|\sigma_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$Tr(\sigma_2^{\dagger}\sigma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_3|\sigma_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$Tr(\sigma_3^{\dagger}\sigma_0) = Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

C) Verdad, i γ

$$\alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma+\theta & \alpha-\beta i\\ \alpha+\beta i & \theta-\gamma\end{pmatrix}$$

$\alpha,\beta,\gamma,\theta \in \mathbb{R}$

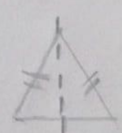
$\beta = 0$ - Sub espacio real

Sección 2.1.6 punto 3

$\cdot$	I	R_2	R_1	$\overline{R_1}$	$\overline{R_2}$	X_1	X_2	X_3
I	I	R_2	R_1	$\overline{R_1}$	$\overline{R_2}$	X_1	X_2	X_3
R_1	R_1	I	R_2	$\overline{R_2}$	X_2	X_3	$\overline{R_1}$	X_1
R_2	R_2	R_1	I	X_2	$\overline{R_2}$	$\overline{R_1}$	X_1	X_3
$\overline{R_1}$	$\overline{R_1}$	X_3	X_2	I	R_1	X_2	R_2	$\overline{R_2}$
$\overline{R_2}$	$\overline{R_2}$	X_2	$\overline{R_1}$	R_2	I	R_1	X_3	X_1
X_1	X_1	$\overline{R_2}$	X_3	X_1	R_2	I	R_1	$\overline{R_1}$
X_2	X_2	X_1	$\overline{R_1}$	R_1	X_3	R_2	I	$\overline{R_2}$
X_3	X_3	R_2	X_1	$\overline{R_2}$	$\overline{R_1}$	$\overline{R_2}$	X_1	I.

Triángulos

Isóceles.



eje de simetría (e.s)

Operaciones:

- Reflexión: respecto al e.S.
- Rotación: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π

Estas operaciones no crean un grupo ya que la composición de reflecciones no es simétrico.

Escaleno.

Operaciones:

- Identidad: Sin transformación.
- Reflexión: No posee ejes de simetría.

Estas operaciones sí generan un grupo, pues, sólo tiene dos elementos.

Sección 2.4 punto 6

a)

$* \; |a\rangle + |b\rangle = a^0 + a^i|q_i\rangle + b^0 + b^j|q_i\rangle = C^0 + C^i|q_i\rangle$

$* \; \alpha|C\rangle = \alpha C^\alpha|q_\alpha\rangle = \alpha C^0|q_0\rangle + \alpha C^1|q_1\rangle + \alpha C^2|q_2\rangle + \alpha C^3|q_3\rangle$

Si es analogo a $\mathbb{R}^3$ porque se puede hacer la suma y multiplicacion por escalar es componente a componente solo que ahora son 4 componentes y es espacio vectorial al ser cerrado en $(+,\cdot)$

b) $|b\rangle \equiv (b^0, \mathbf{b})$, $|r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$

$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0|q_0\rangle + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle) \odot (r^0|q_0\rangle + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$

$\rightarrow d^0 = b^0r^0(|q_0\rangle \odot |q_0\rangle) + b^1r^1(|q_1\rangle \odot |q_1\rangle) + b^2r^2(|q_2\rangle \odot |q_2\rangle) + b^3r^3(|q_3\rangle \odot |q_3\rangle)$

$d^0 = b^0r^0 - b^1r^1 - b^2r^2 - b^3r^3 = b^0r^0 - b^ir_i = b^0r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}$

$\rightarrow \mathbf{d} = (b^0r^1 + r^0b^1 - b^2r^3 + b^3r^2)|q_1\rangle$
$(b^0r^2 + r^0b^2 - b^1r^3 + b^3r^1)|q_2\rangle$
$(b^0r^3 + r^0b^3 - b^1r^2 + b^2r^1)|q_3\rangle$

$\underbrace{b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b}} \quad + \underbrace{\varepsilon_{ijk} b_j b_k |q_i\rangle} = b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}$

c) $d^0 = b^0r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} = a|q_0\rangle$ – Parte real

$\mathbf{d} = r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}$

Proponemos $r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} = S^{\alpha j}\delta^0_\alpha|q_j\rangle$

$\rightarrow S^{0j}|q_j\rangle = (S^{0j} + S^{i0})|q_j\rangle = (r^0b_j + b^0r_j)|q_j\rangle$

$\rightarrow r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r}$ $\blacksquare$

Proponemos $A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = \varepsilon^{ijk} b_j r_k |q_i\rangle$

$\rightarrow A^{[jk]i} = -A^{kij}$

$\rightarrow \varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$

$\rightarrow A^{[jk]i} = \varepsilon^{ijk}$ $\boxed{}$

d) $S^{ij} = r^0b^1 + r^0b^2 + r^0b^3 + b^0r^1 + b^0r^2 + b^0r^3$

$A^{[jk]i} b_{jk} = \varepsilon^{ijk} b_{ij} |q_k\rangle = (\mathbf{b}\times\mathbf{r})_k$

vectores $a^ie_i = a$

$a \rightarrow a^i - e^i = -a$

Pseudovectores $e = a\times b \rightarrow (-a \times (-b)) = c$

Por lo tanto $|d\rangle$ no va a ser pseudovector ni vector

$|d\rangle \rightarrow d^0 - d^i|q_i\rangle$

e)

$|q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0$ | $|q_0\rangle \odot |q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |q_0\rangle = 1$

$|q_1\rangle = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$ | $|q_1\rangle \odot |q_1\rangle = i^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i^2 = -|q_0\rangle$

$|q_2\rangle = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$ | $|q_2\rangle \odot |q_2\rangle = i^2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i^2 = -|q_0\rangle$

$|q_3\rangle = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3$ | $|q_3\rangle \odot |q_3\rangle = i^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i^2 = -|q_0\rangle$

$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = i^2 \sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3 = |q_3\rangle$

$|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = i^2 \sigma_2 \sigma_1 = -i\sigma_3 = -|q_3\rangle$

$|q_2\rangle \odot |q_3\rangle = i^2 \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1 = |q_1\rangle$

$|q_3\rangle \odot |q_2\rangle = i^2 \sigma_3 \sigma_2 = -i\sigma_i = -|q_i\rangle$

analogame son otras 8 ecuaciones

$(|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle) \equiv (i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3, \sigma_0)$

$|b\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$

$= x(\sigma_0) + b(i\sigma_1) + a(i\sigma_2) + y(i\sigma_3)$

$= \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$

---

f $|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle$

– Son base para los cuaternarios debido a que son LI

---

g) $\langle a|b\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle$

I. $\langle a|a\rangle = |a\rangle^* \odot |a\rangle$

$= a^0 - a^i|q_i\rangle \odot a^0 + a^i|q^i\rangle$

$= a^0 a^0 + (a^i - a^i|q_i\rangle) + a^0 a^i|q_i\rangle - a^0 a^i|q_i\rangle$

$= a^{0^2} \rightarrow \langle a|a\rangle \geq 0$

II $\langle \tilde{a}|a\rangle = 0 \longleftrightarrow |a\rangle = 0$ falso porque si $|a\rangle = 0 + a^i|q_i\rangle$

$\rightarrow \langle \tilde{a}|a\rangle = 0$ No es buena definicion de producto interno

h $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\langle \tilde{a}|b\rangle = |q_1\rangle \odot \langle \tilde{a}|b\rangle \odot |q_1\rangle$

I) $\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[a^{0^2} - |q_1\rangle \odot a^{0^2} \odot |q_1\rangle]$

$\frac{1}{2}[a^{0^2} - |q_1\rangle \odot a^{0^2} \odot |q_1\rangle]$ $\frac{1}{2}[[(a^0)^4 |q_1\rangle + a^0$

$\langle a|a\rangle \geq 0$

$|f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$

II) de igual manera si $|f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$ / $f^0 \neq 0$

$\langle f|f\rangle = \frac{1}{2}(f^0)^2 \neq 0$

i) $n(|b\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$n(|b\rangle) = \sqrt{|b\rangle \odot |b\rangle} = \sqrt{(b^0)^2} = |b^0| \geq 0$

norma $\neq 0$

Porque al fijarnos en el punto g. $|b\rangle = b^0 + b^i|q_i\rangle$ con $b^0 = 0$ y $b|q_i\rangle \neq 0$ puedo encontrar infinitos vectores

$$d \quad |\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\| |a\rangle \|^2} \to = \frac{a^0|a_0\rangle - a^1|a_i\rangle}{(a^0)^2}$$

$$\to |a\rangle \odot |a\rangle = 1 = |a_0\rangle$$

$$(a^0|a_0\rangle + a^1|a_i\rangle) \odot \left(\frac{a^0}{a^{02}}|a_0\rangle - \frac{a^1}{a^{12}}|a_1\rangle\right)|a_i\rangle$$

$$\cancel{|a_0\rangle}^{1}|a_0\rangle - a^1|a_0\rangle|a_i\rangle + \frac{a^1a^0}{(a^0)^2}|a_i\rangle|a_0\rangle - \frac{(a^1)^2}{(a^0)^2}|a_i\rangle|a_i\rangle$$

$$= 1 - 1 = 0$$

Punto grant Smith máxima

```
(%i2) lista: create_list(t^i, i, 0, 4);

      for i: 1 thru length(lista) do
        if i = 1 then
          (a : lista[i],
          print(a))
        else
          (b : lista[i] - sum(integrate(lista[i]·lista[n]·sqrt(1-t^2),t,-1,1)·lista[n]/integrate((lista[n]^2)·sqrt(1-t^2),t,-1,1),n,1,i-1),
          print(b),
          b: 0);
```

lista $\left[1, t, t^2, t^3, t^4\right]$

1

t

$t^2 - \frac{1}{4}$

$t^3 - \frac{t}{2}$

$t^4 - \frac{5t^2}{8} - \frac{1}{8}$

(%o2) done

Segundo taller: Métodos

jueves, 29 de febrero de 2024 9:08 p. m.

10. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \,.$$

(a). Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

(b). Si los coeficientes a_i son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?

(c). ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.
II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
IV. Todos los polinomios que tienen a $x - 1$ como un factor.

1. $\boldsymbol{V}$ es cerrado bajo la operación $\boxplus$: $|v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \boldsymbol{V} \;\; \forall \; |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
2. La operación $\boxplus$ es conmutativa: $|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle \;\; \forall \; |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
3. La operación $\boxplus$ es asociativa: $(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus (|v_j\rangle \boxplus |v_k\rangle) \;\; \forall \; |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \boldsymbol{V}$.
4. Existe un único elemento neutro $|0\rangle$: $|0\rangle \boxplus |v_i\rangle = |v_i\rangle \boxplus |0\rangle = |v_i\rangle \;\; \forall \; |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$.
5. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\boldsymbol{V}$: $\exists \; |-v_i\rangle \; / \; |v_i\rangle \boxplus |-v_i\rangle = |0\rangle \;\; \forall \; |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$.
6. $\boldsymbol{V}$ es cerrado bajo el producto por un número: $\alpha |v_i\rangle \in \boldsymbol{V} \;\; \forall \; \alpha \in \boldsymbol{K}$ y cualquier $|v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$,
7. $\alpha(\beta |v_i\rangle) = (\alpha\beta)|v_i\rangle \;\; \forall \; |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$.
8. $(\alpha + \beta)|v_i\rangle = \alpha |v_i\rangle \boxplus \beta |v_i\rangle \;\; \forall \; |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$.
9. $\alpha(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha |v_i\rangle \boxplus \alpha |v_j\rangle \;\; \forall \; |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha \in \boldsymbol{K}$.
10. $\boldsymbol{1}|v_i\rangle = |v_i\rangle \;\; \forall \; |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{1} \in \boldsymbol{K}$.

1. El vector neutro de $\boldsymbol{V}$ está en $\boldsymbol{S}$.
2. Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in \boldsymbol{S}$, entonces $|s_1\rangle \boxplus |s_2\rangle \in \boldsymbol{S}$.
3. Si $|s\rangle \in \boldsymbol{S}$ y α es un elemento del campo $\boldsymbol{K}$, entonces $\alpha |s\rangle \in \boldsymbol{S}$.

Tenemos el conjunto de los polinomios de la forma:

$$p^n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad \text{con } a_i \in \mathbb{K}.$$

Veamos si es un espacio vectorial bajo las sig. operaciones:

Sean $p(x)$ y $q(x) \in p^n(x)$ y $k \in \mathbb{K}$

$$p(x) \boxplus q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + a_0 + b_0$$

$$k\,p(x) = k a_n x^n + k a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k a_2 x^2 + k a_1 x + k a_0$$

A) Ahora, probaremos si cumple con cada uno de los axiomas

Axioma 1:

- $|V_k\rangle = |V_i\rangle \boxplus |V_j\rangle \in \mathbb{V} \;\; \forall \; |V_i\rangle, |V_j\rangle \in \mathbb{V}$

$\rightarrow p(x) + q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$

$= C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$

con $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1, C_0 \in \mathbb{R}$.

$\therefore p(x) + q(x) \in p^n(x)$

Axioma 2:

- $|V_i\rangle + |V_j\rangle = |V_j\rangle + |V_i\rangle \;\; \forall \; |V_i\rangle, |V_j\rangle \in \mathbb{V}$

$\rightarrow p(x) + q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$

$= (b_n+a_n)x^n + (b_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_1+a_1)x + (b_0+a_0)$

(Esto se cumple ya que $a_i, b_i \in \mathbb{R}$)

$= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$= q(x) + p(x).$

$\therefore p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$

Axioma 3:

- $(|V_i\rangle + |V_j\rangle) + |V_k\rangle = |V_i\rangle + (|V_j\rangle + |V_k\rangle) \ \forall \ |V_i\rangle, |V_j\rangle, |V_k\rangle \in \mathbb{V}$

Con $h(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$

$\rightarrow (p(x)+q(x)) + h(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0) + c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$

$= (a_n+b_n+c_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1+b_1+c_1)x + (a_0+b_0+c_0)$

$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 + (b_n+c_n)x^n + (b_{n-1}+c_{n-1})x^{n-1} + \dots + (b_1+c_1)x + (b_0+c_0)$

$= p(x) + (q(x)+h(x))$

$\therefore (p(x)+q(x)) + h(x) = p(x) + (q(x)+h(x))$

Axioma 4:

- $\exists! |0\rangle : |0\rangle + |V_i\rangle = |V_i\rangle + |0\rangle = |V_i\rangle \ \forall |V_i\rangle \in \mathbb{V}$

Sea $0(x) = 0_n x^n + 0_{n-1}x^{n-1} + \dots + 0_1 x + 0_0$

y $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_i \neq 0$.

$\rightarrow 0(x) + p(x) = (0_n + a_n)x^n + (0_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + 0_1)x + (a_0 + 0_0)$

$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$\Rightarrow (0_n + a_n) = a_n \ \wedge \ (0_{n-1}+a_{n-1}) = a_{n-1} \ \wedge \dots \wedge (0_1 + a_1) = a_1 \ \wedge \ (0_0 + a_0) = a_0$

$0_n = 0 \quad \wedge \quad 0_{n-1} = 0 \quad \wedge \dots \wedge \quad 0_1 = 0 \quad \wedge \quad 0_0 = 0$

$\therefore |0\rangle$ es único.

Axioma 5:

- $\exists \ |-V_i\rangle : |V_i\rangle + |-V_i\rangle = |0\rangle \ \forall \ |V_i\rangle \in \mathbb{V}$

Sea $d(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \dots + d_1 x + d_0$

$\rightarrow p(x) + d(x) = (a_n + d_n)x^n + (a_{n-1}+d_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1+d_1)x + (a_0+d_0)$

$= 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0$

$\Rightarrow a_n + d_n = 0 \ \wedge \ a_{n-1} + d_{n-1} = 0 \ \wedge \dots \wedge \ a_1 + d_1 = 0 \ \wedge \ a_0 + d_0 = 0$

$d_n = -a_n \ \wedge \ d_{n-1} = -a_{n-1} \ \wedge \dots \wedge \ d_1 = -a_1 \ \wedge \ d_0 = -a_0$

$\rightarrow d(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0 = -p(x)$

$\therefore \exists -p(x) \mid p(x) + (-p(x)) = 0.$

Axioma 6:

- $\alpha |V_i\rangle \in \mathbb{V} \ \forall \ \alpha \in \mathbb{K}$ y cualquier $|V_i\rangle \in \mathbb{V}$

$\rightarrow \alpha p(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$

$= \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

Sabemos que $\alpha, a_i \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

$\therefore \alpha p(x) \in \mathbb{V}.$

Axioma 7:

- $\alpha(\beta|V_i\rangle) = (\alpha\beta)|V_i\rangle \ \forall \ |V_i\rangle \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$\rightarrow \alpha(\beta|V_i\rangle) = \alpha(\beta a_n x^n + \beta a_{n-1}x^{n-1} + \dots + \beta a_1 x + \beta a_0)$

$= \alpha\beta a_n x^n + \alpha\beta a_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha\beta a_1 x + \alpha\beta a_0.$

$= (\alpha\beta)p(x).$

$\therefore \alpha(\beta p(x)) = (\alpha\beta)p(x)$

Axioma 8:

Axioma 8

- $(\alpha+\beta)|V_i\rangle = \alpha|V_i\rangle + \beta|V_i\rangle \quad \forall\, |V_i\rangle \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\rightarrow (\alpha+\beta)\,p(x) = (\alpha+\beta)a_nx^n + (\alpha+\beta)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (\alpha+\beta)a_1x + (\alpha+\beta)a_0$$
$$= \alpha a_nx^n + \beta a_nx^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \beta a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1x + \beta a_1x + \alpha a_0 + \beta a_0$$
$$= \alpha a_nx^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1x + \alpha a_0 + \beta a_nx^n + \beta a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \beta a_1x + \beta a_0$$
$$= \alpha p(x) + \beta p(x).$$
$$\therefore (\alpha+\beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x).$$

Axioma 9:

- $\alpha(|V_i\rangle + |V_j\rangle) = \alpha|V_i\rangle + \alpha|V_j\rangle \quad \forall\, |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\rightarrow \alpha(p(x)+q(x)) = \alpha\left((a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)\right)$$
$$= \alpha(a_n+b_n)x^n + \alpha(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \alpha(a_1+b_1) + \alpha(a_0+b_0)$$
$$= (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n + (\alpha a_{n-1} + \alpha b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1 + \alpha b_1) + (\alpha a_0 + \alpha b_0)$$
$$= \alpha a_nx^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1x + \alpha a_0 + \alpha b_nx^n + \alpha b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha b_1x + \alpha b_0$$
$$= \alpha p(x) + \alpha q(x).$$
$$\therefore \alpha(p(x)+q(x)) = \alpha p(x) + \alpha q(x).$$

Axioma 10:

- $1|V_i\rangle = |V_i\rangle \quad \forall\, |V_i\rangle \in V$ y $1 \in \mathbb{K}$.

$$\rightarrow 1\cdot p(x) = 1\cdot a_nx^n + 1\cdot a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + 1\cdot a_1x + 1\cdot a_0$$
$$= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

$\rightarrow 1\cdot a_n = a_n \;\wedge\; 1\cdot a_{n-1} = a_{n-1} \;\wedge \cdots \wedge\; 1\cdot a_1 = a_1 \;\wedge\; 1\cdot a_0 = a_0.$

Sabemos que $1\cdot a_i = a_i$ ya que 1 es el elemento neutro de la operación producto en el campo $\mathbb{R}$.

$\therefore 1\,p(x) = p(x).$

$\therefore P^n(x)$ es un espacio vectorial

Q.E.D.

B) Si tomamos que $a_i \in \mathbb{Z}$, $P^n(x)$ dejaría de ser un espacio vectorial, pues si seguimos tomando los escalares de $\mathbb{R}$, el producto entre enteros y reales no es necesariamente entero, esto hace que el axioma 6 se quiebre.

Axioma 6:

- $\alpha|V_i\rangle \in V \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\rightarrow \alpha\,p(x) = \alpha a_nx^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1x + \alpha a_0$$

además, si $\alpha \notin \mathbb{Z} \rightarrow \alpha a_i \notin \mathbb{Z}$.

C) Para éstas demostraciones se utilizará el test del subespacio.

Test del subespacio: 1. $|0\rangle_V \in S$; 2. $\alpha|V_i\rangle + \beta|V_j\rangle \in S \implies S$ es un subespacio.

y se demostrará si S es subespacio de P^n. Por lo que se utilizarán las operaciones anteriormente definidas.

I. Polinomio neutro y polinomios de grado menor igual a $n-1$.

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ $\wedge$ $O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1}$
$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ $\quad = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n$.

1. $|0\rangle_{n} \in S$
2. $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \beta(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$
$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \beta b_0 + \beta b_1 x + \cdots + \beta b_{n-1}x^{n-1}$.
$= (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + \cdots + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^{n-1}$.
$= c_0 + c_1 x^1 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} = h(x)$

$\therefore h(x) = \alpha p(x) + \beta q(x) \in S$.

$\therefore S = \mathbb{P}^{n-1}(x)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}^n(x)$

II Polinomio neutro y polinomios de grado par.

Sean $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n}$ $\quad (n \in \mathbb{Z},\ n > 0)$
$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{2n-1}x^{2n-1} + b_{2n}x^{2n}$.

y $O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{2n-1} + 0x^{2n}$.

1. $|0\rangle_{p^n} = O(x) \in P^{2n}(x)$
2. $\alpha p(x) + \beta q(x) \in P^{2n}(x)$

$\alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n}) + \beta(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{2n-1}x^{2n-1} + b_{2n}x^{2n})$.
$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_{2n-1}x^{2n-1} + \alpha a_{2n}x^{2n} + \beta b_0 + \beta b_1 x + \cdots + \beta b_{2n-1}x^{2n-1} + \beta b_{2n}x^{2n}$.
$= \alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + \cdots + (\alpha a_{2n-1} + \beta b_{2n-1})x^{2n-1} + (\alpha a_{2n} + \beta b_{2n})x^{2n}$.
$= d_0 + d_1 x + \cdots + d_{2n-1}x^{2n-1} + d_{2n}x^{2n}$

$\therefore S_2 = P^{2n}(x)$ $(n \in \mathbb{Z}, n > 0)$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{P}^n(x)$.

III Polinomios con x como factor

$p(x) = x\,p'(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots + a_{n-1}x^n + a_n x^{n+1}$

1. Si $a_i = 0$, entonces $\cdot\ 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n + 0x^{n+1}$.
2. $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha a_0 x + \alpha a_1 x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^n + \alpha a_n x^{n+1} + \beta b_0 x + \beta b_1 x^2 + \cdots + \beta b_{n-1}x^n + \beta b_n x^{n+1}$
$= (\alpha a_0 + \beta b_0)x + (\alpha a_1 + \beta b_1)x^2 + \cdots + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^n + (\alpha a_n + \beta b_n)x^{n+1}$.
$= g_0 x + g_1 x^2 + \cdots + g_{n-1}x^n + g_n x^{n+1}$. $= x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n) = n\,p(x)$.

$\therefore S_2$ es subespacio vectorial de $\mathbb{P}^n(x)$.

IV Todos los polinomios que tengan como factor $(x-1)$.

$S_3 = \{ p(x) \in P^n(x) \mid p(x) = (x-1)p'(x) \}$.

Sea $p(x) = (x-1)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n)$
entonces:

1. $O(x)_{S_3} = (x-1)\,O(x)_{P(x)}$
$= (x-1)(0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n)$
$= 0(x-1) + 0(x-1)x + \cdots + 0(x-1)x^{n-1} + 0(x-1)x^n$.
$= O(x)$.
2. $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha(x-1)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n) + \beta(x-1)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n x^n)$
$= \alpha(x-1)a_0 + \alpha(x-1)a_1 x + \cdots + \alpha(x-1)a_{n-1}x^{n-1} + \alpha(x-1)a_n x^n$
$+ \beta(x-1)b_0 + \beta(x-1)b_1 x + \cdots + \beta(x-1)b_{n-1}x^{n-1} + \beta(x-1)b_n x^n$.
$= (x-1)(\alpha a_0 + \beta b_0) + (x-1)(\alpha a_1 + \beta b_1)x + \cdots + (x-1)(\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^{n-1} + (x-1)(\alpha a_n + \beta b_n)x^n$.
$= (x-1)(p(x) + q(x))$

$\therefore S_3$ es un subespacio de $\mathbb{P}^n(x)$

Segundo taller: Métodos

jueves, 29 de febrero de 2024 9:08 p. m.

10. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i .$$

(a). Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

(b). Si los coeficientes a_i son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?

(c). ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).

IV. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

1. $\boldsymbol{V}$ es cerrado bajo la operación $\boxplus$: $|v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \boldsymbol{V} \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
2. La operación $\boxplus$ es conmutativa: $|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
3. La operación $\boxplus$ es asociativa: $(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus (|v_j\rangle \boxplus |v_k\rangle) \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \boldsymbol{V}$.
4. Existe un único elemento neutro $|0\rangle$: $|0\rangle \boxplus |v_i\rangle = |v_i\rangle \boxplus |0\rangle = |v_i\rangle \ \forall \ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$.
5. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\boldsymbol{V}$: $\exists \ |-v_i\rangle \ / \ |v_i\rangle \boxplus |-v_i\rangle = |0\rangle \ \forall \ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$.
6. $\boldsymbol{V}$ es cerrado bajo el producto por un número: $\alpha |v_i\rangle \in \boldsymbol{V} \ \forall \ \alpha \in \boldsymbol{K}$ y cualquier $|v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$,
7. $\alpha(\beta |v_i\rangle) = (\alpha\beta)|v_i\rangle \ \forall \ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$.
8. $(\alpha + \beta)|v_i\rangle = \alpha |v_i\rangle \boxplus \beta |v_i\rangle \ \forall \ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$.
9. $\alpha(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha |v_i\rangle \boxplus \alpha |v_j\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha \in \boldsymbol{K}$.
10. $\mathbf{1}|v_i\rangle = |v_i\rangle \ \forall \ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\mathbf{1} \in \boldsymbol{K}$.

1. El vector neutro de $\boldsymbol{V}$ está en $\boldsymbol{S}$.
2. Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in \boldsymbol{S}$, entonces $|s_1\rangle \boxplus |s_2\rangle \in \boldsymbol{S}$.
3. Si $|s\rangle \in \boldsymbol{S}$ y α es un elemento del campo $\boldsymbol{K}$, entonces $\alpha |s\rangle \in \boldsymbol{S}$.

Tenemos el conjunto de los polinomios de la forma:

$$p^n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{K}.$$

Veamos si es un espacio vectorial bajo las sig. operaciones:

Sean $p(x)$ y $q(x) \in P^n(x)$ y $k \in \mathbb{K}$

$$p(x) \boxplus q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + a_0+b_0$$

$$k\,p(x) = ka_nx^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0$$

A) Ahora, probaremos si cumple con cada uno de los axiomas

Axioma 1:

• $|v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in V \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in V$

$$\rightarrow p(x) + q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$

$$= C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$$

con $C_n, C_{n-1}, \cdots, C_1, C_0 \in \mathbb{R}$.

$\therefore p(x)+q(x) \in P^n(x)$

con $C_n, C_{n-1}, \cdots, C_1, C_0 \in \mathbb{R}$.

$\therefore p(x)+q(x) \in P^n(x)$

Axioma 2:

• $|v_i\rangle + |v_j\rangle = |v_j\rangle + |v_i\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in V$

$$\rightarrow p(x) + q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$

$$= (b_n+a_n)x^n + (b_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_1+a_1)x + (b_0+a_0)$$

(Esto se cumple ya que a_i, $b_i \in \mathbb{R}$)

$$= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

$= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$= q(x) + p(x).$

$\therefore p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$

Axioma 3:

- $(|V_i\rangle + |V_j\rangle) + |V_k\rangle = |V_i\rangle + (|V_j\rangle + |V_k\rangle) \;\forall\; |V_i\rangle, |V_j\rangle, |V_k\rangle \in \mathbb{V}$

Con $h(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

$\rightarrow (p(x)+q(x)) + h(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0) + c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

$= (a_n+b_n+c_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1+c_1)x + (a_0+b_0+c_0)$

$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + (b_n+c_n)x^n + (b_{n-1}+c_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_1+c_1)x + (b_0+c_0)$

$= p(x) + (q(x)+h(x))$

$\therefore (p(x)+q(x)) + h(x) = p(x) + (q(x)+h(x))$

Axioma 4:

- $\exists! |0\rangle : |0\rangle + |V_i\rangle = |V_i\rangle + |0\rangle = |V_i\rangle \;\forall |V_i\rangle \in \mathbb{V}$

Sea $0(x) = 0_n x^n + 0_{n-1} x^{n-1} + \cdots + 0_1 x + 0_0$

y $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \neq 0$.

$\rightarrow 0(x) + p(x) = (0_n + a_n)x^n + (0_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + 0_1)x + (a_0 + 0_0)$

$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$\Rightarrow (0_n + a_n) = a_n \;\wedge\; (0_{n-1} + a_{n-1}) = a_{n-1} \;\wedge \cdots \wedge\; (0_1 + a_1) = a_1 \;\wedge\; (0_0 + a_0) = a_0$

$0_n = 0 \;\wedge\; 0_{n-1} = 0 \;\wedge \cdots \wedge\; 0_1 = 0 \;\wedge\; 0_0 = 0$

$\therefore |0\rangle$ es único.

Axioma 5:

- $\exists\, |-V_i\rangle : |V_i\rangle + |-V_i\rangle = |0\rangle \;\forall |V_i\rangle \in \mathbb{V}$

Sea $d(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$

$\rightarrow p(x) + d(x) = (a_n + d_n)x^n + (a_{n-1} + d_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + d_1)x + (a_0 + d_0)$

$= 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$

$\Rightarrow a_n + d_n = 0 \;\wedge\; a_{n-1} + d_{n-1} = 0 \;\wedge \cdots \wedge\; a_1 + d_1 = 0 \;\wedge\; a_0 + d_0 = 0$

$d_n = -a_n \;\wedge\; d_{n-1} = -a_{n-1} \;\wedge \cdots \wedge\; d_1 = -a_1 \;\wedge\; d_0 = -a_0$

$\rightarrow d(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = -p(x)$

$\therefore \exists -p(x) \mid p(x) + (-p(x)) = 0.$

Axioma 6:

- $\alpha |V_i\rangle \in \mathbb{V} \;\forall \alpha \in \mathbb{K}$ y cualquier $|V_i\rangle \in \mathbb{V}$

$\rightarrow \alpha p(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$

$= \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$

Sabemos que $\alpha, a_i \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

$\therefore \alpha p(x) \in \mathbb{V}.$

Axioma 7:

- $\alpha(\beta |V_i\rangle) = (\alpha\beta)|V_i\rangle \;\forall |V_i\rangle \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

$\rightarrow \alpha(\beta |V_i\rangle) = \alpha(\beta a_n x^n + \beta a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \beta a_1 x + \beta a_0)$

$= \alpha\beta a_n x^n + \alpha\beta a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha\beta a_1 x + \alpha\beta a_0.$

$= (\alpha\beta)p(x).$

$\therefore \alpha(\beta p(x)) = (\alpha\beta)p(x)$

Axioma 8:

- $(\alpha+\beta)|V_i\rangle = \alpha|V_i\rangle + \beta|V_i\rangle \quad \forall\ |V_i\rangle \in \mathbb{V}$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (\alpha+\beta)\,p(x) = (\alpha+\beta)a_n x^n + (\alpha+\beta)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (\alpha+\beta)a_1 x + (\alpha+\beta)a_0$

$= \alpha a_n x^n + \beta a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \beta a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \beta a_1 x + \alpha a_0 + \beta a_0$

$= \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0 + \beta a_n x^n + \beta a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \beta a_1 x + \beta a_0$

$= \alpha p(x) + \beta p(x).$

$\therefore (\alpha+\beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x).$

Axioma 9:

- $\alpha(|V_i\rangle + |V_j\rangle) = \alpha|V_i\rangle + \alpha|V_j\rangle \quad \forall\ |V_i\rangle, |V_j\rangle \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \alpha(p(x)+q(x)) = \alpha((a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0))$

$= \alpha(a_n+b_n)x^n + \alpha(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \alpha(a_1+b_1) + \alpha(a_0+b_0)$

$= (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n + (\alpha a_{n-1} + \alpha b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1 + \alpha b_1) + (\alpha a_0 + \alpha b_0)$

$= \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0 + \alpha b_n x^n + \alpha b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha b_1 x + \alpha b_0$

$= \alpha p(x) + \alpha q(x).$

$\therefore \alpha(p(x)+q(x)) = \alpha p(x) + \alpha q(x).$

Axioma 10:

- $1|V_i\rangle = |V_i\rangle \quad \forall\ |V_i\rangle \in \mathbb{V}$ y $1 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow 1\cdot p(x) = 1\cdot a_n x^n + 1\cdot a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + 1\cdot a_1 x + 1\cdot a_0$

$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$

$\Rightarrow 1\cdot a_n = a_n \ \wedge\ 1\cdot a_{n-1} = a_{n-1} \ \wedge \cdots \wedge\ 1\cdot a_1 = a_1 \ \wedge\ 1\cdot a_0 = a_0.$

Sabemos que $1\cdot a_i = a_i$ ya que 1 es el elemento neutro de la operación producto en el campo $\mathbb{R}$.

$\therefore 1\,p(x) = p(x).$

$\therefore P^n(x)$ es un espacio vectorial

Q.E.D.

B) Si tomamos que $a_i \in \mathbb{Z}$, $P^n(x)$ dejaría de ser un espacio vectorial, pues si seguimos tomando los escalares de $\mathbb{R}$, el producto entre enteros y reales no es necesariamente entero, esto hace que el axioma 6 se quiebre.

Axioma 6:

- $\alpha|V_i\rangle \in \mathbb{V} \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow \alpha p(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$

además, si $\alpha \notin \mathbb{Z} \rightarrow \alpha a_i \notin \mathbb{Z}.$

C) Para éstas demostraciones se utilizará el test del subespacio.

Test del subespacio: 1. $|0\rangle_V \in S$ 2. $\alpha|V_i\rangle + \beta|V_j\rangle \in S$ $\Rightarrow$ S es un subespacio.

y se demostrará si S es subespacio de P^n. Por lo que se utilizarán las operaciones anteriormente definidas.

I. Polinomio neutro y polinomios de grado menor igual a $n-1$.

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \quad \wedge \quad O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1}$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \qquad\qquad = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n.$$

1. $|0\rangle_V \in S$
2. $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \beta(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$

$$= \alpha a_0 + \alpha a_1x + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \beta b_0 + \beta b_1x + \cdots + \beta b_{n-1}x^{n-1}.$$
$$= (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + \cdots + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^{n-1}.$$
$$= c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} = h(x)$$

$\therefore h(x) = \alpha p(x) + \beta q(x) \in S.$

$\therefore S = \mathbb{P}^{n-1}(x)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}^n(x)$

II Polinomio neutro y polinomios de grado par.

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n}$ $\quad (n \in \mathbb{Z},\ n > 0)$
$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{2n-1}x^{2n-1} + b_{2n}x^{2n}.$

y $O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{2n-1} + 0x^{2n}.$

1. $|0\rangle_{P^n} = O(x) \in P^{2n}(x)$
2. $\alpha p(x) + \beta q(x) \in P^{2n}(x)$

$$\alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n}) + \beta(b_0 + b_1x + \cdots + b_{2n-1}x^{2n-1} + b_{2n}x^{2n}).$$
$$= \alpha a_0 + \alpha a_1x + \cdots + \alpha a_{2n-1}x^{2n-1} + \alpha a_{2n}x^{2n} + \beta b_0 + \beta b_1x + \cdots + \beta b_{2n-1}x^{2n-1} + \beta b_{2n}x^{2n}.$$
$$= \alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + \cdots + (\alpha a_{2n-1} + \beta b_{2n-1})x^{2n-1} + (\alpha a_{2n} + \beta b_{2n})x^{2n}.$$
$$= d_0 + d_1x + \cdots + d_{2n-1}x^{2n-1} + d_{2n}x^{2n}$$

$\therefore S_2 = \mathbb{P}^{2n}(x)\ (n \in \mathbb{Z}, n > 0)$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{P}^n(x)$.

III Polinomios con x como factor

$$p(x) = x\,p'(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_{n-1}x^n + a_nx^{n+1}$$

III Polinomios con x como factor

$$p(x) = x\,p'(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_{n-1}x^n + a_nx^{n+1}$$

1. Si $a_i = 0$, entonces : $0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n + 0x^{n+1}.$
2. $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha a_0x + \alpha a_1x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^n + \alpha a_nx^{n+1} + \beta b_0x + \beta b_1x^2 + \cdots + \beta b_{n-1}x^n + \beta b_nx^{n+1}$

$$= (\alpha a_0 + \beta b_0)x + (\alpha a_1 + \beta b_1)x^2 + \cdots + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^n + (\alpha a_n + \beta b_n)x^{n+1}.$$
$$= g_0x + g_1x^2 + \cdots + g_{n-1}x^n + g_nx^{n+1}. = x(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) = n\,p(x).$$

$\therefore S_2$ es subespacio vectorial de $\mathbb{P}^n(x)$.

IV Todos los polinomios que tengan como factor $(x-1)$.

$S_3 = \{\, p(x) \in P^n(x) \mid p(x) = (x-1)p'(x) \,\}.$

Sea $p(x) = (x-1)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n)$
entonces:

1. $O(x)_{S_3} = (x-1)\,O(x)_{P^n(x)}$

$$= (x-1)(0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n)$$
$$= 0(x-1) + 0(x-1)x + \cdots + 0(x-1)x^{n-1} + 0(x-1)x^n.$$
$$= O(x).$$

2. $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha(x-1)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) + \beta(x-1)(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n)$

$$= \alpha(x-1)a_0 + \alpha(x-1)a_1 x + \cdots + \alpha(x-1)a_{n-1}x^{n-1} + \alpha(x-1)a_n x^n$$

$$+ \beta(x-1)b_0 + \beta(x-1)b_1 x + \cdots + \beta(x-1)b_{n-1}x^{n-1} + \beta(x-1)b_n x^n.$$

$$= (x-1)(\alpha a_0 + \beta b_0) + (x-1)(\alpha a_1 + \beta b_1)x + \cdots + (x-1)(\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^{n-1} + (x-1)(\alpha a_n + \beta b_n)x^n.$$

$$= (x-1)(p(x) + q(x))$$

$\therefore$ S_3 es un subespauo de $\mathbb{P}^n(x)$