VETOR

Transformada de Fourier aplicada ao processamento de imagens digitais

Camila Borges Sena[1,†]

[1] *Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande.*

[†] **Autor correspondente:** camila19sena@gmail.com

Resumo

A transformada de Fourier é um truque matemático que divide um sinal em suas várias frequências. Se aplicada ao tratamento de imagens digitais, a transformada de Fourier pode oferecer informações sobre os padrões de luz e sombra de uma imagem. A partir disso, as partes de frequência podem ser selecionadas e os filtros aplicados para melhoria ou para eliminar ruídos de fundo.

Palavras-chave

Transformada de Fourier • Imagem Digital • Métodos matemáticos

Abstract

The Fourier transform is a mathematical trick that separates a signal into its various frequencies. When applied to the processing of digital images, the Fourier transform can provide information about the light and shadow patterns of an image. From this, frequency components can be selected and filters applied for improvement or to eliminate background noise.

Keywords

Fourier Transform • Digital Image • mathematical methods

1 Introdução

O interesse por métodos de processamento digital de imagens origina-se principalmente de duas áreas de aplicação: aprimoramento da informação visual para interpretação humana e processamento computacional de dados visuais. Esse interesse tem crescido constantemente, encontrando aplicações em diversas áreas, como o programa espacial, medicina, arqueologia, física, astronomia, biologia, indústria e muitas outras.

O termo imagem refere-se a uma função de intensidade de luz bi-dimensional f(x,y), onde x e y são coordenadas espaciais e o valor de f em um ponto qualquer (x,y) é proporcional ao brilho ou nível de cinza da imagem naquele ponto. Uma imagem digital é uma imagem f(x,y) discretizada no espaço e na intensidade de brilho e pode ser considerada uma matriz, cujos elementos são chamados de "pixels"("picture elements") [1].

A Transformada de Fourier desenvolvida por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), é largamente utilizada para análise espectral de funções. A teoria de Fourier diz que qualquer sinal, podem ser expressadas como uma soma de senoides (senos e cossenos), no caso das imagens, são variações senoides do brilho na imagem. Segundo Gonzalez e Woods (2000), inicialmente as ideias de Fourier foram aplicadas na área de difusão de calor, na qual elas permitiram a formulação de equações diferenciais que representavam o fluxo de calor, de modo que as soluções puderam ser obtidas pela primeira vez [1] [2].

Portando, quando desejamos trabalhar com uma imagem no domínio da frequência, podemos utilizar a transformada de Fourier para obter a representação da imagem nesse domínio. Em seguida, podemos aplicar um filtro multiplicando a transformado pelo espectro de frequência desejado, adequado à aplicação em questão.

No entanto, muitas vezes é mais conveniente simplificar o processo "zerando"os coeficientes das componentes de frequência que queremos filtrar. Em ambos os casos, realizamos a transformação inversa para obter uma imagem filtrada ou processada. Essa abordagem permite controlar seletivamente as frequências que desejamos manter ou remover da imagem. Dessa forma, é possível realçar determinadas características, suavizar ruídos ou até mesmo extrair informações específicas do conteúdo frequencial da imagem.

1.1 Transformada Contínua de Fourier

Segundo Gonzalez e Woods (2000), seja $f(x)$ uma função continua de uma variável real x. A transformada de Fourier de $f(x)$, denotada por $\tau f(x)$, ao qual é definido pela equação

$$\tau = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}\,dx \tag{1}$$

onde $j = \sqrt{-1}$.

Dado que $F(u)$, $f(x)$ podem ser obtidos através da transformada inversa de Fourier.

$$\tau^{-1}F(u) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{j2\pi ux}\,du \tag{2}$$

Estas Eq. (1 2), são chamadas de par da transformada de Fourier, existindo se $f(x)$ for contínua e integrável e $F(u)$ for integrável. Estas duas condições são quase sempre satisfeitas.

Utilizando a fórmula de Euler, podemos expressar a Eq. (1)da seguinte forma,

$$F(\mu)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cos(2\pi\mu t) - jsen(2\pi\mu t)\,dt \tag{3}$$

Portando, se $f(t)$ é real, vemos que sua transformada em geral é complexa, observando que a transformada de Fourier é uma extensão de $f(t)$ multiplicada por termos senoides ao qual as frequências são definidas pelos valores de μ, como única variável restante após a integração é a frequência. Dizemos que o domínio da transformada de Fourier é o domínio da frequência [2].

Por exemplo, para a obtenção de uma transformada de Fourier de uma função simples, como demostrada na Fig. 1, resulta da Eq. (1)

$$F(\mu)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} Ae^{-j2\pi\mu t}\,dt \tag{4}$$

$$\therefore = AW\frac{sen(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \tag{5}$$

Na qual fora utilizada a identidade trigonométrica $sen\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$. Neste caso os termos complexos da transformada se combinam perfeitamente com uma função seno real. Levando ao resultado no último passo da expressão anterior, que pela conhecido como função *sinc*

$$sinc(m) = \frac{sen(\pi m)}{(\pi m)} \tag{6}$$

na qual $sinc(0) = 1$ e $sinc(m) = 0$ para qualquer outro valor inteiro de m, na Fig. 1 temos esta demostração. Segundo Gonzalez e Woods (200), no geral, a transformada de Fourier contém termos complexos e costuma-se, para fins de visualização, trabalhar com magnitude da transformada(um valor real), conhecido como espectro de Fourier, demostrando na Eq. (7), ainda na Fig. 1, temos demostração de $F(\mu)$ como uma função de frequência [2].

$$|F(\mu)| = AW|\frac{sen(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}| \tag{7}$$

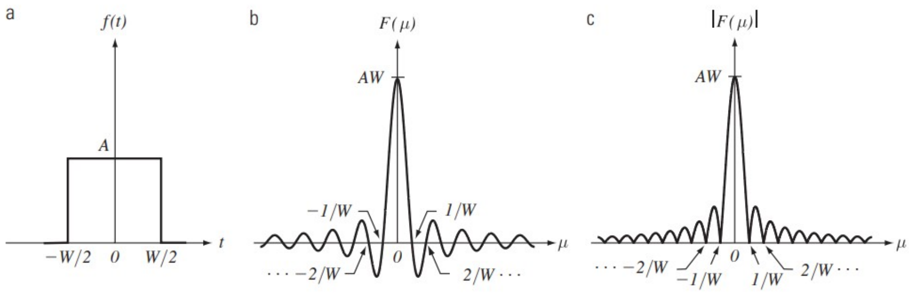

Figura 1: (a) Uma função simples; (b) sua transformada de Fourier; e (c) o espectro. Todas as funções se estendem ao infinito em ambas as direções [2]

Na prática, temos outro exemplo observado na Fig. 2, tendo o padrão senoide podendo ser capturado por um único termo de Fourier, tem-se as seguintes informações; a frequência espacial, a magnitude (positiva ou negativa) e a fase. Esses três valores capturam toda informação sobre a imagem senoide. A frequência espacial é a frequência através do espaço em que o brilho se modula, enquanto a magnitude pode ser compreendida sendo aquela que corresponde ao contraste, já a fase, representa como a onda é transladada [2].

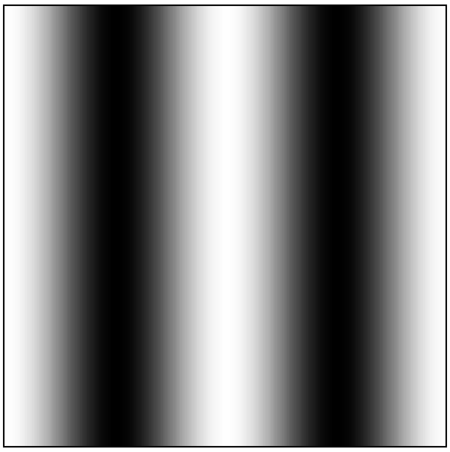

Figura 2: Padrão senóide de um único termo de Fourier [2]

1.2 Transformada Discreta de Fourier

A Transformada Discreta de Fourier (DFT, do inglês Discrete Fourier Transform) 2D é definida por

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi ux/M}e^{-j2\pi vy/N} \tag{8}$$

sendo $f(x,y)$ uma imagem digital de tamanho $M \times N$, x e y inteiros, u e v variáveis discretas. Portando, a DFT é muito utilizado para o processo de filtragem de uma imagem digital.

Tendo em conta a Eq. (8), temos que sua transformada inversa discreta de Fourier (IDFT, do inglês Inverse Discrete Fourier Transform), é

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{-j2\pi ux/M}e^{-j2\pi vy/N} \tag{9}$$

No exemplo a seguir, observamos a mecânica do cálculo de uma DFT, onde a Fig. 3 mostra quatro amostras de uma função continua, $f(t)$, obtido em intervalos Δt. Na Fig. 3, temos também que nos é mostrado valores da amostragem no domínio de x, observa-se que os valores de x são 0, 1, 2 e 3, ao qual indica que podemos nos referir a quaisquer amostras da função [2].

Tendo que a Eq. (10) para expressar uma DFT unidimensional

$$f(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}; u = 0, 1, 2, ..., M-1 \tag{10}$$

Podemos escrever,

$$F(0) = \sum_{x=0}^{3} f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]] = 1 + 2 + 4 + 4 = 11 \tag{11}$$

Portando, o próximo valor de $F(u)$ é

$$F(1) = \sum_{x=0}^{3} f(x)e{-}j2\pi(1)x/4 = 1e^{0} + 2e^{-j2\pi} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} == 3 + 2j \tag{12}$$

De forma similar, $F(2) = (1 + 0j)$ e $F(3) = (3 + 2j)$. Observe que todos os valores de $f(x)$ são usados no cálculo de cada termo de $F(u)$.

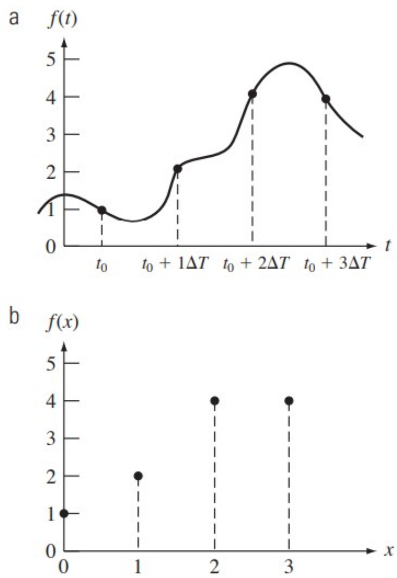

Figura 3: (a) Uma função e (b) amostras no domínio de x. Em (a), t é uma variável contínua; em (b), x representa valores inteiros [2].

1.3 Transformada de Fourier Caso Bidimensional 2-D

A Transformada de Fourier Caso Bidimensional (2D) é uma generalização da Transformada de Fourier Caso Unidimensional (1D). Enquanto a transformada unidimensional converte uma função de uma variável em uma função de frequência, a transformada bidimensional converte uma função de duas variáveis em uma função de duas frequência [3].

Portanto, através da propriedade de separabilidade, utilizada para calcular uma transformada bidimensional como uma sucessão de duas transformadas unidimensionais, isto é a separabilidade, podendo ser definida da a partir do par de transformada discretas de Fourier na Eq. (8), expressado em forma separável [1] [4].

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j\pi ux/N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-j\pi vy/N} \tag{13}$$

A principal vantagem da propriedade de separabilidade é que tanto $F(u, v)$ quanto $f(x, y)$ podem ser obtidos em dois passos distintos por meio da aplicação sucessiva da transformada de Fourier unidimensional, ou sua inversa.

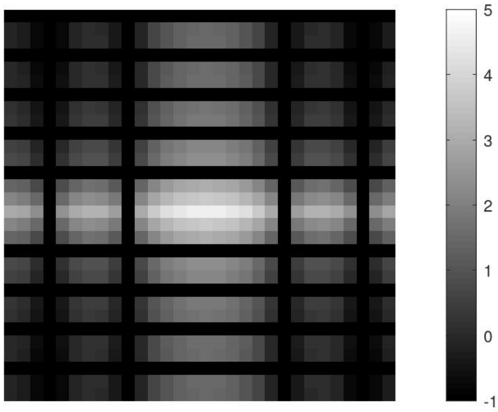

Figura 4: DFT produzida por script em Octave

Esse benefício pode ser visualizado claramente na Eq. (13), em que obtemos $F(u,v)$ e $F(x,v)$ para cada valor de x. Assim, para obter a função bidimensional $F(x,y)$, aplicamos a transformada ao longo de $f(x,y)$ e multiplicamos o resultado por N. Para $F(u,v)$, o resultado é obtido aplicando a transformada ao longo de cada coluna de $F(u,v)$. Essa abordagem simplificada permite uma computação mais eficiente e facilita a análise de sinais e imagens em duas dimensões.

Observa-se a Fig. 4, que apresenta um exemplo de uma transformada discreta de Fourier bidimensional aplicada a uma imagem usando o software Octave.

O espectro de Fourier, que é formado pelas componentes de magnitude e fase da transformada de Fourier, obtido por meio de uma DFT (2D) não apenas fornece informações sobre a orientação das estruturas presentes na imagem de entrada, mas também mapeia as variações nos tons de cinza dos pixels, como observado na Fig. 4. Um pequeno número de variações de intensidade de cinza em um determinado espaço indica a presença de regiões de baixa frequência, enquanto um maior número de variações indica a presença de regiões de alta frequência na imagem. Dessa forma, o espectro de Fourier da imagem nos permite obter insights sobre a distribuição e a natureza das frequências espaciais presentes, auxiliando na análise e no processamento de imagens.

Outra propriedade da transformada que devemos ressaltar, é a translação, essa propriedade mostra que a multiplicação de $f(x,y)$ pela exponencial resulta num deslocamento de frequência para os pontos iniciais. Analogamente, se multiplicamos a função $F(u,v)$ pela mesma exponencial, tornamos a transformada inversa, efetuando um deslocamento espacial da origem para os pontos em x_o e y_o [1].

$$f(x,y) \leftrightarrow F(u,v) \tag{14}$$

$$f(x,y)e^{-j2\pi(ux_o/M+vy_o/N)} \leftrightarrow F(u-u_o, v-v_o) \tag{15}$$

$$\therefore \tau[f(x,y)e^{-j2\pi(ux_o/M+vy_o/N)}] = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{-j2\pi ux/M}e^{-j2\pi vy/N} \tag{16}$$

Além da translação e da separabilidade, temos a rotação e a periodicidade. A rotação nos mostra que uma rotação em $f(x,y)$ por ângulo α, produz a mesma rotação em F(u,v) e vice-versa. Já a periodicidade, nos mostra que se $f(x,y)$ é periódica, somente um período é necessário para especificar completamente $F(u,v)$ no domínio da frequência, o mesmo se aplica a $f(x,y)$ no domínio espacial [1] [4] [5].

2 Estudo de Caso

Neste tópico, iremos explorar a aplicação da transformada discreta de Fourier (DFT) em análise de imagens. Nos exemplos fornecidos abaixo, destacamos sua importância e utilidade para analise de imagens de satélites.

2.1 DFT em Satélites

A análise e processamento de imagens de satélite desempenham um papel fundamental em diversas áreas, desde monitoramento ambiental até planejamento urbano e estudos agrícolas. Nesse contexto, a transformada discreta de Fourier 2-D surge como uma ferramenta para a possibilita de aplicação de técnicas de filtragem, remoção de ruído e fusão de imagens, contribuindo para a melhoria da qualidade das imagens e a extração de informações relevantes.

Observamos na Fig. 5, um exemplo de DFT aplicada em imagens de satélite, onde temos que o filtro passa baixo, ao qual é um filtro que passa sem atenuação por todas as frequências dentro de um circulo de raio D_o da origem, ao qual corta todas as frequências fora desta circunferência, portanto utilizando o filtro passa baixo, se calcula a média das mudanças rápidas de intensidade, isto atenua as altas frequências e deixa as baixas frequências da transformada de Fourier relativamente inalterada, assim suavizando a imagem e reduzindo o ruído [5].

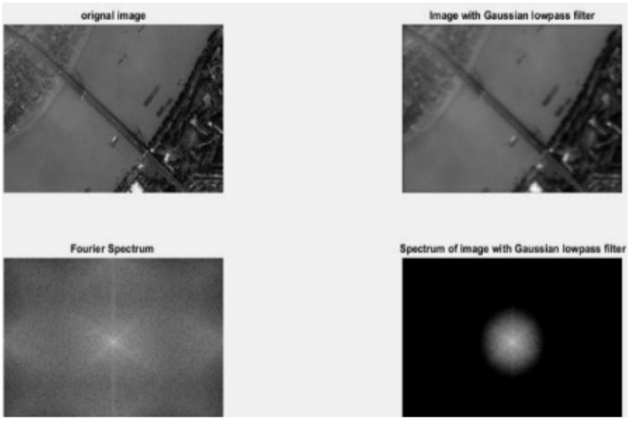

Figura 5: Filtro passa-baixa e seu espectro de Fourier [5]

Outro exemplo que podemos abordar em DFT em satélites, é utilizando os filtros gaussianos, ao qual minimizam o problema que ocorre em um filtro ideal, que refere-se a ser um filtro utilizado para realizar a filtragem de frequência em um sinal no domínio da frequência. Portando, a função de atribuição do filtro gaussiano passa-baixa bidimensional (GLPF, do inglês Two-dimensional Gaussian Low-pass filter) pode ser observada na Fig. 6.

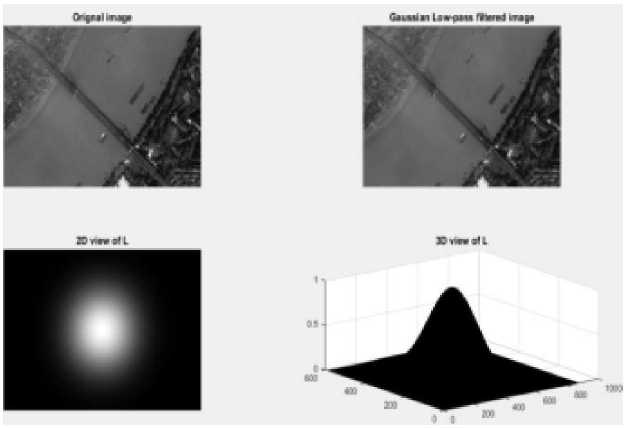

Figura 6: Filtro passa-baixo gaussiano com seu gráfico de superfície 2D e 3D [5]

O GLPF é um filtro utilizado para suavizar uma imagem, reduzindo as altas frequências e preservando as baixas frequências. Comumente utilizado em processamento de imagens para realizar a filtragem no domínio espacial, a aplicação desse filtro envolve a convolução da imagem original com uma máscara gaussiana, ao qual é uma matriz com valores que seguem uma distribuição em duas dimensões. Compreende-se então que a máscara gaussiana define a escala de suavização, determinando quão fortemente as altas frequências serão atenuadas. O resultado que obtemos é uma imagem filtrada com aparência suavizada, onde os detalhes finos são menos proeminentes, tendo em vista que o tamanho da gaussiana afeta o grau de suavização, onde máscaras maiores resultam em uma suavização mais intensa.

3 Aplicação em Python da Transformada de Fourier

A aplicação de python para transformada de Fourier, pode ser uma ferramenta influente para análise de sinais e processamento de imagens. O código utilizado neste trabalho foi produzido pelo autor e está disponível em um repositório no GitHub, o código fora utilizado para aplicar a transformada de Fourier em uma matriz preta, onde uma região circular foi preenchida com valores igual a 1. A partir disso, fora gerada uma figura que representa o espectro da DFT, demostrado na Fig. 7.

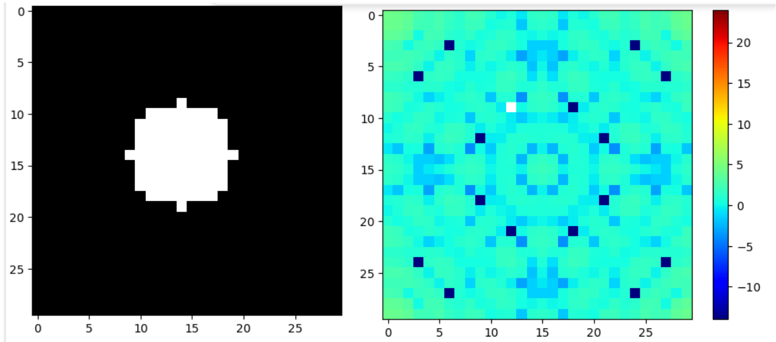

Figura 7: Da esquerda para direita temos, a)imagem produzida em python e b) sua DFT colorida

A primeira figura exibe o espectro da DFT original, sem nenhum processamento adicional. Ela mostra a distribuição de amplitudes das diferentes componentes de frequência presentes no sinal. As áreas mais claras indicam as frequências mais intensas, enquanto as áreas mais escuras indicam frequências menos intensas. Nesse caso, podemos observar que a região circular preenchida com valores 1 concentra as altas amplitudes no espectro.

Em seguida, foram realizadas duas reconstruções diferentes da DFT. Na reconstrução para frequências altas, utilizou-se um filtro passa-baixa, removendo as amplitudes das componentes de frequência no canto superior esquerdo e inferior direito do espectro. A Fig. 8-a resulta de uma mostra de imagem reconstruída, onde predominam as baixas frequências, sendo menos evidente a região circular preenchida.

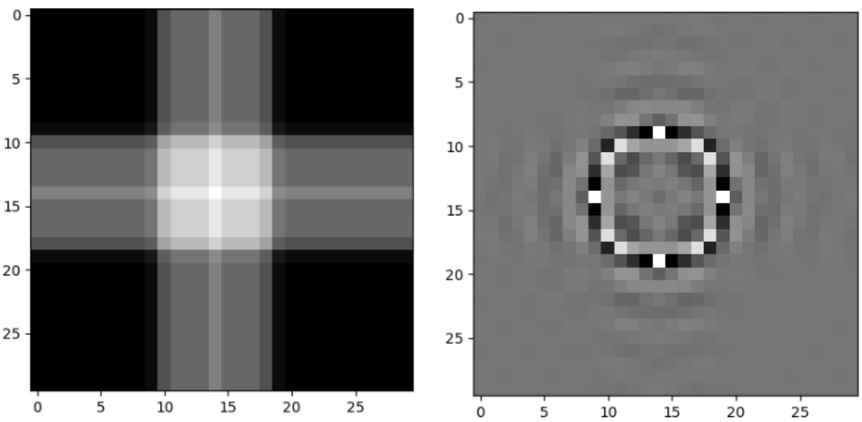

Figura 8: Da esquerda para direita temos, a) filtro passa-baixa e b) filtro passa-alta

Por outro lado, na reconstrução para frequências baixas, foi utilizado um filtro passa-alta, removendo as amplitudes das componentes de frequência no centro do espectro. A Fig. 8-b resulta de uma mostra de imagem reconstruída onde predominam as altas frequências, destacando a região circular preenchida.

Essas reconstruções ilustram como o processamento do espectro de DFT, ao qual pode influenciar na imagem reconstruída, realçando ou suprimindo determinadas características do sinal original.

4 Conclusão

Com os avanços do uso de linguagem de programação na resolução de problemas, o processamento digital tem se tornado cada vez mais indispensável para análises e diagnósticos de imagens digitais. Entre as ferramentas mais utilizadas nesse contexto, destaca-se a transformada de Fourier, ao qual por meio dessa transformada, é possível aplicar técnicas de filtragem digital para melhorar a qualidade e extrair informações relevantes das imagens estudas.

Podendo ser aplicada em diferentes linguagens de programação, é demostrado que a transformada discreta de Fourier em python para análise de imagens digitais revelou-se uma ferramenta versátil e útil. Em suma, temos que tal combinação oferece um conjunto de ferramentas que nos permitem a realização de diversas técnicas, como filtragem, realce de bordas e compressão, tais técnicas podem melhorar a qualidade da imagem trabalhada, extraindo maior quantidade de informações relevantes, auxiliando na tomada de decisões referente ao tratamento de imagens digitais.

Referências

[1] J. F. Neto, "Aplicação da transformada de fourier no processamento digital de imagens," pp. 01–26, 1999. Disponível em: https://www.cin.ufpe.br/~ags/Sinais/AplicaÃğÃčo%20da%20Transformada%20de%20Fourier%20no%20processamento%20digital%20de%20imagens.pdf

[2] R. Gonzalez e R. Woods, *Processamento de imagens digitais*, 1ª ed. São Paulo, SP: Editora Edgard Blucher LTDA., 2000.

[3] J. P. da Silva e R. M. Pereira, "Transformada de fourier aplicada na construçao de filtros de imagens digitais," em *Anais do XXXIX CNMAC*. Minas Gerais, Brasil: Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2019. Disponível em: https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/3045

[4] L. A. Gonçales, "Um estudo sobre a transformada rápida de fourier e seu uso em processamento de imagens," Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matématica Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2004. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/6748/000446124.pdf?sequence=1

[5] K. Bajpai e R. Soni, *Analysis of Image Enhancement Techniques Used in Remote Sensing Satellite Imagery*. International Journal of Computer Applications, 2017, vol. 169, pp. 1–12. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/318502666