

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
CURSO DE FÍSICA BACHARELADO

HENRIQUE RODRIGUES MARTINS FONTES

**ESTUDO FENOMENOLÓGICO DO ESPALHAMENTO
PROFUNDAMENTE INELÁSTICO ELÉTRON-PRÓTON UTILIZANDO
O MODELO IIM**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

RIO GRANDE
2023

HENRIQUE RODRIGUES MARTINS FONTES

**ESTUDO FENOMENOLÓGICO DO ESPALHAMENTO
PROFUNDAMENTE INELÁSTICO ELÉTRON-PRÓTON UTILIZANDO
O MODELO IIM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física
Bacharelado da Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Campus Carreiros, como requisito parcial para a obtenção do
título de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral
Universidade Federal do Rio Grande

RIO GRANDE
2023



Ministério da Educação
Universidade Federal do Rio Grande
Campus Carreiros
Instituto de Matemática, Estatística e Física



TERMO DE APROVAÇÃO

**Estudo fenomenológico do espalhamento profundamente inelástico
elétron-próton utilizando o modelo IIM**

por

Henrique Rodrigues Martins Fontes

Esse Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às **09h00 do dia 13 de fevereiro de 2023** como **requisito parcial** para a obtenção do título de **bacharel em Física**. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado **APROVADO**.

Prof. Dr. Otavio Socolowski Junior
FURG

Prof. Dr. Cristiano Brenner Mariotti
FURG

Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral
FURG

Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral
FURG

O termo de aprovação assinado encontra-se na coordenação do curso

Rio Grande, 13 de fevereiro de 2023

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Desde pequeno, sempre tive contato com a Física e sempre tive uma relação de afeto com a mesma, e o principal motivo disso deve se dar ao fato da minha mãe ser formada em Física. Minha mãe, como toda boa mãe e Física, sempre me encorajou a estudar o tema, me presenteando com livros, vendo filmes e séries comigo, me escutando falar horas e horas sobre coisas que hoje vejo como simples, mas que na visão de uma criança apaixonada pelos mistérios do mundo, se tornavam algo revolucionador, e é claro, discutindo sobre ideias que eu lia ou assistia em algum lugar. Se hoje me consagro como Bacharel em Física e se no futuro vou ser reconhecido como um bom cientista e amante do conhecimento, devo agradecer a ela primeiramente, Cristina Barrios Rodrigues, minha amada mãe e inspiração. Te amo!

Em seguida, gostaria de agradecer ao meu querido orientador, João Thiago De Santana Amaral, vulgo JT. No começo de 2020 eu tive algo próximo de uma "crise existencial acadêmica", se é que isso existe, porque não havia conversado com ninguém sobre Iniciação Científica (IC), ao mesmo tempo que eu já via colegas inseridos em uma. Após um tempo de reflexão, decidi ir para área da Física de partículas, que até então na FURG era representada por quatro professores, sendo um deles o JT. Quando conversei com o JT, fiquei muito feliz de o ter feito, sua carisma, tranquilidade e curiosidade foram fatores decisivos para eu bater o martelo na minha mente e dizer "Eu quero ser orientado por este cara!". No final de 2020 entrei oficialmente como estudante de IC do JT, e desde então não parei de me fascinar pela área. O JT é uma pessoa que explica coisas complicadas, e estamos falando de coisas que saem da Teoria Quântica de Campos aqui, com uma clareza que eu diria invejável. O esforço dele em me fazer entender o assunto que apresentarei nesta monografia me motivou cada vez mais a ir atrás do assunto. Se hoje me fascino pela grande área da Física Quântica e sinto vontade de me envolver cada vez mais com ela no futuro, devo agradecer ao meu orientador, João Thiago De Santana Amaral. Muito Obrigado!

No que segue, gostaria de dedicar este parágrafo aos meus amigos e amigas. Começando por aqueles da cidade que vim, São Paulo: muito obrigado por, depois de tantos anos estando longe de vocês, continuarem a regar essa amizade que eu tanto prezo, me enche de alegria ver o que cada um de vocês estão conquistando e vão conquistar, me enche mais ainda os olhos eu ter o privilégio de estar com vocês, seja presencialmente ou virtualmente, em suas conquistas. Vocês, mesmo que de forma indireta, me ajudaram muito ao longo desses anos de faculdade. Meu muito obrigado a você, Julia Jacob, Yan Lucca, Alexandre Nasrallah, João Pedro Casella, João Egidio e Giovanni Monteiro. Aos demais que não mencionei nominalmente, fica igualmente meu agradecimento. Agora para aquelas amizades que fiz na Universidade, gostaria de agradecer por serem tão receptivos e inclusivos comigo, quando cheguei na universidade formei meu primeiro grupo de amigos que infelizmente se desfez após o primeiro ano, pois escolheram sair do curso, mas não muito tempo depois firmei laços de amizades com vocês que pretendo continuar regando ao longo dos anos. Quero agradecer por todos os dias que convivi com vocês, presencialmente

e virtualmente, pelas vívidas risadas, pelos "rolês", pelos debates que tivemos e por terem me acompanhado, em tempos diferentes, nesses quatro anos de academia. Meu muito obrigado a você, Henrique Hirsch, Beatriz Minari, Brenda Rolin, Vitor Avelaneda, Lucas Gregolon, Júlia Campos, Israel Fuhr, Letícia Cechinato, Clara Luisa Canavezzi, Eduardo Gautério, Victor Huggo Lessa Rosolem, Almir Gerevini e Pablo Ceiglinski. Além destes, gostaria de agradecer em especial ao Yan Bueno Bandeira que, além de me ensinar, me ajudou com questões que eu não entendia direito sobre alguns assuntos deste trabalho. Espero poder colaborar com você no futuro e retribuir a ajuda. Aos demais amigos que não agradei nominalmente, novamente, fica aqui expresso meu muito obrigado.

Continuando no âmbito da amizade, gostaria de dedicar um parágrafo unicamente ao meu mais que querido colega, amigo e irmão, Giovane Rosado. Quando nos conhecemos pela primeira vez, foi um tanto quanto desconfortável, mas logo nos acertamos, e como eu agradeço por termos firmado nossa amizade. Você se tornou uma pessoa que eu me sinto confortável em compartilhar minhas alegrias e tristezas, e me alegra muito você fazer o mesmo comigo. Fazer parte da sua vida acadêmica e pessoal me enche de contentamento, ver você conquistando tudo que almeja e seguindo um caminho que eu também compartilho me enche de motivação para seguir em frente. Você foi e é uma peça fundamental na minha vida acadêmica e se tornou mais do que um amigo que a vida me deu, se tornou um irmão. Meu agradecimento mais que especial a você, Giovane Rosado.

Neste parágrafo, gostaria de dedicar meu agradecimento aos professores que impactaram diretamente na minha vida acadêmica. Primeiramente, gostaria de agradecer ao professor Otavio Socolowski Junior por sua didática mais que refinada, o senhor é uma pessoa com um conhecimento científico que algum dia eu espero ter. Nossas conversas, tanto dentro de aula quanto fora, foram cruciais para o meu bom entendimento, e gostaria de agradecer em especial pelas tantas recomendações de livros e por me apresentar a linguagem de computação Julia, essa eu com certeza vou explorar mais ao longo do tempo. Segundamente, gostaria de agradecer ao professor Cristiano Brenner Mariotti, um dos poucos professores que vi estar verdadeiramente comprometido com o bom entendimento de seus alunos. O senhor, além de ótimo professor, se mostrou um ser humano muito gentil e carismático, o que reflete em sua aula, fazendo com que elas, por mais avançadas que sejam, se tornem leves e agradáveis de assistir. Dito isto, me permitam repetir: muito obrigado, professores!

Seguindo, Gostaria de agradecer o meu Vô, José Ruy Martins Fontes. O senhor se mostrou uma das pessoas mais preocupadas comigo, sempre esteve e está por perto para me orientar e me ouvir. Quando decidi que iria fazer Física, o senhor ficou com um pé atrás, preocupado se aquilo realmente iria ser algo que iria me dar contentamento tanto pessoal quanto financeiro, e mesmo com as minhas justificativas e pensamentos que às vezes não cruzavam caminho com os seus, o senhor sempre apoiou minhas decisões e me deu forças pra seguir em frente. Quero agradecer por todas as ligações nas sextas-feiras, em que o senhor tirava um tempinho do seu dia para ouvir minhas crises sobre a universidade e felicidades também. Meu

muito obrigado, meu amado vô, José Ruy Martins Fontes!

Gostaria de agradecer também a uma pessoa que conheci de paraquedas através do meu tio, gostaria de agradecer a você, Humberto Ramos Costa. Você foi de crucial importância para a conclusão desta monografia, sem sua ajuda e exímio conhecimento computacional eu provavelmente estaria até hoje gerando os gráficos que aparecem nesta monografia. Sua contribuição para a inserção de paralelismo no meu código e mais alguns refinamentos foram o que deixou o meu código com um nível que eu nem se quer imaginava que poderia chegar. Meu muito obrigado, Humberto Ramos Costa!

Por fim, gostaria de agradecer a instituição de fomento a pesquisa científica CNPq. Esta monografia é fruto do trabalho realizado ao longo das iniciações científicas que fiz, as quais fui bolsista CNPq.

RESUMO

O espalhamento profundamente inelástico elétron-próton foi o primeiro experimento que comprovou que o próton é um objeto composto. Além disto, comprovou que no regime de altas energias o próton se torna um objeto altamente populoso, com a densidade dos glúons sendo a mais pronunciada. Neste limite de altas energias, ou de forma equivalente de pequeno x de Bjorken, a interação entre o fóton virtual e o próton pode ser convenientemente descrita pelo chamado referencial de dipolo. Neste referencial, o fóton virtual possui energia suficiente para se separar em um par quark-antiquark, ou um dipolo, que por sua vez interage com o próton. Nesta abordagem, a seção de choque total do processo inclusivo $\gamma^*p \rightarrow X$, em que X representa um estado hadrônico não detectado, e consequentemente a função de estrutura F_2 do próton, é fatorizada e escrita em termos da amplitude de espalhamento de dipolo. Esta amplitude é solução da chamada equação de Balitsky-Kovchegov, sendo esta a mais simples das equações de evolução não-lineares da Cromodinâmica Quântica (QCD) em altas energias. Nesta monografia, iremos realizar um estudo fenomenológico do espalhamento profundamente inelástico, no regime de pequeno x de Bjorken, utilizando o chamado modelo de Iancu, Itakura e Munier para a amplitude de espalhamento, que é baseado em duas soluções analíticas assintóticas da equação de Balitsky-Kovchegov em ordem dominante (parâmetro de acoplamento da QCD fixo). Ao fixar os parâmetros do modelo utilizando os valores mais atualizados encontrados na literatura, podemos calcular a função de estrutura F_2 do próton e comparar o resultado com os dados mais recentes de HERA. Dito isto, neste trabalho faremos um estudo introdutório à fenomenologia do espalhamento profundamente inelástico em altas energias utilizando o modelo citado. Para tal, foi produzido um código em Python que realiza o cálculo de F_2 a partir do modelo, gerando curvas que são comparadas com os dados experimentais. Além disto, foi calculada a quantidade estatística χ^2 reduzido a fim de verificar a qualidade da comparação.

Palavras-chave: Espalhamento Profundamente Inelástico. Referencial de dipolo. Equação BK. Modelo IIM. Fenomenologia.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.0.1–Representação do próton no DIS.	4
Figura 2.1.1–Espalhamento profundamente inelástico	6
Figura 2.3.1–Representação do modelo de pártons	11
Figura 2.3.2–A função de estrutura F_2 do próton medida em HERA, SLAC, BCDMS, E665 e NMC	12
Figura 2.3.3–Diagramas mostrando a interações com o quark depois e antes da emissão de um glúon, respectivamente	13
Figura 2.3.4–Diagramas mostrando as interações com o quark emitido pelo glúon e com o antiquark emitido pelo glúon, respectivamente	14
Figura 2.4.1–Distribuições de quarks de valência (xu_v, xd_v), glúons (xg) e quarks de mar (xS) em um próton para dados de HERA em $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. A escala das distribuições de glúons e quarks de mar foi diminuída por um fator de 20.	15
Figura 3.1.1–Representação do DIS no referencial de dipolos em termos das variáveis envolvidas: o tamanho do dipolo r , o parâmetro de impacto b e as frações de momentum carregadas pelos constituintes do dipolo.	18
Figura 3.2.1–Vértices fundamentais da QCD.	19
Figura 3.2.2–Evolução do dipolo no limite de grande número de cores.	19
Figura 3.2.3–Diagramas para o espalhamento de um dipolo.	21
Figura 5.0.1–Amplitude de espalhamento de dipolo do modelo IIM como função de r para diversos valores de x	31
Figura 5.0.2–Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $0,85 \leq Q^2 \leq 3,5 \text{ GeV}^2$, utilizando o modelo IIM.	32
Figura 5.0.3–Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $4,5 \leq Q^2 \leq 10,0 \text{ GeV}^2$, utilizando o modelo IIM.	33
Figura 5.0.4–Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $12,0 \leq Q^2 \leq 45,0 \text{ GeV}^2$, utilizando o modelo IIM.	34
Figura 5.0.5–Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $70,0 \leq Q^2 \leq 500,0 \text{ GeV}^2$, utilizando o modelo IIM.	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros obtidos em (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013)	31
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CGC	Color Glass Condensate
DIS	Deep Inelastic Scattering
QED	Quantum Electrodynamics
QCD	Quantum Chromodynamics
IMF	Infinite Momentum Frame
HERA	Hadron-Electron Ring Accelerator
SLC	Stanford Linear Accelerator Center
MIT	Massachusetts Institute of Technology
BCDMS	Bologna–CERN–Dubna–Munich–Saclay
E665	Experiment 665 (Fermilab)
NMC	New Muon Collaboration
BK	Balitsky-Kovchegov
BFKL	Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov
EIC	Electron-Ion Collider

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	O Espalhamento Profundamente Inelástico	6
2.1	A Cinemática do DIS	6
2.2	A seção de choque do DIS elétron-próton inclusivo	8
2.3	A função de estrutura F_2	11
2.3.1	O modelo de pártons e o escalamento de Bjorken	11
2.3.2	O regime de altas energias	12
2.3.3	A Cromodinâmica Quântica e a violação do escalamento de Bjorken	13
2.4	Conclusão	14
3	DIS no modelo de dipolos	16
3.1	O DIS no referencial de dipolos	16
3.2	O formalismo de dipolos e a equação BK	18
3.3	Conclusão	20
4	O modelo de Iancu, Itakura e Munier para a amplitude de espalhamento de dipolo	22
4.1	Solução da equação BK na região diluída próxima a linha de saturação	22
4.2	Solução da equação BK na região saturada	27
4.3	A expressão do modelo IIM	29
4.4	Conclusão	29
5	Aplicação fenomenológica do modelo IIM: descrição dos dados do DIS	31
5.1	Conclusão	36
6	Conclusões finais	37
	Referências	38
	Apêndices	42
	APÊNDICE A Código em Python para o calculo de F_2 utilizando o modelo IIM	43

1 INTRODUÇÃO

Não é de hoje que a estrutura da matéria é um dos focos de estudo dos cientistas, e certamente não foi nas últimas décadas que um método foi criado para estudar a mesma. Há mais de 100 anos atrás, Hans Geiger e Ernest Marsden realizaram um experimento proposto por Ernest Rutherford, que consistia na incidência de partículas alfa (α ou ${}^4_2\text{He}$) em uma lâmina fina de ouro. O resultado mais surpreendente deste experimento foi a observação de que uma em cada vinte mil partículas α eram espalhadas em ângulos em torno de 90° (GEGIER; MARSDEN, 1909). Após algumas considerações e cálculos, Rutherford chegou a conclusão de que estas partículas estavam colidindo com um centro espalhador que concentrava praticamente toda a massa do átomo e possuía carga positiva (RUTHERFORD, 1911), isto é, o núcleo atômico.

Nos dias de hoje, refinamentos foram feitos, mas a ideia para sondar a estrutura da matéria é a mesma: incidir partículas sobre um alvo e analisar a informação que a partícula espalhada carrega. Quando o estudo é feito sobre um alvo muito pequeno, diga-se um hádron, o espalhamento feito deve ser altamente energético, isto porque a resolução com que conseguimos sondar a estrutura é limitada pelo comprimento de onda da partícula, $\lambda = h/q$, onde h é a constante de Planck e q o momentum da partícula incidente. Percebe-se que quanto maior o momentum, menor será o comprimento de onda, sendo assim, se o comprimento de onda for inferior ao tamanho do hádron, por exemplo, será possível estudar o que há dentro do mesmo.

Dentro do escopo dos hádrons, em 1964, de forma independente, os físicos Murray Gell-Mann e George Zweig propuseram que os hádrons eram compostos por partículas puntiformes com spin $1/2$ e carga elétrica fracionária, as quais Gell-Mann atribuiu o nome "quarks" (GELL-MANN, 1964; ZWEIG, 1964). Contudo, esta hipótese precisava ser confirmada através de um experimento que pudesse explorar a estrutura interna dos hádrons. O experimento proposto foi o chamado Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS) elétron-próton, este consiste na reação $ep \rightarrow eX$ (X representa o estado hadrônico genérico formado) em que a colisão é mediada por um fóton virtual (γ^*) com quadri-momento q^μ . O fóton virtual tem a capacidade de sondar a estrutura do próton com uma certa resolução que é descrita pela virtualidade (Q^2), sendo esta definida como $Q^2 \equiv -q^2$. Este fóton irá interagir com um constituinte do próton que carrega uma fração do momentum do mesmo caracterizado pela grandeza x de Bjorken, definida como $x = Q^2/s$ (s é o quadrado da energia do centro de massa). Em 1968, o experimento SLAC-MIT (BLOOM et al., 1969) realizou o DIS elétron-próton, em que confirmou a existência de partículas que constituem o próton (hádron).

Richard Feynman, em 1969, desenvolveu o chamado modelo de párons, que descreve o hádron como sendo constituído por partículas puntiformes chamadas de párons (FEYNMAN, 1969a; FEYNMAN, 1969b), sendo assim, as partículas detectadas no SLAC, foram interpretadas por Bjorken e Pachos como sendo estes párons. Os dois físicos estudaram, a partir dos dados experimentais, o modelo com base na suposição do próton ser constituído de três quarks de

valência imersos em um "mar de quarks"(quarks e antiquarks virtuais) (BJORKEN; PASCHOS, 1969). Posteriormente, Curtis Callan e David Gross confirmaram que estes pártons eram de fato quarks (CALLAN; GROSS, 1969). Além disto, a descoberta do processo Drell-Yan em colisões hádron-hádron, que envolve aniquilação de pares quark-antiquark, forneceu um forte suporte para a existência do mar de quarks (DRELL; YAN, 1970). Naturalmente, pelo fato dos quarks terem sido observados apenas dentro dos hádrons, foi proposto que uma força mantinha os quarks unidos ali dentro, força esta que deveria ser mediada por um bóson de carga elétrica neutra que não foi detectada no experimento. A inclusão de quarks no modelo de párton levou ao desenvolvimento do modelo de quark-pártons, que posteriormente foi refinada por Kuti e Weisskopf (KUTI; WEISSKOPF, 1971) ao inserir, além dos quarks de valência e de mar, a suposição dos glúons (partículas que mediam a força que mantém os quarks unidos). A primeira evidência circunstancial da existência dos glúons foi o fato de que ao calcular a fração de momentum que os quarks de valência e os quarks de mar carregam do próton com base nos dados experimentais, o resultado foi de aproximadamente metade (FRIEDMAN; KENDALL, 1972), sendo que ao levar em consideração o modelo Kuti-Weisskopf, que inclui os glúons neutro, o resultado estava de acordo com o experimento. A confirmação dos glúon veio através do experimento PETRA do instituto DESY, onde foi realizado aniquilações elétron-pósitron (BRANDELIK et al., 1979; BARBER et al., 1979; BERGER et al., 1979; BARTEL et al., 1980).

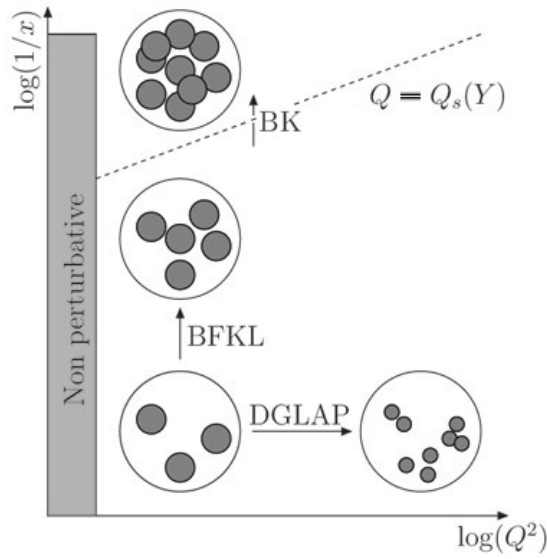
A teoria que descreve a interação entre esses quarks e glúons é a chamada Cromodinâmica Quântica (QCD). Esta teoria apresenta duas principais características: o confinamento de cor e a liberdade assintótica. O confinamento de cor é um postulado que se fez necessário pelo fato de que quarks (e glúons) não são – não foram até o momento – observados livremente. Quarks se unem para formar estados ligados, os hádrons (bárions ou mésons). Por exemplo, o próton, que é um bárion, é formado por três quarks, cada um com uma cor (azul, verde e vermelho), de tal forma que a combinação dessas três cores resulte em um objeto de cor neutra ou, em uma linguagem mais comum, um objeto "branco", que é observado. O mesmo se aplica aos mésons, que são estados ligados de quark-antiquark. Os glúons também possuem carga de cor, mas de uma forma diferente dos quarks: um glúon carrega cor e anticor, mas de modo que a cor líquida não é neutra. Por exemplo, quando um quark azul emite um glúon, este pode carregar as cores azul e antivermelha, de modo que, para garantir conservação de carga de cor, o quark no estado final tem cor vermelha. Já a liberdade assintótica é uma propriedade que foi demonstrada (GROSS; WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973), e se caracteriza pela redução do parâmetro de acoplamento α_s para distâncias cada vez menores (ou transferência de momentos maiores). Sendo assim, quando há transferência de momentum muito maior que a escala de energia da QCD, $\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$, que determina o regime em que o acoplamento é forte, tem-se o regime perturbativo da QCD, em que o parâmetro de acoplamento é fraco, $\alpha_s \ll 1$. Neste regime, os cálculos das seções de choque podem ser realizados utilizando a teoria de perturbação com respeito a α_s . A partir destes cálculos, foi verificado que as seções de choque das colisões envolvendo hádrons cresciam com a energia, mais especificamente com um potência de s , o que violava

o chamado limite teórico de Froissart (FROISSART, 1961), que determina que as seções de choque devem crescer com $\ln^2(s)$. Este comportamento de violação foi de fato comprovado nos experimentos do DIS elétron-próton em HERA (ADLOFF et al., 2001; BREITWEG et al., 2000; CHEKANOV et al., 2001), em que foi observado que a densidade partônica, principalmente de glúons, cresce com o aumento da energia, o que deixou claro que o regime de altas energias do DIS corresponde ao regime de alta densidade partônica. Naturalmente, este crescimento não pode ser indefinido, logo espera-se que efeitos não lineares da evolução partônica levem à redução desse crescimento, ou à chamada saturação partônica (GRIBOV; LEVIN; RYSKIN, 1983). A teoria Condensado de Vidros de Cor (CGC) é a melhor candidata para descrever tal saturação (GELIS et al., 2010).

Na figura 1.0.1 pode-se visualizar esquematicamente a evolução do próton tanto com a energia ($Y = \ln(1/x)$ é a chamada *rapidez*, que está diretamente relacionada com a energia do processo) quanto com a virtualidade Q^2 . Numa análise inicial, com a energia e virtualidade pequenas, o próton é representado por três pártons (os quarks de valência). Em seguida, podemos estudar a evolução de três formas diferentes: aumentando Q^2 com energia fixa, aumentando a energia com Q^2 fixo e aumentando ambos. Na primeira situação, basicamente aumenta-se a resolução com que sonda-se o próton, sendo assim o número pártons cresce, mas a área ocupada por eles diminui como $1/Q^2$, fazendo com que o próton torne-se cada vez mais diluído. Esta evolução é descrita na QCD pelo grupo de equações DGLAP (DOKSHITZER, 1977; GRIBOV; LIPATOV, 1972; ALTARELLI; PARISI, 1977). Na segunda situação, tem-se um aumento da distribuição partônica, principalmente de glúons, porém estes ocupam a mesma área devido a resolução ser fixa. Esta evolução é descrita pela equação linear BFKL (LIPATOV, 1976; KURAEV; LIPATOV; FADIN, 1977; BALITSKII; LIPATOV, 1978). A equação BFKL, assim como a DGLAP, prevêem um aumento indefinido das distribuições de pártons conforme a energia aumenta (x diminui), isto é, não estão presentes nestas equações efeitos não-lineares responsáveis pela diminuição deste crescimento. Esta necessidade de ter uma forma de explicar a evolução do próton para um sistema saturado motivou a busca de equações que continham essa informação. Posteriormente, foi derivada a chamada equação de BK (BALITSKY, 1996; KOVCHegov, 1999), esta descreve a evolução com a energia de forma a levar da região diluída para a região saturada, sendo assim uma equação com termo não-linear. Estas regiões são separadas pela dita "escala de saturação" $Q_s(Y)$, em que $Q^2 < Q_s^2(Y)$ corresponde a região saturada e $Q^2 > Q_s^2(Y)$ corresponde a região diluída. A equação BK é a mais simples das equações de evolução que levam em consideração efeitos de recombinação gluônica, sendo assim, nesta monografia será feito um estudo com base nesta.

A partir do DIS em altas energias é possível calcular diversos observáveis que exibem o crescimento da densidade partônica, como a função de estrutura F_2 do próton, que está diretamente relacionada com a distribuição de quarks e antiquarks do mesmo. Em altas energias, i.e. pequeno x de Bjorken, é conveniente descrever o DIS utilizando o dito referencial de dipolo. Neste referencial, o fóton virtual possui energia suficiente para se separar num par quark-

Figura 1.0.1 – Representação do próton no DIS.



Fonte: (SOYEZ, 2006) - modificada

antiquark (dipolo) que, por sua vez, interage com o alvo hadrônico. Nesta abordagem, F_2 e as seções de choque longitudinal e transversal ($\sigma_{L,T}^{\gamma^*p}$) do DIS inclusivo $\gamma^*p \rightarrow X$, que descrevem, respectivamente, a interação dos fótons virtuais longitudinal e transversal com o próton alvo, dependem da chamada amplitude de espalhamento de dipolo, $N(x, r)$, que por sua vez depende do tamanho transversal do dipolo, r , e da energia de centro de massa da colisão, ou, de forma equivalente, de x . No regime de altas energias, quem descreve a evolução desta amplitude é a equação BK, porém esta não possui solução analítica exata, o que motivou, nas últimas décadas, diversos grupos a resolverem numericamente e assintoticamente a equação (XIANG, 2009; LEVIN; TUCHIN, 2000; IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002; ALBACETE et al., 2009). Essas soluções serviram como base para construção de diversos modelos fenomenológicos que descrevem com sucesso os dados experimentais do DIS, como o modelo de Iancu, Itakura e Munier (IIM) (IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004) que será abordado nesta monografia.

Sendo assim, nesta monografia abordaremos primeiramente uma revisão do DIS inclusivo elétron-próton, em que será descrito a cinemática do processo, apresentando as seções de choque e suas relações com a função de estrutura F_2 do próton. Esta será abordada em uma breve discussão do modelo de pártons e do referencial de momentum infinito, em que será discutido o escalamento de F_2 no regime de altas energias e sua explícita relação com a distribuição de quarks e antiquarks no próton. Além disto, será abordado o comportamento das distribuições partônicas no limite de altas energias.

No que segue, o capítulo terceiro abordará um referencial que se mostrou conveniente para descrever o DIS em altas energias, o referencial de dipolo, que permite descrever F_2 como função da amplitude de espalhamento de dipolo. Além disto, será tratado também o dito formalismo de dipolos, de onde se extrai a equação de evolução para a amplitude de espalhamento

de dipolo, a chamada equação BK.

No capítulo quarto, iremos mostrar, em mais detalhes do que aqueles encontrados na literatura, duas soluções assintóticas da equação BK: a solução para a região saturada e a solução para região diluída próxima à linha de saturação. Estas soluções inspiraram a construção do modelo que será utilizado nesta monografia, o modelo de Iancu, Itakura e Munier.

No capítulo quinto será feita uma análise do modelo IIM utilizando parâmetros fixados no ajuste feito na referência (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013), em que verificaremos o comportamento da amplitude de espalhamento de dipolo. Além disto, utilizando o mesmo ajuste, será feita uma aplicação fenomenológica do modelo IIM, em que será calculada a função de estrutura F_2 a partir do modelo e compararemos o resultado desta com dados experimentais recentes (ABT et al., 2017). A partir desta comparação, será calculada a quantidade estatística χ^2 reduzido, que informa a qualidade do ajuste feito para um modelo.

Por fim, no capítulo sexto será feito um apanhado geral daquilo que foi discutido e produzido neste trabalho. Além disto, serão expostos os possíveis caminhos que este trabalho poderá seguir futuramente.

2 O Espalhamento Profundamente Inelástico

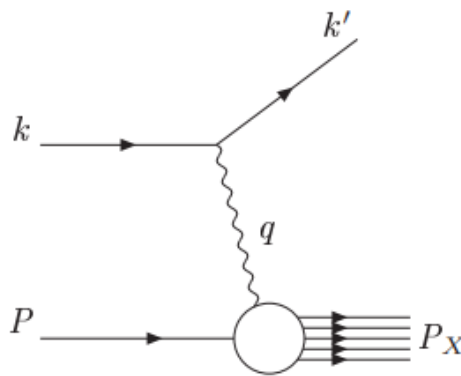
O Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS) é caracterizado como sendo o espalhamento de um lépton (l) com um alvo hadrônico, que pode ser um núcleon (N) ou um núcleo (A), com grande transferência de *momentum*. Este processo ocorre por meio da troca de um bóson de gauge (ou bóson de calibre), e.g. fóton virtual (γ^*), bóson Z^0 ou bóson W^\pm . No caso da troca de um fóton virtual ou de um bóson Z^0 , temos uma interação de corrente neutra, ou seja, o lépton final é o mesmo do lépton inicial. Este processo pode ser expresso por

$$l(k) + N(P) \longrightarrow l(k') + X(P_X) \quad (2.0.1)$$

e é representado na Figura 2.1.1. Neste processo, o lépton inicial com quadri-momentum k^μ interage com o núcleon, que possui quadri-momentum P^μ , por meio da troca de um bóson de gauge com quadri-momentum $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$. No estado final, tem-se o lépton após a interação com quadri-momentum k'^μ e o estado hadrônico X formado com quadri-momentum P_X^μ . A reação é totalmente inclusiva com respeito ao estado hadrônico formado (BARONE; PREDAZZI, 2002), isto é, estão sendo considerados os casos em que o próton se mantém inteiro e se quebra¹. No caso em que está sendo considerado, isto é, uma interação de corrente neutra, o lépton pode ser um elétron ou um múon e o DIS é dominado pela troca de um fóton virtual.

2.1 A Cinemática do DIS

Figura 2.1.1 – Espalhamento profundamente inelástico



Fonte: (AMARAL, 2008)

O processo inclusivo descrito por (2.0.1) e representado na Figura 2.1.1 é descrito por

¹No espalhamento profundamente inelástico, entre 90% e 95% dos eventos correspondem à quebra do próton.

três variáveis independentes. Pode-se escolher, por exemplo, as variáveis

$$s = (k + P)^2, \quad (2.1.1)$$

$$t = (k - k')^2 \quad (2.1.2)$$

$$W^2 = s_{\gamma^*-N} = (P + q)^2 = P_X^2 = M_X^2, \quad (2.1.3)$$

onde s é o quadrado da energia do centro de massa do sistema lépton-núcleon, W^2 é a massa invariante do estado hadrônico X , ou de forma equivalente o quadrado da energia do centro de massa do sistema γ^* -núcleon, e t é o quadrado do momentum transferido. A partir de t define-se a virtualidade do fóton:

$$t = (k - k')^2 = q^2 \equiv -Q^2, \quad (2.1.4)$$

$$Q^2 \equiv -q^2. \quad (2.1.5)$$

Para processos de espalhamento, q^μ é tipo espaço ($q^\mu q_\mu < 0$), ou seja, há um referencial em que a transferência de energia é nula e apenas momento é transferido (PESKIN, 2019). É conveniente definir a virtualidade como na equação (2.1.5), pois assim é garantido que $Q^2 \geq 0$. Virtualidade grande corresponde a alta transferência de momentum para o próton. $Q^2 = 0$ indica que o fóton é real.

No referencial de repouso do alvo hadrônico (referencial do laboratório), pode-se dizer que o feixe de léptons incidente está indo na direção z e o espalhamento está limitado ao plano x - z . No regime de altas energias, pode-se desprezar a massa do lépton. Neste caso, $k_z = |\mathbf{k}| \simeq E$ e temos

$$k^\mu = (E, 0, 0, E), \quad (2.1.6)$$

$$P^\mu = (M_N, 0, 0, 0), \quad (2.1.7)$$

$$k'^\mu = (E', E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta), \quad (2.1.8)$$

em que M_N é a massa do núcleon, θ é o ângulo de espalhamento do lépton e E e E' são, respectivamente, a energia do lépton inicial e final. Neste referencial, as variáveis s , Q^2 e W^2 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$s = M_N^2 + 2EM_N, \quad (2.1.9)$$

$$Q^2 = 2EE'(1 - \cos \theta) = 4EE' \sin^2 \theta/2, \quad (2.1.10)$$

$$W^2 = M_N^2 - 2EE'(1 - \cos \theta) + 2M_N(E - E') = M_N^2 - Q^2 + 2M_N(E - E'). \quad (2.1.11)$$

As três variáveis acima são o suficientes para descrever o processo (2.0.1). Outras

variáveis que surgem do DIS e que são úteis são

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M_N} = E - E', \quad (2.1.12)$$

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2M_N \nu} = \frac{Q^2}{2M_N(E - E')} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - M_N^2}, \quad (2.1.13)$$

$$x = \frac{Q^2}{s}, \quad s \rightarrow \infty \quad (2.1.14)$$

$$y = \frac{\nu}{E} = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} = \frac{2 M_N \nu}{2 M_N E} = \frac{Q^2 + W^2 - M_N^2}{s - M_N^2}, \quad (2.1.15)$$

$$xy = \frac{Q^2}{2EM_N}, \quad (2.1.16)$$

em que ν é a energia transferida ao próton, x é a dita variável de Bjorken (ou x de Bjorken), que representa a fração de momentum do pártion que é sondado pelo fóton, e é facilmente verificado que esta tem valores $0 \leq x \leq 1$, pois $W^2 \geq M_N^2$. Quando $x = 1$, temos que $W^2 = M_N^2$, o que corresponde a uma colisão elástica. Por fim, y é chamada de inelasticidade e é definida como a fração de energia perdida pelo lépton no referencial de laboratório. y , assim como x , está limitada entre $0 \leq y \leq 1$. A expressão "profundamente inelástico" vem do limite em que $Q^2 \gg M_N^2$ e $M_N \nu \gg M_N^2$, mantendo x fixo e finito.

Comumente é introduzida a variável Y , chamada de rapidez, que está diretamente relacionada com a energia do centro de massa do sistema γ^* -núcleon. A rapidez é expressa como

$$Y = \ln \frac{1}{x}, \quad (2.1.17)$$

em que é facilmente observado que quando $x \rightarrow 0$ ($W \rightarrow \infty$), maior será Y .

2.2 A seção de choque do DIS elétron-próton inclusivo

Ao considerarmos o caso do DIS elétron-próton (ep), isto é, o lépton é um elétron e o núcleon é um próton, estamos interessados em descrever o processo inclusivo $eP \rightarrow eX$ em que a estrutura do próton, em pequenas distâncias, é sondada por um fóton virtual.

No referencial do laboratório (próton em repouso), a seção de choque diferencial para o processo pode ser dada por (BARONE; PREDAZZI, 2002)

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2}{2MQ^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (2.2.1)$$

em que $\alpha_{em} = e^2/4\pi$ é a contante de acoplamento da QED, M é a massa do próton, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ é o ângulo sólido que caracteriza a direção do elétron espalhado, $L_{\mu\nu}$ é o tensor leptônico, que é dado por (BARONE; PREDAZZI, 2002)

$$L_{\mu\nu} = 2[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - (k \cdot k') g_{\mu\nu}], \quad (2.2.2)$$

e $W^{\mu\nu}$ é o tensor hadrônico, que pode ser parametrizado da seguinte forma (BARONE; PRE-DAZZI, 2002):

$$\frac{1}{2M}W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left(P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right). \quad (2.2.3)$$

Assim, o produto $\frac{1}{2M}L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$ presente na equação (2.2.1) pode ser reescrito, no referencial do laboratório, como

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = 4EE' \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.2.4)$$

Por fim, substituindo a expressão acima em (2.2.1), tem-se

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.2.5)$$

Através da matriz Jacobiana, pode-se trocar as dependências da seção de choque para as variáveis x e y do DIS achando o Jacobiano. Portanto, a partir das equações (2.1.10), (2.1.13) e (2.1.15), tem-se

$$x = \frac{Q^2}{2M(E - E')} = \frac{2EE'}{M(E - E')} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.2.6)$$

$$y = \frac{\nu}{E} = \frac{E - E'}{E} = 1 - \frac{E'}{E}. \quad (2.2.7)$$

Tendo em vista a simetria azimutal do espalhamento, temos

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{d^2\sigma}{dE' 2\pi \sin \theta d\theta}. \quad (2.2.8)$$

Assim, a transformação de variáveis é feita da seguinte forma

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{1}{2\pi \sin \theta} \left[\frac{\partial x}{\partial E'} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right] \frac{d^2\sigma}{dx dy}, \quad (2.2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial E'} &= \frac{2E^2}{M(E - E')^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= \frac{2EE'}{M(E - E')} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \frac{\partial y}{\partial E'} &= -\frac{1}{E}, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Substituindo as derivadas parciais acima em (2.2.9) e achando o determinante (Jacobiano) da matriz, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} &= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \frac{E' \sin \theta}{M(E - E')} \frac{d^2\sigma}{dx dy} \\ &= \frac{E'}{2\pi M E y} \frac{d^2\sigma}{dx dy}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

A partir da igualdade acima, pode-se reescrever a seção de choque da seguinte forma

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{8\pi M\alpha_{em}^2 y E E'}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.2.12)$$

Introduz-se as funções de estruturas adimensionais (KOVCHegov; LEVIN, 2012)

$$F_1(x, Q^2) \equiv MW_1(x, Q^2) \quad (2.2.13)$$

e

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(x, Q^2). \quad (2.2.14)$$

Utilizando as definições acima e as expressões para x e y , tem-se

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{8\pi M\alpha_{em}^2 E}{Q^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{M}{2E} xy \right) F_2(x, Q^2) \right]. \quad (2.2.15)$$

A partir da equação (2.1.16) e mantendo x fixo, pode-se escrever

$$dy = \frac{dQ^2}{2MEx}. \quad (2.2.16)$$

Portanto,

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{xQ^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{M}{2E} xy \right) F_2(x, Q^2) \right]. \quad (2.2.17)$$

Quando $\sqrt{s} \gg M$, tem-se

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \approx \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{xQ^4} [xy^2 F_1(x, Q^2) + (1 - y) F_2(x, Q^2)]. \quad (2.2.18)$$

É possível relacionar, via teorema óptico, as funções de estrutura adimensionais do DIS com as seções de choque totais de fotoabsorção, tendo como resultado (BARONE; PREDAZZI, 2002)

$$\sigma_L^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} (F_2 - 2xF_1) \quad (2.2.19)$$

e

$$\sigma_T^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} 2xF_1, \quad (2.2.20)$$

em que $\sigma_{L,T}^{\gamma^*p}$ são as seções de choque de fotoabsorção longitudinal e transversal, respectivamente. Ao definir as funções de estruturas transversal e longitudinal como

$$F_T = 2xF_1 \quad (2.2.21)$$

e

$$F_L = F_2 - 2xF_1, \quad (2.2.22)$$

pode-se escrever $\sigma_{L,T}^{\gamma^*p}$ como

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_{L,T}. \quad (2.2.23)$$

Contudo $F_2 = F_L + F_T$, logo a seção de choque de fotoabsorção total é dada por

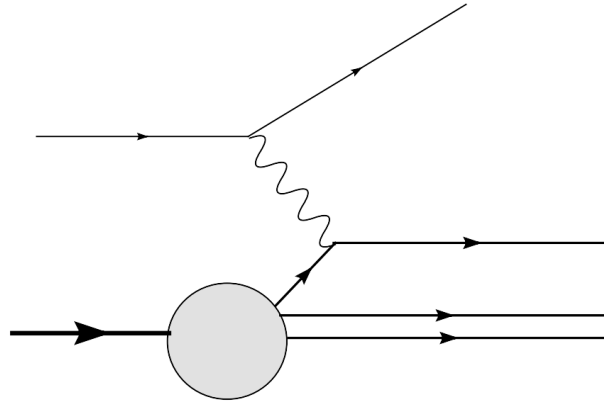
$$\sigma^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \quad (2.2.24)$$

2.3 A função de estrutura F_2

2.3.1 O modelo de pártons e o escalamento de Bjorken

Antes do desenvolvimento da QCD, Feynman (FEYNMAN, 1969a; FEYNMAN, 1969b) formulou o chamado modelo de pártons, este é construído na suposição de que o próton é constituído de férmions puntiformes (Figura 2.3.1).

Figura 2.3.1 – Representação do modelo de pártons



Fonte: (AMARAL, 2008)

Antes mesmo da formulação do modelo, Bjorken (BJORKEN; PASCHOS, 1969; BJORKEN, 1969) previu que as funções de estrutura F_1 e F_2 , no regime de altas energias $(\nu, Q^2 \rightarrow \infty)^2$, devem exibir o que foi chamado posteriormente de escalamento de Bjorken, isto é, uma dependência apenas de x . Esta característica das funções de estrutura é apoiada pelo modelo de pártons, que considera estes como partículas livres.

O DIS ep no experimento SLAC-MIT (FRIEDMAN; KENDALL, 1972) confirmou as previsões de Bjorken, mostrando que as funções de estrutura dependiam realmente da razão $Q^2/\nu \propto x$, e não das duas variáveis separadamente. Esse resultado foi interpretado como uma evidência de que o próton era de fato constituído de partículas elementares: os pártons. Nesta interpretação, o fóton virtual espalha-se com os constituintes do próton.

Assumindo que estes pártons sejam férmions de Dirac com spin 1/2, carregando uma fração ζ do momentum do próton, tem-se a seguinte relação a partir do modelo de pártons:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_q e_q^2 \int_0^1 d\zeta \delta(x - \zeta) \zeta f_q(\zeta) = \sum_q e_q^2 x f_q(x), \quad (2.3.1)$$

onde \sum_q é a soma sobre todos os sabores de quarks, e_q é a carga do quark de sabor q e $f_q(x)$ são as funções de distribuição de quarks. A relação de Callan-Gross $F_2(x) = 2xF_1(x)$ é uma consequência da hipótese de spin igual a 1/2 (CALLAN; GROSS, 1969). Além disso, é possível mostrar que a fração de momentum do párton colidido corresponde exatamente ao x de Bjorken.

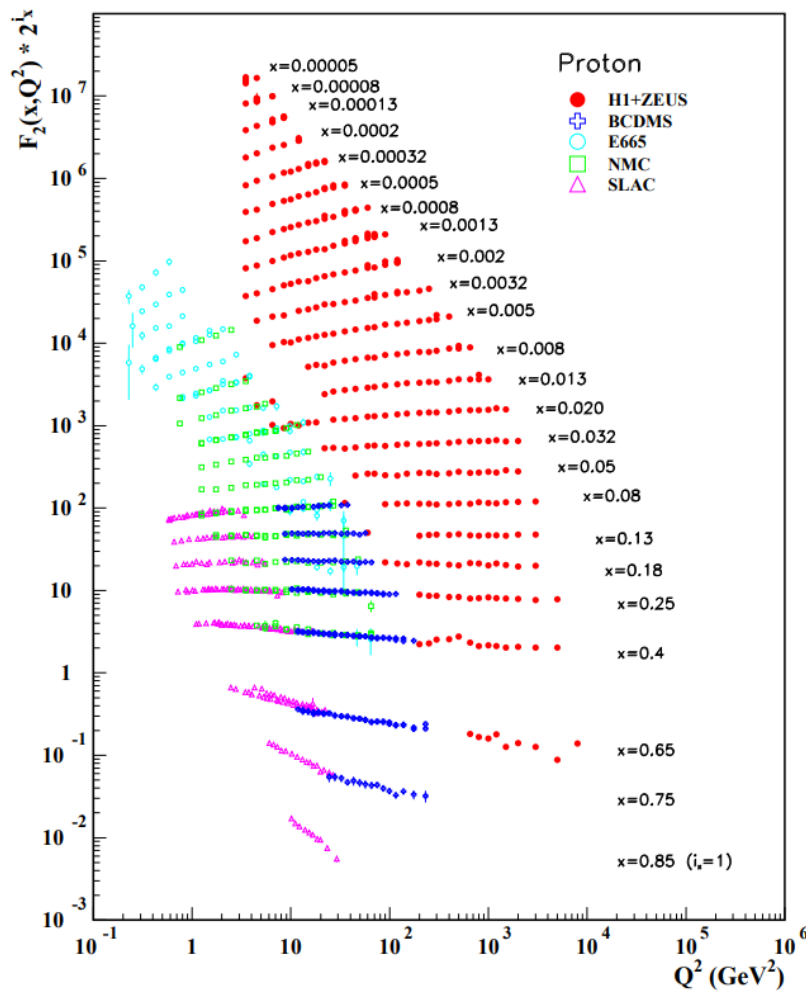
²A razão Q^2/ν matém-se finita.

Portanto, vê-se que a função de estrutura F_2 mede a distribuição de pártons dentro do próton, mais precisamente a distribuição de momentum dos pártons. Posteriormente, estes pártons foram confirmados serem os quarks.

2.3.2 O regime de altas energias

Na Figura 2.3.2 temos um gráfico de F_2 em função de Q^2 para diversos valores fixos de x com dados obtidos em HERA (ABRAMOWICZ et al., 2015), SLAC (WHITLOW et al., 1992), BCDMS (BENVENUTI et al., 1989), E665 (ADAMS et al., 1996) e NMC (ARNEODO et al., 1997). A partir da ideia de Bjorken, F_2 deveria, para Q^2 grande, ter uma dependência apenas de x , contudo, experimentos mais energéticos mostraram que esta previsão não está totalmente correta. Na Figura 2.3.2 fica claramente visível o crescimento de F_2 no limite de pequeno x e o decréscimo para $x > 0,4$, mostrando uma forte dependência em Q^2 . Esta dependência leva ao que ficou conhecido na literatura como a violação do escalamento de Bjorken.

Figura 2.3.2 – A função de estrutura F_2 do próton medida em HERA, SLAC, BCDMS, E665 e NMC



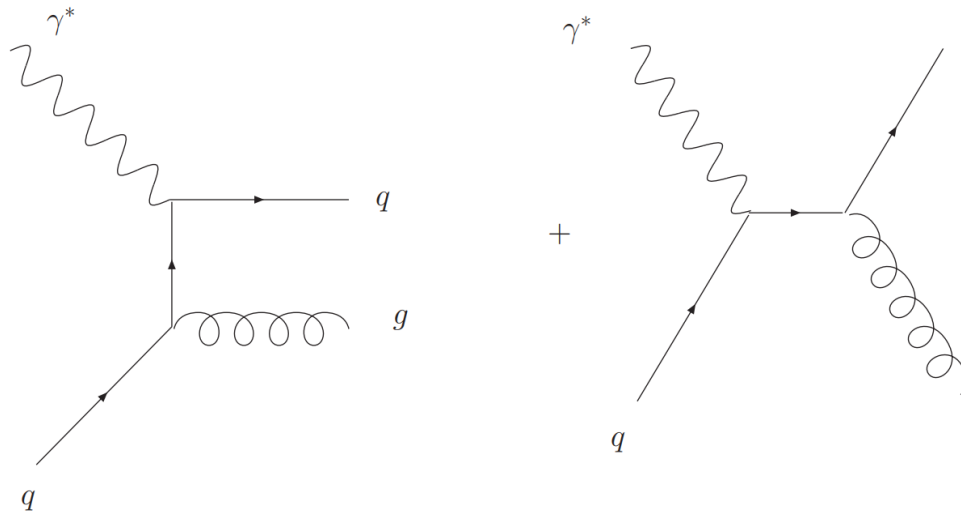
Fonte: (PATRIGNANI et al., 2016)

O escalamento de Bjorken é uma propriedade que de fato existe, porém não em toda a janela cinemática do DIS. A partir de uma análise da imagem acima, percebe-se que a janela em que o escalamento acontece é quando x assumem valores em torno de 0,05 e 0,4, em que as medidas se estendem até $Q^2 \approx \mathcal{O}(10^3) \text{ GeV}^2$. Pode-se concluir então que os quarks aparentam ser partículas puntiformes em escalas em torno de $Q^2 \approx \mathcal{O}(10^3) \text{ GeV}^2$.

2.3.3 A Cromodinâmica Quântica e a violação do escalamento de Bjorken

O modelo de pártons é uma aproximação de mais baixa ordem do espalhamento profundamente inelástico, já que na realidade estes pártons não são de fato livres. A teoria da interação forte, a Cromodinâmica Quântica (QCD), descreve que os quarks interagem entre si por meio da troca de bósons chamados de glúons. Os glúons, por sua vez, contribuem com novos processos que são relevantes para a seção de choque do DIS ep , e consequentemente para F_2 . Alguns desses novos processos são dados pela emissão de um glúon, antes ou depois da interação com o fóton, o que leva aos processos descritos nos diagramas da Figura 2.3.3. Há também as contribuições gluônicas, representadas pelos diagramas da Figura 2.3.4, nos quais um glúon, e.g. emitido pelo quark de valência, flutua em um par quark-antiquark (quarks de mar), e um deles interage com o fóton virtual.

Figura 2.3.3 – Diagramas mostrando as interações com o quark depois e antes da emissão de um glúon, respectivamente

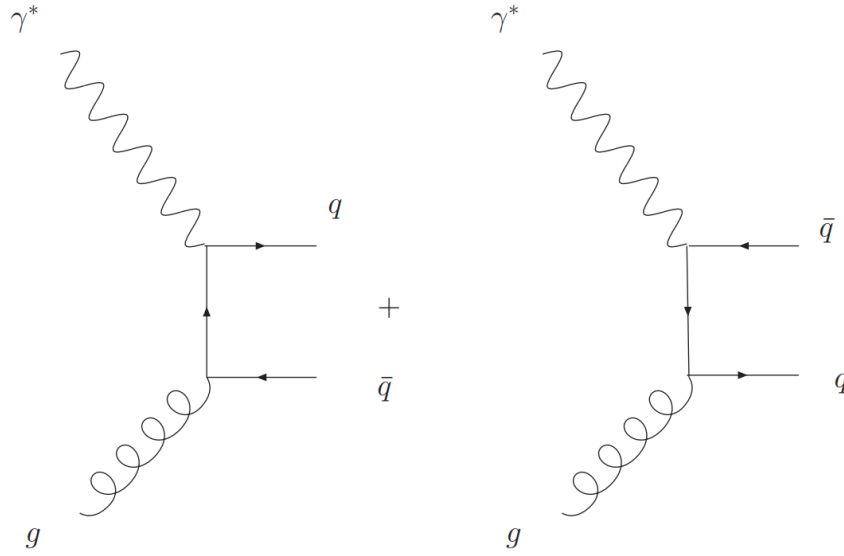


Fonte: (AMARAL, 2008)

Na seção anterior, foi visto que há duas situações em que o escalamento de Bjorken é violado, quando x é muito grande e quando x é muito pequeno. Uma forma de descrever este comportamento é dizer que para Q^2 grande, a função de estrutura é desviada para valores de pequeno x , ou seja, o próton é observado como tendo quarks com pequena fração de momentum, já para Q^2 pequeno, o próton é percebido com quarks de grande x . Dito isto, uma forma de entender a violação do escalamento de Bjorken é dada pela percepção dos efeitos de irradiação

gluônica, que depende diretamente da escala com que se sonda o próton. Para valores baixos de Q^2 , a escala com que estamos sondando o próton, não possibilita resolver estruturas mais detalhadas do mesmo, ou seja, cada vez mais observamos o próton como um todo. Já para valores maiores de Q^2 , o baixo comprimento de onda do fóton possibilita resolver a estrutura mais detalhadamente, o que implica no processo ficar mais sensível a efeitos de irradiação gluônica. Consequentemente, o desdobramento desses glúons em pares quark-antiquark resulta em uma maior população de quarks com pequeno x .

Figura 2.3.4 – Diagramas mostrando as interações com o quark emitido pelo glúon e com o antiquark emitido pelo glúon, respectivamente



Fonte: (AMARAL, 2008)

Sendo assim, percebe-se que de fato a função de estrutura F_2 deve depender de Q_2 . Além disto, percebe-se que fóton virtual atua como um contabilizador do número de quarks e antiquarks que possuem fração de momentum x e que ocupam uma área transversal da ordem de $1/Q^2$ (IANCU, 2005). Isto, junto do fato de que o DIS é um experimento que analisa a distribuição de quarks dentro do próton, motiva escrever a seguinte fórmula para a função de estrutura F_2 :

$$F_2(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 [x f_q(x, Q^2) + x f_{\bar{q}}(x, Q^2)] , \quad (2.3.2)$$

onde $f_q(x, Q^2)$ e $f_{\bar{q}}(x, Q^2)$ são as funções de distribuição dos quarks e antiquarks, respectivamente.

2.4 Conclusão

Neste capítulo, foi feita uma revisão da cinemática por trás do espalhamento profundamente inelástico. Além disto, mostramos as seções de choque totais longitudinal e transversal, que correspondem à interação dos fótons longitudinal e transversal com o próton, e introduzimos

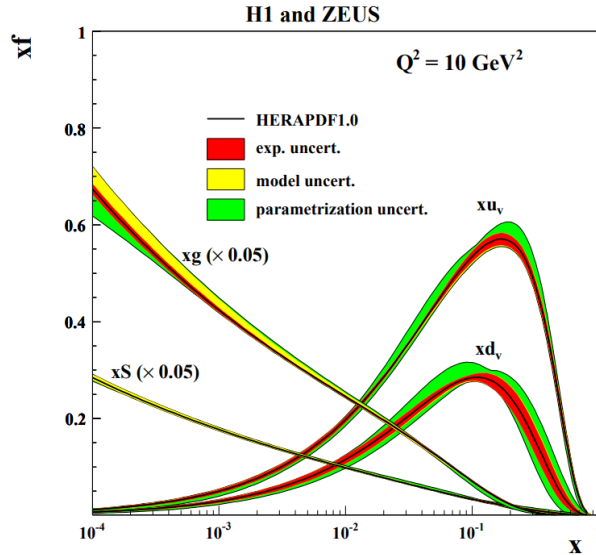
as funções de estrutura adimensionais, F_1 e F_2 , de onde foi extraído a relação direta entre F_2 e as seções de choque. Com isto, partimos para uma explicação do significado de F_2 , em que primeiramente foi-se entendido que seria uma medição da distribuição de momentum dos quarks e que dependia apenas de x , porém, logo depois, argumentamos sobre a dependência que F_2 tem em Q^2 , mostrando que não podemos desconsiderar esta. Além disto, mostramos que F_2 além de ser uma medida relacionada a distribuição de quarks, também esta relacionada à distribuição de antiquarks.

Como vimos, a região de pequeno x é responsável pelo rápido crescimento de F_2 . Embora a densidade de glúons não seja diretamente medida pelo DIS, é o rápido crescimento desta que domina a evolução em pequeno x . Em ordem mais baixa da teoria de perturbação, tem-se (IANCU, 2005)

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} \approx \frac{\alpha_s}{3\pi} xG(x, Q^2) \sum_q e_q^2, \quad (2.4.1)$$

onde $xG(x, Q^2)$ é função de distribuição de momentum de glúons. Na Figura 2.4.1, pode-se ver a evolução gluônica obtida através da função de estrutura medida em HERA, em que a expressão (2.4.1) foi utilizada para tal. Neste gráfico, é nítido que o limite de pequeno x corresponde à dominância da evolução gluônica.

Figura 2.4.1 – Distribuições de quarks de valência (xu_v , xd_v), glúons (xg) e quarks de mar (xS) em um próton para dados de HERA em $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. A escala das distribuições de glúons e quarks de mar foi diminuída por um fator de 20.



Fonte: (AARON et al., 2010)

Dito isto, na próxima seção iremos explorar um referencial que se mostrou conveniente para descrever o DIS em altas energias. Além disto, introduziremos uma equação que descreve a evolução do próton de um regime diluído para um regime saturado.

3 DIS no modelo de dipolos

O DIS ep no regime de altas energias, i.e. pequeno x , pode ser convenientemente descrito no referencial de dipolo. Neste referencial, o fóton virtual possui energia o suficiente para flutuar em um par quark-antiquark ($q\bar{q}$) com tempo de vida muito maior que o tempo de interação. Os observáveis que serão calculados neste referencial dependerão de uma grandeza chamada *amplitude de espalhamento de dipolo*, esta irá evoluir com a energia do processo respeitando uma equação bastante conhecida na literatura, a equação de Balitsky-Kovchegov (BK).

3.1 O DIS no referencial de dipolos

Em uma colisão entre um fóton virtual e um próton, temos que, em pequeno x , o fóton virtual sonda, usualmente, um quark de mar emitido pelos glúons de pequeno x do próton. Torna-se conveniente, então, fazer uso de um referencial em que o próton está em repouso e o fóton virtual possui energia suficiente para flutuar num par quark-antiquark antes da interação, formando um dipolo. Este referencial do DIS é apropriado em altas energia, visto que o tempo de vida do par é muito maior que o de interação entre o próton e o par.

Utilizando o princípio da incerteza, pode-se calcular o tempo de vida do dipolo da seguinte forma:

$$\Delta t_{q\bar{q}} \approx \frac{1}{\Delta E}, \quad (3.1.1)$$

onde $\Delta E = E_{q\bar{q}} - E_{\gamma^*}$. Sendo

$$E_{q\bar{q}} = \sqrt{M_{q\bar{q}}^2 + \mathbf{q}^2}, \quad (3.1.2)$$

onde $M_{q\bar{q}}$ é a massa invariante do par, tem-se

$$\Delta E = \sqrt{M_{q\bar{q}}^2 + \mathbf{q}^2} - E_{\gamma^*}. \quad (3.1.3)$$

Neste referencial, o quadri-momento do fóton virtual é dado por (BARONE; PREDAZZI, 2002)

$$q^\mu = (\nu, 0, 0, \sqrt{\nu^2 + Q^2}) = (E_{\gamma^*}, 0, 0, \sqrt{E_{\gamma^*}^2 + Q^2}), \quad (3.1.4)$$

logo, a equação (3.1.3) fica

$$\Delta E = \sqrt{M_{q\bar{q}}^2 + E_{\gamma^*}^2 + Q^2} - E_{\gamma^*}. \quad (3.1.5)$$

Assim, fazendo uma expansão para $E_{\gamma^*} \gg M_{q\bar{q}}^2 + Q^2$, tem-se

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{M_{q\bar{q}}^2 + Q^2}{E_{\gamma^*}} + \mathcal{O}\left(\left[\frac{M_{q\bar{q}}^2 + Q^2}{E_{\gamma^*}}\right]^2\right). \quad (3.1.6)$$

No referencial de repouso do próton, tem-se que x assume a forma da equação (2.1.13), isto é $x = Q^2/2ME_{\gamma^*}$, em que M é a massa do próton. Logo, substituindo na equação (3.1.6) e considerando o limite de alta virtualidade $Q^2 \gg M_{q\bar{q}}^2$, tem-se

$$\Delta E = xM + \mathcal{O}((xM)^2). \quad (3.1.7)$$

Com isto, conclui-se que

$$\Delta t_{q\bar{q}} \approx \frac{1}{\Delta E} \approx \frac{1}{Mx}. \quad (3.1.8)$$

Temos que o tempo de interação é dado por (BARONE; PREDAZZI, 2002)

$$\Delta t_{int} \approx \frac{1}{M}, \quad (3.1.9)$$

assim, visto que $x \ll 1$, é facilmente visualizado que o tempo de vida do dipolo é muito maior que o tempo de interação:

$$\Delta t_{q\bar{q}} \gg \Delta t_{int} \approx \frac{1}{M}. \quad (3.1.10)$$

Uma consequência do fato do tempo de vida do dipolo ser muito maior que o tempo de colisão é a fatorização entre a função de onda do fóton e as seções de choque do processo γ^*p . Portanto, tem-se que as seções de choque são dadas pela seguinte expressão (MUELLER, 1990; NIKOLAEV; ZAKHAROV, 1991)

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^*P}(Q^2, x) = \sum_f \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz \left| \Psi_{L,T}^{(f)}(r, z; Q^2) \right|^2 \sigma_{dip}(\mathbf{r}, x), \quad (3.1.11)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ é o tamanho transversal do dipolo, z está relacionado com a fração de momento do fóton carregada pelo quark e antiquark, \sum_f é a soma sobre todos os sabores de quarks e $|\Psi_{L,T}^{(f)}(r, z; Q^2)|^2$ são as funções de onda do fóton transversal e longitudinal que informam as densidades de probabilidade do fóton se separar em um dipolo de tamanho transversal r . Estas podem ser calculadas na QED perturbativa e são dadas por

$$\begin{aligned} \left| \Psi_L^{(f)}(r, z; Q^2) \right|^2 &= e_f^2 \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(rQ_f), \\ \left| \Psi_T^{(f)}(r, z; Q^2) \right|^2 &= e_f^2 \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} \{ [z^2 + (1-z)^2] Q_f^2 K_1^2(rQ_f) + m_f^2 K_0^2(rQ_f) \}, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

onde $Q_f^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2$, m_f e e_f é a massa e a carga do quark de sabor f , α_{em} é a constante de acoplamento da eletrodinâmica quântica ($\alpha_{em} = 1/137$), N_c é o número de cores ($N_c = 3$) e $K_{0,1}$ são as funções de Bessel modificadas de segundo tipo de ordem zero e um, respectivamente. Por fim, $\sigma_{dip}(\mathbf{r}, x)$ é a seção de choque dipolo-alvo total, que descreve a interação do dipolo com o próton e é dada, através do teorema óptico (KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006), por

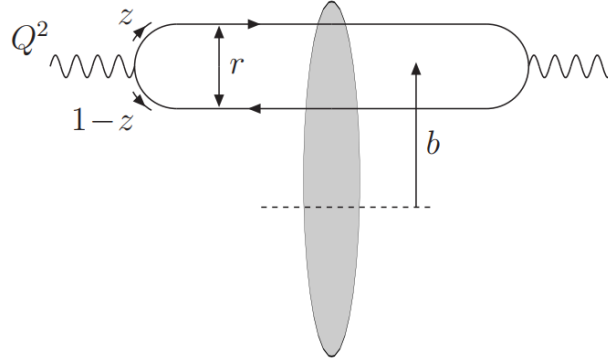
$$\sigma_{dip}(\mathbf{r}, x) = 2 \int d^2\mathbf{b} N(\mathbf{r}, x, \mathbf{b}), \quad (3.1.13)$$

onde $N(\mathbf{r}, x, \mathbf{b})$ é a amplitude de espalhamento de dipolo e \mathbf{b} é o parâmetro de impacto. A Figura 3.1.1 ilustra a física de interação do dipolo com o próton, apresentando as variáveis envolvidas no processo.

No regime de altas energias, o próton se torna um objeto altamente denso¹. Assim, uma suposição razoável a se fazer é considerar que a amplitude de espalhamento de dipolo não

¹Chama-se este estado de "limite de disco negro"

Figura 3.1.1 – Representação do DIS no referencial de dipolos em termos das variáveis envolvidas: o tamanho do dipolo r , o parâmetro de impacto b e as frações de momentum carregadas pelos constituintes do dipolo.



Fonte: (AMARAL, 2008)

depende do parâmetro de impacto b . Portanto, a integração em b na equação (3.1.13) resulta em um fator de normalização $\sigma_0 = 2 \int d^2b$, que pode ser obtida via ajuste aos dados experimentais (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013). A seção de choque dipolo-alvo pode, então, ser definida como ($r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$)

$$\sigma_{dip}(r, x) = \sigma_0 N(r, x). \quad (3.1.14)$$

A partir da equação (2.2.24), a função de estrutura F_2 do próton pode ser escrita em termos da seção de choque σ^{γ^*p} através da seguinte expressão

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} \left[\sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2) \right]. \quad (3.1.15)$$

Assim, através das equações (3.1.11), (3.1.12) e (3.1.14), é possível expressar F_2 em termos da amplitude de espalhamento de dipolo $N(r, x)$

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2\sigma_0}{4\pi^2\alpha_{em}} \sum_f \int d^2r \int_0^1 dz \left(|\Psi_T^{(f)}(r, z; Q^2)|^2 + |\Psi_L^{(f)}(r, z; Q^2)|^2 \right) N(r, x). \quad (3.1.16)$$

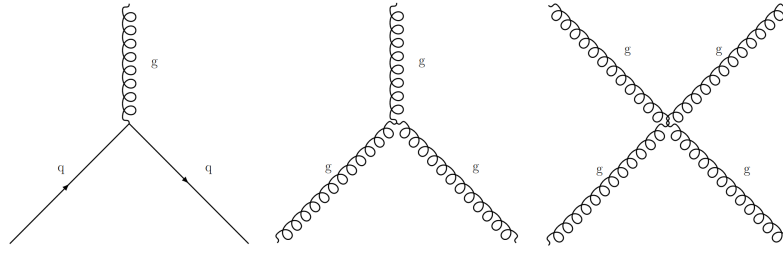
É importante ressaltar que $N(r, x)$ depende do tamanho transversal r do dipolo, ou seja, é expressa no espaço de coordenadas.

3.2 O formalismo de dipolos e a equação BK

Como visto no capítulo anterior, o número de glúons observados no interior do próton cresce conforme aumenta-se a energia do projétil e/ou a virtualidade do fóton virtual. O crescimento do número de glúons pode ser interpretado como efeito dos vértices da QCD (Figura 3.2.1), onde um glúon, além de ser emitido pelos quarks, pode se dividir em dois ou três. Este crescimento faz com que o próton, no regime de altas energias, se torne um objeto denso.

Devido à grande densidade de glúons, foi proposto que efeitos não lineares de recombinação gluônica, $g + g \rightarrow g$, passariam a se tornar importantes em algum momento. Este

Figura 3.2.1 – Vértices fundamentais da QCD.

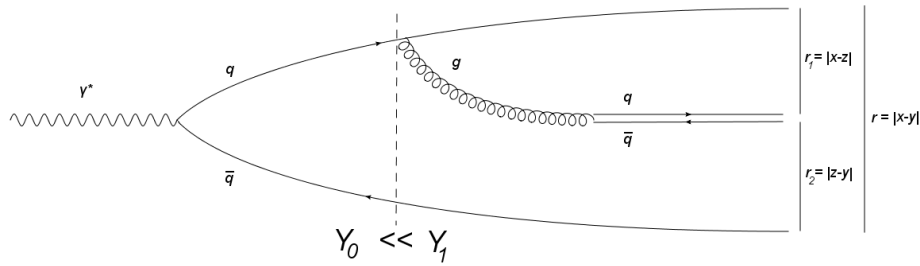


Fonte: Autor

processo reduz o crescimento da densidade de glúons produzindo um efeito que foi chamado de "saturação" (GRIBOV; LEVIN; RYSKIN, 1983). Uma teoria efetiva da QCD que considera esta evolução no alvo é o chamado "Color Glass Condensate" (GELIS et al., 2010). Contudo, uma outra teoria semelhante foi desenvolvida por Balitsky e, posteriormente, por Kovchegov, onde a evolução se dá no dipolo. Dela é possível chegar na equação de evolução BK.

Na Figura 3.2.2, tem-se que a evolução do dipolo se dá através de um acréscimo de rapidez ΔY , indo de Y_0 para Y_1 , o que resulta na radiação de glúons. No limite de grande número de cores, isto é, $N_c \rightarrow \infty$, o glúon emitido de coordenada transversal z pode ser substituído por um par quark-antiquark. Assim, o dipolo "pai" (x, y) é dividido em dois dipolos "filhos", (x, z) e (y, z) , formando o que é conhecido na literatura como *onium*. Este é o chamado "formalismo de dipolos" (MUELLER, 1994; MUELLER, 1995).

Figura 3.2.2 – Evolução do dipolo no limite de grande número de cores.



Fonte: Autor

A equação BK é construída dentro do formalismo de dipolos e descreve a evolução da amplitude de espalhamento de dipolo com a energia pra um Q^2 fixo da região diluída para a região linear. Esta, em ordem dominante² (LO), é dada por (BALITSKY, 1996; KOVCHegov, 1999)

$$\frac{\partial}{\partial Y} N(r, Y) = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 z \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} [N(r_1, Y) + N(r_2, Y) - N(r, Y) - N(r_1, Y)N(r_2, Y)], \quad (3.2.1)$$

e que pode ser interpretada como: quando a rapidez do dipolo cresce, o dipolo inicial de tamanho $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ se separa em dois dipolos de tamanhos $r_1 = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ e $r_2 = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$ com

²Acoplamento da QCD α_s mantida fixa.

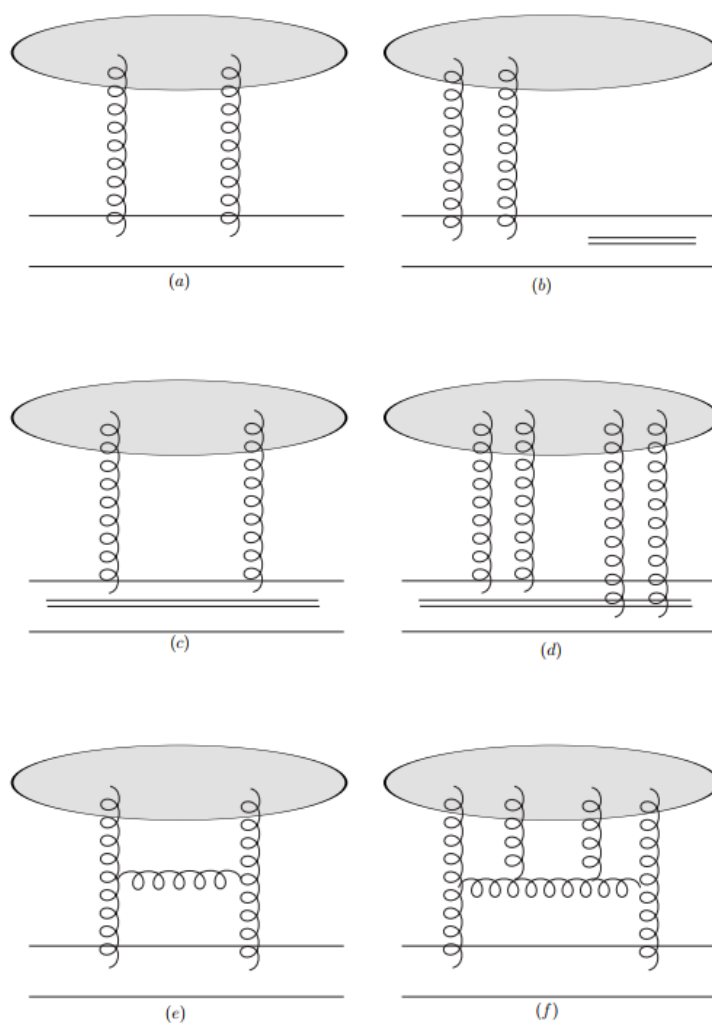
probabilidade de separação $\frac{r^2}{r_1^2 r_2^2}$ (XIANG, 2009). A interpretação física dos termos da equação (3.2.1) é dada pelos diagramas (a), (b), (c) e (d) da Figura 3.2.3. O diagrama (a) representa o início do espalhamento, em que apenas o dipolo original interagindo com o alvo pela troca de dois glúons. Após um passo δY na evolução (um aumento da energia), o dipolo original se separa em dois dipolos, o que leva aos diagramas (b), (c) e (d). O diagrama (b) diz respeito ao termo $-N(r, Y)$ do integrando, chamado de termo virtual, e representa a possibilidade de o pequeno dipolo com coordenada transversal z não estar na função de onda do dipolo no momento da interação. O diagrama (c) representa o primeiro termo linear do integrando, $N(r_1, Y)$, e considera a possibilidade de que apenas um dos dipolos, de tamanho r_1 , interage com o alvo. Embora não seja apresentado na Figura, existe outro diagrama similar, com o dipolo r_2 interagindo com o alvo, resultando no segundo termo linear, $N(r_2, Y)$. O diagrama (d) resulta no termo quadrático, $-N(r_1, Y)N(r_2, Y)$, que leva em conta a possibilidade de os dois dipolos interagirem simultaneamente com o alvo (múltiplo espalhamento). Os diagramas (e) e (f) correspondem aos diagramas (c) e (d), porém no caso em que a evolução é realizada no alvo, e não no projétil (dipolo); no diagrama (c) estão incluídos os termos lineares, e no (d) o de múltiplo espalhamento, que corresponde a efeitos de saturação no alvo, representados pela fusão de quatro glúons em dois. Para mais detalhes, ver a referência (IANCU, 2005).

3.3 Conclusão

Neste capítulo, exploramos o chamado referencial de dipolo, em que sua validade foi confirmada através do cálculo do tempo de vida do par quark-antiquark, que mostrou-se ser muito maior que o tempo de interação. Devido a esta característica, foi possível escrever uma expressão fatorada para as seções de choque, que por sua vez traz uma dependência na amplitude de espalhamento de dipolo, o que faz com que a função de estrutura F_2 também dependa da amplitude. De fato, foi visto que para ter uma expressão completa de F_2 , faz-se necessário uma expressão que descreve a evolução da amplitude de espalhamento. Neste sentido, introduzimos o formalismo de dipolos, de onde se extrai a equação BK, equação esta que governa a evolução da amplitude com a energia levando em consideração efeitos não lineares.

No próximo capítulo, abordaremos um modelo para a amplitude de espalhamento de dipolo que surge da interpolação de duas soluções assintóticas da equação LO BK.

Figura 3.2.3 – Diagramas para o espalhamento de um dipolo.



Fonte: (AMARAL, 2008)

4 O modelo de Iancu, Itakura e Munier para a amplitude de espalhamento de dipolo

Como visto no capítulo anterior, a amplitude de espalhamento de dipolo é governada pela equação BK. Contudo, esta equação, mesmo sendo a mais simples das equações de evolução, só pode ser solucionada numericamente e/ou assintoticamente. Modelos fenomenológicos para a amplitude de espalhamento se mostraram muito eficientes em descrever os dados do DIS, como o modelo IIM (IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004).

O modelo IIM foi inspirado no CGC para descrever os dados de HERA. Este modelo é construído na ideia de interpolar duas expressões inspiradas nas soluções da equação BK em regiões assintóticas distintas do espaço de fase do próton: a região diluída próxima a linha de saturação e a região saturada. Estas regiões são separadas pela dita escala de saturação $Q_s(Y)$, sendo que a região diluída é caracterizada pelo tamanho de dipolo $r \ll 1/Q_s(Y)$ e a região saturada por $r \gg 1/Q_s(Y)$. Disto isto, neste capítulo iremos mostrar de forma mais detalhada os cálculos feitos em (IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002) e (XIANG, 2009) para chegar nas soluções da equação BK em ordem dominante.

Antes de partir para as soluções, é importante ressaltar que foi observado e demonstrado que, no limite de $Y \rightarrow \infty$, as soluções da equação BK apresentam a propriedade de escalonamento geométrico, isto é, as soluções não são funções de r e Y separadamente, mas sim de uma única variável, a variável de escalonamento (LEVIN; TUCHIN, 2000; IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002)

$$\xi = rQ_s(Y). \quad (4.0.1)$$

4.1 Solução da equação BK na região diluída próxima a linha de saturação

A partir da equação (3.2.1), considerando $r \ll 1/Q_s(Y)$, tem-se que $x \approx y$, o que implica que $N(r_1, Y)N(r_2, Y) = 0$, e tem-se $N(r_1, Y) + N(r_2, Y) \approx 2N(z, Y)$ e $r_1^2 r_2^2 \approx (r - z)^2 z^2$ (XIANG, 2009). Com isto, a equação (3.2.1) se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial Y} N(r, Y) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi^2} \int d^2 z \frac{r^2}{(r - z)^2 z^2} \left[N(z, Y) - \frac{1}{2} N(r, Y) \right]. \quad (4.1.1)$$

Esta equação é a dita equação BFKL (para o espaço de coordenadas), que corresponde a equação BK linearizada, isto é, sem contribuição de saturação. Para solucionar esta equação, se faz útil utilizar a transformada de Mellin com respeito a coordenadas transversais. Assim, tem-se

$$N(r, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} \left(\frac{r^2}{L^2} \right)^\gamma N(\gamma, Y), \quad (4.1.2)$$

onde $L^2 = 1/\Lambda_{QCD}^2$ e $r^2 \ll L^2$. Como a equação BFKL é invariante sob transformações de escala, a equação resultante para $N(\gamma, Y)$ é local em γ (IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002):

$$\frac{\partial}{\partial Y} N(\gamma, Y) = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) N(\gamma, Y), \quad (4.1.3)$$

onde

$$\bar{\alpha}_s = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \quad \text{e} \quad \chi(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma), \quad (4.1.4)$$

em que $\chi(\gamma)$ é o autovalor do Kernel BFKL e Ψ é a função digama, dada por

$$\Psi(x) \equiv \frac{d}{dx} \ln[\Gamma(x)] = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \quad (4.1.5)$$

Aplicando o método da separação de variáveis na equação (4.1.3), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\gamma, Y)}{N(\gamma, Y)} &= \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \partial Y \\ \therefore \int_{N_0}^N \frac{\partial N(\gamma, Y)}{N(\gamma, Y)} &= \int_0^Y \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \partial Y \\ \therefore \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) &= \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y \\ \therefore N(\gamma, Y) &= N_0(\gamma, Y) e^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Para retornar às coordenadas espaciais, deve-se inserir o resultado (4.1.6) na equação (4.1.2). Assim

$$N(r, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} \left(\frac{r^2}{L^2} \right)^\gamma e^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y} N_0(\gamma, Y), \quad (4.1.7)$$

reescrevendo $\left(\frac{r^2}{L^2} \right)^\gamma$ como $e^{\gamma \ln(r^2/L^2)}$, $N_0(\gamma, Y)$ como $e^{\ln(N_0(\gamma, Y))}$ e definindo $\rho \equiv \ln(r^2/L^2)$, tem-se

$$N(r, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{\gamma \rho + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y + \ln(N_0(\gamma, Y))}. \quad (4.1.8)$$

Pode-se definir $F(\gamma, \rho, Y) = \gamma \rho + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y$. Assim

$$N(r, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{F(\gamma, \rho, Y)}, \quad (4.1.9)$$

onde a condição inicial $N_0(\gamma, Y)$ foi desprezada devido à sua contribuição para a função $F(\gamma, \rho, Y)$ no expoente não ficar mais importante do que ρ ou $\bar{\alpha}_s Y$.

A função $\chi(\gamma)$ possui singularidades essenciais em todos os valores inteiros positivos $\gamma \geq 1$, assim, para calcular a integral (4.1.9), pode-se fazer uso de um contorno como $C = \{\gamma = a + i\nu, -\infty < \nu < \infty\}$, com $0 < a < 1$. Além disto, também é útil realizar uma aproximação de ponto de sela, que se faz uma boa aproximação quando ρ e $\bar{\alpha}_s Y$ são ambos grandes. Assim, expandindo a função $F(\gamma, \rho, Y)$ em torno do ponto de sela (γ_0) até a segunda ordem, temos:

$$F(\gamma, \rho, Y) = F(\gamma_0, \rho, Y) + F'(\gamma, \rho, Y) \Big|_{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0) + \frac{1}{2} F''(\gamma, \rho, Y) \Big|_{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0)^2. \quad (4.1.10)$$

O ponto de sela é determinado do seguinte modo:

$$\frac{\partial F(\gamma, \rho, Y)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma_0} = 0, \quad \gamma_0 = \gamma_0(\rho, Y). \quad (4.1.11)$$

Implementando a condição (4.1.11) na expansão (4.1.10) e fazendo a substituição na integral (4.1.9), temos

$$N(r, Y) \approx \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{F(\gamma_0, \rho, Y) + \frac{1}{2} F(\gamma, \rho, Y)''} \Big|_{\gamma_0}^{(\gamma - \gamma_0)^2}, \quad (4.1.12)$$

fazendo uso do contorno $C = \{\gamma = \gamma_0 + i\nu, -\infty < \nu < \infty\}$, tem-se que $d\gamma = i d\nu$. Logo

$$N(r, Y) \approx e^{F(\gamma_0, \rho, Y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} e^{-\frac{\nu^2}{2} F(\gamma_0, \rho, Y)''}. \quad (4.1.13)$$

Resolvendo a integral gaussiana, obtemos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} e^{-\frac{\nu^2}{2} F(\gamma_0, \rho, Y)''}, \quad (4.1.14)$$

realizando uma substituição de variável do tipo $u = \nu \sqrt{\frac{F(\gamma_0, \rho, Y)''}{2}}$ e $d\nu = \sqrt{\frac{2}{F(\gamma_0, \rho, Y)''}} du$, tem-se

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\pi \sqrt{F(\gamma_0, \rho, Y)''}} e^{-u^2} du, \quad (4.1.15)$$

reescrevendo $\pi = \sqrt{\pi} \sqrt{\pi}$ e multiplicando a integral por $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, podemos reescrever a integral acima como:

$$I = \frac{1}{2^{3/2} \sqrt{\pi} \sqrt{F(\gamma_0, \rho, Y)''}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du. \quad (4.1.16)$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2^{3/2} \sqrt{\pi} \sqrt{F(\gamma_0, \rho, Y)''}} \operatorname{erf}(u) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ \therefore I &= \frac{2}{2^{3/2} \sqrt{\pi} \sqrt{F(\gamma_0, \rho, Y)''}} \\ \therefore I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi F(\gamma_0, \rho, Y)''}}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Substituindo (4.1.17) em (4.1.13), obtemos:

$$N(r, Y) \approx e^{F(\gamma_0, \rho, Y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi F(\gamma_0, \rho, Y)''}}, \quad (4.1.18)$$

Contudo, o termo proveniente da integral gaussiana sob flutuações em torno do ponto de sela varia lentamente, logo pode-se desprezar este termo. Portanto, obtém-se como solução

$$N(r, Y) \approx e^{F(\gamma_0, \rho, Y)}. \quad (4.1.19)$$

Procura-se a solução da equação BFKL próxima a linha de saturação, para isto faz-se necessário considerar a linha de saturação $Q_s(Y)$ e que nesta linha $N(r = 1/Q_s(Y)) = 1^1$

¹Rigorosamente este valor não é exatamente 1, mas sim $N_0 < 1$. Contudo, isto é irrelevante para a precisão do cálculo no momento.

(critério de saturação). Para este objetivo, é importante perceber que, a partir da condição (4.1.11), o ponto de sela não depende de ρ e Y separadamente, mas sim de uma única variável R . Isso pode ser verificado como segue:

A partir da expressão

$$F(\gamma, \rho, Y) = \gamma\rho + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)Y, \quad (4.1.20)$$

podemos aplicar a condição de ponto de sela e obter

$$\left. \frac{\partial F(\gamma, \rho, Y)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0} = \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi'(\gamma) \Big|_{\gamma_0} = 0. \quad (4.1.21)$$

Por fim, utilizando a expressão para $\chi(\gamma)$ em (4.1.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \rho + \bar{\alpha}_s Y \frac{\partial}{\partial \gamma} [2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma)] \Big|_{\gamma_0} &= 0 \\ \therefore \rho + \bar{\alpha}_s Y \frac{\partial}{\partial \gamma} [-\Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma)] \Big|_{\gamma_0} &= 0 \\ \therefore \frac{\partial}{\partial \gamma} [\Psi(\gamma) + \Psi(1 - \gamma)] \Big|_{\gamma_0} &= \frac{\rho}{\bar{\alpha}_s Y} \equiv -R, \quad \gamma_0(\rho, Y) = \gamma_0(R), \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

em que fica claro que o ponto de sela é função de uma única variável R .

Com isto, podemos redefinir $F(\gamma_0, \rho, Y)$ da equação (4.1.19) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(\gamma_0, \rho, Y) &= \gamma_0 \rho + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma_0) \\ \therefore F(\gamma_0, \rho, Y) &= \bar{\alpha}_s Y \left[\frac{\rho}{\bar{\alpha}_s Y} \gamma_0 + \chi(\gamma_0) \right] \\ \therefore F(\gamma_0, \rho, Y) &= \bar{\alpha}_s Y [-R\gamma_0 + \chi(\gamma_0)] \\ \therefore F(\gamma_0, \rho, Y) &= \bar{\alpha}_s Y F(\gamma_0(R), R). \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Assim, substituindo a expressão acima em (4.1.19), temos

$$N(r, Y) \approx e^{\bar{\alpha}_s Y F(\gamma_0(R), R)}. \quad (4.1.24)$$

O critério de saturação dá a seguinte condição para $F(\gamma_0(R), R)$:

$$F(\gamma_0(R), R) \Big|_{R=R_s} = 0, \quad R_s = \frac{(-\rho_s)}{\bar{\alpha}_s Y} = \frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \left(\frac{Q_s(Y)^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right), \quad (4.1.25)$$

onde a solução R_s para $F(\gamma_0(R), R) = 0$ é um número puro, $R_s \equiv c$, e não uma função de Y . O mesmo foi calculado numericamente em (IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002), onde foi obtido o resultado $R_s \approx 4,88$ junto de $\gamma_s \approx 0,63$ (γ_s é definido como $\gamma_s \equiv \gamma_0(R_s)$, isto é, o ponto de sela nas proximidades da linha de saturação). A partir da expressão de R_s extrai-se que a escala de saturação é dada por

$$Q_s^2(Y) = \Lambda_{QCD}^2 e^{c\bar{\alpha}_s Y} = \Lambda_{QCD}^2 x^{-c\bar{\alpha}_s} = Q_s^2(x) \quad (4.1.26)$$

Pode-se calcular a equação (4.1.24) para R um pouco acima de R_s , isto é, para tamanhos r que, ainda sendo muito menores que o tamanho de saturação $r_s = 1/Q_s(Y)$, estão próximas em unidades logarítmicas. Para isto, precisa-se que

$$0 < R - R_s \ll R_s \quad \text{ou} \quad 1 < \ln \left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \right) \ll \ln \left(\frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda_{QCD}^2} \right), \quad (4.1.27)$$

onde $Q^2 \equiv 1/r^2$. A condição $R > R_s$ (ou $Q^2 \gg Q_s^2(Y)$) garante que estamos no regime linear (diluído) e a condição $R - R_s \ll R_s$ permite estudar a aproximação de $N(r, Y)$ na direção da saturação em uma expansão limitada em potências de $R - R_s$. Até a ordem linear da expansão, tem-se

$$F(\gamma_0(R), R) \approx F(\gamma_0(R_s), R_s) + \left. \frac{dF(\gamma_0(R), R)}{dR} \right|_{R=R_s} (R - R_s), \quad (4.1.28)$$

usando a condição para $F(\gamma_0(R), R)$ em (4.1.25), fica-se com

$$F(\gamma_0(R), R) \approx \left. \frac{dF(\gamma_0(R), R)}{dR} \right|_{R=R_s} (R - R_s), \quad (4.1.29)$$

a derivada total pode ser reescrita como

$$F(\gamma_0(R), R) \approx \left(\left. \frac{\partial F(R)}{\partial R} \right|_{R=R_s} + \left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} \left. \frac{d\gamma_0}{dR} \right|_{R=R_s} \right) (R - R_s), \quad (4.1.30)$$

já que $\gamma_0(R)$ satisfaz a equação de ponto de sela (4.1.11), tem-se que

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = 0, \quad (4.1.31)$$

assim

$$F(\gamma_0(R), R) \approx \left. \frac{\partial F(R)}{\partial R} \right|_{R=R_s} (R - R_s) = -\gamma_s(R - R_s). \quad (4.1.32)$$

Portanto, a equação (4.1.24), acima da escala de saturação, é tida como

$$N(r, Y) \approx e^{-\bar{\alpha}_s Y \gamma_s(R - R_s)}, \quad (4.1.33)$$

Pode-se perceber que

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_s Y (R - R_s) &= \bar{\alpha}_s Y \left[\frac{\rho}{\bar{\alpha}_s Y} - \frac{\rho_s}{\bar{\alpha}_s Y} \right] \\ \therefore \bar{\alpha}_s Y (R - R_s) &= \bar{\alpha}_s Y \left[\frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) - \frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) \right] \\ \therefore \bar{\alpha}_s Y (R - R_s) &= \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) - \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) \\ \therefore \bar{\alpha}_s Y (R - R_s) &= \ln \left(\frac{Q^2}{Q_s^2} \right) \\ \therefore \bar{\alpha}_s Y (R - R_s) &= \ln \left(\frac{1}{r^2 Q_s^2} \right), \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

logo

$$N(r, Y) \approx N_0(r^2 Q_s^2(Y))^{\gamma_s}, \quad (4.1.35)$$

onde o valor numérico $N_0 < 1$, que representa de fato a condição de contorno, foi reintroduzido. Incluindo o termo de segunda ordem da expansão em $F(\gamma_0(R), R)$, tem-se

$$F(\gamma_0(R), R) \approx F(\gamma_0(R_s), R_s) + \frac{dF}{dR} \Big|_{R=R_s} (R - R_s) + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dR^2} \Big|_{R=R_s} (R - R_s)^2, \quad (4.1.36)$$

$$F(\gamma_0(R), R) \approx -\gamma_s(R - R_s) - \frac{\gamma'_s}{2} (R - R_s)^2, \quad \gamma'_s \equiv \frac{d\gamma_0(R)}{dR} \Big|_{R_s}, \quad (4.1.37)$$

assim

$$\begin{aligned} N(r, Y) &\approx e^{\bar{\alpha}_s Y \left[-\gamma_s(R - R_s) - \frac{\gamma'_s}{2} (R - R_s)^2 \right]} \\ \therefore N(r, Y) &\approx e^{\bar{\alpha}_s Y \left[-\gamma_s(R - R_s) - \frac{\gamma'_s}{2 \bar{\alpha}_s Y} \bar{\alpha}_s Y (R - R_s)^2 \right]} \\ \therefore N(r, Y) &\approx N_0(r^2 Q_s^2(Y))^{\gamma_s} \exp \left\{ -\frac{\gamma'_s}{2 \bar{\alpha}_s Y} \left[\ln \left(\frac{1}{r^2 Q_s^2(Y)} \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

4.2 Solução da equação BK na região saturada

A equação BK pode ser escrita em termos da matriz S através da relação $S = 1 - N$, assim:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -\frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2 z \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} [S(r, Y) - S(r_1, Y) S(r_2, Y)]. \quad (4.2.1)$$

Na região de saturação, temos que $r \gg 1/Q_s(Y)$, assim a amplitude de espalhamento é próxima de 1, $N \approx 1$, consequentemente $S \ll 1$. Neste limite, o termo não linear pode ser desprezado. Essa linearização da equação só é permitida desde que aos dipolos filhos sejam muito grandes quando comparados com $1/Q_s(Y)$, isto é, $r_1^2 \gg 1/Q_s^2(Y)$ e $r_2^2 \gg 1/Q_s^2(Y)$. Além disso, a integral sob z se torna logarítmica caso um dos dipolos filhos seja muito menor que o dipolo pai, isto é, $r_1^2 \ll r$ ou $r_2^2 \ll r$. Com isto, um fator 2 é inserido devido a contribuição das duas regiões que dominam a integral: $1/Q_s(Y) \ll r_1 \ll r, r_2 \approx r$ ou $1/Q_s(Y) \ll r_2 \ll r, r_1 \approx r$. Logo, pode-se manipular a expressão da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -\frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} S(r, Y) \int d^2 z \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2}. \quad (4.2.2)$$

Considerando as duas regiões que dominam a integral, pode-se escolher aproximar z de r_1 , devido ao tamanho do dipolo filho ser extremamente pequeno quando comparado com o dipolo pai r , e aproximar r de r_2 . Fazendo estas aproximações, deve-se multiplicar a integral por um

fator dois, pois a outra possibilidade de aproximação também deve ser considerada. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) &= -\frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} S(r, Y) 2 \int d^2 r_1 \frac{r_2^2}{r_1^2 r_2^2} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) &= -\frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} S(r, Y) 2 \int d^2 r_1 \frac{1}{r_1^2}.\end{aligned}\quad (4.2.3)$$

Utilizando as coordenadas polares expressando $d^2 r_1 = r_1 dr_1 d\phi$ e a relação $2r_1 dr_1 = dr_1^2$, tem-se:

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) &= -\frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} S(r, Y) 2 \int_0^{2\pi} d\phi \int r_1 dr_1 \frac{1}{r_1^2} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) &= -\frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} S(r, Y) 4\pi \int r_1 dr_1 \frac{1}{r_1^2} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) &= -\frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} S(r, Y) 2\pi \int_{1/Q_s^2}^{r^2} dr_1^2 \frac{1}{r_1^2} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) &= -\bar{\alpha}_s S(r, Y) \int_{1/Q_s^2}^{r^2} dr_1^2 \frac{1}{r_1^2}.\end{aligned}\quad (4.2.4)$$

Com isto, pode-se solucionar a integral em (4.2.4) e obter

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(r, Y) = -\bar{\alpha}_s S(r, Y) \ln(r^2 Q_s^2(Y)). \quad (4.2.5)$$

Definindo a variável de escalonamento $\tau \equiv \ln(r^2 Q_s^2(Y))$ e fazendo

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial Y} \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \tau} c\bar{\alpha}_s, \quad (4.2.6)$$

onde foi utilizado $Q_s^2(Y) = \Lambda_{QCD}^2 e^{c\bar{\alpha}_s Y}$, temos que a equação BK na região saturada escrita em termos da variável de escalonamento é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} S(\tau) c\bar{\alpha}_s &= -\bar{\alpha}_s S(r, Y) \ln(r^2 Q_s^2(Y)) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} S(\tau) &= -\frac{1}{c} S(\tau) \tau.\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

Resolvendo a equação acima, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{S} &= -\frac{1}{c} \tau \partial \tau \\ \therefore \int_{S_0}^S \frac{\partial S}{S} &= -\frac{1}{c} \int_0^\tau \tau \partial \tau \\ \therefore \ln\left(\frac{S}{S_0}\right) &= -\frac{\tau^2}{2c} \\ \therefore \frac{S}{S_0} &= \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2c}\right\} \\ \therefore S &= \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2c}\right\} S_0.\end{aligned}\quad (4.2.8)$$

Esta expressão é conhecida na literatura como a lei de Levin-Tuchin (LEVIN; TUCHIN, 2000). Levando em consideração que $S_0(r, Y_0) \approx \mathcal{O}(1)$ e voltando para N , conclui-se que a solução da equação BK na região saturada é tida como:

$$N(r, Y) \approx 1 - e^{-\frac{\ln^2(r^2 Q_s^2(Y))}{2c}}. \quad (4.2.9)$$

4.3 A expressão do modelo IIM

Como dito anteriormente, Iancu, Itakura e Munier (2004) construíram uma função para $N(r, Y)$ que interpola suavemente duas expressões inspiradas nas soluções (4.1.38) e (4.2.9). Assim, a expressão é dada por

$$N(r, Y) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{r Q_s(Y)}{2} \right)^{2 \left(\gamma_s + \frac{\ln(2/r Q_s(Y))}{\kappa \lambda Y} \right)}, & \text{para } r Q_s \leq 2 \\ 1 - e^{-a \ln^2(b r Q_s(Y))}, & \text{para } r Q_s > 2 \end{cases}, \quad (4.3.1)$$

onde N_0 e κ são parâmetros usualmente fixados, $Q_s(Y)$ é a escala de saturação e é parametrizada como $Q_s(Y) = Q_s(x) = (x_0/x)^{\lambda/2}$ e γ_s , λ e x_0 são parâmetros considerados livres em processos de ajustes aos dados do DIS. Por fim, a e b são parâmetros que garantem a continuidade de $N(r, Y)$ e sua derivada em $r Q_s = 2$. Estes são dados por:

$$a = -\frac{N_0^2 \gamma_s^2}{(1 - N_0)^2 \ln(1 - N_0)}, \quad b = \frac{1}{2} (1 - N_0)^{-\frac{1 - N_0}{N_0 \gamma_s}}. \quad (4.3.2)$$

4.4 Conclusão

Ao longo deste capítulo, exploramos e detalhamos duas soluções assintóticas da equação BK que são base para o desenvolvimento de um modelo que visa descrever os dados dos DIS, o modelo IIM. O modelo interpola estas duas soluções suavemente com respeito ao valor do produto $r Q_s(Y)$, isto é, se $r Q_s(Y) \leq 2$, então a amplitude tomará forma da solução linear da região diluída próxima a linha de saturação, e caso $r Q_s(Y) > 2$, então a amplitude será descrita pela solução não-linear da região saturada, a lei de Levin-Tuchin.

Originalmente, este modelo foi desenvolvido para descrever os dados de HERA obtidos até 2002 (ADLOFF et al., 2001; BREITWEG et al., 2000; CHEKANOV et al., 2001), nesta análise os autores consideraram apenas as contribuições dos quarks leves, o que levou a considerar parâmetro γ_s fixo e assumindo o valor obtido a partir da equação LO BFKL, isto é, $\gamma_s \approx 0,63$. Contudo, em 2007, Gregory Soyez atualizou o modelo ao considerar contribuições de quarks pesados (principalmente o charm), o que resultou, ao considerar o valor original de γ_s , em uma pobre descrição dos dados experimentais (SOYEZ, 2007). A solução encontrada foi a de permitir que o parâmetro seja livre, desde então o parâmetro é considerado livre e usualmente assume

valores acima do esperado pela LO BFKL, o que sugere que se deve considerar ordens mais altas para descrever os dados experimentais. Contudo, para o escopo desta monografia, manteremos nossa análise à ordem dominante.

Com o modelo em mãos, no que segue o capítulo seguinte, faremos uma análise fenomenológica calculando F_2 com base no modelo e confrontando este com os dados experimentais mais recentes.

5 Aplicação fenomenológica do modelo IIM: descrição dos dados do DIS

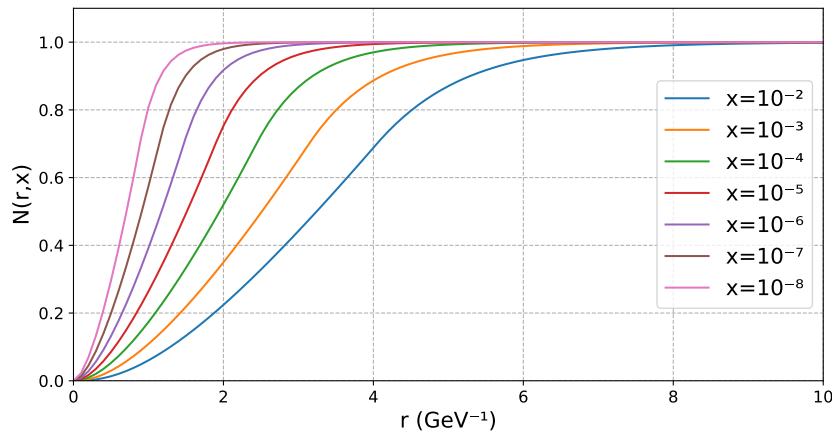
O modelo IIM, que é dado pela expressão (4.3.1), conta com os parâmetros N_0 , κ , λ , γ_s e x_0 , em que os parâmetros λ , γ_s e x_0 são, usualmente, obtidos através de ajustes aos dados experimentais do DIS, assim como σ_0 que entra na seção de choque de dipolo (3.1.14). Nesta monografia foi feita uma análise com parâmetros fixos, isto é, não será feito um novo ajuste, mas utilizaremos os valores obtidos no ajuste feito em (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013), no qual os autores utilizaram os dados presentes em (AARON et al., 2010). Estes valores encontram-se na Tabela 1. Já os parâmetros N_0 e κ são usualmente fixados em análises fenomenológicas e, neste trabalho, utilizaremos $N_0 = 0,7$ e $\kappa = 9,9$ assim como em (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013). Além disto, os valores de massa dos quarks leves (up, down e strange) e do quark charm utilizados são $m_u = m_d = m_s \approx 10^{-2}$ GeV e $m_c = 1,27$ GeV, seguindo o ajuste utilizado.

Tabela 1 – Parâmetros obtidos em (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013)

σ_0 (mb)	γ_s	λ	x_0
24,064	0,719	0,227	$2,22 \times 10^{-5}$

Como primeiro resultado, foi feito um código em Python para verificar o comportamento da amplitude de espalhamento de dipolo do modelo IIM como função do tamanho transversal r para diversos valores de x (ou de forma equivalente, de Y). Observa-se, na Figura 5.0.1 que a saturação $N(r, x) \approx 1$ é atingida para valores de r cada vez menores conforme diminuimos x (aumento da energia), o que é um comportamento esperado, visto que no regime de altas energias o próton se torna um objeto saturado.

Figura 5.0.1 – Amplitude de espalhamento de dipolo do modelo IIM como função de r para diversos valores de x .



Fonte: Autor

Com base nas discussões anteriores, pode-se calcular a função de estrutura F_2 do próton a partir da equação (3.1.16). Assim, um código em Python foi produzido (Apêndice A) para realizar o cálculo e comparar com os dados experimentais mais recentes do colisor HERA. Os dados utilizados para comparação foram os disponibilizados em (ABT et al., 2017), em que foi feita uma combinação de todas as seções de choque do DIS obtidas nos experimentos H1 e ZEUS. Vale ressaltar que os dados experimentais a serem confrontados com o F_2 obtido através do modelo não são os mesmos utilizados no ajuste feito em (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013). Nesta monografia é feito um exercício fenomenológico, em que toma-se a liberdade de confrontar o modelo com os dados mais recentes encontrados na literatura. Os dados das seções de choque foram convertidos para F_2 utilizando a equação (2.2.24). As Figuras 5.0.2, 5.0.3, 5.0.4 e 5.0.5 apresentam o comportamento de F_2 obtido para $0,085 \leq Q^2 \leq 500 \text{ GeV}^2$. Como usual na literatura, na análise para contribuições dos quarks leves, o x utilizado é o próprio x de Bjorken (x_{Bj}), já pra o quark charm foi utilizado o x modificado $x = x_{Bj} \left(1 + \frac{4m_c^2}{Q^2}\right)$.

Figura 5.0.2 – Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $0,85 \leq Q^2 \leq 3,5 \text{ GeV}^2$, utilizando o modelo IIM.

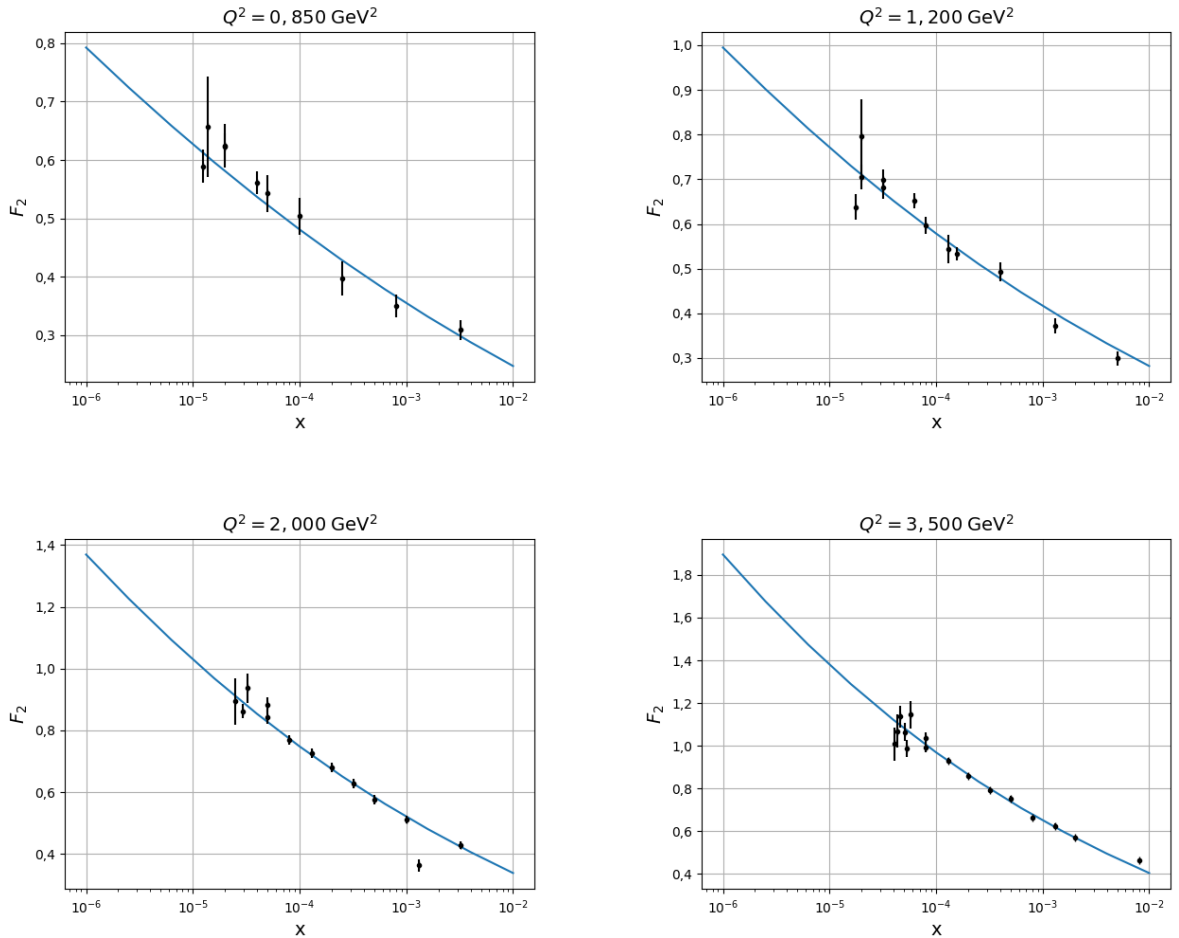
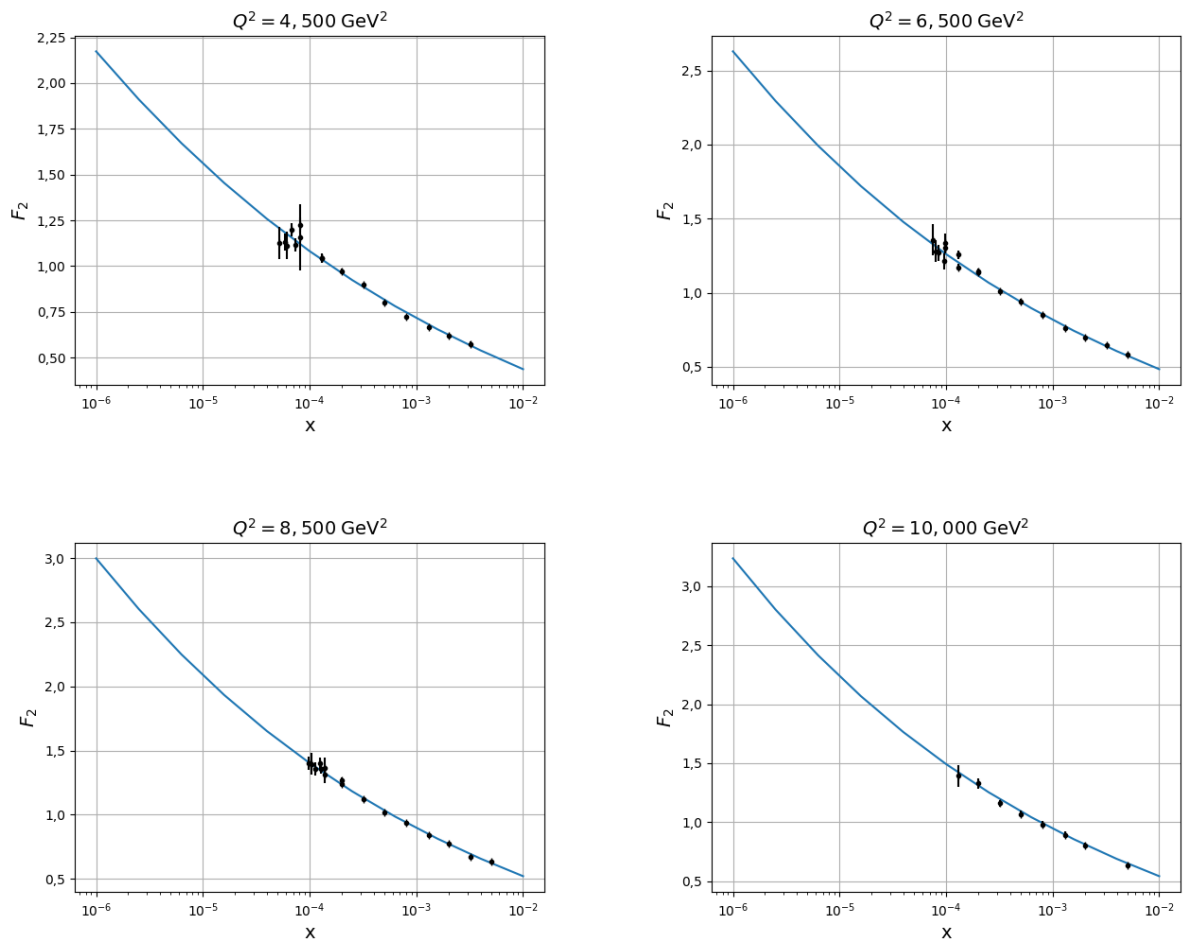
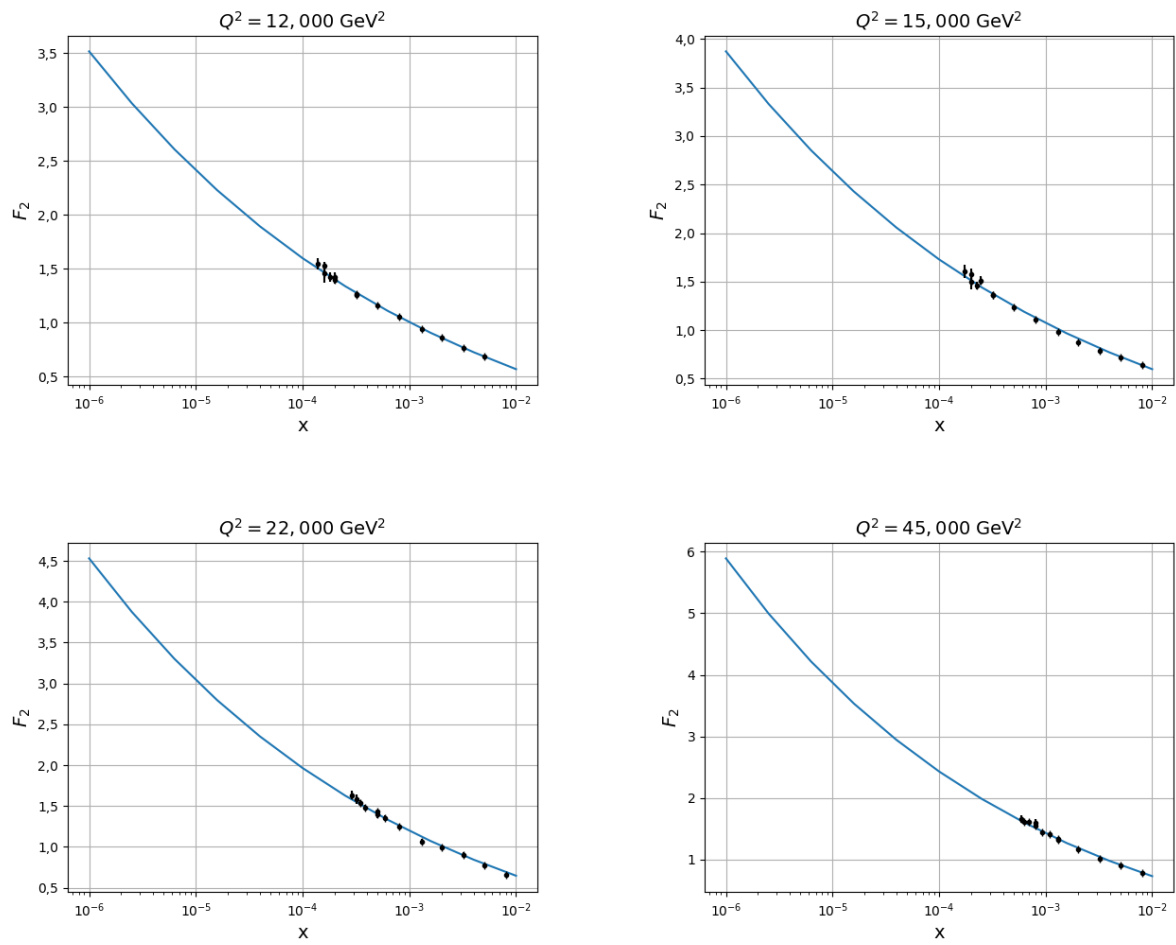


Figura 5.0.3 – Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $4,5 \leq Q^2 \leq 10,0$ GeV^2 , utilizando o modelo IIM.



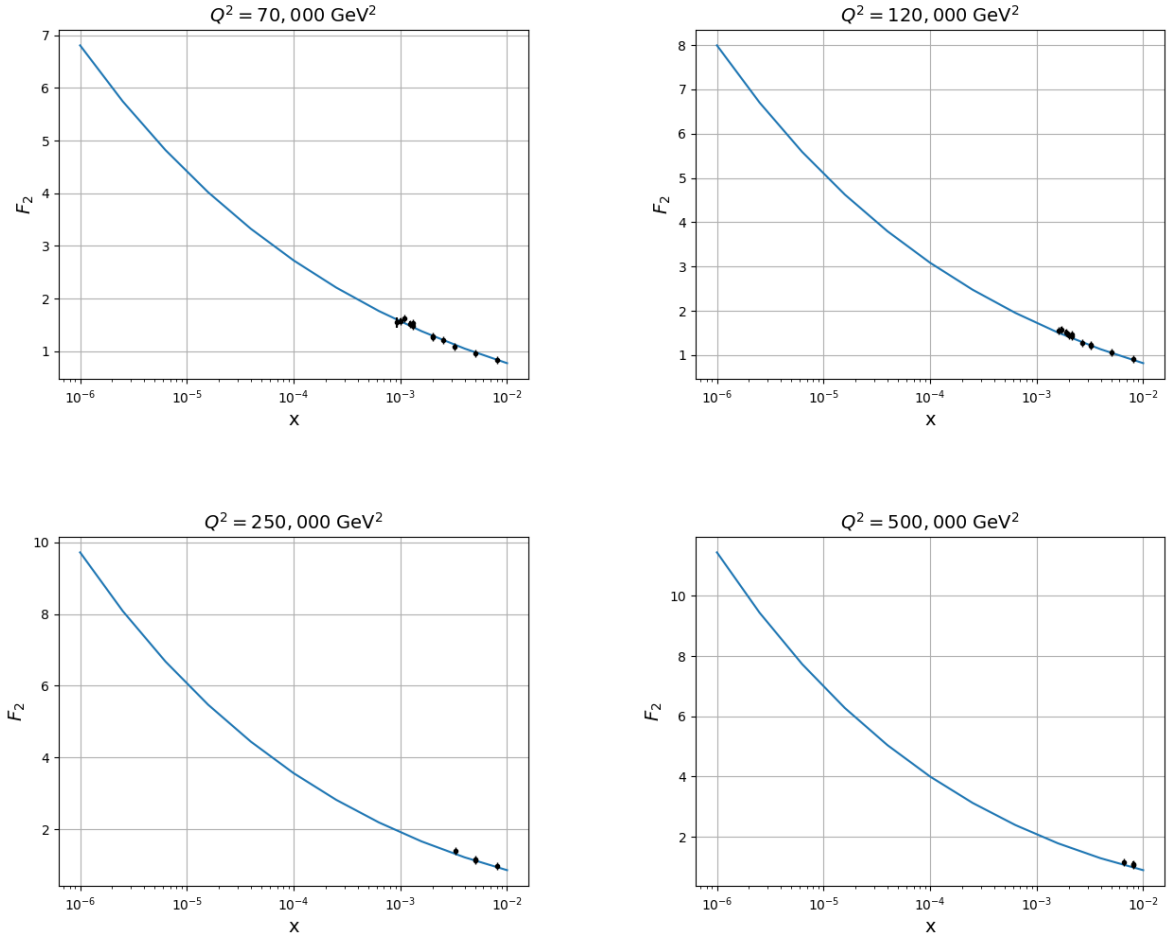
Fonte: Autor

Figura 5.0.4 – Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $12,0 \leq Q^2 \leq 45,0$ GeV^2 , utilizando o modelo IIM.



Fonte: Autor

Figura 5.0.5 – Resultados da função de estrutura F_2 como função de x , para $70,0 \leq Q^2 \leq 500,0$ GeV^2 , utilizando o modelo IIM.



Fonte: Autor

Pode-se verificar nos gráficos que o modelo descreve visualmente bem os dados experimentais, que exibem um crescimento no conteúdo quarkônico do próton conforme a energia aumenta (x diminui). Além disto, nesta análise extrapolamos o resultado para além da janela cinemática dos dados existentes como forma de predição para futuros experimentos do DIS que possam atingir energias maiores.

Partindo para uma análise quantitativa da qualidade da descrição dos dados, foi feito o cálculo da variável estatística χ^2 reduzido (χ_{red}^2), que carrega a informação do quão bom é o ajuste feito para o modelo. Esta é dada pela seguinte expressão:

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{\nu}, \quad \chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - C_i)^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.0.1)$$

em que ν corresponde ao número de pontos experimentais menos o número de parâmetros ajustados, O corresponde ao valor experimental, C corresponde ao valor calculado e σ corresponde ao erro associado ao dado experimental. Quando $\chi_{red}^2 \approx 1$, tem-se que o ajuste feito está de acordo com os dados. Dito isto, o valor obtido nesta análise é $\chi_{red}^2 \approx 2,23$, o que nos diz que o modelo

IIM, com os parâmetros obtidos em (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013), não fornece uma boa descrição dos dados mais recentes (ABT et al., 2017). Este resultado era, naturalmente, esperado, pois os parâmetros utilizados aqui foram ajustados a um outro conjunto de dados (AARON et al., 2010), com boa descrição ($\chi^2_{red} \approx 1,3$ (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013)). Isso não significa que o modelo IIM não seja adequado para descrever os dados experimentais utilizados aqui, mas que um novo ajuste (com parâmetros livres) deve ser feito.

5.1 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados os principais resultados deste trabalho. Utilizando parâmetros fixos obtidos em (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013), primeiro foi demonstrado o comportamento da amplitude de espalhamento de dipolo do modelo IIM como função do tamanho transversal r para diversos valores de x . Foi observado um comportamento já esperado, em que a saturação $N(r, x) \approx 1$ é atingida para valores de r cada vez menores conforme x diminui. Em seguida, foram utilizados esses parâmetros para calcular a função de estrutura do próton F_2 através de um código em Python e gerar os gráficos que apresentam o confronto do modelo com os dados experimentais utilizados nesta análise (ABT et al., 2017). Visualmente, é observado que o modelo, com os parâmetros utilizados, descreve bem os dados experimentais, contudo, ao calcular o χ^2 reduzido, foi notado que há a necessidade de realizar um novo ajuste (com parâmetros livres) para descrever estes dados.

6 Conclusões finais

Nesta monografia, foi feito um estudo introdutório da fenomenologia do DIS a partir do modelo IIM. Para isto, primeiro revisamos o DIS, mostrando suas principais variáveis e expressões para as seções de choque. Além disto, foi visto que pode-se relacionar essas seções de choque com a função de estrutura F_2 , que se mostrou uma quantidade que descreve a distribuição de momentum dos quarks e antiquarks contidos no hádron, o que motivou a busca para descrever sua evolução. Foi visto também que, experimentalmente, o regime de altas energias do DIS corresponde ao regime de alta densidade partônica, principalmente de glúons.

Da necessidade de descrever o DIS em altas energias, foi proposto o referencial de dipolo, que se mostra válido devido ao grande tempo de vida do dipolo em comparação com o tempo de interação. Vimos que esta característica se reflete na fatorização das seções de choque, que por sua vez apresentavam uma dependência na amplitude de espalhamento de dipolo. A fim de descrever a evolução de F_2 , foi preciso verificar como a amplitude de espalhamento evoluía com a energia, sendo assim, foi apresentado o formalismo de dipolo, de onde deriva-se a equação BK, que descreve a evolução do dipolo para grandes energias. Como a equação BK não possui solução analítica em todo o espaço, apresentamos em detalhes duas soluções analíticas assintóticas: a solução próxima a linha de saturação e a solução na região saturada. Estas soluções são a base para o modelo que foi utilizado nesta monografia, o modelo IIM.

Com o modelo IIM em mãos, foi desenvolvido um código em Python para verificar o comportamento da amplitude descrita pelo modelo e calcular a função de estrutura F_2 . Com o F_2 obtido, fizemos uma comparação com os dados experimentais, que visualmente aparentam ser bem descritos. Porém, ao calcular o χ^2_{red} , foi verificado que há a necessidade de realizar um novo ajuste baseado nos dados experimentais utilizados neste trabalho.

Como perspectivas, seria interessante realizar uma comparação do modelo IIM com o modelo rcBK (ALBACETE et al., 2009), que consiste na solução numérica para a equação BK com acoplamento variável. Além disto, seria interessante uma atualização do modelo IIM, ou seja, realizar um ajuste dos parâmetros do modelo, assim como do parâmetro σ_0 , a partir dos dados experimentais utilizados nesta monografia (ABT et al., 2017). Também, num futuro não muito distante, o modelo IIM poderá ser atualizado com dados de futuros colisores elétron hádron, como o EIC (Electron-Ion Collider ou Colisor Elétron-Íon) e o LHeC (Large Hadron Electron Collider ou Grande Colisor Hádron Elétron).

Referências

- AARON, F. D. et al. Combined measurement and QCD analysis of the inclusive e^\pm -p scattering cross sections at HERA. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 1, p. 1–63, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 15, 31 e 36.
- ABRAMOWICZ, H. et al. Combination of measurements of inclusive deep inelastic e^\pm p scattering cross sections and QCD analysis of HERA data. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 75, n. 12, p. 1–98, 2015. Citado na página 12.
- ABT, I. et al. Investigation into the limits of perturbation theory at low Q^2 using HERA deep inelastic scattering data. **Physical Review D**, APS, v. 96, n. 1, p. 014001, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 5, 32, 36, 37 e 48.
- ADAMS, M. et al. Proton and deuteron structure functions in muon scattering at 470 GeV. **Physical Review D**, APS, v. 54, n. 5, p. 3006, 1996. Citado na página 12.
- ADLOFF, C. et al. Deep-inelastic inclusive ep scattering at low x and a determination of α_s . **The European Physical Journal C-Particles and Fields**, Springer, v. 21, n. 1, p. 33–61, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 29.
- ALBACETE, J. L. et al. Nonlinear QCD meets data: A global analysis of lepton-proton scattering with running coupling Balitsky-Kovchegov evolution. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 3, p. 034031, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 37.
- ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic freedom in parton language. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 126, n. 2, p. 298–318, 1977. Citado na página 3.
- AMARAL, J. T. de S. **Amplitudes de espalhamento na Cromodinâmica Quântica em altas energias no formalismo de dipolos**. 2008. 130 f. Tese (Doutorado em Física) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 6, 11, 13, 14, 18 e 21.
- ARNEODO, M. et al. Measurement of the proton and deuteron structure functions, F_2^p and F_2^d , and of the ratio $\sigma_l\sigma_t$. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 483, n. 1-2, p. 3–43, 1997. Citado na página 12.
- BALITSKII, Y. Y.; LIPATOV, L. Pomeron singularity in quantum chromodynamics. **Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.):(United States)**, Leningrad Nuclear Physics Institute, Academy of Sciences of the USSR, v. 28, n. 6, 1978. Citado na página 3.
- BALITSKY, I. Operator expansion for high-energy scattering. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 463, n. 1, p. 99–157, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 19.
- BARBER, D. et al. Discovery of three-jet events and a test of quantum chromodynamics at PETRA. **Physical Review Letters**, APS, v. 43, n. 12, p. 830, 1979. Citado na página 2.
- BARONE, V.; PREDAZZI, E. **High-Energy Particle Diffraction**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. (Text and Monographs in Physics). ISBN 978-3-642-07567-4, 978-3-662-04724-8. Citado 6 vezes nas páginas 6, 8, 9, 10, 16 e 17.

- BARTEL, W. et al. Observation of planar three-jet events in e^+e^- annihilation and evidence for gluon bremsstrahlung. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 91, n. 1, p. 142–147, 1980. Citado na página 2.
- BENVENUTI, A. C. et al. A high statistics measurement of the proton structure functions $F_2(x, Q^2)$ and R from deep inelastic muon scattering at high Q^2 . **Physics Letters B**, Elsevier, v. 223, n. 3-4, p. 485–489, 1989. Citado na página 12.
- BERGER, C. et al. Evidence for gluon bremsstrahlung in e^+e^- annihilations at high energies. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 86, n. 3-4, p. 418–425, 1979. Citado na página 2.
- BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. **Physical Review**, APS, v. 179, n. 5, p. 1547, 1969. Citado na página 11.
- BJORKEN, J. D.; PASCHOS, E. A. Inelastic electron-proton and γ -proton scattering and the structure of the nucleon. **Physical Review**, APS, v. 185, n. 5, p. 1975, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 11.
- BLOOM, E. D. et al. High-energy inelastic e-p scattering at 6 and 10. **Physical Review Letters**, APS, v. 23, n. 16, p. 930, 1969. Citado na página 1.
- BRANDELIK, R. et al. Evidence for planar events in e^+e^- annihilation at high energies. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 86, n. 2, p. 243–249, 1979. Citado na página 2.
- BREITWEG, J. et al. Measurement of exclusive ω electroproduction at HERA. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 487, n. 3-4, p. 273–288, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 29.
- CALLAN, J. C. G.; GROSS, D. J. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. **Physical Review Letters**, APS, v. 22, n. 4, p. 156, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 11.
- CHEKANOV, S. et al. Measurement of the neutral current cross section and structure function for deep inelastic scattering at HERA. **The European Physical Journal C-Particles and Fields**, Springer, v. 21, n. 3, p. 443–471, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 29.
- DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. **Sov. Phys. JETP**, v. 46, p. 641–653, 1977. Citado na página 3.
- DRELL, S. D.; YAN, T.-M. Massive lepton-pair production in hadron-hadron collisions at high energies. **Physical Review Letters**, APS, v. 25, n. 5, p. 316, 1970. Citado na página 2.
- FEYNMAN, R. P. The behavior of hadron collisions at extreme energies. **Conf. Proc. C**, v. 690905, p. 237–258, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 11.
- FEYNMAN, R. P. Very high-energy collisions of hadrons. **Physical Review Letters**, APS, v. 23, n. 24, p. 1415, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 11.
- FRIEDMAN, J. I.; KENDALL, H. W. Deep inelastic electron scattering. **Annual Review of Nuclear Science**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 22, n. 1, p. 203–254, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 11.
- FROISSART, M. Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation. **Physical Review**, APS, v. 123, n. 3, p. 1053, 1961. Citado na página 3.

GEGIER, H.; MARSDEN, E. On a diffuse reflection of the α -particles. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 82, n. 557, p. 495–500, 1909. Citado na página 1.

GELIS, F. et al. The color glass condensate. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, Annual Reviews, v. 60, p. 463–489, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 19.

GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. **Phys. Letters**, California Institute of Technology (CalTech), Pasadena, CA (United States), v. 8, 1964. Citado na página 1.

GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M.; RYSKIN, M. G. Semihard processes in QCD. **Physics Reports**, Elsevier, v. 100, n. 1-2, p. 1–150, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 19.

GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. **Deep inelastic e-p scattering in a perturbation theory**. [S.l.], 1972. Citado na página 3.

GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, APS, v. 30, n. 26, p. 1343, 1973. Citado na página 2.

IANCU, E. Physics of the color glass condensate. **INSPIRE-1494642**, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 20.

IANCU, E.; ITAKURA, K.; MCLERRAN, L. Geometric scaling above the saturation scale. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 708, n. 3-4, p. 327–352, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 4, 22 e 25.

IANCU, E.; ITAKURA, K.; MUNIER, S. Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small- x . **Physics Letters B**, Elsevier, v. 590, n. 3-4, p. 199–208, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 4, 22 e 29.

KOVCHegov, Y. V. Small- x F_2 structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges. **Physical Review D**, APS, v. 60, n. 3, p. 034008, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 19.

KOVCHegov, Y. V.; LEVIN, E. **Quantum Chromodynamics at High Energy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology 33). ISBN 9780521112574. Citado na página 10.

KOWALSKI, H.; MOTYKA, L.; WATT, G. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. **Physical Review D**, APS, v. 74, n. 7, p. 074016, 2006. Citado na página 17.

KURAEV, E. A.; LIPATOV, L.; FADIN, V. S. Pomeranchuk singularity in nonabelian gauge theories. **Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.)(United States)**, Institute for Nuclear Physics, Siberian Division, USSR Academy of Sciences ..., v. 45, n. 2, 1977. Citado na página 3.

KUTI, J.; WEISSKOPF, V. F. Inelastic lepton-nucleon scattering and lepton pair production in the relativistic quark-parton model. **Physical Review D**, APS, v. 4, n. 11, p. 3418, 1971. Citado na página 2.

LEVIN, E.; TUCHIN, K. Solution to the evolution equation for high parton density QCD. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 573, n. 3, p. 833–852, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 4, 22 e 29.

- LIPATOV, L. Reggeization of the vector meson and the vacuum singularity in nonabelian gauge theories. **Yad. Fiz.;**(USSR), v. 23, n. 3, 1976. Citado na página 3.
- MUELLER, A. H. Small-x behavior and parton saturation: A QCD model. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 335, n. 1, p. 115–137, 1990. Citado na página 17.
- MUELLER, A. H. Soft gluons in the infinite-momentum wave function and the BFKL pomeron. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 415, n. 2, p. 373–385, 1994. Citado na página 19.
- MUELLER, A. H. Unitarity and the BFKL pomeron. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 437, n. 1, p. 107–126, 1995. Citado na página 19.
- NIKOLAEV, N. N.; ZAKHAROV, B. Colour transparency and scaling properties of nuclear shadowing in deep inelastic scattering. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, Springer, v. 49, n. 4, p. 607–618, 1991. Citado na página 17.
- PATRIGNANI, C. et al. Review of particle physics. 2016. Citado na página 12.
- PESKIN, M. E. **Concepts of Elementary Particle Physics**. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2019. (Oxford Master Series in Particle Physics, Astrophysics, and Cosmology - 26). ISBN 0198812191,9780198812197. Citado na página 7.
- POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? **Physical Review Letters**, APS, v. 30, n. 26, p. 1346, 1973. Citado na página 2.
- REZAEIAN, A. H.; SCHMIDT, I. Impact-parameter dependent color glass condensate dipole model and new combined HERA data. **Physical Review D**, APS, v. 88, n. 7, p. 074016, 2013. Citado 7 vezes nas páginas , 5, 18, 31, 32, 36 e 43.
- RUTHERFORD, E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 21, n. 125, p. 669–688, 1911. Citado na página 1.
- SOYEZ, G. Saturation in high-energy QCD. **Brazilian journal of physics**, SciELO Brasil, v. 36, n. 4a, p. 1194–1203, 2006. Citado na página 4.
- SOYEZ, G. Saturation QCD predictions with heavy quarks at hera. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 655, n. 1-2, p. 32–38, 2007. Citado na página 29.
- WHITLOW, L. et al. Precise measurements of the proton and deuteron structure functions from a global analysis of the SLAC deep inelastic electron scattering cross sections. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 282, n. 3-4, p. 475–482, 1992. Citado na página 12.
- XIANG, W. High-energy scattering in the saturation regime including running coupling and rare fluctuation effects. **Physical Review D**, APS, v. 79, n. 1, p. 014012, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 4, 20 e 22.
- ZWEIG, G. **An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking**. [S.l.], 1964. Citado na página 1.

Apêndices

APÊNDICE A – Código em Python para o calculo de F_2 utilizando o modelo IIM

O código a seguir foi disponibilizado na plataforma GitHub, podendo ser acessado em <https://github.com/KingBreak1/Structure-Function-F2-IIM-Model>. O código pode ser utilizado para os fins que o leitor desejar, porém recomendo fortemente ler a licença presente no repositório.

Nesta primeira parte do código, foi feita a importação das bibliotecas utilizadas. A biblioteca *Numpy* e *Cmath* são as responsáveis pela funções e constantes matemáticas básicas. A biblioteca *Scipy* foi utilizado para importar as funções de Bessel e a rotina de integração numérica *nquad*. A biblioteca *Pandas* é utilizada para realizar a leitura da tabela excel que contem os dados experimentais. As bibliotecas *Matplotlib* e *Locale* fazem o papel de configuração da plotagem dos gráficos. Já a biblioteca *Time* é utilizada para verificar o tempo computacional gastado. Por fim, a biblioteca *Multiprocessing* é a biblioteca responsável pela implementação do paralelismo no código.

```
1 from multiprocessing import Pool
2 import numpy as np
3 from scipy.special import kv
4 import cmath
5 from scipy.integrate import nquad
6 from time import perf_counter
7 import pandas as pd
8 import matplotlib.pyplot as plt
9 import locale
```

Nesta parte do código, foram declaradas todas as variáveis globais. Os valores numéricos utilizados aqui foram retirados da referência (REZAEIAN; SCHMIDT, 2013).

```
1 Q2 = 22 # virtuality
2
3 # constants took from https://arxiv.org/pdf/1307.0825.pdf (and references)
4
5 alpha_elm = 1.0/137.0 # Fine-structure constant
6 Nc = 3.0 # number of colors
7 N0 = 0.7 # initial dipole scattering amplitude
8 sigma0 = (24.064/0.3894) # free parameter
9 lanbda = 0.227 # free parameter
10 x0 = (2.22)*((10)**(-5)) # free parameter
11 gama = 0.719 # saddle point near the saturation line (considering heavy
    quarks)
12 kappa = 9.9 # value from the LO BFKL kernel
13 Q0 = x0**((lanbda/2)) # saturation scale at initial conditions
14
15 alpha = -((N0*gama)**2.0)/(((1.0-N0)**2.0)*(np.log(1.0-N0))) # IIM model
    alpha factor
16 beta = 0.5*((1.0-N0)**(-(1-N0)/(N0*gama))) # IIM model beta factor
```

Nesta terceira parte foi definida uma rotina onde de fato será feito o cálculo da função de estrutura. Nela foi definida como conjunto de entrada os valores da carga e massa dos quarks, a escala de saturação correspondente ao x aplicado e o produto $\kappa\lambda Y$. A integração nesta rotina corresponde à equação (3.1.11), em que a função a ser integrada foi dividida em funções menores. A rotina retorna os parâmetros utilizados e o valor de F_2 associado a estes.

```

1 def calculate(parameter_list): # Calculation of F2
2
3     ie, im, qs, kly = parameter_list # list of parameter for the
4     calculation (charge, mass, qs, kly)
5
6     def Qf2(z):
7         return z*(1-z)*Q2+(im)**2
8
9     def K_0(r, z): # modified bessel function second kind, order 0
10         return (kv(0, r*cmath.sqrt(Qf2(z))))**2
11
12     def K_1(r, z): # modified bessel function second kind, order 1
13         return (kv(1, r*cmath.sqrt(Qf2(z))))**2
14
15     def psi_t(r, z): # squared modulus of the transverse photon
16         wavefunction
17         return (((ie)**2)*(alpha_elm*Nc/((2)*(np.pi)**2))*((z**2)+((1-z)
18         **2))*(Qf2(z))*(K_1(r, z)) + (im**2)*(K_0(r, z))))
19
20     def psi_l(r, z): # squared modulus of the longitudinal photon
21         wavefunction
22         return (((ie)**2)*(alpha_elm*Nc/((2)*(np.pi)**2))*(4)*(Q2)*(z**2)
23         *((1-z)**2)*(K_0(r, z))))
24
25     def Sig_dip1(r): # dipole-target cross section using IIM model for r*
26         qs <= 2
27         return (sigma0)*(N0*((r*qs)/2.0)**(2.0*(gama+((np.log(2.0/(r*qs)))/
28         kly))))
29
30     def Sig_dip2(r): # dipole-target cross section using IIM model for r*
31         qs > 2
32         return (sigma0)*(1.0 - np.exp(-alpha*(np.log(beta*(r*qs))**2))
33
34     def sigmat(r, z): # function to be integrated for the transversal
35         cross section calculation
36         return 2*np.pi*r*psi_t(r, z)*(Sig_dip1(r) if ((r*qs) <= 2) else
37         Sig_dip2(r))
38
39     def signal(r, z): # function to be integrated for the longitudinal
40         cross section calculation
41         return 2*np.pi*r*psi_l(r, z)*(Sig_dip1(r) if ((r*qs) <= 2) else

```



```

    Sig_dip2(r))
31
32     options = {'limit': 1000000}
33
34     sig_t, erro1 = nquad(sigmat, [[0, np.inf], [0, 1]], opts=[options,
35 options]) # Transversal cross section
36
37     sig_l, erro2 = nquad(sigmal, [[0, np.inf], [0, 1]], opts=[options,
38 options]) # Longitudinal cross section
39
40     f2 = (Q2/((4*np.pi**2)*alpha_elm))*(sig_t + sig_l) # structure
    function F2
41
42     return ((ie, im, qs, kly), f2)

```

Nesta quarta parte código começa-se com a leitura da tabela Excel que contém todos os dados numéricos. Foi separado em listas os valores de x , σ e σ_{erro} que estão entrelaçados ao valor de Q^2 selecionado no começo do código. Em seguida define-se os valores de carga e massa dos quarks, os valores teóricos de x (estes são arbitrários, a única condição é que sejam menores que 10^{-2}) e os valores da escala de saturação Q_s e do produto $\kappa\lambda Y$.

```

1 def main():
2     start = perf_counter()
3     print('>>> Starting calculation')
4
5
6     df = pd.read_excel('experimental_data.xlsx', header=None, index_col=
7 False, names=['Q2', 'x', 'sigma', 'erro']) # reads the excel document
8 labeled "experimental_data.xlsx" that contains all the experimental
9 information for x < 10^-2
10
11
12     XA = df.loc[df['Q2'] == Q2, 'x'].to_list() # puts in list the
13 experimental values of x that correspond to the selected virtuality
14
15     SA = df.loc[df['Q2'] == Q2, 'sigma'].to_list() # puts in list the
16 experimental values of the total corss section that correspond to the
17 selected virtuality
18
19     EA = df.loc[df['Q2'] == Q2, 'erro'].to_list() # puts in list the
20 values of the experimental error that correspond to the selected
21 virtuality
22
23     # constants took from https://arxiv.org/pdf/1307.0825.pdf (and
24 references)
25
26     light_quarks_m = [(10**(-2)), (10**(-2)), (10**(-2))] # light-quark
27 masses (up, down, strange, respectively)
28
29     light_quarks_e = [2/3, -1/3, -1/3] # light-quark charges (up, down,
30 strange, respectively)

```

```

17     charm_quarks_m = [1.27] # charm quark mass
18     charm_quarks_e = [2/3] # charm quark charge
19
20     lower_limit_Y = -np.log(10**-2)
21     upper_limit_Y1 = -np.log(10**-6)
22     step_Y = (upper_limit_Y1 - lower_limit_Y)/10
23     upper_limit_Y = -np.log(10**-6) + step_Y
24
25     values_x = np.exp(-np.arange(lower_limit_Y, upper_limit_Y, step_Y)) #
values of Bjorken x
26     list_x = list(values_x) # list of Bjorken x
27     quantity = len(list_x) # lenght of list_x
28
29     light_quarks_qs = [] # values of saturation scale (light-quarks)
30     light_quarks_kly = [] # values of kappa*lanbda*rapidity (light-quarks)
31     for x in values_x:
32         qs_light = np.sqrt(Q0*Q0*(np.exp(lanbda*(np.log(1.0/x)))))
33         light_quarks_qs.append(qs_light)
34
35         kly_light = kappa*lanbda*(np.log(1.0/x))
36         light_quarks_kly.append(kly_light)
37
38     XP = [] # values of Bjornken x for heavy quarks (charm quark)
39     for x in values_x:
40         y = x*(1+(4*(charm_quarks_m[0])**2)/Q2)
41         XP.append(y)
42
43     charm_quarks_qs = [] # values of saturation scale using XP (charm
charm
quark)
44     charm_quarks_kly = [] # values of kappa*lanbda*rapidity using XP (charm
charm
quark)
45     for n in range(len(XP)):
46         qs_charm = np.sqrt(Q0*Q0*(np.exp(lanbda*(np.log(1.0/XP[n])))))
47         charm_quarks_qs.append(qs_charm)
48
49         kly_charm = kappa*lanbda*(np.log(1.0/XP[n]))
50         charm_quarks_kly.append(kly_charm)

```

Em seguida, definimos um dicionário que associa a cada tipo de quark os valores de parâmetros que correspondem a estes. Devido à possibilidade de repetição de conjunto de parâmetros, foi implementado uma condição para que apenas conjuntos distintos fossem selecionados. Em seguida, estes parâmetros são importados para dentro da rotina *calculate*, que foi paralelizada. Sendo assim, a rotina irá rodar em todos os núcleos presentes no processador do computador simultaneamente. Com os resultados em mãos, são verificados os parâmetros retornados com os parâmetros originais, caso haja repetição, será repetido o valor de F_2 . Desta forma evita-se fazer o mesmo cálculo repetidas vezes.

```

1      # Dictionary which the keys are the quarks types and the values are the
      parameters associated to those quarks
2      quark_types = {'Light': [light_quarks_e, light_quarks_m,
      light_quarks_qs, light_quarks_kly], 'Charm': [charm_quarks_e,
      charm_quarks_m, charm_quarks_qs, charm_quarks_kly]}
3
4      parameters = {}
5      for type, value in quark_types.items(): # run through the quark types
      and it's parameter values
6          e = value[0] # filter values of charge
7          m = value[1] # filter values of mass
8          qs = value[2] # filter values of qs
9          kly = value[3] # filter values of kly
10
11         for e_m in zip(e, m):
12             for qs_kly in zip(qs, kly):
13                 key_results = (e_m[0], e_m[1], qs_kly[0], qs_kly[1])
14                 if (key_results not in parameters.keys()): # filter only
      distinct parameter sets
15                     parameters[key_results] = [e_m[0], e_m[1], qs_kly[0],
      qs_kly[1]]
16
17     calc_results = []
18     with Pool() as pool:
19         calc_results = pool.map(calculate, parameters.values()) # do the
      calculation with parallelism
20
21     indexed_results = {}
22     all_results = []
23     for nr, tr in enumerate(calc_results):
24         indexed_results[tr[0]] = tr[1] # select the result of F2 based on
      the parameters
25     for type, value in quark_types.items():
26         e = value[0]
27         m = value[1]
28         qs = value[2]
29         kly = value[3]
30
31         for e_m in zip(e, m):
32             for qs_kly in zip(qs, kly):
33                 key_results = (e_m[0], e_m[1], qs_kly[0], qs_kly[1])
34                 all_results.append(indexed_results[key_results]) # runs
      through all parameters sets (even the repeated ones) and puts the values
      of F2 corresponding to those parameters in a list (if there is repeated
      parameters sets, the values of F2 corresponding to those will also be
      repeated)
35

```

```

36
37     splited_all_results = np.array_split(all_results, len(all_results)/
quantity) # splits the list of all values of F2 between the quark
flavours
38
39     list_F2 = [up + down + strange + charm for up, down, strange, charm in
zip(splited_all_results[0], splited_all_results[1], splited_all_results
[2], splited_all_results[3])] # total F2 list (theoretical)

```

Por fim, temos a plotagem dos resultados e dos pontos experimentais. Os dados experimentais utilizados neste código estão presentes em (ABT et al., 2017).

```

1     list_x1 = [] # values of Bjorken x (experimental)
2     list_F21 = [] # total structure function (experimental)
3     list_err1 = [] # values of the experimental error
4
5     plt.figure()
6
7     for j in range(len(XA)):
8
9         list_x1.append(eval(XA[j]))
10
11         sig1 = (SA[j]) * (1/389) # CONVERTS FROM MICROBARN TO GeV^-2
12         F21 = (Q2 / (4 * np.pi ** 2 * alpha_elm)) * sig1
13         list_F21.append(F21)
14
15         err1 = (EA[j]) * (1/389) # CONVERTS FROM MICROBARN TO GeV^-2
16         F2_err1 = (Q2 / (4 * np.pi ** 2 * alpha_elm)) * err1
17         list_err1.append(F2_err1)
18
19     locale.setlocale(locale.LC_NUMERIC, "de_DE")
20     plt.rcParams()
21     plt.rcParams['axes.formatter.use_locale'] = True
22     plt.plot(list_x, list_F2)
23     plt.plot(list_x1, list_F21, '.', color='black')
24     plt.errorbar(list_x1, list_F21, yerr=list_err1, fmt='|k')
25     plt.xscale('log')
26     plt.title(locale.format_string(
27         '$Q^2=% 1.3f \; \mathrm{GeV}^2$', Q2), fontsize=14)
28     plt.ylabel('$F_2$', fontsize=14)
29     plt.xlabel('$x$', fontsize=14)
30     plt.grid(linestyle='--')
31
32     print('>>> Finishing, total time spent: %s' % ((perf_counter() - start)
33 ))
34
35     plt.show()

```

```
36
37 if __name__ == "__main__":
38     main()
```