

Trabajo Práctico N°2  
Resolución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales  
Departamento de Computación - FIUBA  
Análisis Numérico (75.12/95.04)

Grupo 1

Camila Bojman - 101055 - camiboj@gmail.com  
Cecilia Hortas - 100687 - ceci.hortas@gmail.com  
Milena Marchese - 100962 - mile.marchese@gmail.com  
Rosario Szuplat - 100798 - szuplat.rosario@gmail.com

2do Cuatrimestre de 2018

Introducción:

Se presenta un modelo matemático que muestra la dinámica de transmisión del dengue, con el objetivo de estudiar el comportamiento de las poblaciones del *Aedes aegypti* y de las personas afectadas. Este modelo puede ser tenido en cuenta por los programas de vigilancia y control a la hora de tomar decisiones.

Temática a tratar:

En el presente informe se resolverá un sistema de ocho ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden utilizando los métodos de Euler y Runge-Kutta de 2do y 4to orden y la rutina “*lsode*” provista por *Octave*. Las mismas provienen del *Paper* “*Modelo matemático para el control de la transmisión del Dengue*”<sup>1</sup> y modelizan las variaciones en el número promedio de personas susceptibles a contraer la enfermedad, de personas infecciosas, de personas con inmunidad a un serotipo, de mosquitos maduros no portadores del virus, de mosquitos maduros portadores del virus de huevos viables, de larvas viables y de pupas viables en un tiempo  $t$ , bajo las condiciones de cuatro escenarios diferentes: bajo condiciones iniciales hipotéticas y bajo las dadas por la estimación de parámetros en base a datos obtenidos por el Departamento Nacional de Estadísticas (DANE), la Organización Mundial de la Salud (OMS) y demás bibliografía. También, se pretende comparar los resultados obtenidos en la realización de este Trabajo Práctico con los del *Paper* tenido en cuenta y evaluar la conveniencia de los cuatro métodos utilizados para la resolución.

Las palabras claves a tener en cuenta durante todo el desarrollo del Trabajo Práctico son:

- Paso - Condiciones iniciales - Variables

---

<sup>1</sup> Rev. salud pública. 14 (3): 512-523, 2012 - Luis E. López, Aníbal Muñoz-Loaiza, Gerard Olivar-Tost y José Betancourt-Bethencourt

## Objetivo:

Implementar en Octave las funciones que permitan obtener distintas soluciones aproximadas para el SEDO de 8 ecuaciones diferenciales, evaluando la conveniencia del uso de los 4 métodos a utilizar.

## Supuestos del modelo:

- En la población humana, una persona puede pasar por todos o algunos de los siguientes estados: susceptible (persona sana, no posee la enfermedad), infeccioso (persona que tiene la enfermedad y puede transmitir el virus a mosquitos no portadores) e inmune (persona que se ha recuperado de la enfermedad y tiene inmunidad permanente contra ese serotipo). No se tiene en cuenta la reinfección a otro serotipo.
- En la población del mosquito se distinguen dos grupos: los mosquitos maduros (portadores y no portadores del virus), y los mosquitos inmaduros (huevos, larvas y pupas).
- Una persona susceptible pasa al estado infeccioso al ser picada por un mosquito maduro portador; mientras que un mosquito no portador (mosquito sano) pasa a ser mosquito portador al picar a una persona infecciosa.

## El modelo:

**P(t):** el tamaño de cierta población en un cierto tiempo t.

**P(t-τ):** tamaño de dicha población en un tiempo τ antes de ocurrir el tiempo t.

$\frac{dP(t)}{dt}$  : variación o el cambio de dicha población en el tiempo t.

**τ:** retardo de tiempo constante.

A continuación se presentan las 8 ecuaciones diferenciales:

1. Variación o el cambio del número promedio de personas susceptibles a la enfermedad en el tiempo:

$$\frac{dx_1}{dt} = \eta N - \beta_y(1 - u_1) \frac{y_2}{y_1 + y_2} x_1 - \mu x_1 \quad (1)$$

**ηN:** número promedio de personas que ingresan a la población susceptible.

**μx<sub>1</sub>:** número de personas susceptibles que mueren por causas naturales.

2. La ecuación para describir el cambio del número promedio de personas infectadas en el tiempo es:

$$\frac{dx_2}{dt} = \beta_y(1 - u_1) \frac{y_2}{y_1 + y_2} x_1 - \theta x_2(t - \tau) - \mu x_2 \quad (2)$$

$\theta x_2(t - \tau)$ : número de personas infecciosas que se recuperaron de la enfermedad en un tiempo  $\tau$ .

$\mu x_2$ : número de personas infecciosas que mueren por causas naturales (o, a causa de la enfermedad).

3. La ecuación para describir el cambio del número promedio de personas recuperadas en el tiempo es:

$$\frac{dx_3}{dt} = \theta x_2(t - \tau) - \mu x_3 \quad (3)$$

$\mu x_3$ : número de personas recuperadas que mueren por causas naturales.

4. La ecuación que describe el cambio del número promedio de mosquitos maduros no portadores en el tiempo es:

$$\frac{dy_1}{dt} = \omega_3 z_3(t - T_3) - \beta_x \frac{x_2}{N} y_1 - (\delta + u_2) y_1 \quad (4)$$

$\omega_3 z_3(t - T_3)$ : número promedio de pupas que pasaron a ser mosquitos maduros no portadores después de un tiempo  $T_3$ .

$\beta_x \frac{x_2}{N} y_1$ : número promedio de mosquitos maduros no portadores que adquirieron el virus.

$(\delta + u_2) y_1$ : número promedio de mosquitos maduros no portadores que mueren por causas naturales o por la aplicación del control.

5. Número promedio de mosquitos maduros portadores en el tiempo es:

$$\frac{dy_2}{dt} = \beta_x \frac{x_2}{N} y_1 - (\delta + u_2) y_2 \quad (5)$$

$(\delta + u_2) y_2$ : número promedio de mosquitos maduros portadores que mueren por causas naturales o por la aplicación del control.

6. Número promedio de huevos viables en el tiempo es:

$$\frac{dz_1}{dt} = \phi(y_1 + y_2) - \omega_1 z_1(t - T_3) - (\varepsilon_1 + u_3) z_1 \quad (6)$$

$\phi(y_1 + y_2)$ : número promedio de huevos ovopositados por los mosquitos maduros.

$\omega_1 z_1(t - T_3)$ : los huevos que pasaron al estado larval en un tiempo  $T_3$ .

$(\varepsilon_1 + u_3) z_1$ : número de huevos que no se desarrollan por causas naturales o por aplicación del control.

7. La ecuación para describir el número promedio de larvas viables en el tiempo es:

$$\frac{dz_2}{dt} = \omega_1 z_1(t - T_3) - \omega_2 z_2(t - T_2) - (\varepsilon_2 + u_3) z_2 \quad (7)$$

$\omega_2 z_2(t - T_2)$ : número promedio de larvas que pasaron a estado de pupa después de un tiempo  $T_2$ .

$(\varepsilon_2 + u_3) z_2$ : número de larvas que mueren por causas naturales o por aplicación del control.

8. Y la ecuación para describir el número promedio de pupas en el tiempo es:

$$\frac{dz_3}{dt} = \omega_2 z_2(t - T_2) - \omega_3 z_3(t - T_3) - (\varepsilon_3 + u_3) z_3 \quad (8)$$

$\omega_3 z_3(t - T_3)$ : como se describió anteriormente.

$(\varepsilon_3 + u_3) z_3$ : el número de pupas que mueren por causas naturales o por aplicación del control.

Observar que  $x_1 + x_2 + x_3 = N$  es la población humana total la cual es constante si  $\eta = \mu$ , y además, los parámetros  $\tau, T_1, T_2, T_3, u_1, u_2$  y  $u_3$  son positivos y  $\eta, \beta_y, \beta_x, \theta, \mu, \delta, \phi, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  están entre 0 y 1.

### Desarrollo:

#### “Isode” del lenguaje Octave:

Es una función que provee el programa a fin de resolver directamente el sistema de ecuaciones. La solución que provee es tomada como exacta.

#### Método de Euler:

Consiste en dividir los intervalos que va de  $x_0$  a  $x_f$  en  $n$  subintervalos de ancho  $h$  (elegido por el grupo).

De esta manera se obtiene un conjunto discreto de  $n+1$  puntos:  $x_0, x_1, \dots, x_n$  del intervalo de interés  $[x_0, x_f]$ . Para cualquiera de estos puntos se cumple que:

$$x_i = x_0 + ih \quad 0 \leq i \leq n.$$

La condición inicial  $y(x_0) = y_0$ , representa el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  por donde pasa la curva solución de la ecuación del planteamiento inicial, la cual se denotará como  $F(x) = y$ . Ya teniendo el punto  $P_0$  se puede evaluar la primera derivada de  $F(x)$  en ese punto por lo tanto:

$$F'(x) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{P_0} = f(x_0, y_0)$$

Con esta información se traza una recta, aquella que pasa por  $P_0$  y de pendiente  $f(x_0, y_0)$ . Esta recta aproxima  $F(x)$  en una vecindad de  $x_0$ . tomándose la recta como reemplazo de  $F(x)$  y localizándose en ella (la recta) el valor de  $y$  correspondiente a  $x_1$ . Entonces, puede deducirse:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

Se resuelve para  $y_1$ :

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Es evidente que la ordenada  $y_1$  calculada de esta manera no es igual a  $F(x_1)$ , pues se presenta un error. Sin embargo, el valor  $y_1$  sirve para que se aproxime  $F'(x)$  en el punto  $P=(x_1, y_1)$  y repetir el procedimiento anterior a fin de generar la sucesión de aproximaciones siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

### Método de Runge-Kutta de orden 2:

Sean:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

junto con la condición de que el valor inicial de  $f$  sea

$$(t_0, y_0) \in \Omega.$$

Entonces el método RK tiene la siguiente expresión:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

con  $s = 2$ , en este caso, donde  $h$  es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, el incremento  $\Delta t_n$  entre los sucesivos puntos  $t_n$  y  $t_{n+1}$ . Los coeficientes  $k_i$  son términos de aproximación intermedios, evaluados en  $f$  de manera local

$$k_i = f \left( t_n + h c_i, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad i = 1, \dots, s.$$

con  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  coeficientes propios del esquema numérico elegido, dependiente de la regla de cuadratura utilizada. Los esquemas Runge-Kutta pueden ser explícitos o implícitos dependiendo de las constantes  $a_{ij}$  del esquema. Si esta matriz es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal principal iguales a cero; es decir,  $a_{ij} = 0$  para  $j = i, \dots, s$ , los esquemas son explícitos.

#### Método de Runge-Kutta de orden 4:

Definiendo un problema de valor inicial como:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Entonces el método RK de orden 4 para este problema está dado por la siguiente ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde

$$\begin{cases} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_2 h\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h) \end{cases}$$

Así, el siguiente valor ( $y_{n+1}$ ) es determinado por el presente valor ( $y_n$ ) más el producto del tamaño del intervalo ( $h$ ) por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes, donde  $k_1$  es la pendiente al principio del intervalo,  $k_2$  es la pendiente en el

punto medio del intervalo, usando  $k_1$  para determinar el valor de  $y$  en el punto  $x_n + h/2$  usando el método de Euler.  $k_3$  es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando  $k_2$  para determinar el valor de  $y$ ;  $k_4$  es la pendiente al final del intervalo, con el valor de  $y$  determinado por  $k_3$ . Promediando las cuatro pendientes, se le asigna mayor peso a las pendientes en el punto medio:

$$\text{pendiente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

Con respecto a la resolución, en primer lugar, se presentan los cuatro sistemas de ecuaciones diferenciales correspondientes a cada escenario modelizado a partir del *Paper* citado anteriormente.

En todos los casos se utiliza la siguiente nomenclatura para las variables:

- $x_1(t)$ =Número promedio de personas susceptibles en un tiempo  $t$ .
- $x_2(t)$ =Número promedio de personas infecciosas en un tiempo  $t$ .
- $x_3(t)$ =Número promedio de personas con inmunidad a un serotipo en un tiempo  $t$ .
- $y_1(t)$ =Número promedio de mosquitos maduros no portadores del virus en un tiempo  $t$ .
- $y_2(t)$ =Número promedio de mosquitos maduros portadores del virus en un tiempo  $t$ .
- $z_1(t)$ =Número promedio de huevos viables en un tiempo  $t$ .
- $z_2(t)$ =Número promedio de larvas viables en un tiempo  $t$ .
- $z_3(t)$ =Número promedio de pupas viables en un tiempo  $t$ .

El primer escenario a estudiar presenta parámetros tomados de forma hipotética y se supone que no se realizan controles a la población humana (medidas preventivas) ni a mosquitos maduros (insecticida) ni a mosquitos inmaduros (Larvicidas ó medidas preventivas).

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,004(x_1 + x_2 + x_3) - 0,1(1 - 0)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,0035x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,1(1 - 0)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,02x_2(t - 10) - 0,0035x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,02x_2(t - 10) - 0,0035x_3$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 0,05z_3(t - 3) - 0,1\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,05 + 0)y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 0,1\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,05 + 0)y_2$$

$$\frac{dz_1}{dt} = 0,5(y_1 + y_2) - 0,05z_1(t - 3) - (0,123 + 0)z_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 0,05z_1(t - 3) - 0,05z_2(t - 7) - (0,123 + 0)z_2$$

$$\frac{dz_3}{dt} = 0,05z_2(t - 7) - 0,05z_3(t - 3) - (0,123 + 0)z_3$$

*(1) Ecuaciones que describen el escenario I*

En segundo lugar, se mantienen los parámetros hipotéticos pero se realizan los controles, con valores de efectividad también hipotéticos.

Para los escenarios III y IV se utilizan parámetros basados en datos provistos por las organizaciones de la salud antes mencionadas. Al igual que con I y II, el III no presenta controles mientras que el IV sí, con valores de efectividad provistos por dichas organizaciones.



$$\frac{dx_1}{dt} = 0,004(x_1 + x_2 + x_3) - 0,1(1 - 0)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,0035x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,1(1 - 0)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,02x_2(t - 10) - 0,0035x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,02x_2(t - 10) - 0,0035x_3$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 0,05z_3(t - 3) - 0,1\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,05 + 0)y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 0,1\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,05 + 0)y_2$$

$$\frac{dz_1}{dt} = 0,5(y_1 + y_2) - 0,05z_1(t - 3) - (0,123 + 0)z_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 0,05z_1(t - 3) - 0,05z_2(t - 7) - (0,123 + 0)z_2$$

$$\frac{dz_3}{dt} = 0,05z_2(t - 7) - 0,05z_3(t - 3) - (0,123 + 0)z_3$$

(2) Ecuaciones que describen el escenario II

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,004(x_1 + x_2 + x_3) - 0,75(1 - 0)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,00042x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,75(1 - 0)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,1428x_2(t - 7) - 0,00042x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,1428x_2(t - 7) - 0,00042x_3$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 0,2z_3(t - 3) - 0,75\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,143 + 0)y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 0,75\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,143 + 0)y_2$$

$$\frac{dz_1}{dt} = 0,49(y_1 + y_2) - 0,2z_1(t - 3) - (0,143 + 0)z_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 0,2z_1(t - 3) - 0,2z_2(t - 7) - (0,143 + 0)z_2$$

$$\frac{dz_3}{dt} = 0,2z_2(t - 7) - 0,2z_3(t - 3) - (0,143 + 0)z_3$$

(3) Ecuaciones que describen el escenario III

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,004(x_1 + x_2 + x_3) - 0,75(1 - 0,25)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,00042x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,75(1 - 0,25)\frac{y_2}{y_1 + y_2}x_1 - 0,1428x_2(t - 7) - 0,00042x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,1428x_2(t - 7) - 0,00042x_3$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 0,2z_3(t - 3) - 0,75\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,143 + 0,05)y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 0,75\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}y_1 - (0,143 + 0,05)y_2$$

$$\frac{dz_1}{dt} = 0,49(y_1 + y_2) - 0,2z_1(t - 3) - (0,143 + 0,1)z_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 0,2z_1(t - 3) - 0,2z_2(t - 7) - (0,143 + 0,1)z_2$$

$$\frac{dz_3}{dt} = 0,2z_2(t - 7) - 0,2z_3(t - 3) - (0,143 + 0,1)z_3$$

#### (4) Ecuaciones que describen el escenario IV

Luego, se procede a resolver cada sistema en *Octave* mediante los cuatro métodos pedidos. Para esto, fue necesario realizar un archivo con el sistema de ecuaciones diferenciales para cada escenario; implementar una función, *condiciones\_iniciales()*, que genere un vector de condiciones iniciales (obtenidas de los gráficos del *Paper*), en el cual cada componente corresponde a una variable (las mismas no varían según el escenario que se tenga en cuenta por lo que basta con una única); y una, *vector\_tiempos(t0,tf,h)*, cuyo propósito es crear un vector cuyas componentes sean cada uno de los tiempos para los que se obtendrá un valor de cada variable. Por lo tanto, el mismo comienza en el *t0* y finaliza en el *tf* indicados, habiendo una distancia entre cada valor de tiempos de tamaño *h*.

Luego, desde un archivo con la función principal (*tp2()*) se determinan estos parámetros necesarios para la implementación de todos los métodos: se toma *t0* = 0, *tf* = 60 y *h* = 0,01. Los valores inicial y final fueron provistos por el *Paper* y cada unidad corresponde a un mes mientras que el valor del paso fue elegido por el grupo teniendo en cuenta que mientras más pequeño, menor es el error pero sin elegir uno demasiado chico a fin de que el programa no sea tan pesado. Una vez determinados, se crearon los dos vectores explicados en el párrafo anterior.

De esta manera, se obtienen las condiciones necesarias para obtener los resultados exactos mediante el comando *lsode*: se guardan en cuatro matrices los resultados obtenidos para cada escenario.

Luego, se obtienen los resultados por los métodos iterativos pedidos: *Euler* y *Runge-Kutta* de órdenes 2 y 4. En todos los casos se pasa a las funciones implementadas para cada método el archivo en el que se encuentran los sistemas de ecuaciones del escenario necesario, el vector de tiempos, el de condiciones iniciales y el paso. Cada una, a su vez, devuelve una matriz con los resultados. En la misma, las columnas representan las variables en el siguiente orden:  $x_1 - x_2 - x_3 - y_1 - y_2 - z_1 - z_2 - z_3$  mientras que cada fila corresponde a un tiempo provisto por el vector de tiempos generado. Fue necesario llamar a cada función cuatro veces, una por cada escenario.

Finalmente, los resultados se grafican a fin de obtener una mejor visualización de los resultados, los mismos se presentan en el siguiente inciso.

### Resultados:

En un primer lugar se procede a analizar la diferencia de los distintos resultados arrojados con el método considerado como exacto (Isode). Para el análisis se tomó la decisión de obtener el error absoluto entre cada variable ( $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3$ ) del método a analizar y Isode. Se expone únicamente el error máximo entre todos ellos para cada escenario para no entorpecer el análisis con numerosos resultados. De esta manera queremos analizar cuál es la diferencia entre los distintos métodos y cuál de todos ellos es el que arroja resultados más próximos al considerado exacto.

#### Euler

Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4
$9.8677 \times 10^{-4}$	$2.2355 \times 10^{-4}$	0.0026091	0.0015993

#### Runge Kutta Orden 2

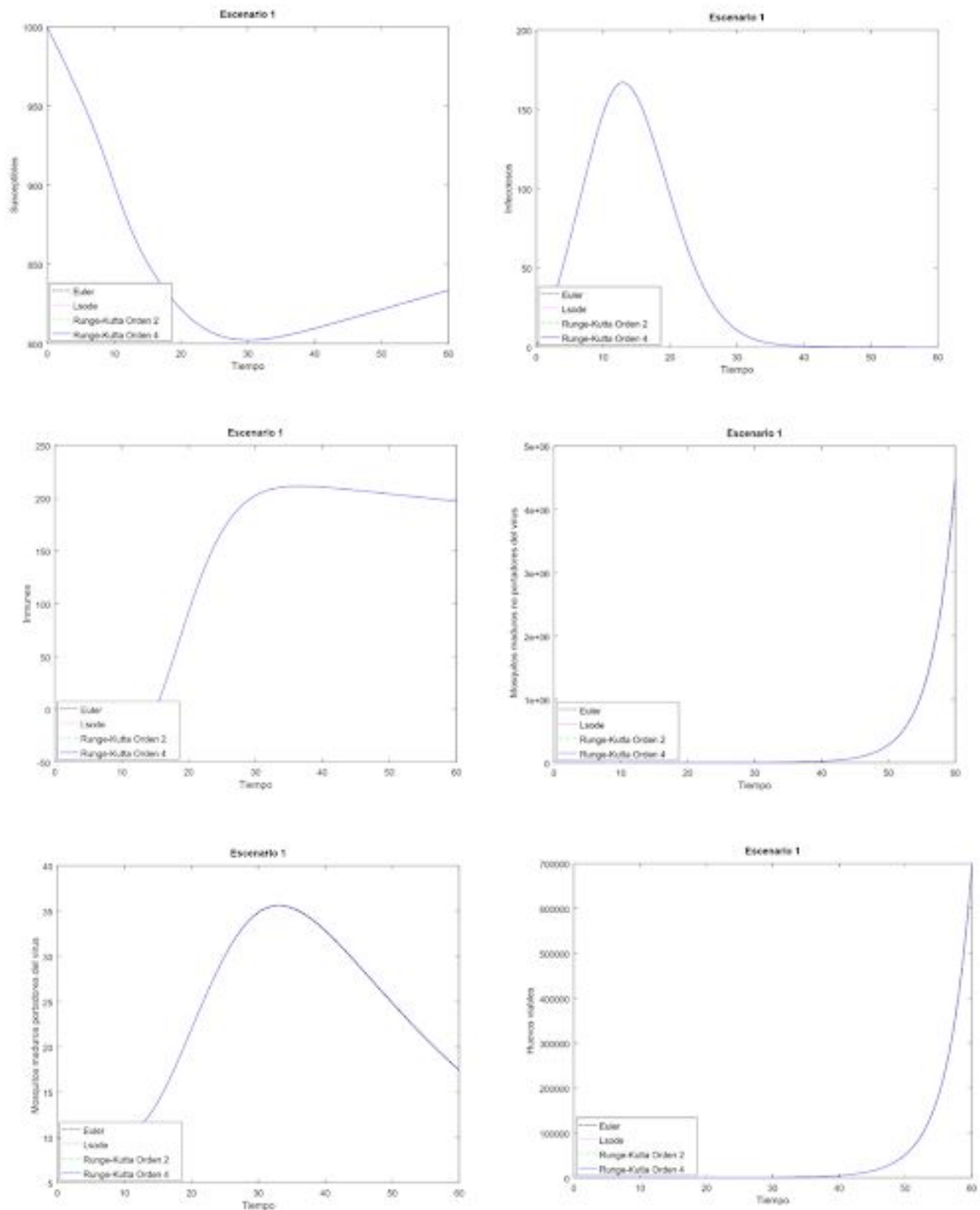
Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4
$8.3844 \times 10^{-7}$	$7.0747 \times 10^{-8}$	$8.4033 \times 10^{-6}$	$5.2613 \times 10^{-6}$

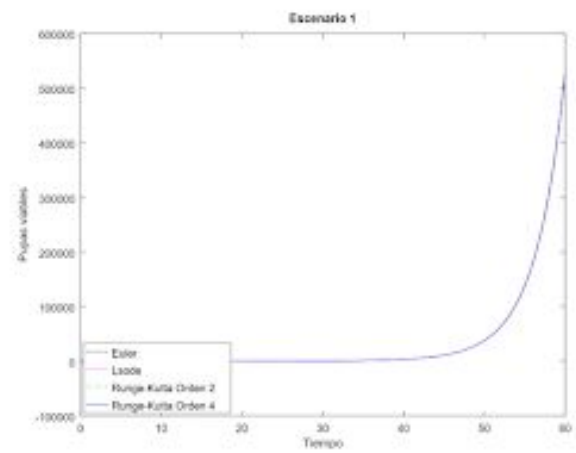
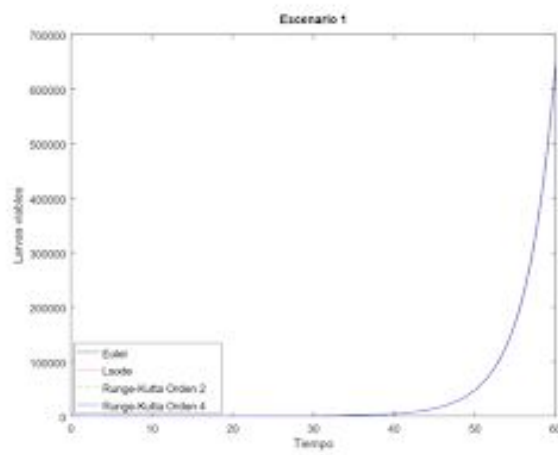
#### Runge Kutta Orden 4

Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4
$1.3876 \times 10^{-7}$	$1.1319 \times 10^{-8}$	$1.6304 \times 10^{-7}$	$1.0790 \times 10^{-7}$

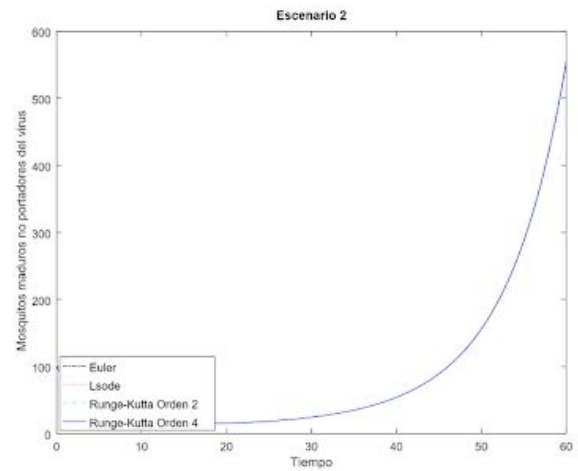
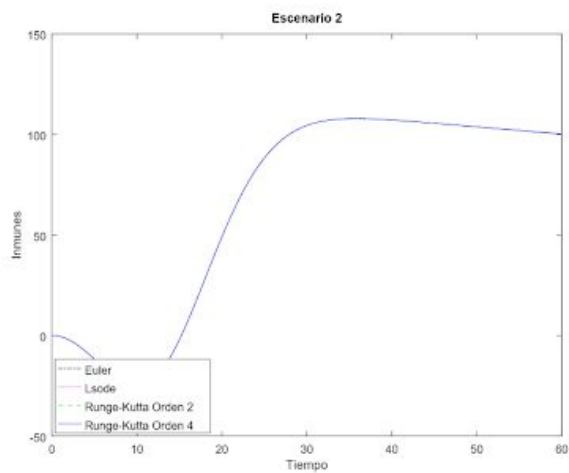
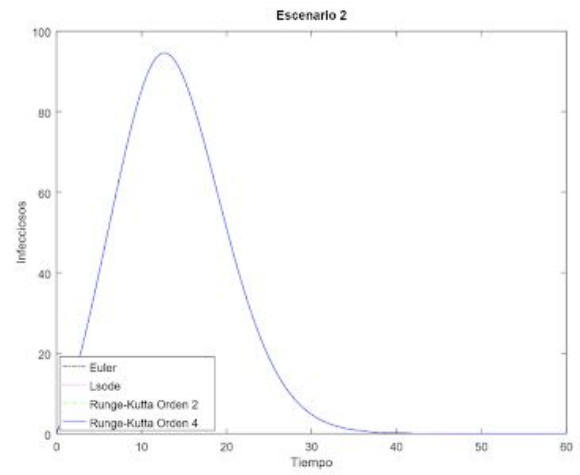
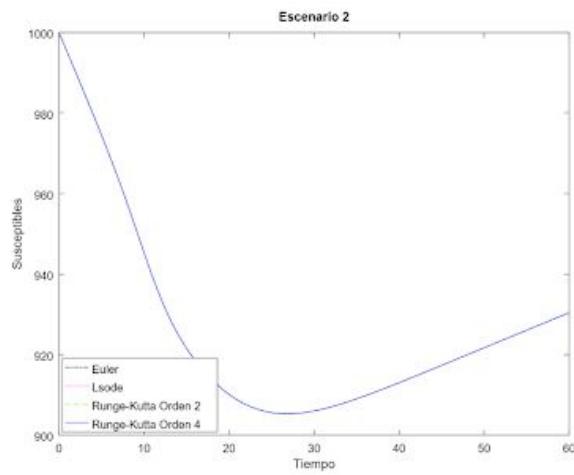
A continuación, se presentan los gráficos en los que se plasman los resultados obtenidos a fin de obtener una correcta visualización de los mismos y poder compararlos luego con los del *Paper* y los métodos utilizados entre sí. Para cada escenario estudiado se realizaron ocho gráficos, uno para cada variable. En cada uno de ellos se encuentran cuatro curvas, una para cada método utilizado. Como los resultados obtenidos fueron muy similares en la práctica se observan a primera vista como una sola curva.

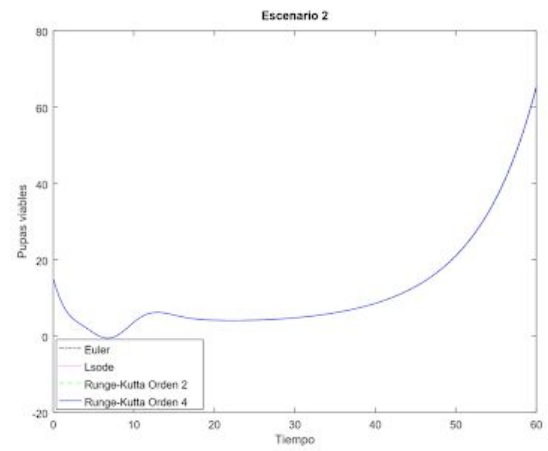
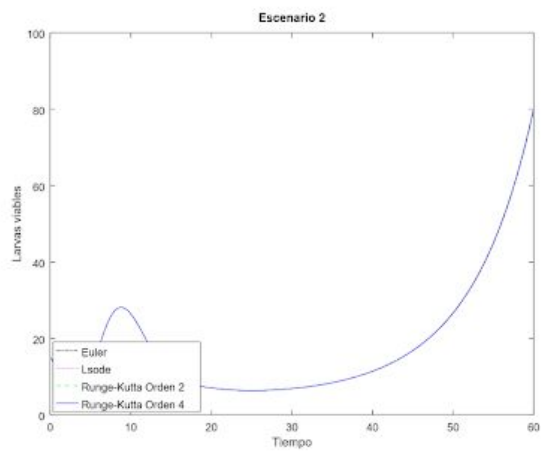
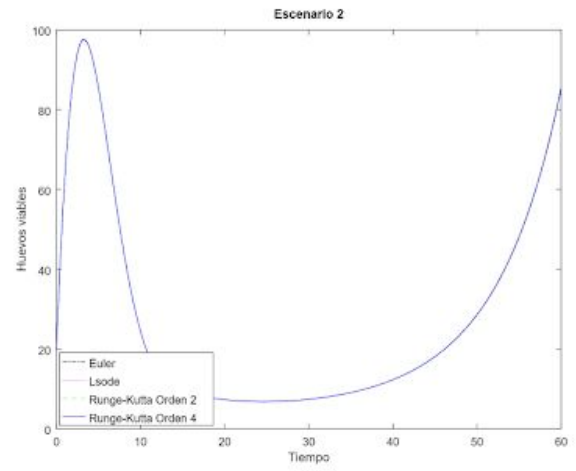
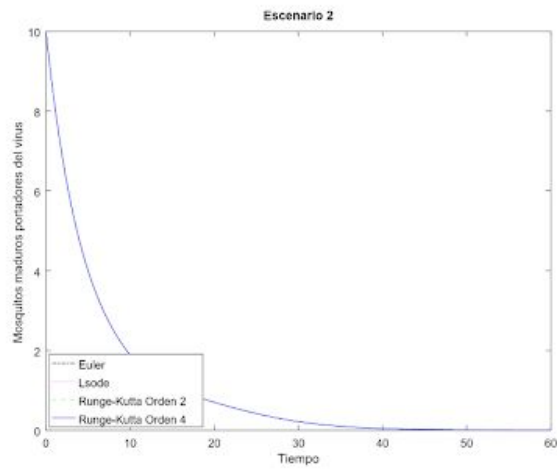
Para el primer escenario:



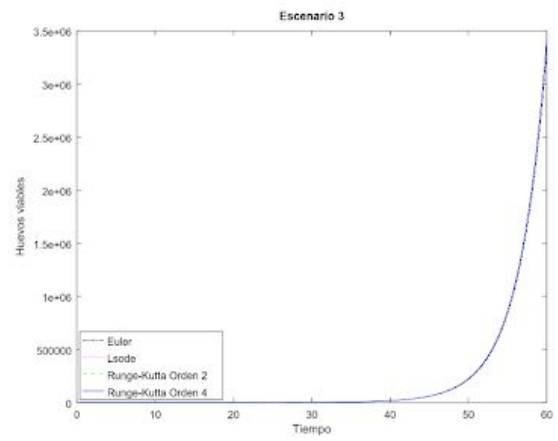
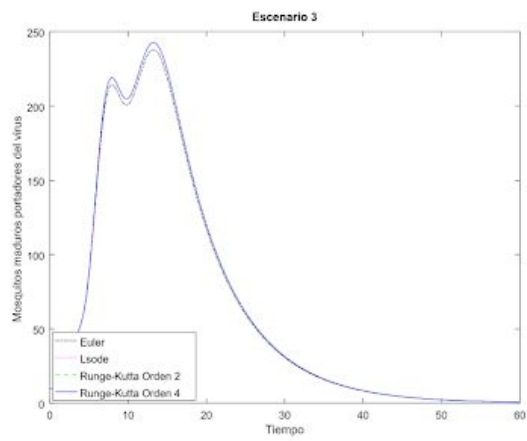
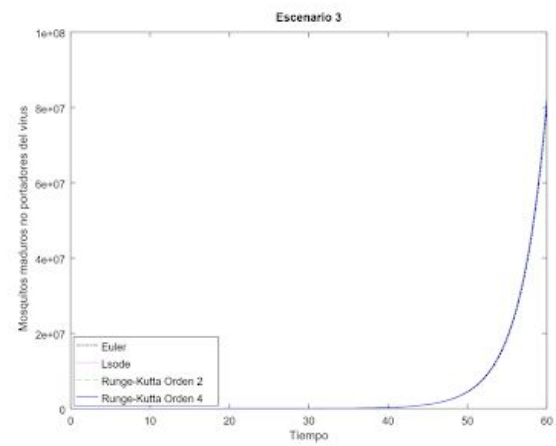
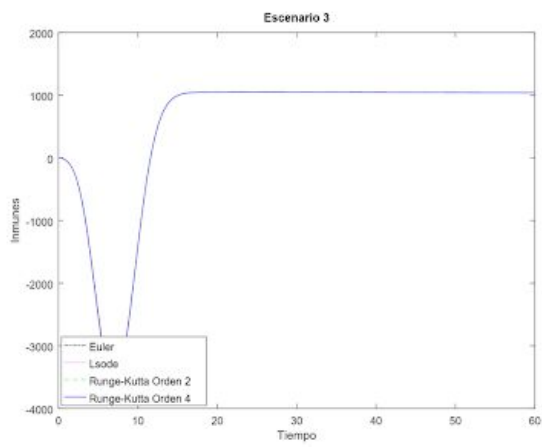
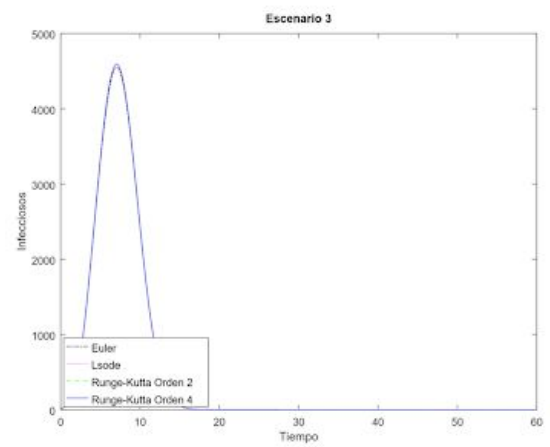
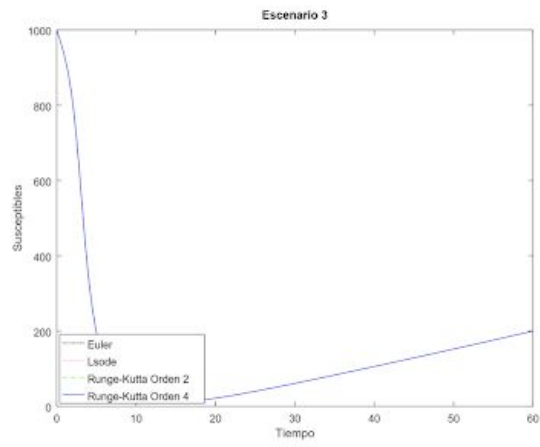


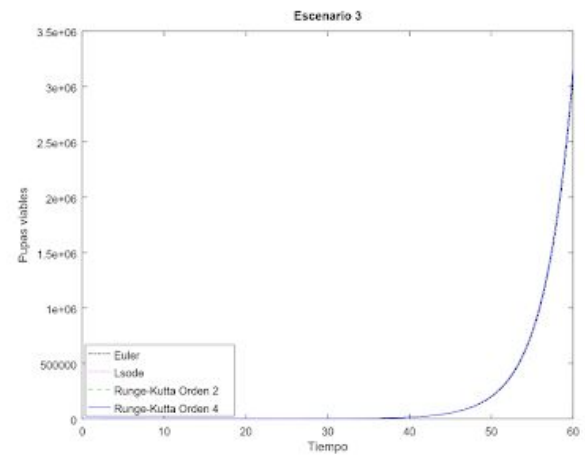
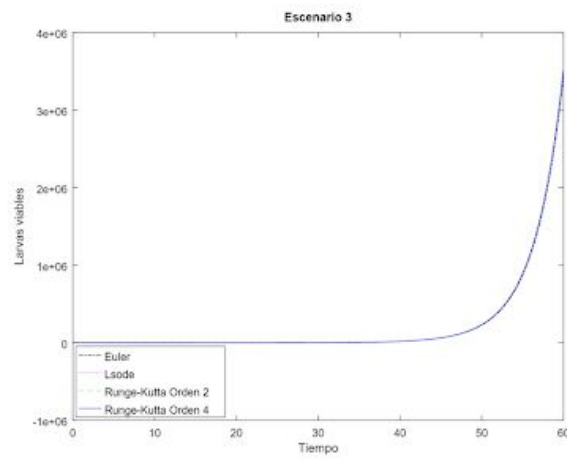
Para el segundo escenario:





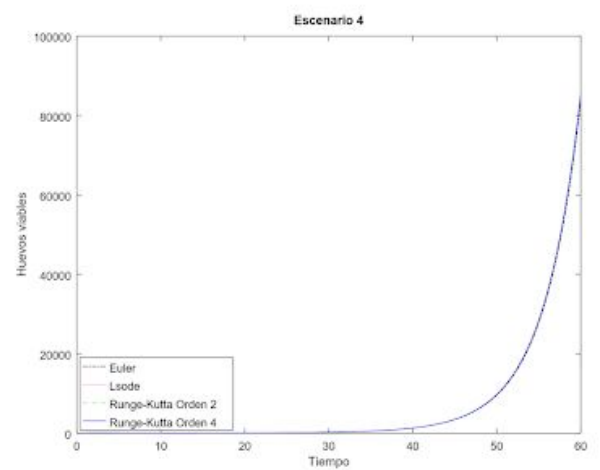
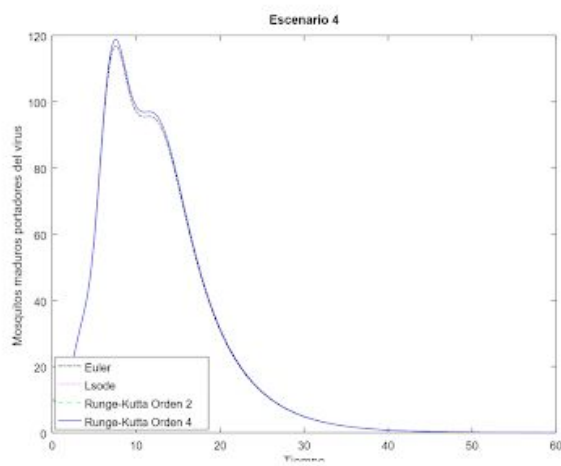
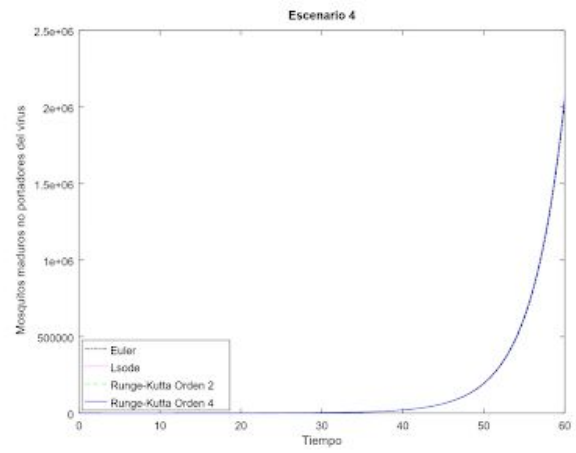
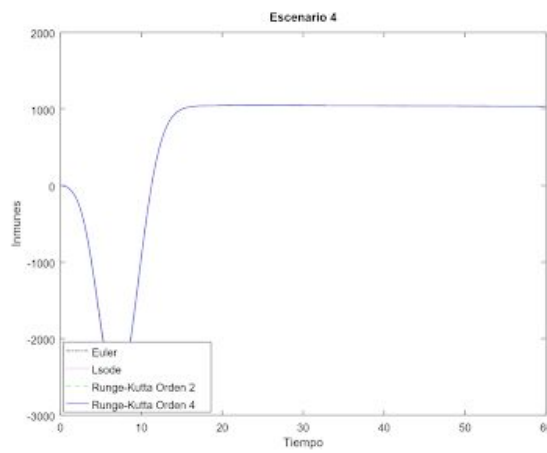
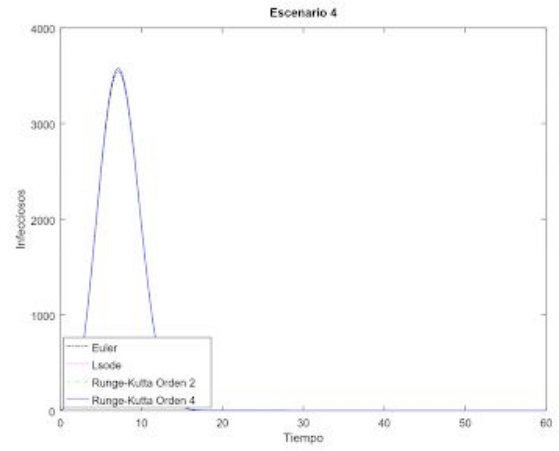
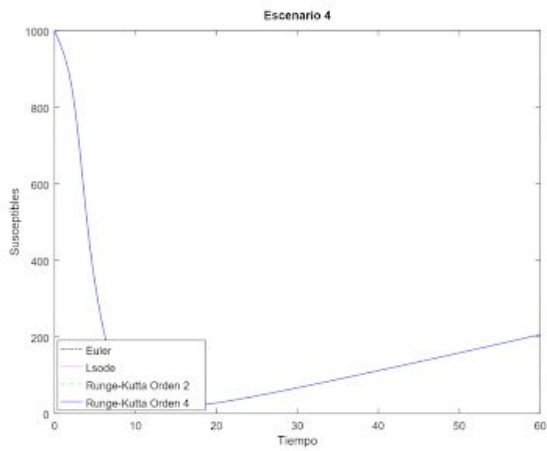
Para el tercer escenario:

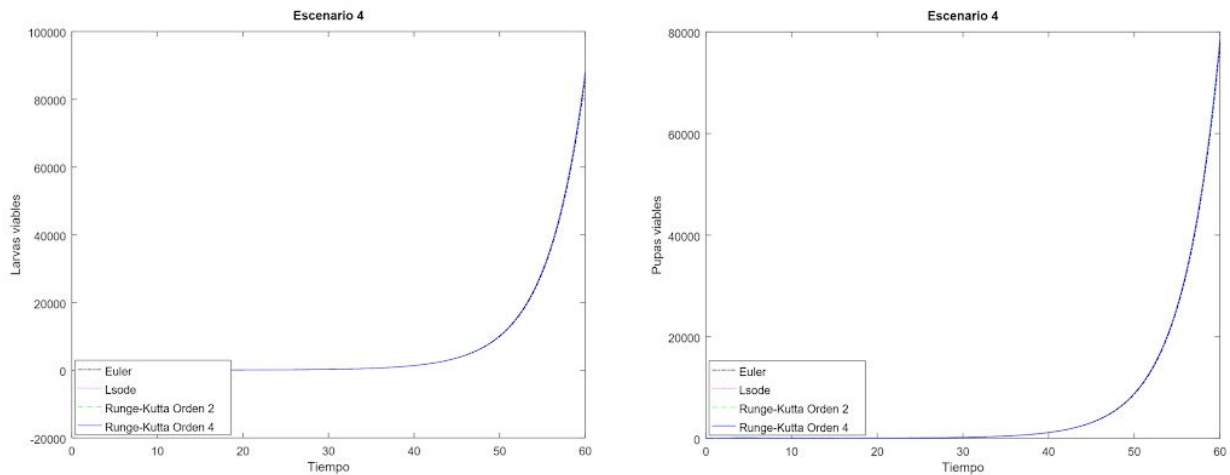




Para el cuarto escenario:







## Conclusiones:

Observamos que las condiciones iniciales propuestas por el enunciado no permitieron que se reproduzcan exactamente los mismos resultados que el paper. Más allá, en los gráficos se observa la misma tendencia, ya que se conservaron las pendientes de las curvas obtenidas de los distintos escenarios. Es por esto, que no se pueden obtener más conclusiones al compararlos con las gráficas del *Paper*. Consideramos que puede deberse a un error en las conclusiones iniciales debido a que los métodos fueron revisados cuidadosamente y consultados con los docentes de la materia.

Por otro lado, se había supuesto que mediante el uso de un paso pequeño para los métodos numéricos mayor iba a ser el acercamiento al valor real. Sin embargo, tal suposición resultó desvirtuada, concluyendo así, su desacierto. De igual manera se conservó un paso pequeño para persistir esa hipótesis.

Con los cuatro métodos implementados sobre el modelo matemático propuesto se llegó a los mismos resultados, por lo que se puede concluir que todos los métodos son eficientes. Además, se verifica que el paso utilizado es lo suficientemente pequeño, ya que no se encuentran diferencias con el resultado exacto.

Finalmente, con respecto a la modelización propuesta se concluye que es evidente la necesidad de introducir controles tanto para la población como para los mosquitos maduros e inmaduros. Es notable la disminución de la cantidad de mosquitos infectados y, consecuentemente, de la cantidad de personas contagiadas. Se demuestra aquí la importancia de dichas medidas y de la modelización de dicho problema presentado en el Paper para analizar las distintas variantes de medidas tomadas y descartarlas o mantenerlas a medida del paso del tiempo.

Con respecto a los resultados obtenidos se considera que al reflejar la misma tendencia que los del Paper se pueden deducir las mismas conclusiones. Es evidente que la población de mosquitos y larvas disminuye con la implementación de controles mecánicos a la población, conclusión que también fue presentada en el Paper. De esta manera sería posible afirmar que a pesar que las condiciones iniciales no nos permiten arrojar los mismos resultados, igualmente se pudo arribar a las mismas conclusiones, raíz fundamental del análisis.

Los métodos de Runge Kutta de Orden 2 y Runge Kutta de Orden 4 presentaron resultados muy similares al exacto, con un error absoluto de un orden muy pequeño. En cuanto al método de Euler la diferencia es significativamente mayor. El método de Euler se fundamenta en la aproximación de una curva mediante una secuencia de líneas rectas, lo que determina errores de cálculo. Se observa que a medida que se aleja del valor inicial, la solución se aleja de la solución exacta. Es fundamental reducir el incremento para mejorar la solución pero de esta manera las iteraciones crecen de forma exponencial y aumenta significativamente la cantidad de cálculos. Se concluye entonces que se obtiene un resultado mucho más cercano al real con los métodos de Runge Kutta y que Euler podría usarse para obtener soluciones preliminares pero no finales.

## Referencias

Paper “Modelo matemático para el control de la transmisión del Dengue (A mathematical model for controlling the spread of dengue) - Autores: Luis E. López, Aníbal Muñoz-Loaiza, Gerard Olivar-Tost y José Betancourt-Bethencourt - Publicación: REVISTA DE SALUD PÚBLICA • Volumen 14 (3), Junio 2012.

## Anexo:

**Tabla 1.** Variables y Parámetros utilizados en el planteamiento del modelo

Variables y parámetros	Descripción
$x_1(t)$	Número promedio de personas susceptibles en un tiempo $t$
$x_2(t)$	Número promedio de personas infecciosas en un tiempo $t$
$x_3(t)$	Número promedio de personas con inmunidad a un serotipo en un tiempo $t$
$y_1(t)$	Número promedio de mosquitos maduros no portadores del virus en un tiempo $t$
$y_2(t)$	Número promedio de mosquitos maduros portadores del virus en un tiempo $t$
$z_1(t)$	Número promedio de huevos viables en un tiempo $t$
$z_2(t)$	Número promedio de larvas viables en un tiempo $t$
$z_3(t)$	Número promedio de pupas viables en un tiempo $t$
$N=x_1+x_2+x_3$	Tamaño total de la población humana
$Y=y_1+y_2$	Tamaño total de mosquitos maduros
$\eta$	Tasa de personas susceptibles que ingresan a la población
$\beta_y$	Probabilidad de transmisión del virus del mosquito al hombre
$\beta_x$	Probabilidad de transmisión del virus del hombre al mosquito
$\theta$	Tasa de personas infecciosas que adquieren inmunidad a un serotipo
$\mu$	Tasa de muerte natural en los humanos
$\delta$	Tasa de muerte por factores ambientales del mosquito maduro
$\phi$	Tasa de ovoposición de los mosquitos maduros
$\omega_1$	Tasa de huevos que pasan al estado larval
$\omega_2$	Tasa de larvas que pasan al estado de pupa
$\omega_3$	Tasa de pupas que pasan al estado de mosquito maduro
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Tasas de mortalidad natural de huevos, larvas y pupas, respectivamente
$\tau$	Tiempo que se tardan las personas infecciosas en alcanzar la inmunidad a un serotipo
$T_1, T_2, T_3$	Tiempos de desarrollo de huevos, larvas y pupas, respectivamente
$u_1$	Control a la población humana (medidas preventivas)
$u_2$	Control a mosquitos maduros (insecticida)
$u_3$	Control a mosquitos inmaduros (Larvicidas ó medidas preventivas)

**Tabla 2.** Valores de los parámetros

Parámetro	I	II	Parámetro	I	II	Parámetro	I	II
$\eta$	0,004	0,004	$\phi$	0,5	0,49	$\varepsilon_3$	0,123	0,143
$\beta_y$	0,1	0,75	$\omega_1$	0,05	0,2	$\tau$	10	7
$\beta_x$	0,1	0,75	$\omega_2$	0,05	0,2	$T_1$	3	3
$\theta$	0,02	0,1428	$\omega_3$	0,05	0,2	$T_2$	7	7
$\mu$	0,0035	0,00042	$\varepsilon_1$	0,123	0,143	$T_3$	3	3
$\delta$	0,05	0,143	$\varepsilon_2$	0,123	0,143			