Examen 1: Ejercicios Propuestos

Martínez Macías Samuel
Docente: Dr. José Alonso López Miranda

14 de abril de 2023

Índice

Resumen

En este documento se encuentra la solución de una serie de problemas de mecánica cuántica tomados del texto [1], capítulo 2, a partir de la notación *bra-ket* de Dirac.

1. Capítulo 2: Herramientas Matemáticas de la Mecánica Cuántica

1.1. Ejercicio 2.1

Considere los dos estados $|\psi\rangle = i\,|\phi_1\rangle + 3i\,|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle$ y $|\chi\rangle = |\phi_1\rangle - i\,|\phi_2\rangle + 5i\,|\phi_3\rangle$ en donde $|\phi_1\rangle\,, |\phi_2\rangle$ y $|\phi_3\rangle$ son ortonormales.

(a) Calcule $\langle\psi|\psi\rangle$, $\langle\chi|\chi\rangle$, $\langle\psi|\chi\rangle$, $\langle\chi|\psi\rangle$, e infiera $\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle$. ¿Son iguales los productos $\langle\psi|\chi\rangle$ y $\langle\chi|\psi\rangle$?

(b) Calcule $|\psi\rangle\langle\chi|$ y $|\chi\rangle\langle\psi|$. ¿Son iguales? Calcule sus trazas y compárelas.

(c) Encuentre los conjugados Hermitianos de $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$, $|\psi\rangle\langle\chi|$ y $|\chi\rangle\langle\psi|$.

Solución:

(a)

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(-i\,\langle\phi_1| - 3i\,\langle\phi_2| - \langle\phi_3|\right)\left(i\,|\phi_1\rangle + 3i\,|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle\right)$$

al expandir, los productos internos $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_3\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_3\rangle = \langle\phi_3|\phi_1\rangle = \langle\phi_3|\phi_2\rangle = 0$, por la condición de ortonormalidad, y de la misma manera los productos internos $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = \langle\phi_3|\phi_3\rangle = 1$. Así,

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= -i^2\,\langle\phi_1|\phi_1\rangle - 9i^2\,\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= (1\times 1) + (9\times 1) + (1\times 1) \\
&= 1 + 9 + 1 \\
&= 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\chi|\chi\rangle &= \left(\langle\phi_1| + i\,\langle\phi_2| - 5i\,\langle\phi_3|\right)\left(|\phi_1\rangle - i\,|\phi_2\rangle + 5i\,|\phi_3\rangle\right) \\
&= 1^2\,\langle\phi_1|\phi_1\rangle - i^2\,\langle\phi_2|\phi_2\rangle - 25i^2\,\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= (1\times 1) + (1\times 1) + (25\times 1) \\
&= 1 + 1 + 25 \\
&= 27
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\chi\rangle &= \left(-i\,\langle\phi_1| - 3i\,\langle\phi_2| - \langle\phi_3|\right)\left(|\phi_1\rangle - i\,|\phi_2\rangle + 5i\,|\phi_3\rangle\right) \\
&= -i\,\langle\phi_1|\phi_1\rangle + 3i^2\,\langle\phi_2|\phi_2\rangle - 5i\,\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= (-i\times 1) + (-3\times 1) + (-5i\times 1) \\
&= -i - 3 - 5i \\
&= -3 - 6i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle\chi|\psi\rangle &= \left(\langle\phi_1| + i\langle\phi_2| - 5i\langle\phi_3|\right)\left(i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle\right) \\
&= i\langle\phi_1|\phi_1\rangle + 3i^2\langle\phi_2|\phi_2\rangle + 5i\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= (i\times 1) + (-3\times 1) + (5i\times 1) \\
&= i - 3 + 5i \\
&= -3 + 6i
\end{aligned}
$$

De aquí notamos que $\langle\psi|\chi\rangle \neq \langle\chi|\psi\rangle$, sin embargo, podemos notar $\langle\psi|\chi\rangle^* = \langle\chi|\psi\rangle$; esto es, $\langle\psi|\chi\rangle$ es el conjugado complejo de $\langle\chi|\psi\rangle$.

$$
\begin{aligned}
\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle &= \left[(-i+1)\langle\phi_1| + (-3i+i)\langle\phi_2| + (-1-5i)\langle\phi_3|\right]\left[(i+1)|\phi_1\rangle + (3i-i)|\phi_2\rangle + (-1+5i)|\phi_3\rangle\right] \\
&= (1-i)(1+i)\langle\phi_1|\phi_1\rangle + (-2i)(2i)\langle\phi_2|\phi_2\rangle + (-1-5i)(-1+5i)\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= \left(1-i^2\right)\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \left(-4i^2\right)\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \left(1-25i^2\right)\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= (2\times 1) + (4\times 1) + (26\times 1) \\
&= 2 + 4 + 26 \\
&= 32
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle\langle\chi| &= \left(i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle\right)\left(\langle\phi_1| + i\langle\phi_2| - 5i\langle\phi_3|\right) \\
&= i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + i^2|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - 5i^2|\phi_1\rangle\langle\phi_3| + 3i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 3i^2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - 15i^2|\phi_2\rangle\langle\phi_3| \\
&\quad - |\phi_3\rangle\langle\phi_1| - i|\phi_3\rangle\langle\phi_2| + 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3| \\
&= i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 3|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3| - |\phi_1\rangle\langle\phi_2| + 3i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 5|\phi_1\rangle\langle\phi_3| - |\phi_3\rangle\langle\phi_1| \\
&\quad + 15|\phi_2\rangle\langle\phi_3| - i|\phi_3\rangle\langle\phi_2|
\end{aligned}
$$

por su parte,

$$
\begin{aligned}
|\chi\rangle\langle\psi| &= \left(|\phi_1\rangle - i|\phi_2\rangle + 5i|\phi_3\rangle\right)\left(-i\langle\phi_1| - 3i\langle\phi_2| - \langle\phi_3|\right) \\
&= -i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + 3i^2|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_1\rangle\langle\phi_3| + i^2|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 3i^2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_3| \\
&\quad - 5i^2|\phi_3\rangle\langle\phi_1| - 15i^2|\phi_3\rangle\langle\phi_2| - 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3| \\
&= -i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 3|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3| - 3|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| - |\phi_1\rangle\langle\phi_3| + 5|\phi_3\rangle\langle\phi_1| \\
&\quad + i|\phi_2\rangle\langle\phi_3| + 15|\phi_3\rangle\langle\phi_2|
\end{aligned}
$$

Evidentemente notamos que $|\psi\rangle\langle\chi| \neq |\chi\rangle\langle\psi|$; la igualdad se cumpliría si los estados $|\psi\rangle$ y $|\chi\rangle$ fueran proporcionales con la constante de proporcionalidad real.

Para calcular la traza usemos la propiedad $\mathrm{Tr}\{AB\} = \mathrm{Tr}\{BA\}$ y al considerar los productos internos $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_3\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_3\rangle = \langle\phi_3|\phi_1\rangle = \langle\phi_3|\phi_2\rangle = 0$, por la condición de ortonormalidad, y de la misma manera los productos internos $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = \langle\phi_3|\phi_3\rangle = 1$. Así,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{|\psi\rangle\langle\chi|\} &= \mathrm{Tr}\{\langle\chi|\psi\rangle\} = \langle\chi|\psi\rangle = -3 + 6i \\
\mathrm{Tr}\{|\chi\rangle\langle\psi|\} &= \mathrm{Tr}\{\langle\psi|\chi\rangle\} = \langle\psi|\chi\rangle = -3 - 6i
\end{aligned}
$$

y como podemos notar $\mathrm{Tr}\{|\psi\rangle\langle\chi|\} \neq \mathrm{Tr}\{|\chi\rangle\langle\psi|\}$, nuevamente $\mathrm{Tr}\{|\chi\rangle\langle\psi|\}$ es el conjugado complejo de $\mathrm{Tr}\{|\psi\rangle\langle\chi|\}$.

(c)

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle^\dagger &= \langle\psi| = -i\,\langle\phi_1| - 3i\,\langle\phi_2| - \langle\phi_3| \\
|\chi\rangle^\dagger &= \langle\chi| = +1\,\langle\phi_1| + i\,\langle\phi_2| - 5i\,\langle\phi_3|
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle\langle\chi|^\dagger &= |\chi\rangle\langle\psi| \\
&= -i\,|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 3\,|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - 5i\,|\phi_3\rangle\langle\phi_3| - 3\,|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| - |\phi_1\rangle\langle\phi_3| + 5\,|\phi_3\rangle\langle\phi_1| \\
&\quad + i\,|\phi_2\rangle\langle\phi_3| + 15\,|\phi_3\rangle\langle\phi_2| \\
|\chi\rangle\langle\psi|^\dagger &= |\psi\rangle\langle\chi| \\
&= i\,|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 3\,|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 5i\,|\phi_3\rangle\langle\phi_3| - |\phi_1\rangle\langle\phi_2| + 3i\,|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 5\,|\phi_1\rangle\langle\phi_3| - |\phi_3\rangle\langle\phi_1| \\
&\quad + 15\,|\phi_2\rangle\langle\phi_3| - i\,|\phi_3\rangle\langle\phi_2|
\end{aligned}$$

1.2. Ejercicio 2.2

Considere los dos estados $|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle + 4i\,|\phi_2\rangle + 5\,|\phi_3\rangle$ y $|\psi_2\rangle = b\,|\phi_1\rangle + 4\,|\phi_2\rangle - 3i\,|\phi_3\rangle$ en donde $|\phi_1\rangle\,, |\phi_2\rangle$ y $|\phi_3\rangle$ son ortonormales. Encuentre el valor de b tal que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ sean ortogonales.

Solución:

Para que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ sean ortogonales su producto interno debe ser igual a cero, i.e., $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$. Entonces:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \left(\langle\phi_1| - 4i\,\langle\phi_2| + 5\,\langle\phi_3|\right)\left(b\,|\phi_1\rangle + 4\,|\phi_2\rangle - 3i\,|\phi_3\rangle\right)$$

al considerar los productos internos $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_3\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_3\rangle = \langle\phi_3|\phi_1\rangle = \langle\phi_3|\phi_2\rangle = 0$, por la condición de ortonormalidad, y de la misma manera los productos internos $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = \langle\phi_3|\phi_3\rangle = 1$. Así,

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= b\,\langle\phi_1|\phi_1\rangle - 16i\,\langle\phi_2|\phi_2\rangle - 15i\,\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\ &= b - 16i - 15i \\ &= b - 31i\end{aligned}$$

y entonces,

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad b - 31i = 0$$

y por lo tanto

$$b = 31i$$

1.3. Ejercicio 2.3

Si $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ y $|\phi_3\rangle$ son ortonormales, muestre que los estados $|\psi\rangle = i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle$ y $|\chi\rangle = |\phi_1\rangle - i|\phi_2\rangle + 5i|\phi_3\rangle$ satisfacen

(a) la desigualdad del triángulo y

(b) la desigualdad de Schwarz.

Solución:

Para dos estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ en el espacio de Hilbert, la desigualdad de Schwarz está descrita como:

$$\|\langle\psi|\phi\rangle\|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle \langle\phi|\phi\rangle \tag{1}$$

y la desigualdad del triángulo,

$$\sqrt{\langle\psi+\phi|\psi+\phi\rangle} \leq \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} + \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle} \tag{2}$$

Tomando los resultados del ejercicio 2.1 con

$$\begin{aligned}\langle\psi|\chi\rangle &= -3-6i \\ \langle\psi|\psi\rangle &= 11 \\ \langle\chi|\chi\rangle &= 27 \\ \langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle &= 32\end{aligned}$$

Entonces, la desigualdad de Schwarz se torna:

$$\begin{gathered}\|\langle\psi|\chi\rangle\|^2 = \|-3-6i\|^2 = 45 \leq (11)(27) = 297 = \langle\psi|\psi\rangle \langle\chi|\chi\rangle \\ 45 \leq 297\end{gathered}$$

y la desigualdad del triángulo:

$$\begin{gathered}\sqrt{\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle} \leq \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} + \sqrt{\langle\chi|\chi\rangle} \\ \sqrt{32} \leq \sqrt{11} + \sqrt{27} \\ 5.657 \leq 8.513\end{gathered}$$

1.4. Ejercicio 2.4

Encuentre la constante α tal que los estados $|\psi\rangle = \alpha\,|\phi_1\rangle + 5\,|\phi_2\rangle$ y $|\chi\rangle = 3\alpha\,|\phi_1\rangle - 4\,|\phi_2\rangle$ sean ortogonales; considere $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ ortonormales.

Solución:

Para que $|\psi\rangle$ y $|\chi\rangle$ sean ortogonales debe cumplirse $\langle\psi|\chi\rangle = 0$. Entonces,

$$\langle\psi|\chi\rangle = \left(\alpha^*\,\langle\phi_1| + 5\,\langle\phi_2|\right)\left(3\alpha\,|\phi_1\rangle - 4\,|\phi_2\rangle\right)$$

al considerar los productos internos $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = 0$, por la condición de ortonormalidad, y de la misma manera los productos internos $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = 1$. Así,

$$\begin{aligned}\langle\psi|\chi\rangle &= 3\alpha^*\alpha\,\langle\phi_1|\phi_1\rangle - 20\,\langle\phi_2|\phi_2\rangle \\ &= 3\|\alpha\|^2 - 20\end{aligned}$$

y entonces,

$$\langle\psi|\chi\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad 3\|\alpha\|^2 - 20 = 0 \quad\Rightarrow\quad \|\alpha\|^2 = 20/3$$

y por lo tanto

$$\alpha = \sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{15}$$

1.5. Ejercicio 2.5

Si $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle$ y $|\chi\rangle = |\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle$, muestre las siguientes relaciones (note que $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ no son ortonormales):

(a) $\langle\psi|\psi\rangle + \langle\chi|\chi\rangle = 2\langle\phi_1|\phi_1\rangle + 2\langle\phi_2|\phi_2\rangle$

(b) $\langle\psi|\psi\rangle - \langle\chi|\chi\rangle = 2\langle\phi_1|\phi_2\rangle + 2\langle\phi_2|\phi_1\rangle$

Solución:

Calculando $\langle\psi|\psi\rangle$ y $\langle\chi|\chi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= (\langle\phi_1| + \langle\phi_2|)(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) \\ &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle\chi|\chi\rangle &= (\langle\phi_1| - \langle\phi_2|)(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle) \\ &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle - \langle\phi_1|\phi_2\rangle - \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle\end{aligned}$$

(a) De esta manera,

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle + \langle\chi|\chi\rangle &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle + \langle\phi_1|\phi_1\rangle - \langle\phi_1|\phi_2\rangle - \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle \\ &= 2\langle\phi_1|\phi_1\rangle + 2\langle\phi_2|\phi_2\rangle \quad \blacksquare\end{aligned}$$

(b) y también,

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle - \langle\chi|\chi\rangle &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle - (\langle\phi_1|\phi_1\rangle - \langle\phi_1|\phi_2\rangle - \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle) \\ &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle - \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle - \langle\phi_2|\phi_2\rangle \\ &= 2\langle\phi_1|\phi_2\rangle + 2\langle\phi_2|\phi_1\rangle \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.6. Ejercicio 2.6

Considere un estado el cual está dado en términos de tres vectores ortonormales $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$, y $|\phi_3\rangle$ como sigue:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle,$$

en donde $|\phi_n\rangle$ son eigenestados de un operador $\hat{B}$ tal que: $\hat{B}|\phi_n\rangle = (3n^2-1)|\phi_n\rangle$ con $n = 1, 2, 3$.

(a) Encuentre la norma del estado $|\psi\rangle$.

(b) Encuentre el valor esperado de $\hat{B}$ para el estado $|\psi\rangle$.

(c) Encuentre el valor esperado de $\hat{B}^2$ para el estado $|\psi\rangle$.

Solución:

(a)

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right)$$

al expandir, los productos internos $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_3\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_3\rangle = \langle\phi_3|\phi_1\rangle = \langle\phi_3|\phi_2\rangle = 0$, por la condición de ortonormalidad, y de la misma manera los productos internos $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = \langle\phi_3|\phi_3\rangle = 1$. Así,

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \frac{1}{15}\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{1}{3}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{1}{5}\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_3|\right)\hat{B}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\left[3(1)^2-1\right]|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[3(2)^2-1\right]|\phi_2\rangle \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left[3(3)^2-1\right]\frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_3|\right)\left(\frac{2}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{11}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{26}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right) \\ &= \frac{2}{15}\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{11}{3}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{26}{5}\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\ &= \frac{2}{15} + \frac{11}{3} + \frac{26}{5} \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\left\langle\hat{B}\right\rangle = \frac{\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{9}{3/5} = 15$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{B}^2|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{B}\hat{B}|\psi\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_3|\right)\hat{B}\hat{B}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\left[3(1)^2-1\right]^2|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[3(2)^2-1\right]^2|\phi_2\rangle\right. \\
&\qquad \left. + \left[3(3)^2-1\right]^2\frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_3|\right)\left(\frac{2^2}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{11^2}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{26^2}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right) \\
&= \frac{4}{15}\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{121}{3}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{676}{5}\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= \frac{4}{15} + \frac{121}{3} + \frac{676}{5} \\
&= \frac{879}{5} \\
&= 175.8
\end{aligned}
$$

$$
\left\langle\hat{B}^2\right\rangle = \frac{\langle\psi|\hat{B}^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{879/5}{3/5} = 293
$$

1.7. Ejercicio 2.12

Demuestre que $|\psi\rangle\langle\psi| \,/\, \langle\psi|\psi\rangle$ es un operador de proyección, sin importar si $|\psi\rangle$ está normalizado o no.

Solución:

Recordemos que un operador $\hat{P}$ es un operador de proyección si es Hermitiano y es igual a su propio cuadrado:

$$\hat{P}^{\dagger} = \hat{P}, \qquad \hat{P}^2 = \hat{P} \tag{3}$$

Entonces, como podremos notar, el operador de proyección $|\psi\rangle\langle\psi| \,/\, \langle\psi|\psi\rangle$ es Hermitiano, ya que se cumple

$$\left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\right)^{\dagger} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Tomemos su cuadrado,

$$\left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\right)^2 = \left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\right)\left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\right) = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|\,|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle^2} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

■

Por lo tanto, $|\psi\rangle\langle\psi| \,/\, \langle\psi|\psi\rangle$ es un operador de proyección sin importar si el estado $|\psi\rangle$ se encuentra normalizado o no.

1.8. Ejercicio 2.13

En las siguientes expresiones, donde $\hat{A}$ es un operador, especifique la naturaleza de cada expresión (i.e., especifique si es un operador, un bra, o un ket); después encuentre su conjugado Hermitiano.

(a) $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|$

(b) $\hat{A}|\psi\rangle\langle\phi|$

(c) $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle|\psi\rangle\langle\phi|\hat{A}$

(d) $\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle|\phi\rangle + i\hat{A}|\psi\rangle$

(e) $\left(|\phi\rangle\langle\phi|\hat{A}\right) - i\left(\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\right)$

Solución:

(a) $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|$ es un bra, y su conjugado Hermitiano es un ket, $\left(\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle|\psi\rangle$.

(b) $\hat{A}|\psi\rangle\langle\phi|$ es un operador, y su conjugado Hermitiano es otro operador, $\left(\hat{A}|\psi\rangle\langle\phi|\right)^\dagger = (|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger\hat{A}^\dagger = |\phi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger$.

(c) $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle|\psi\rangle\langle\phi|\hat{A}$ es un operador, y su conjugado Hermitiano es otro operador, $\left(\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle|\psi\rangle\langle\phi|\hat{A}\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger\left(\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^\dagger(|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger = \hat{A}^\dagger\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle|\phi\rangle\langle\psi| = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle\hat{A}^\dagger|\phi\rangle\langle\psi|$.

(d) $\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle|\phi\rangle + i\hat{A}|\psi\rangle$ es un ket, y su conjugado Hermitiano es un bra, $\left(\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle|\phi\rangle + i\hat{A}|\psi\rangle\right)^\dagger = \left(\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle|\phi\rangle\right)^\dagger + \left(i\hat{A}|\psi\rangle\right)^\dagger = \langle\psi|\,\langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle + \langle\psi|\left(-i\hat{A}^\dagger\right) = \langle\psi|\,\langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle - i\langle\psi|\hat{A}^\dagger$.

(e) $\left(|\phi\rangle\langle\phi|\hat{A}\right) - i\left(\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\right)$ es un operador, y su conjugado Hermitiano es otro operador, $\left(\left(|\phi\rangle\langle\phi|\hat{A}\right) - i\left(\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\right)\right)^\dagger = \left(|\phi\rangle\langle\phi|\hat{A}\right)^\dagger + \left(-i\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger|\phi\rangle\langle\phi| + |\phi\rangle\langle\phi|\left(i\hat{A}^\dagger\right) = \hat{A}^\dagger|\phi\rangle\langle\phi| + i|\phi\rangle\langle\phi|\hat{A}^\dagger$.

1.9. Ejercicio 2.14

Considere un espacio dos dimensional donde un operador Hermitiano $\hat{A}$ está definido por $\hat{A}\,|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ y $\hat{A}\,|\phi_2\rangle = -\,|\phi_2\rangle$; $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ son ortonormales.

(a) ¿Los estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ forman una base?

(b) Considere el operador $\hat{B} = |\phi_1\rangle\langle\phi_2|$. ¿Es $\hat{B}$ Hermitiano? Muestre que $\hat{B}^2 = 0$.

(c) Muestre que los productos $\hat{B}\hat{B}^\dagger$ y $\hat{B}^\dagger\hat{B}$ son operadores de proyección.

(d) Muestre que el operador $\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B}$ es unitario.

(e) Considere $\hat{C} = \hat{B}\hat{B}^\dagger + \hat{B}^\dagger\hat{B}$. Muestre que $\hat{C}\,|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ y $\hat{C}\,|\phi_2\rangle = |\phi_2\rangle$

Solución:

(a) Si $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ son ortonormales esto nos dice directamente que son *linealmente independientes*, por lo que en efecto, forman una base.

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0, \qquad \langle\phi_1|\phi_1\rangle = 1, \qquad \langle\phi_2|\phi_2\rangle = 1$$

(b) Consideremos $\hat{B}^\dagger = (|\phi_1\rangle\langle\phi_2|)^\dagger = |\phi_2\rangle\langle\phi_1|$. Y para que $\hat{B}$ sea Hermitiano debería cumplirse $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, pero notamos

$$\hat{B} = |\phi_1\rangle\langle\phi_2| \neq |\phi_2\rangle\langle\phi_1| = \hat{B}^\dagger$$

por lo que $\underline{\hat{B}\text{ no es Hermitiano}}$. Y así,

$$\hat{B}^2 = (|\phi_1\rangle\langle\phi_2|)^2 = (|\phi_1\rangle\langle\phi_2|)\,(|\phi_1\rangle\langle\phi_2|) = |\phi_1\rangle\,\langle\phi_2|\phi_1\rangle\,\langle\phi_2| = |\phi_1\rangle\,(0)\,\langle\phi_2| = 0$$

(c)

$$\hat{B}\hat{B}^\dagger = (|\phi_1\rangle\langle\phi_2|)\,(|\phi_2\rangle\langle\phi_1|) = |\phi_1\rangle\,\langle\phi_2|\phi_2\rangle\,\langle\phi_1| = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|$$

Calculamos su conjugado Hermitiano,

$$\left(\hat{B}\hat{B}^\dagger\right)^\dagger = (|\phi_1\rangle\langle\phi_1|)^\dagger = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|$$

Ahora calculamos su cuadrado mismo,

$$\begin{aligned}\left(\hat{B}\hat{B}^\dagger\right)^2 &= \left(\hat{B}\hat{B}^\dagger\right)\left(\hat{B}\hat{B}^\dagger\right)\\ &= (|\phi_1\rangle\langle\phi_1|)\,(|\phi_1\rangle\langle\phi_1|) = |\phi_1\rangle\,\langle\phi_1|\phi_1\rangle\,\langle\phi_1| = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\end{aligned}$$

por lo tanto, $\hat{B}\hat{B}^\dagger$ es un operador de proyección. $\blacksquare$

Por otra parte,

$$\hat{B}^\dagger\hat{B} = (|\phi_2\rangle\langle\phi_1|)\,(|\phi_1\rangle\langle\phi_2|) = |\phi_2\rangle\,\langle\phi_1|\phi_1\rangle\,\langle\phi_2| = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

Calculamos su conjugado Hermitiano,

$$\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right)^\dagger = (|\phi_2\rangle\langle\phi_2|)^\dagger = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

Ahora calculamos su cuadrado mismo,

$$\begin{aligned}\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right)^2 &= \left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right)\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right)\\ &= (|\phi_2\rangle\langle\phi_2|)(|\phi_2\rangle\langle\phi_2|) = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\end{aligned}$$

por lo tanto, $\hat{B}^\dagger \hat{B}$ es un operador de proyección. ■

(d) Un operador unitario cumple la relación $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$, entonces, sea $\hat{M} = \hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B} = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$. Calculemos $\hat{M}^\dagger$,

$$\hat{M}^\dagger = (|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|)^\dagger = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

luego,

$$\begin{aligned}\hat{M}\hat{M}\dagger &= (|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|)(|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|)\\ &= |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\\ &= |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\\ &= \hat{I} \quad ■\end{aligned}$$

(e) Considerando $\hat{C} = \hat{B}\hat{B}^\dagger + \hat{B}^\dagger\hat{B} = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$, entonces:

$$\begin{aligned}\hat{C}|\phi_1\rangle &= (|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|)|\phi_1\rangle\\ &= |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_1\rangle\\ &= |\phi_1\rangle \quad ■\end{aligned}$$

y de la misma manera,

$$\begin{aligned}\hat{C}|\phi_2\rangle &= (|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|)|\phi_2\rangle\\ &= |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_2\rangle + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\\ &= |\phi_2\rangle \quad ■\end{aligned}$$

1.10. Ejercicio 2.15

Pruebe las siguientes dos relaciones:

(a) $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2}$,

(b) $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + +\frac{1}{3!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\right]$

Pista: Para probar la primera relación, considere definir una función operador $\hat{F}(t) = e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t}$, en donde t es un parámetro, $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores independientes de t, y haga uso de $\left[\hat{A}, G(\hat{B})\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right] dG(\hat{B})/d\hat{B}$, donde $G(\hat{B})$ es una función dependiente del operador $\hat{B}$.

Solución:

(a) Consideremos la función operador $\hat{F}(t)$:

$$\hat{F}(t) = e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t}$$

Al tomar su derivada, notamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{F}(t)}{\mathrm{d}t} &= \hat{A}e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t} + e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{\hat{B}t} \\
&= \hat{A}e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t} + e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t}e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t} \\
&= \left(\hat{A} + e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t}\right)e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t} \\
&= \left(\hat{A} + e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t}\right)\hat{F}(t)
\end{aligned}$$

sin perdida de la generalidad, tomemos,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}(t)/\mathrm{d}t}{\hat{F}(t)} = \hat{A} + e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t}$$

al considerar una aproximación de primer orden en (b), i.e., $e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t} = \hat{B} + t\left[\hat{A},\hat{B}\right]$:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}(t)/\mathrm{d}t}{\hat{F}(t)} = \hat{A} + \hat{B} + t\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

integrando con respecto de t,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}\hat{F}(t)/\mathrm{d}t}{\hat{F}(t)}\mathrm{d}t &= \int \left(\hat{A} + \hat{B} + t\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right)\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\hat{F}(t)\mathrm{d}t &= \left(\hat{A}+\hat{B}\right)t + \frac{t^2}{2}\left[A,B\right] \\
\ln\hat{F}(t) &= \left(\hat{A}+\hat{B}\right)t + \frac{t^2}{2}\left[A,B\right]
\end{aligned}$$

lo que implica,

$$\hat{F}(t) = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)t + t^2[A,B]/2}$$

$$\hat{F}(t) = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)t} e^{t^2[A,B]/2}$$

Finalmente, escogiendo $t = 1$:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}} e^{\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2} \quad \blacksquare$$

(b) Consideremos las funciones de operadores $\hat{G}(t)$ y $\hat{H}(t)$, con $\hat{A}$ independiente de t, definidas como sigue:

$$\hat{G}(t) = e^{+\hat{A}t} \qquad \text{y} \qquad \hat{H}(t) = e^{-\hat{A}t}$$

Dada su definición, podemos realizar una expansión en series de Taylor para estas funciones de operadores como sigue:

$$\hat{G}(t) = e^{+\hat{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n$$
$$\hat{H}(t) = e^{-\hat{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \hat{A}^n$$

Realizando una aproximación a orden 3, obtendremos,

$$e^{+\hat{A}t} = \hat{I} + t\hat{A} + \frac{t^2}{2!}\hat{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\hat{A}^3 + \cdots$$
$$e^{-\hat{A}t} = \hat{I} - t\hat{A} + \frac{t^2}{2!}\hat{A}^2 - \frac{t^3}{3!}\hat{A}^3 + \cdots$$

Insertando estos resultados en (b), obtendremos:

$$e^{+\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t} = \left(\hat{I} + t\hat{A} + \frac{t^2}{2!}\hat{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\hat{A}^3 + \cdots\right)(B)\left(\hat{I} - t\hat{A} + \frac{t^2}{2!}\hat{A}^2 - \frac{t^3}{3!}\hat{A}^3 + \cdots\right)$$

Expandiendo y respetando el orden de los conmutadores,

$$\begin{aligned}
e^{+\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t} &= \hat{I}\hat{B}\hat{I} + \hat{I}\hat{B}\left(-t\hat{A}\right) + \hat{I}\hat{B}\left(\frac{t^2}{2!}\hat{A}^2\right) + \hat{I}\hat{B}\left(-\frac{t^3}{3!}\hat{A}^3\right) + \left(t\hat{A}\right)\hat{B}\hat{I} + \left(t\hat{A}\right)\hat{B}\left(-t\hat{A}\right) \\
&\quad + \left(t\hat{A}\right)\hat{B}\left(\frac{t^2}{2!}\hat{A}^2\right) + \left(\frac{t^2}{2!}\hat{A}^2\right)\hat{B}\hat{I} + \left(\frac{t^2}{2!}\hat{A}^2\right)\hat{B}\left(-t\hat{A}\right) + \left(\frac{t^3}{3!}\hat{A}^3\right)\hat{B}\hat{I} + \cdots \\
&= \hat{B} - t\hat{B}\hat{A} + \frac{t^2}{2!}\hat{B}\hat{A}^2 - \frac{t^3}{3!}\hat{B}\hat{A}^3 + t\hat{A}\hat{B} - t^2\hat{A}\hat{B}\hat{A} + \frac{3t^3}{3\cdot 2!}\hat{A}\hat{B}\hat{A}^2 + \frac{t^2}{2!}\hat{A}^2\hat{B} \\
&\quad - \frac{3t^3}{3\cdot 2!}\hat{A}^2\hat{B}\hat{A} + \frac{t^3}{3!}\hat{A}^3\hat{B} + \cdots \\
e^{+\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t} &= \hat{B} + t\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) + \frac{t^2}{2!}\left(\hat{A}^2\hat{B} + \hat{B}\hat{A}^2 - 2\hat{A}\hat{B}\hat{A}\right) + \frac{t^3}{3!}\left(\hat{A}^3\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^3 + 3\hat{A}\hat{B}\hat{A}^2 - 3\hat{A}^2\hat{B}\hat{A}\right) \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

De aquí, podemos identificar rápidamente los términos entre paréntesis:

$$\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) = [A, B]$$

también:

$$\begin{aligned}\left(\hat{A}^2\hat{B}+\hat{B}\hat{A}^2-2\hat{A}\hat{B}\hat{A}\right)&=\hat{A}\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\hat{A}\\&=\hat{A}\left(\hat{A}\hat{B}\right)-\hat{A}\left(\hat{B}\hat{A}\right)+\left(\hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}-\left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{A}\\&=\hat{A}\left[A,B\right]+\left[B,A\right]\hat{A}\\&=\hat{A}\left[A,B\right]-\left[A,B\right]\hat{A}\\&=\left[A,\left[A,B\right]\right]\end{aligned}$$

y por último:

$$\begin{aligned}\left(\hat{A}^3\hat{B}-\hat{B}\hat{A}^3+3\hat{A}\hat{B}\hat{A}^2-3\hat{A}^2\hat{B}\hat{A}\right)&=\hat{A}\hat{A}\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\hat{A}\hat{A}+\hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{A}+\hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{A}+\hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{A}\\&\qquad-\hat{A}\hat{A}\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{A}\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{A}\hat{B}\hat{A}\\&=\hat{A}\hat{A}\left(\hat{A}\hat{B}\right)-\hat{A}\hat{A}\left(\hat{B}\hat{A}\right)-\hat{A}\left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{A}+\hat{A}\left(\hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}\\&\quad-\hat{A}\left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{A}+\hat{A}\left(\hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}+\left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{A}\hat{A}-\left(\hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}\hat{A}\\&=\hat{A}\hat{A}\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)-\hat{A}\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}-\hat{A}\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}\\&\quad+\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}\hat{A}\\&=\hat{A}\hat{A}\left[A,B\right]-\hat{A}\left[A,B\right]\hat{A}-\hat{A}\left[A,B\right]\hat{A}+\left[A,B\right]\hat{A}\hat{A}\\&=\hat{A}\hat{A}\left[A,B\right]-\hat{A}\left[A,B\right]\hat{A}-\left(\hat{A}\left[A,B\right]\hat{A}-\left[A,B\right]\hat{A}\hat{A}\right)\\&=\hat{A}\left[A,\left[A,B\right]\right]-\left[A,\left[A,B\right]\right]A\\&=\left[A,\left[A,\left[A,B\right]\right]\right]\end{aligned}$$

Como podemos observar, tenemos !conmutadores anidados!

De esta manera, podemos simplificar (b) de la siguiente manera:

$$e^{+\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t}=\hat{B}+t\left[A,B\right]+\frac{t^2}{2!}\left[A,\left[A,B\right]\right]+\frac{t^3}{3!}\left[A,\left[A,\left[A,B\right]\right]\right]$$

finalmente, haciendo $t=1$, obtenemos nuestro resultado final:

$$e^{+\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}=\hat{B}+\left[A,B\right]+\frac{1}{2!}\left[A,\left[A,B\right]\right]+\frac{1}{3!}\left[A,\left[A,\left[A,B\right]\right]\right]\quad\blacksquare$$

1.11. Ejercicio 2.18

Considere las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -1 & -i & 2 \\ 4 & 3i & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2i & 5 & -3 \\ -i & 3 & 0 \\ 7i & 1 & i \end{pmatrix}$$

Verifique las siguientes relaciones:

(a) $\det\{AB\} = \det\{A\}\det\{B\}$

(b) $\det\left\{A^T\right\} = \det\{A\}$

(c) $\det\left\{A^\dagger\right\} = (\det\{A\})^*$

(d) $\det\{A^*\} = (\det\{A\})^*$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -1 & -i & 2 \\ 4 & 3i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 5 & -3 \\ -i & 3 & 0 \\ 7i & 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3\cdot 2i - i\cdot i + 1\cdot 7i) & (3\cdot 5 + i\cdot 3 + 1\cdot 1) & (-3\cdot 3 + i\cdot 0 + 1\cdot i) \\ (-1\cdot 2i + i\cdot i + 2\cdot 7i) & (-1\cdot 5 - i\cdot 3 + 2\cdot 1) & (1\cdot 3 - i\cdot 0 + 2\cdot i) \\ (4\cdot 2i - 3i\cdot i + 1\cdot 7i) & (4\cdot 5 + 3i\cdot 3 + 1\cdot 1) & (-4\cdot 3 + 3i\cdot 0 + 1\cdot i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+13i & 16+3i & -9+i \\ -1+12i & -3-3i & 3+2i \\ 3+15i & 21+9i & -12+i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usando la regla del triángulo para calcular determinantes 3×3:

$$\det\{A\} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \det\{AB\} &= (1+13i)(-3-3i)(-12+i) + (16+3i)(3+2i)(3+15i) + (-9+i)(-1+12i)(21+9i) \\ &\quad - (3+15i)(-3-3i)(-9+i) - (1+13i)(3+2i)(21+9i) - (16+3i)(-1+12i)(-12+i) \\ &= 726 + 121i \end{aligned}$$

Por su parte, para las matrices A y B tendremos:

$$\begin{aligned} \det\{A\} &= [3\cdot(-i)\cdot 1] + [i\cdot 2\cdot 4] + [1\cdot(-1)\cdot(3i)] - [4\cdot(-i)\cdot 1] - [3i\cdot 2\cdot 3] - [1\cdot(-1)\cdot i] \\ &= -11i \\ \det\{B\} &= [2i\cdot 3\cdot i] + [5\cdot 0\cdot(7i)] + [(-3)\cdot(-i)\cdot 1] - [7i\cdot 3\cdot(-3)] - [1\cdot 0\cdot(2i)] - [i\cdot(-i)\cdot 5] \\ &= -11 + 66i \end{aligned}$$

y calculando el producto de estos dos determinantes,

$$\det\{A\}\det\{B\} = (-11i)(-11+66i) = 726 + 121i$$

con lo que comprobamos (a):

$$\det\{AB\} = \det\{A\}\det\{B\} = 726 + 121i \quad \blacksquare$$

(b) Primeramente calculamos A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ i & -i & 3i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

continuando con el cálculo de su determinante,

$$\begin{aligned} \det\left\{A^T\right\} &= [3\cdot(-i)\cdot 1] + [(-1)\cdot(3i)\cdot 1] + [4\cdot i\cdot 2] - [1\cdot(-i)\cdot 4] - [2\cdot(3i)\cdot 3] - [1\cdot i\cdot(-1)] \\ &= -11i \end{aligned}$$

con lo que comprobamos (b):

$$\det\left\{A^T\right\} = \det\{A\} = -11i \quad \blacksquare$$

(c) Primeramente calculamos $A^\dagger$

$$A^\dagger = \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ i & -i & 3i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -i & i & -3i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

continuando con el cálculo de su determinante,

$$\begin{aligned} \det\left\{A^\dagger\right\} &= [3\cdot i\cdot 1] + [(-1)\cdot(-3i)\cdot 1] + [4\cdot(-i)\cdot 2] - [1\cdot i\cdot 4] - [2\cdot(-3i)\cdot 3] - [1\cdot(-i)\cdot(-1)] \\ &= 11i \end{aligned}$$

y por su parte,

$$(\det\{A\})^* = (-11i)^* = 11i$$

con lo que comprobamos (c):

$$\det\left\{A^\dagger\right\} = (\det\{A\})^* = 11i \quad \blacksquare$$

(d) Primeramente calculamos A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -1 & -i & 2 \\ 4 & 3i & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ -1 & i & 2 \\ 4 & -3i & 1 \end{pmatrix}$$

continuando con el cálculo de su determinante,

$$\begin{aligned} \det\{A^*\} &= [3\cdot i\cdot 1] + [-i\cdot 2\cdot 4] + [1\cdot(-1)\cdot(-3i)] - [4\cdot i\cdot 1] - [-3i\cdot 2\cdot 3] - [1\cdot(-1)\cdot(-i)] \\ &= 11i \end{aligned}$$

y por su parte,

$$(\det\{A\})^* = (-11i)^* = 11i$$

con lo que comprobamos (d):

$$\det\{A^*\} = (\det\{A\})^* = 11i \quad \blacksquare$$

Referencias

[1] Nouredine Zettili. *Quantum mechanics: concepts and applications*. 2003.