



Aprendizaje Automático Profundo (Deep Learning)

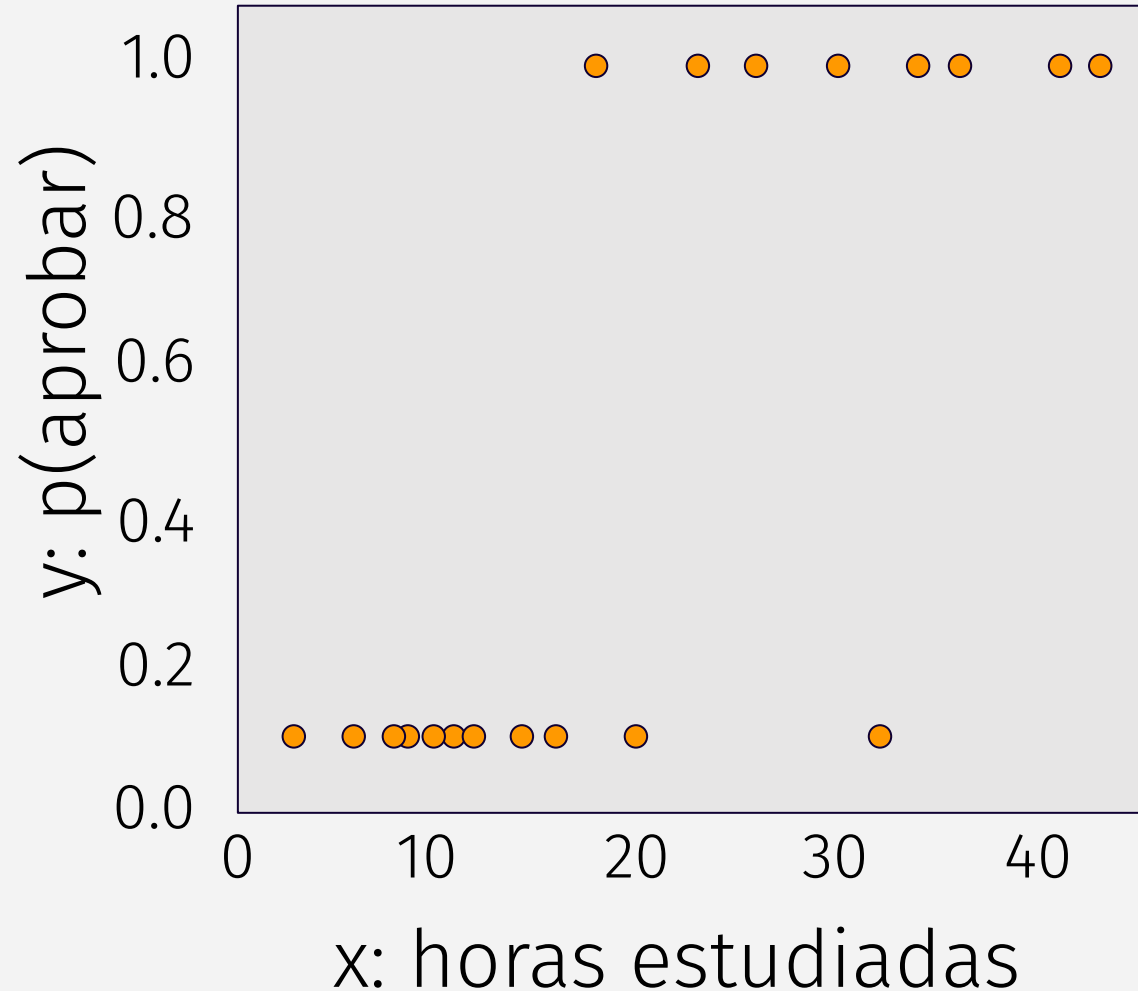
Dr. Facundo Quiroga - Dr. Franco Ronchetti



Regresión Logística - Modelo

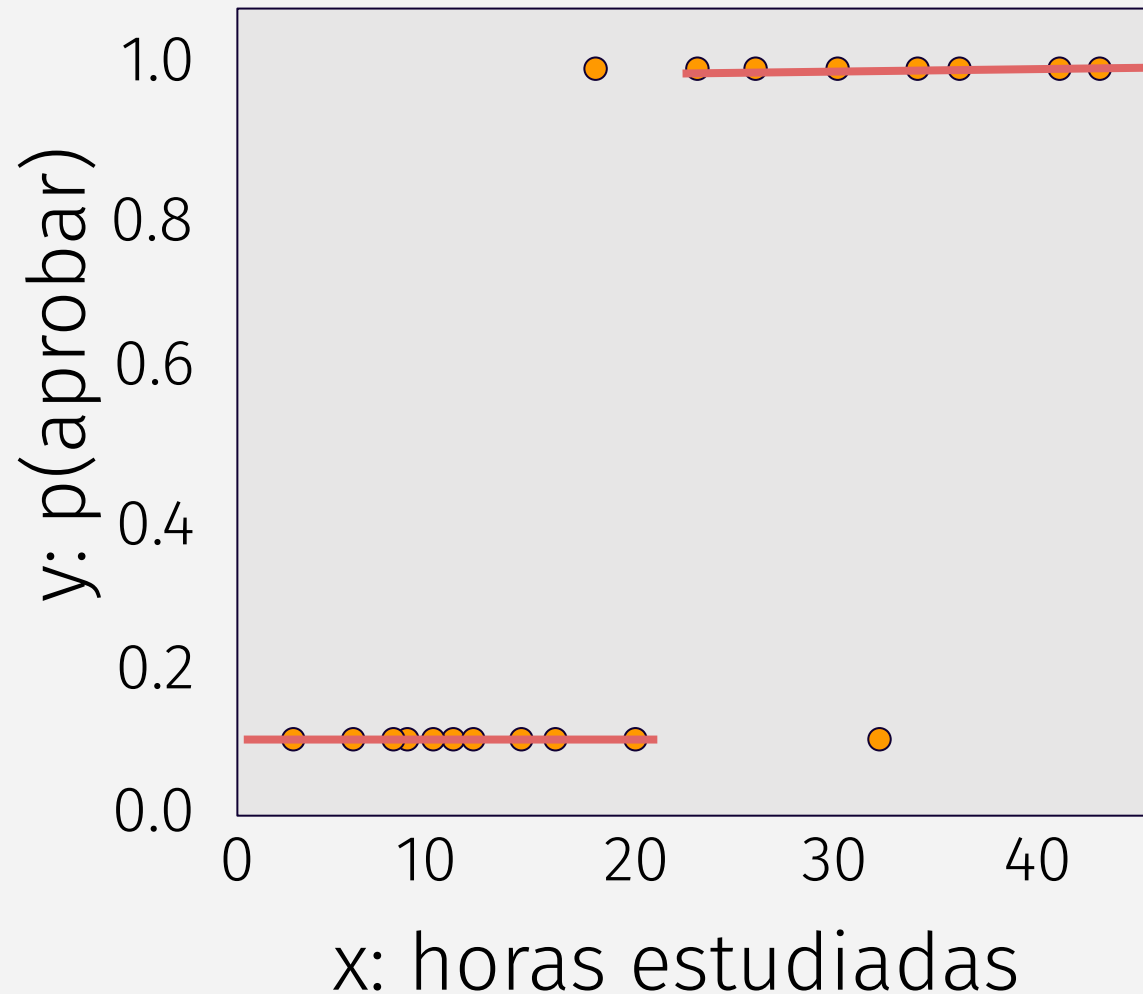
Predicción de probabilidad de aprobar

- Entrada
 - Horas estudiadas
- Salida
 - Probabilidad de aprobar
- Entrenar
 - Datos de aprobado/desaprobado



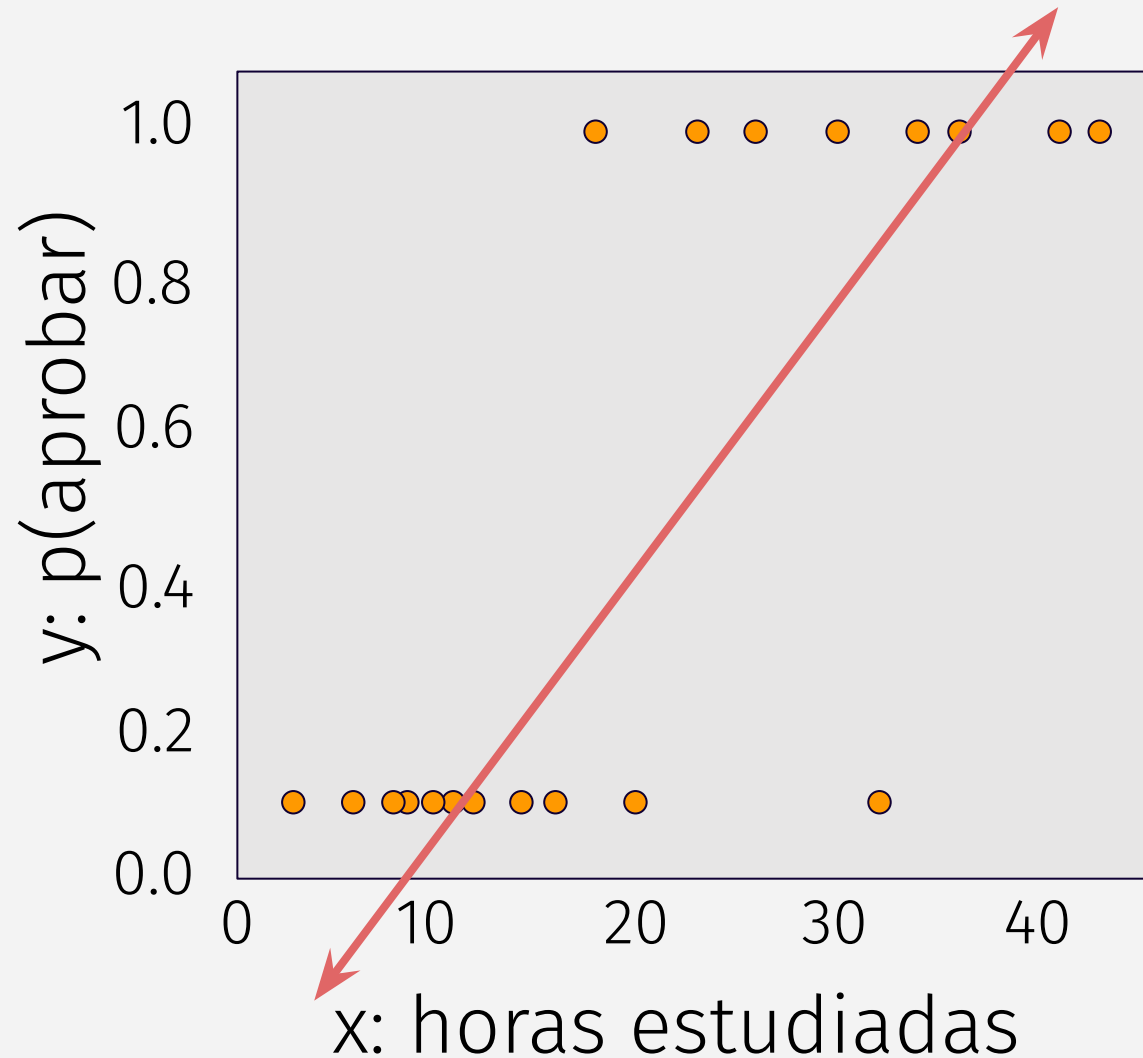
Horas	Aprobado
2	0
5	0
7	0
9	0
10	0
11	0
13.4	1
14	0
15	1

Sin Regresión Logística: Modelo simple if/else



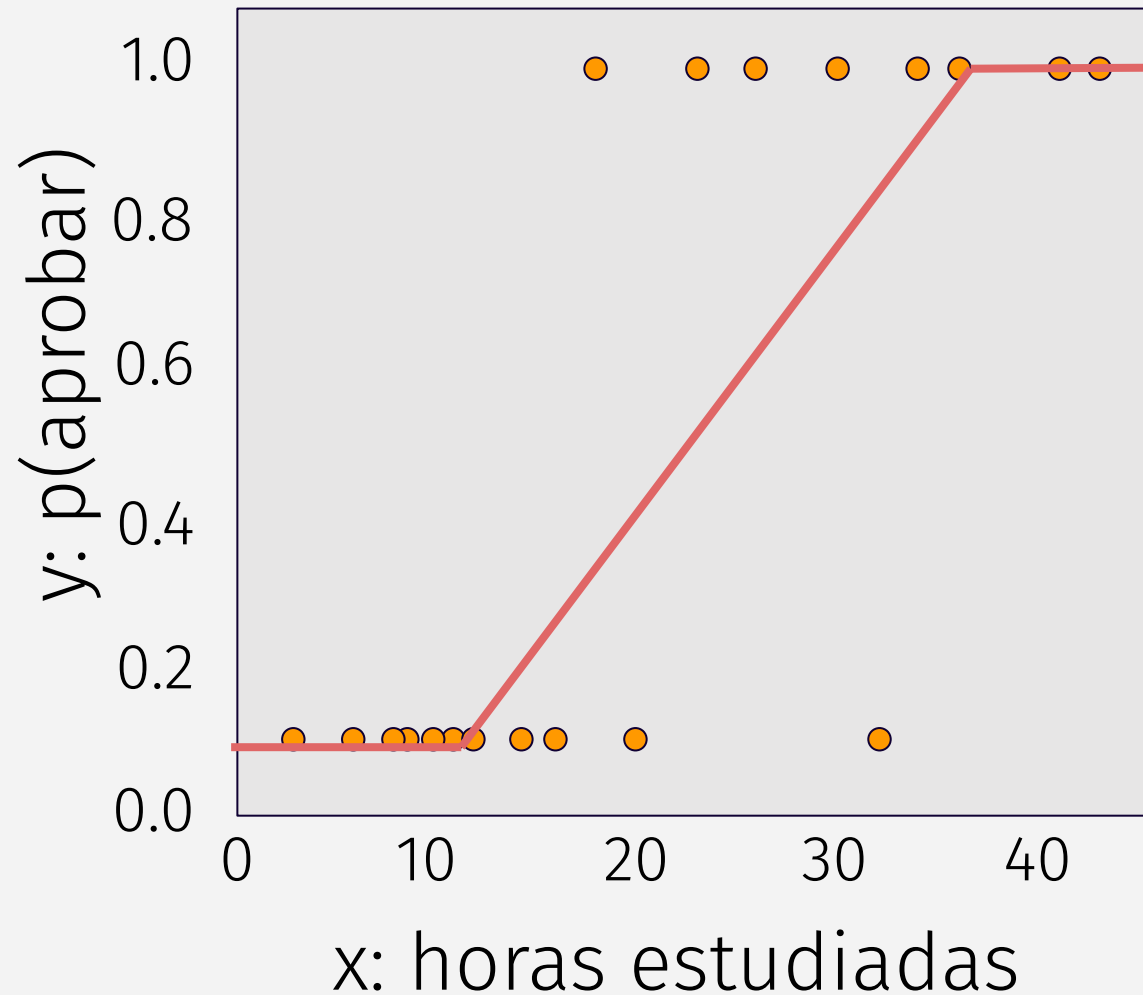
- Ejemplo
 - $f(x) = 0$ si $x < 20$
 $= 1$ si $x \geq 20$
- En general
- $f(x) = 0$ si $x < V$
 $= 1$ si $x \geq V$
- Problemas
 - Discontinuo en $x=V$
 - No es derivable
 - Muy extremo
 - 0 o 1

Sin Regresión Logística: Regresión Lineal $y=mx+b$



- Problemas
 - Valores mayores a 1
 - Valores menores a 0
- Solución
 - Convertir la salida de regresión lineal
 - Rango deseado
 - 0 a 1
 - Varias opciones

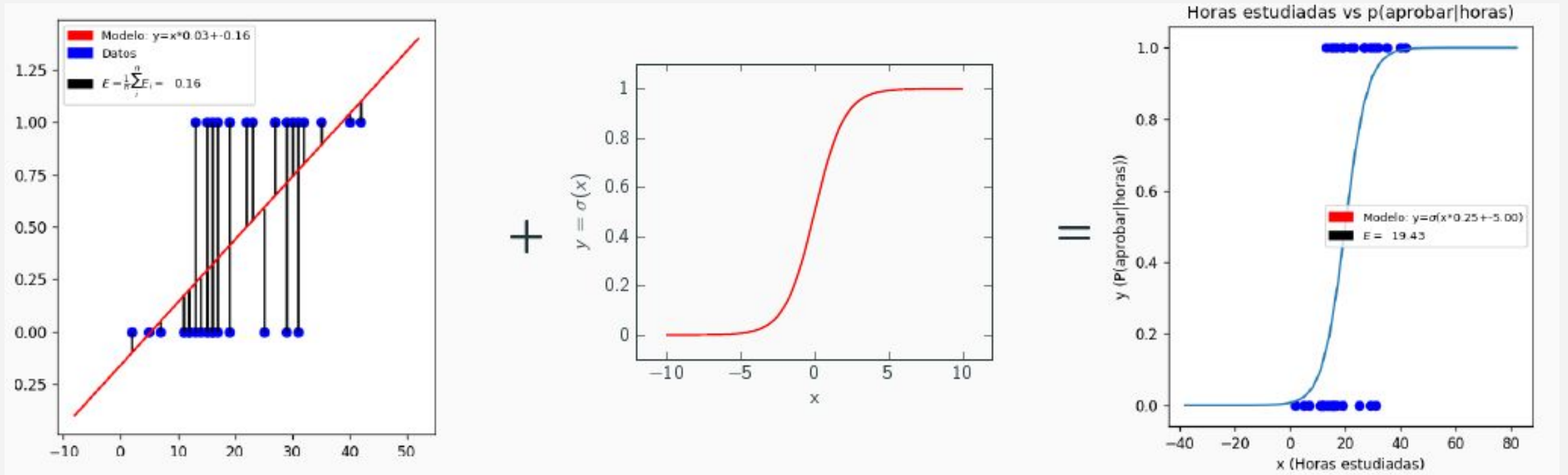
Sin Regresión Logística: Regresión Lineal cortada



- $f(x) = 0$ **si** $x \leq 10$
 $= mx + b$ **si** $10 < x < 35$
 $= 1$ **si** $x \geq 35$
- Soluciona el rango
- Problemas
 - No es derivable en $x=10$ y $x=35$
 - Difícil de optimizar

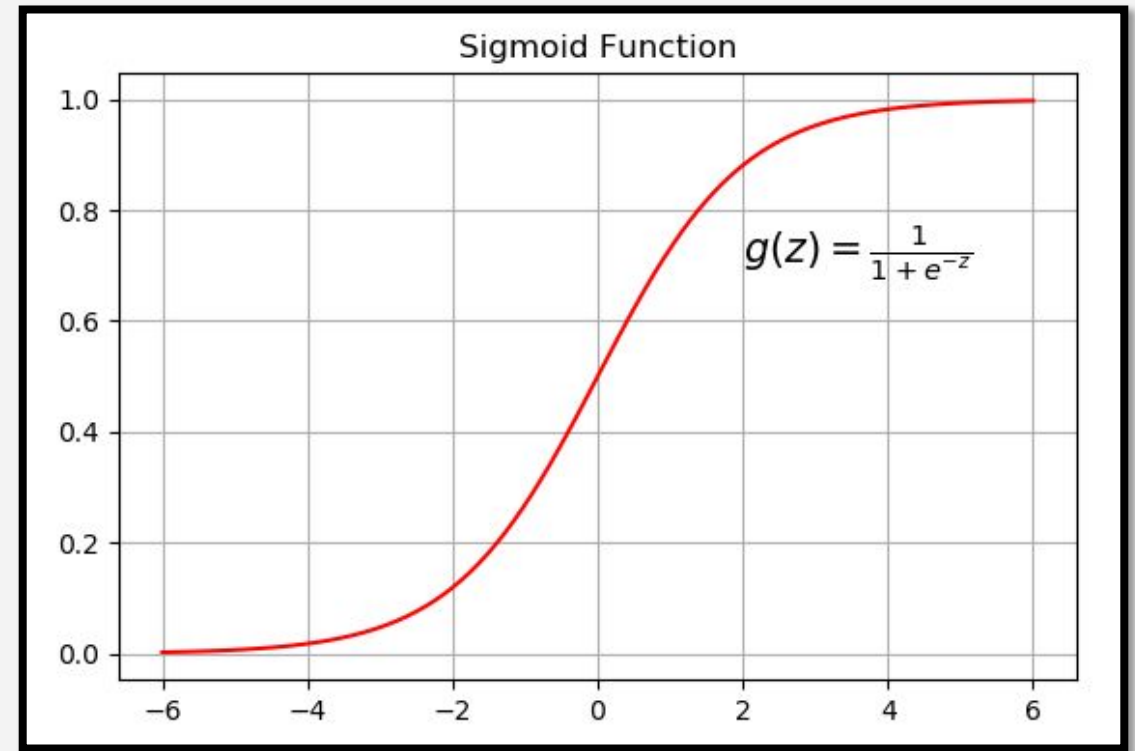
Regresión Logística

Regresión Logística = Regresión Lineal + Función Logística



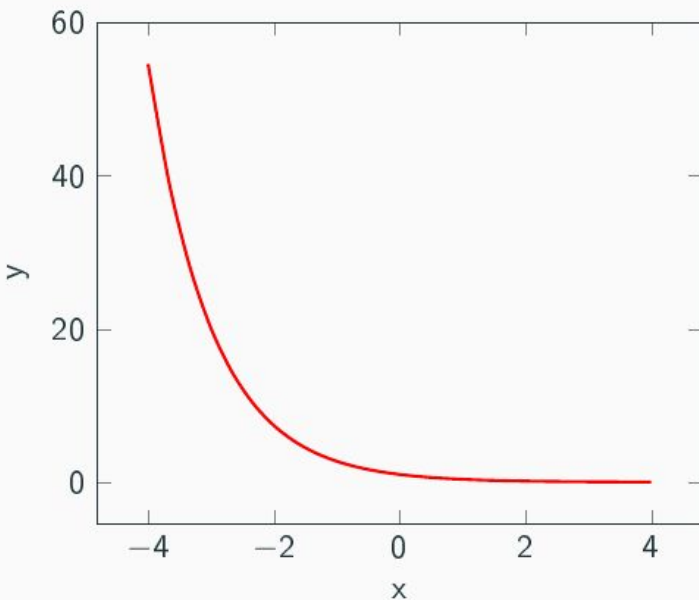
Función Logística o Sigmoide $\sigma(x)$

- $\sigma(x) = 1 / (1 + e^{-x})$
- Dominio
 - $-\infty$ a $+\infty$
- Imagen
 - 0 a 1
 - Asíntotas horizontales
- Derivada simple
 - $\delta\sigma(z)/\delta z = \sigma(z) * (1 - \sigma(z))$
- Aplicar a la salida de la Regresión Lineal

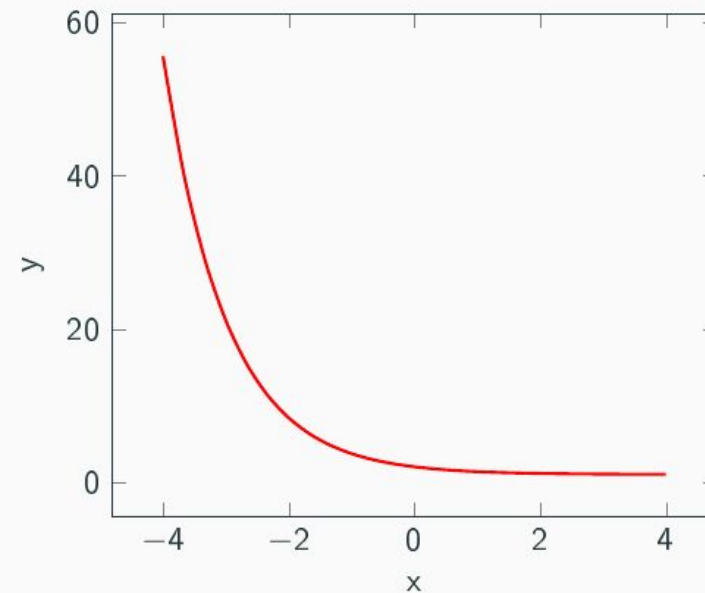


Entendiendo la Función Logística o Sigmoides $\sigma(x)$

- e^x transforma valores de $(-\infty, +\infty)$ a valores $(0, \infty)$
 - $-\infty$ se convierte en 0
 - ∞ queda igual
- e^{-x} hace lo parecido, invirtiendo el signo:
 - $+\infty$ se convierte en 0
 - $-\infty$ se convierte en $+\infty$



- e^{-x} transforma valores de $(-\infty, +\infty)$ a valores $(0, \infty)$
 - $+\infty$ se convierte en 0
 - $-\infty$ se convierte en $+\infty$
- $1 + e^{-x}$
 - $+\infty$ se convierte en 1
 - $-\infty$ se convierte en $+\infty$



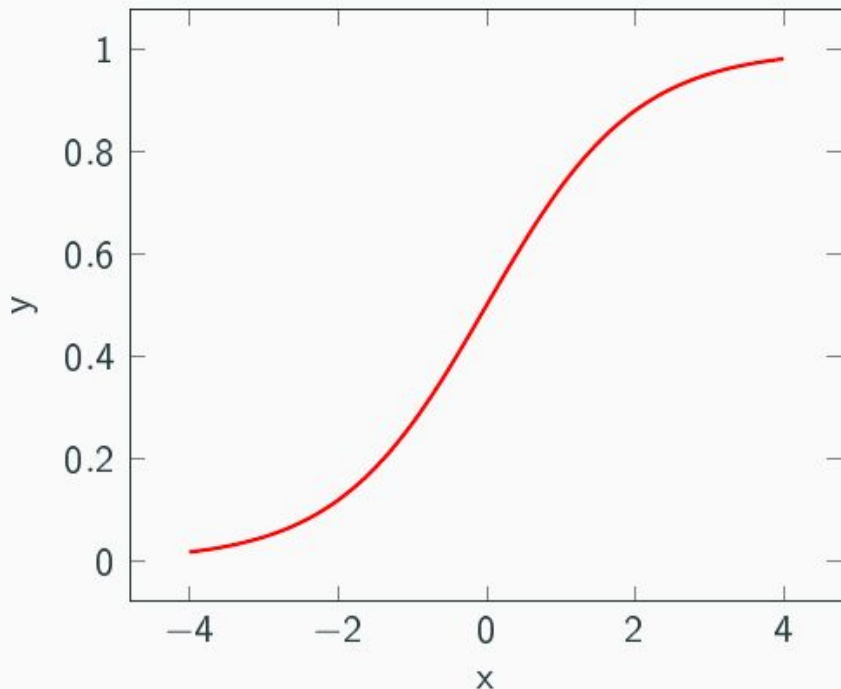
Entendiendo la Función Logística o Sigmoides $\sigma(x)$

- $1 + e^{-x}$

- $+\infty$ se convierte en 1
- $-\infty$ se convierte en $+\infty$

- $\frac{1}{1+e^{-x}}$

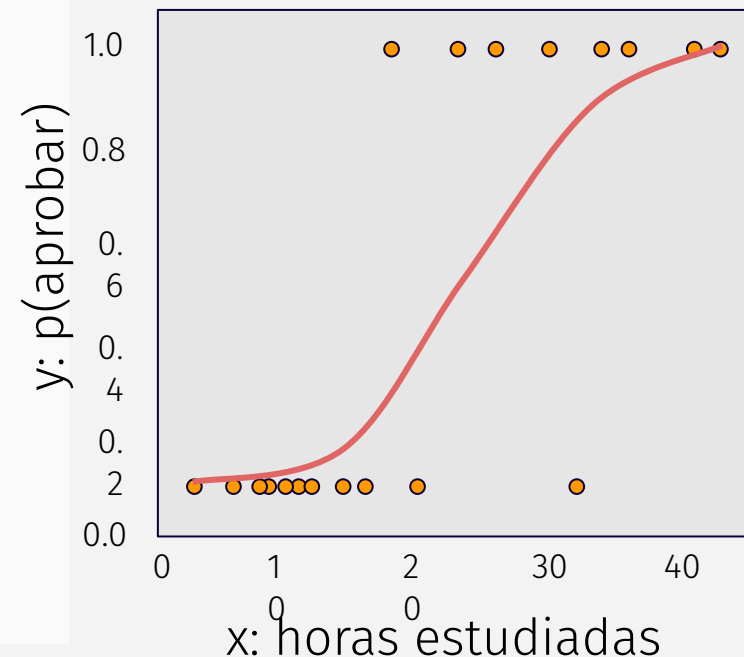
- $+\infty$ se convierte en 1
- $-\infty$ se convierte en 0



- $\sigma(x) = 1 / (1+e^{-x})$

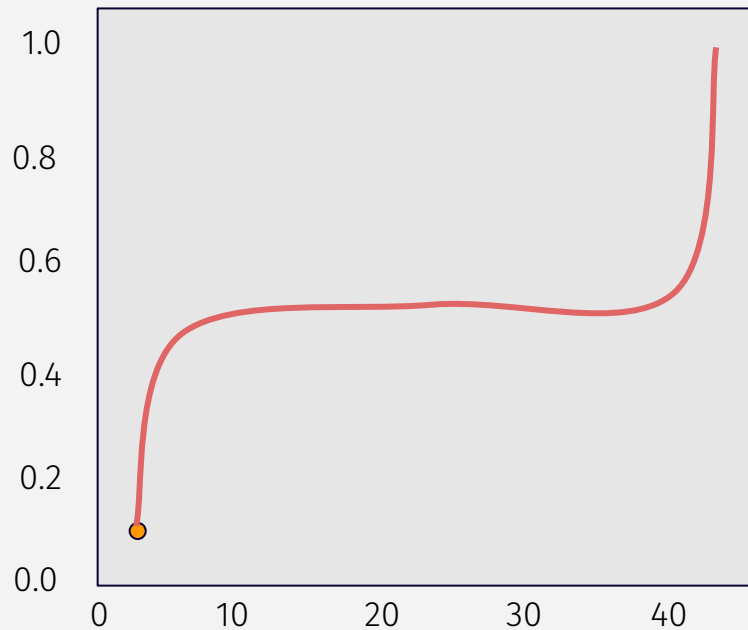
- $f(x) = \sigma(mx+b)$
 $= 1 / (1+e^{-mx-b})$

- f = regresión lineal compuesta con sigmoidea

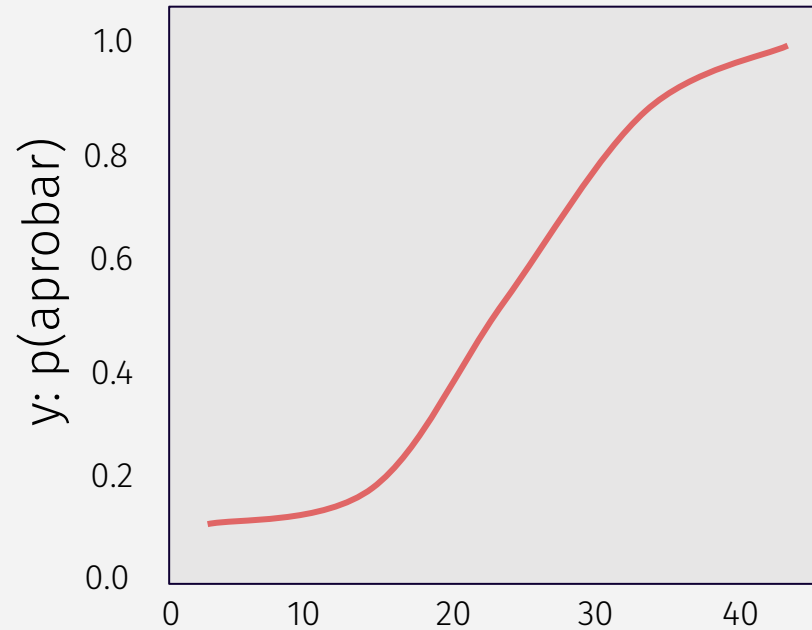


$f(x) = 1 / (1 + e^{-(mx+b)})$: Salida en base a m ($b=-25$)

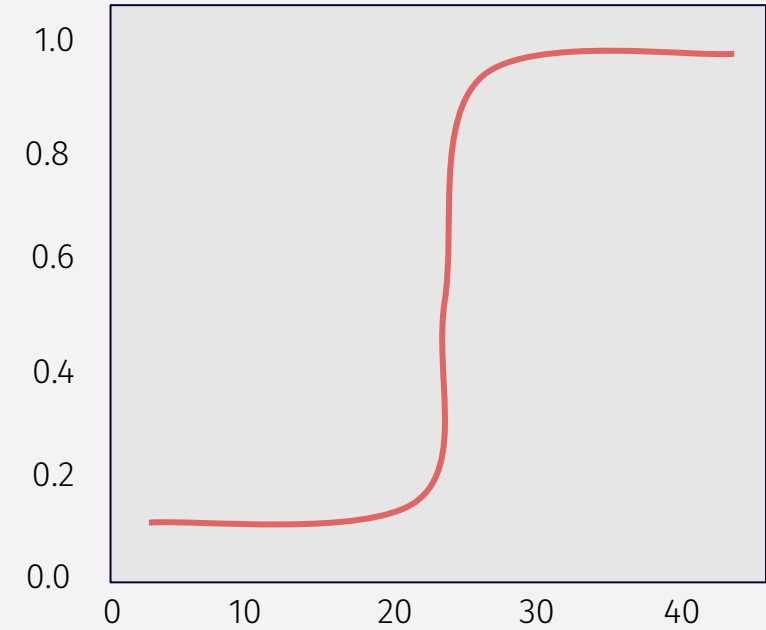
- m cambia la “pendiente” de la parte “lineal” de $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$



- $m > 0$
- $m \sim 0$



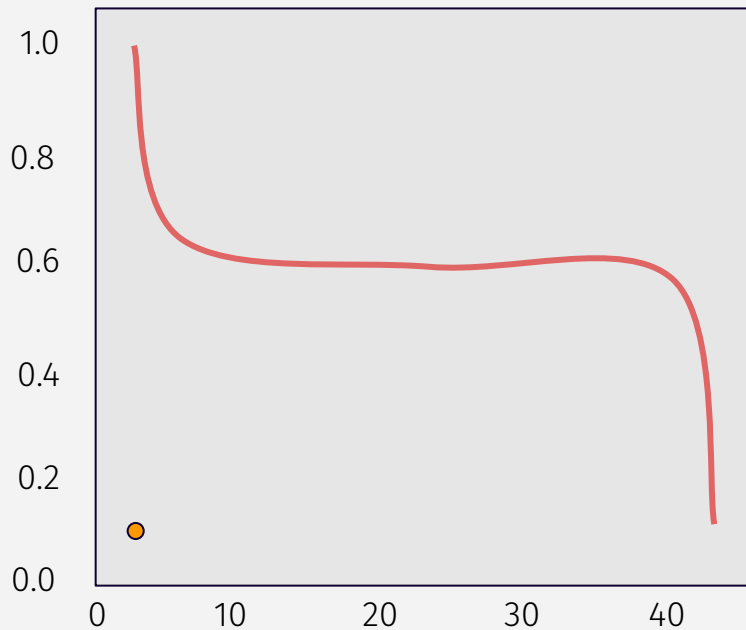
- $m = 1$



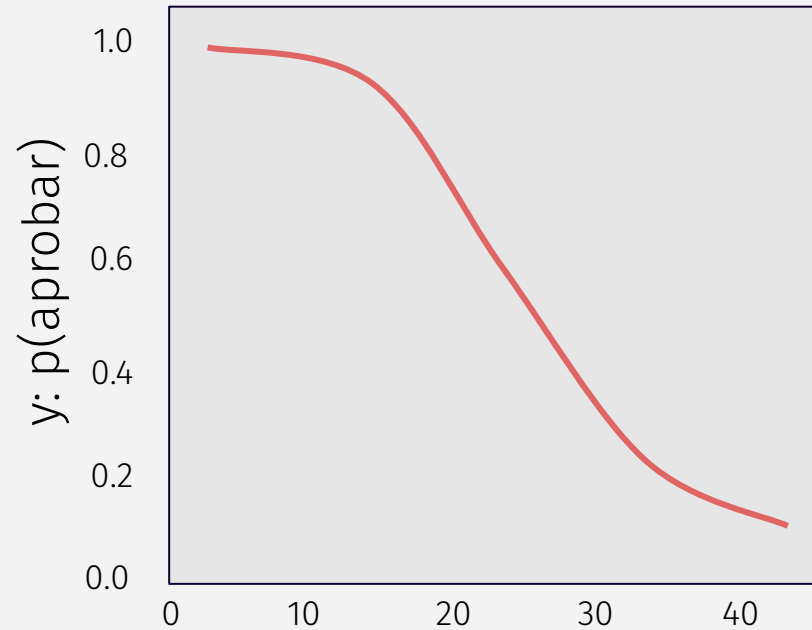
- $m \gg 1$

$f(x) = 1 / (1 + e^{-(mx+b)})$: Salida en base a m (b=-25)

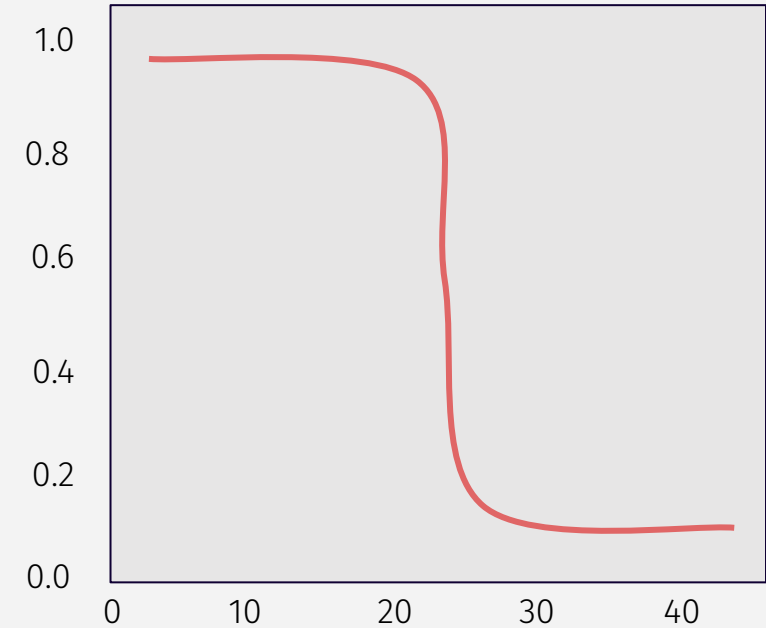
- m cambia la “pendiente” de la parte “lineal” de $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$



- $m < 0$
- $m \sim 0$



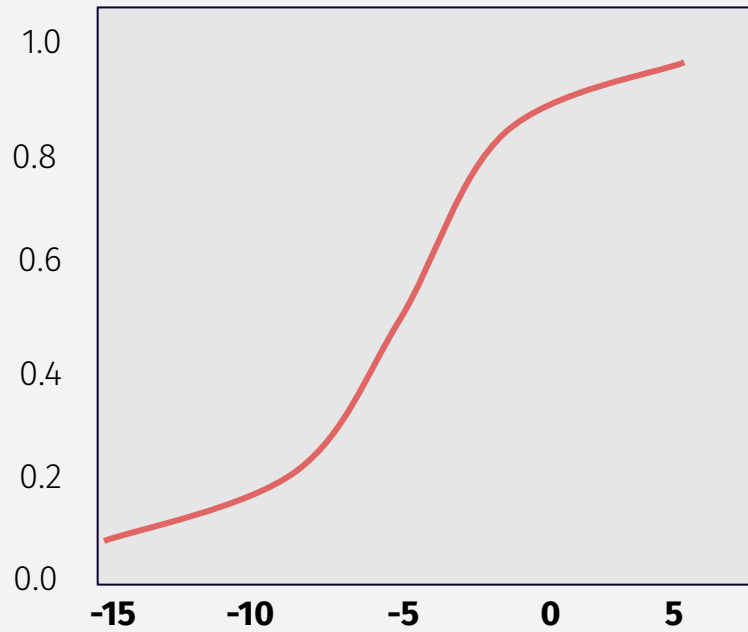
- $m = -11$



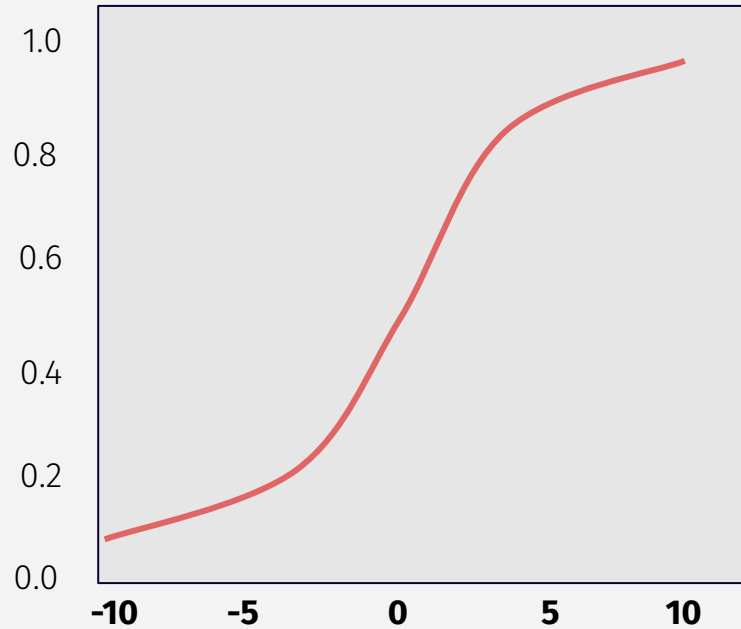
- $m \ll -1$

$f(x) = 1 / (1 + e^{-(mx+b)})$: Salida en base a b (m=0)

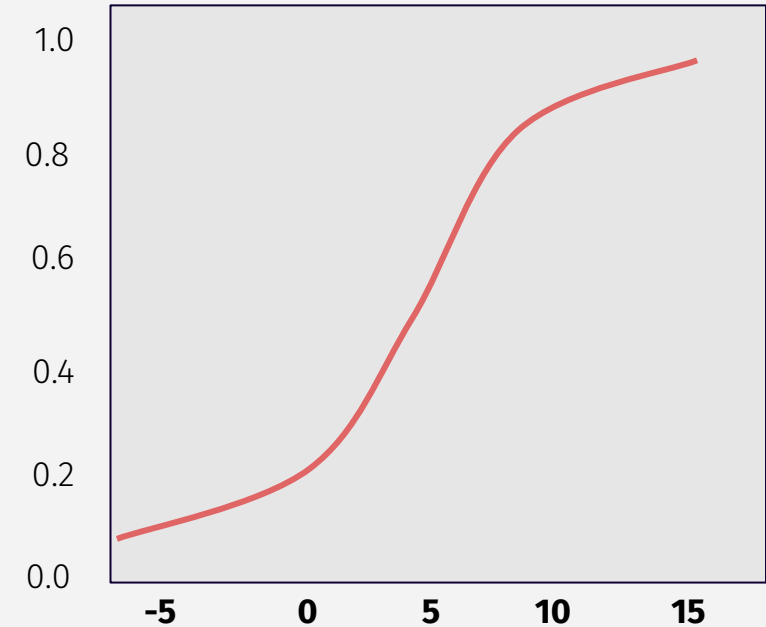
- Cambiar b mueve el gráfico en el eje x



- $b=5$

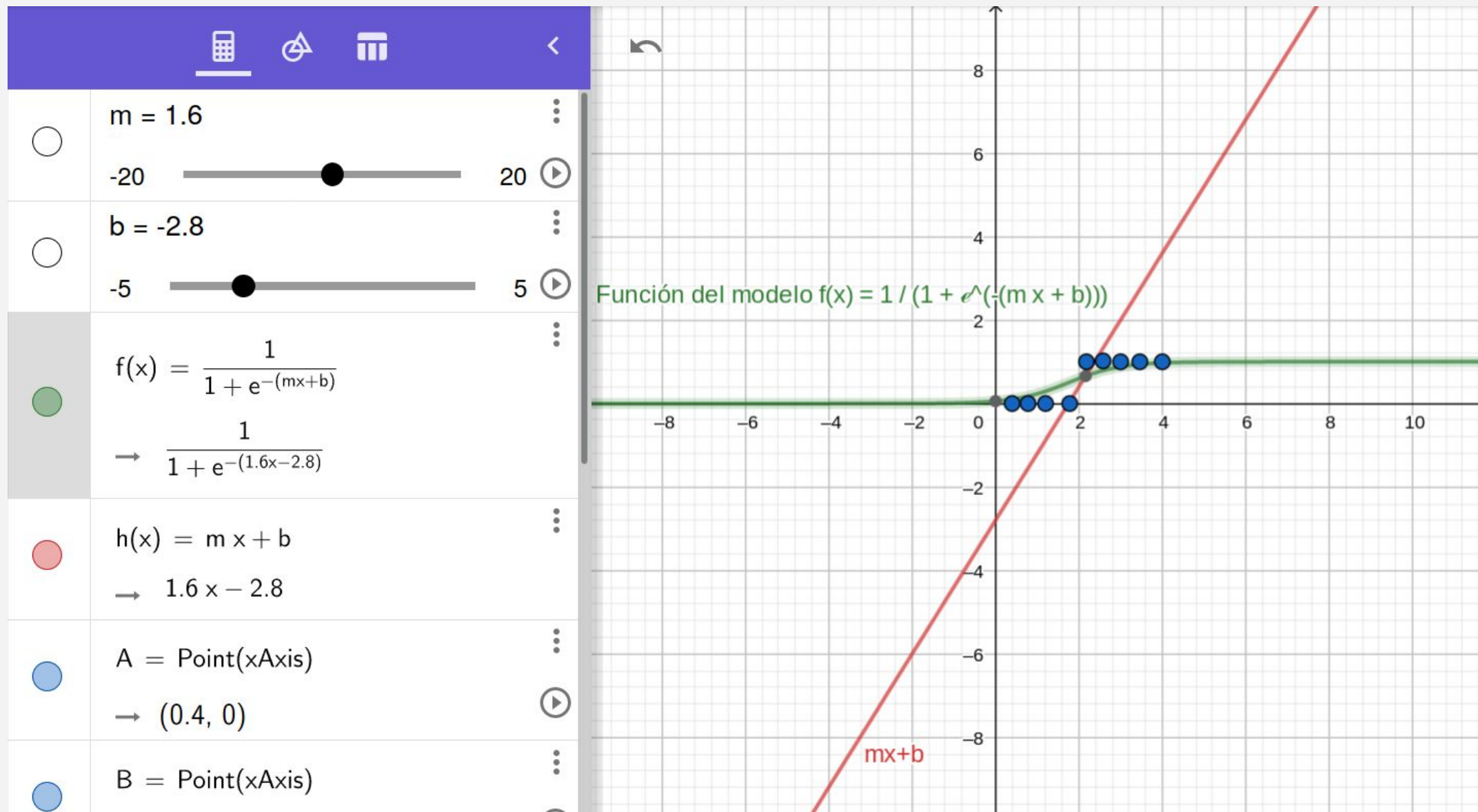


- $b=0$



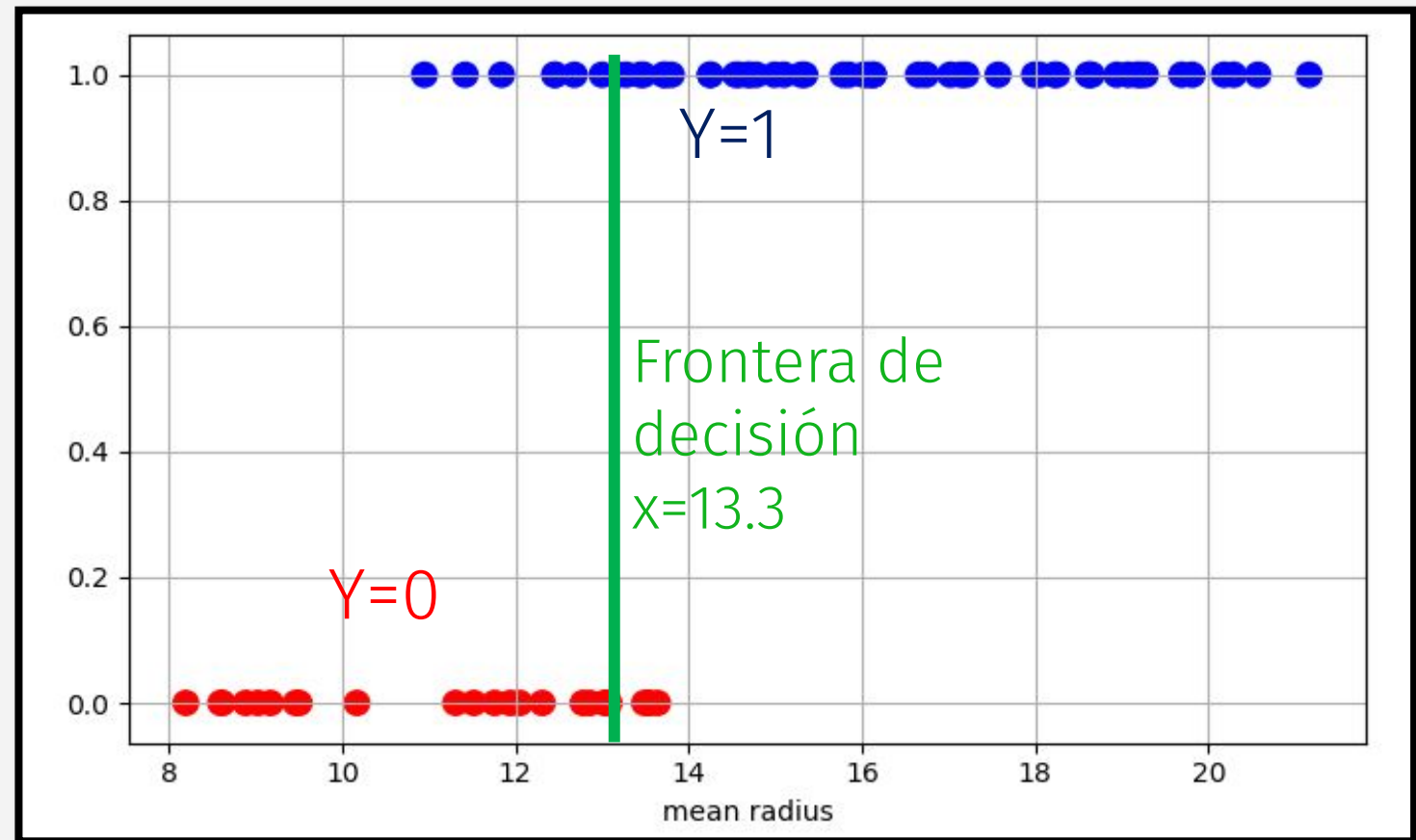
- $b=-5$

Simulación interactiva



Frontera de decisión 1D

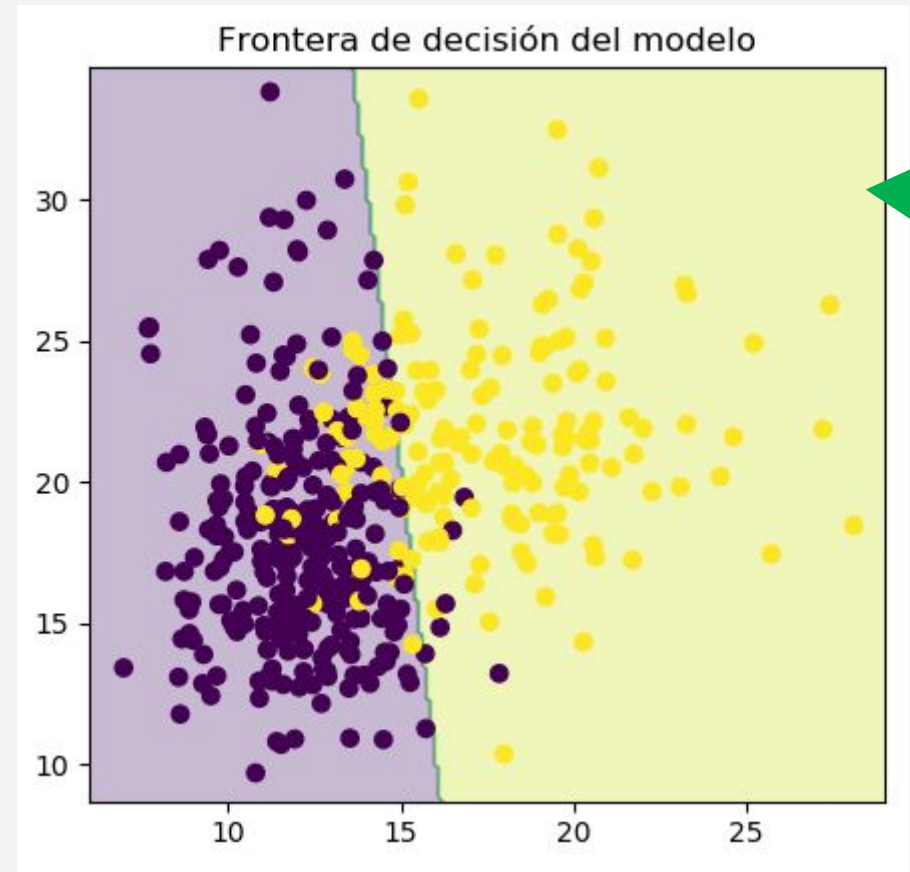
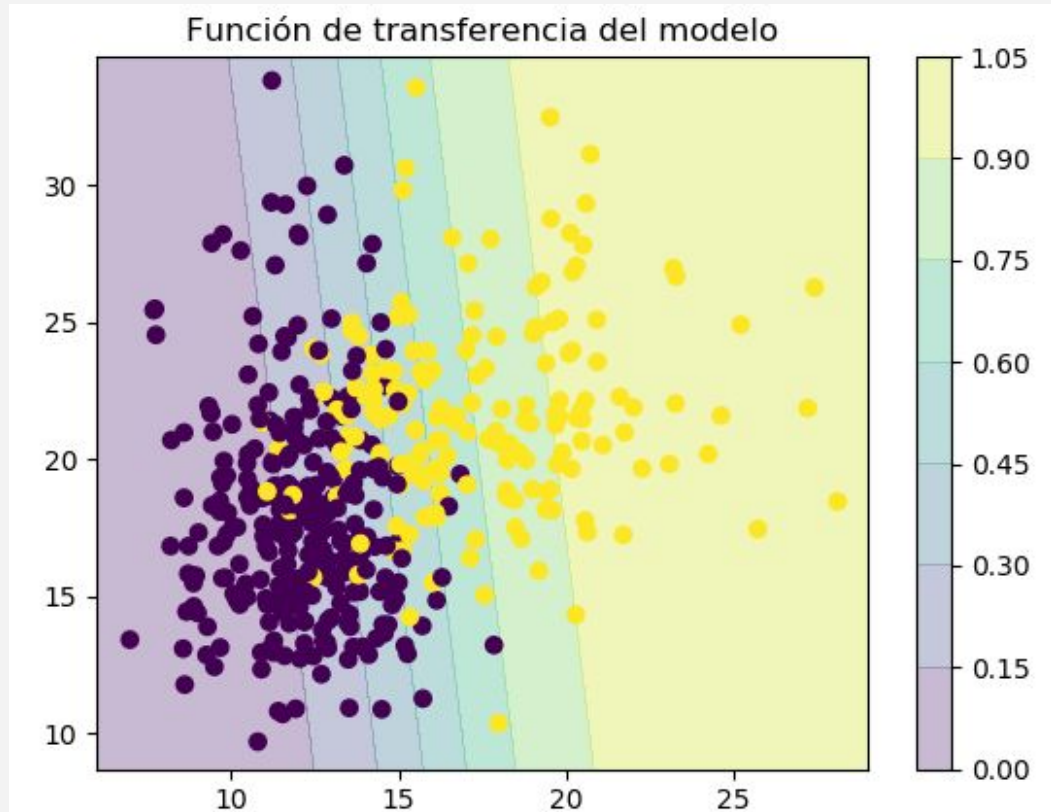
- Asumimos un umbral $u=0.5$
- Si $w=0.3$ y $b=-4$
- Entonces
 - $y = 1$ si $f(x) > 0.5$
- $f(x) > u$
 $\sigma(mx+b) > 0.5$
 $mx+b > 0$
 $x > -b/m$ (si $m > 0$)
- $x > -(-4)/0.3$
 $x > \mathbf{13.3}$



Frontera de decisión 2D

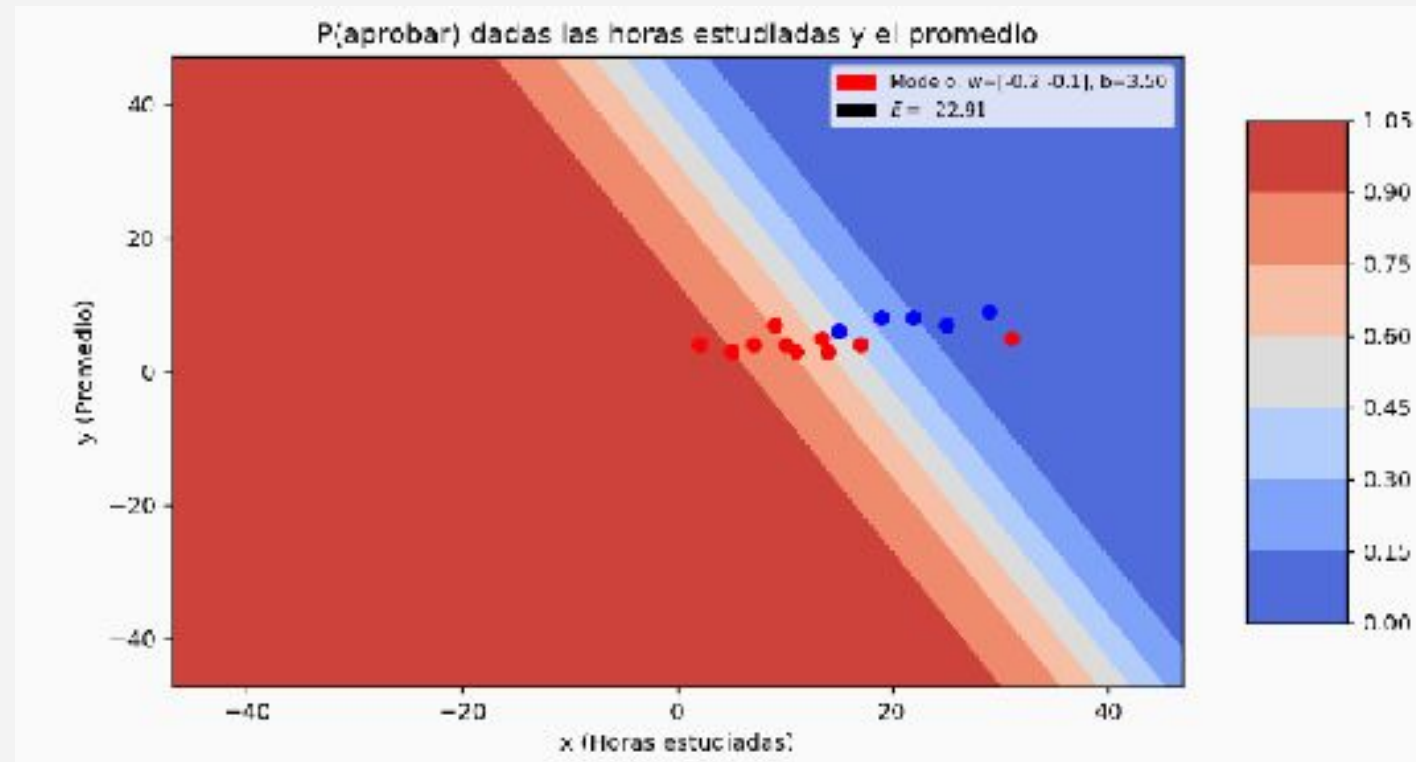
- $f(x_1, x_2) = \sigma(w_1 x_1 + w_2 x_2 + b)$
- Ejemplo con
 - $w = [0.47, 0.05]$
 - $b = -8$

$$y = 1 \text{ si } g(x) > 0,5 \rightarrow w_1 x_1 + w_2 x_2 + b > 0$$
$$0,47x_1 + 0,05x_2 - 8 > 0$$
$$0,47x_1 + 0,05x_2 > 8$$
$$x_2 = 160 - 9,4x_1$$



Regresión Logística. Resumen.

- Modelo $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sigma(x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m + b)$
 - $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$
 - Sigmoide o Logística
 - Convierte imagen a 0-1
 - $f(x) = \sigma(\text{RegresionLineal}(x))$
- Umbral
 - Convierte probabilidades a clases
 - Frontera de decisión
- w y b
 - Modifican la frontera



Función Logística o Sigmoides

1. Abrir el archivo **Funcion Logistica.ipynb**
2. Probar con algunos valores distintos de **x** para ver como cambia a cada paso la transformación.
3. ¿Para qué valor $\sigma(x) = 0.5$?
4. Dadas las asíntotas, sería teóricamente imposible que $\sigma(x)$ de como resultado 1 o 0. No obstante, en una computadora ¿podés hacer que, de todos modos, de como resultado 0 o 1? ¿por qué?

Modelo Regresión Logística

- Abrir el archivo **Separación por hiperplanos.ipynb**
 - ¿Qué valor tiene la salida de un lado y del otro del plano?
 - ¿Y el valor de $xw + b$?
 - Probar variando los valores de W y b
 - ¿Cómo varían las regiones?