Problema Restrito de Três Corpos

Camila Borges Sena

Universidade Federal do Rio Grande, Instituto de Matemática, Estatística e Física.

Resumo

O problema de três corpos é um desafio fundamental na física e na matemática que envolve o estudo do movimento de três corpos que interagem gravitacionalmente. No sistema, cada corpo exerce uma força gravitacional sobre os outros dois corpos, resultando em um comportamento altamente complexo e imprevisível. Embora seja possível encontrar soluções analíticas para casos específicos, como o problema de três corpos restrito, onde um dos corpos é considerado massivamente menor em relação aos outros dois, a maioria dos casos requer técnicas numéricas avançadas. Portanto, este trabalho visa abordar de forma breve uma resolução para o problema de três corpos, utilizando uma simulação computacional.

Abstract

The three-body problem is a fundamental challenge in physics and mathematics that involves studying the motion of three bodies interacting gravitationally. In the system, each body exerts a gravitational force on the other two bodies, resulting in highly complex and unpredictable behavior. While it is possible to find analytical solutions for specific cases, such as the restricted three-body problem where one body is considered significantly smaller than the other two, most cases require advanced numerical techniques. Therefore, this work aims to briefly address a resolution to the three-body problem using computer simulations.

Palavras-chave: astronomia, astrofísica, problema de três corpos.
Keywords: astronomy, astrophysics, three body problem.

1 Introdução

O problema dos três corpos (com força de atração Newtoniana) é o estudo do movimento de três corpos com massas arbitrárias, m_1, m_2, m_3, movendo-se exclusivamente devido à força de atração gravitacional Newtoniana entre cada par de corpos.

Esse problema surge naturalmente no estudo do movimento dos planetas. Por exemplo, o sistema Sol-Terra-Lua pode ser considerado um caso particular do problema dos três corpos se ignorarmos os efeitos dos outros planetas nesse sistema. Da mesma forma, o sistema satélite-Terra-Lua constitui um caso particular desse problema, desprezando a influência dos outros planetas nesse sistema. No entanto, é mais conveniente tratar esse último problema considerando que o satélite tem massa desprezível em comparação com as massas da Terra e da Lua, se encaixando melhor no chamado problema restrito dos três corpos [1].

É comum fazer uma distinção entre o problema geral dos três corpos (onde os corpos se movem no espaço tridimensional) e o problema planar dos três corpos (onde os corpos se movem em um mesmo plano ao longo do tempo). O problema pode ser definido para um número arbitrário de corpos, chamado de problema dos n corpos, e continua sendo um dos desafios que, ao longo dos séculos, intrigou matemáticos eminentes e ainda aguarda solução.

Newton explorou a ideia pela primeira vez em 1687, tentando determinar as equações diferenciais que resolveriam o movimento do corpos. Embora muitos outros cientistas tenham estudado o problema, foi relativamente não resolvido até que Poincaré fez um trabalho inovador na área em 1890 [2]. O problema envolve 18 equações diferenciais de primeira ordem, podendo ser reduzida a 6 equações através do uso de equações e cálculos de conservação, foi observado que não há quantidades de conservações suficientes para mais simplificações. Porém, podemos olhar para um caso mais restrito para ter uma ideia geral do que observaríamos como exemplos limitados.

O problema envolve a interação de duas grandes massas em órbita circular ao redor de seu centro de massa. Um terceiro corpo, consideravelmente menor, é introduzido no sistema, e o objetivo é compreender o movimento desse objeto à medida que ele é influenciado pelas forças gravitacionais das duas massas maiores. Embora as limitações possam parecer tornar o problema impraticável, há diversas situações no sistema solar em que o problema restrito de três corpos encontra aplicação. Por exemplo, a entrada de um cometa no sistema Sol-Terra ou a trajetória de um satélite no sistema Terra-Lua despertam grande interesse entre físicos e astrônomos. Tanto a órbita da Terra em torno do Sol quanto a órbita da Lua em torno da Terra apresentam uma excentricidade próxima de zero, o que as torna essencialmente circulares [1][2].

2 Método

Para resolver o problema é necessário resolver as equações diferencias ordinárias (EDO's) que governam o movimento de n corpos, tendo isso em mente, a partir da lei gravitacional de Newton, podemos chegar as EDO's que vão descrever a interação dos corpos, sendo estas:

$$\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = -Gm_2\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3} - Gm_3\frac{\vec{r_1}-\vec{r_3}}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|^3} \quad (1)$$

$$\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -Gm_3\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|^3} - Gm_1\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|^3} \quad (2)$$

$$\frac{d^2\vec{r_3}}{dt^2} = -Gm_1\frac{\vec{r_3}-\vec{r_1}}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|^3} - Gm_2\frac{\vec{r_3}-\vec{r_2}}{|\vec{r_3}-\vec{r_2}|^3} \quad (3)$$

Onde G é a constante gravitacional, e $\vec{r_i} - \vec{r_i}$ são os vetores posição e aceleração dos corpos.

Para o problema restrito de três corpos, m_1 e m_2 são chamados de primárias e o que se busca é estudar o movimento do terceiro corpo, m_3 [2]. Uma particularidade deste problema está no fato de que m_1 e $m_2 >> m^3$, dito de forma geral, temos três restrições aplicadas ao problema:

1. m_3 é considerada nula.
2. As órbitas do primeiro e segundo corpo são círculos ao redor do centro de gravidade do sistema.
3. O terceiro corpo se move no plano orbital dos outros dois corpos.

Na restrição (1), temos implicação que o terceiro corpo não exerce influência gravitacional, portando as orbitas dos outros dois corpos não necessita da presença do terceiro corpo para serem determinadas, isso caracteriza o problema geral de dois corpos. Para a restrição (2), temos que as orbitas circulares possuem um raio e velocidade angular constante e para a restrição (3), implica numa simplificação matemática importante, tornando a descrição completa do problema em bidimensional.

As restrições demostradas acima podem ser observadas da seguinte forma:

$$\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = -Gm_2\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3} \quad (4)$$

$$\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -Gm_1\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3} \quad (5)$$

$$\frac{d^2\vec{r_3}}{dt^2} = -Gm_1\frac{\vec{r_3}-\vec{r_1}}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|^3} - Gm_2\frac{\vec{r_3}-\vec{r_2}}{|\vec{r_3}-\vec{r_2}|^3} \quad (6)$$

Devido a utilização sistema dinâmica para a solução do problema, por tratar-se de um planeta orbitando duas estrelas massivas de massas quase iguais ou iguais, neste caso não temos orbitas que podem ser estáveis ou instáveis. Pois $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ não são constantes estáveis e nosso problema fica mais complexo [2].

A partir da utilização de um script em Python para solucionar as EDO's (Deshmukh, G. 2019), alterando apenas algumas condições iniciais como velocidade e posição, podemos observar o movimento no gráfico 3D, a trajetória dos três corpos. Sabendo que para orbitais estaveis, temos que a energia total do sistema esteja próxima a zero, podendo encontrar a velocidade inicial para a distância do terceiro corpo com posição inicial.

Abaixo, duas das formulas utilizadas para aplicação destas condições observadas acima:

$$E_t = E_c - E_p \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{R} \quad (8)$$

3 Resultados

O uso da linguagem de programação Python oferece uma ampla gama de recursos e bibliotecas especializadas para a criação de gráficos que ilustram de forma clara e intuitiva as órbitas e interações dos corpos celestes envolvidos. Com o auxílio de bibliotecas gráficas, como Matplotlib, os dados obtidos foram traduzidos em visualizações claras e informativas.

Essas representações gráficas permitiram uma compreensão mais aprofundada das complexas dinâmicas do sistema, revelando detalhes como órbitas ao redor de duas estrelas e órbitas em forma de curva lemniscata entre as estrelas massivas. Em resumo, temos que este trabalho apresentou resultados promissores sobre a utilização de gráficos gerados em Python para visualizar o problema restrito de três corpos.

Como demostrado nos gráficos obtidos através do script, ao qual representa o movimento num problema de três corpos.

4 Conclusão

Um sistema de três corpos dinâmico não terá soluções matematicamente fechadas, e no caso restrito é possível calcular algumas órbitas possíveis nessa interação. No entanto, outras condições resultariam em sistemas caóticos. Em casos orbitais adicionais, se as estrelas massivas envolvidas estiverem rigidamente posicionadas uma em relação à outra e girando em torno do centro de massa do sistema, os corpos poderiam interagir mais facilmente. Isso possibilitaria a existência de órbitas ao redor de apenas uma das estrelas.

Apêndice A: Sessão de apêndice

Script em python: Problema restrito de três corpos

Referências

[1] V. Oliveira e I. Cruz, O problema dos três corpos, Projetos Novos Talentos em Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian. Disponível em: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/ relatividade/3Corpos/3corpos.html>, acesso em maio. 2023.

[2]G. da Silva Macedo e A. J. R. Junior, Aplicação do problema restrito de três corpos no estudo do movimento de astros do sistema solar, Revista Brasileira de Ensino de Física (online) Vol 40 (2018). Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/ngrxHPwZ6bDbbhvPnnLQ8LL/?lang=pt>, acesso em maio. 2023.

[3] G. Deshmukh. Modelling the Three Body Problem in Classical Mechanics using Python. Disponível em:<https://towardsdatascience.com/modelling-thethree-body-problem-in-classical-mechanics-usingpython-9dc270ad7767>, acesso em maio. 2023