Transformaciones Lineales

Definición 0.1. *Una* **transformación lineal** *es una aplicación de un espacio vectorial* V *en otro espacio vectorial* W*, y se la denota como* $L : V \to W$*, si satisface:*

- $\forall v_1, v_2 \in V,\ L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ *y*
- $\forall \alpha \in K$ *y* $\forall v \in V,\ L(\alpha.v) = \alpha.L(v)$.

Ó, equivalentemente, $\forall \alpha, \beta \in K$ *y* $\forall v_1, v_2 \in V,\ L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$.

Ejemplo 0.2. *Sea* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L(x, y) = (x, y, x + y)$*, veamos que es una transformación lineal:*

$\forall v_1, v_2 \in V,\ L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ *?*

$$L(v_1+v_2) = L((x_1, y_1)+(x_2, y_2)) = L((x_1+x_2, y_1+y_2)) = ((x_1+x_2), (y_1+y_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2)) =$$

$$= ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (x_1 + y_1 + (x_2 + y_2)) = (x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) =$$

$$= L((x_1, y_1)) + L((x_2, y_2)) = L(v_1) + L(v_2)$$

$\forall \alpha \in K$ *y* $\forall v \in V,\ L(\alpha.v) = \alpha.L(v)$ *?*

$$L(\alpha.v) = L(\alpha.(x, y)) = L((\alpha.x, \alpha.y)) = (\alpha.x, \alpha.y, \alpha.x+\alpha.y) = (\alpha.x, \alpha.y, \alpha.(x+y)) = \alpha(x, y, x+y) = \alpha.L(v)$$

También podríamos haberlo demostrado usando la forma alternativa equivalente que prueba ambos operaciones a la vez.

Más ejemplos,

- *La transformación* ***Identidad*** $\forall v \in V,\ I : V \to V$ *definida por* $I(v) = v$.

$$I(\alpha.v_1 + \beta.v_2) = \alpha.v_1 + \beta.v_2 = I(\alpha.v_1) + I(\beta.v_2) = \alpha.I(v_1) + \beta.I(v_2)$$

- La transformación **Nula** $\forall v \in V,\ N : V \to V$ definida por $N(v) = 0_V$.

$$N(\alpha.v_1 + \beta.v_2) = 0_V = 0_V + 0_V = \alpha.0_V + \beta.0_V = \alpha.N(v_1) + \beta.N(v_2)$$

Ejemplos 0.3. *1. La transformación de dilatación o comprensión (en $\mathbb{R}^3$)*
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L(x, y, z) = k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$.

2. *La transformación de proyección (p.e. aquella que proyecta, en $\mathbb{R}^3$, sobre el eje x)*
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L(x, y, z) = (x, 0, 0)$.

3. *La transformación en el espacio de las matrices 2x2* $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por*
$L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -x \\ x & z-w \end{pmatrix}$.

Ahora veamos algunos ejemplos de aplicaciones entre espacios vectoriales que NO son transformaciones lineales:

1. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L(x, y, z) = (x, 1, z)$

   Si alguna o las dos condiciones de la definición no se cumplen L no será lineal. En este caso no valen ninguna de las dos, mostremos que no se cumple la suma:

   $$L(v_1 + v_2) = L((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = L((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = (x_1 + x_2, 1, z_1 + z_2)$$
   $$\neq (x_1 + x_2, 2, z_1 + z_2) = (x_1, 1, z_1) + (x_2, 1, z_2) = L((x_1, y_1, z_1)) + L((x_2, y_2, z_2)) = L(v_1) + L(v_2)$$

2. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $L(x, y) = (x + y, xy)$
   En este caso tampoco no valen ninguna de las dos, veamos que no se cumple el producto por escalar:

   $$L(\alpha.v) = L(\alpha.(x, y)) = L((\alpha.x, \alpha.y)) = (\alpha.x + \alpha.y, \alpha.x.\alpha.y) = (\alpha.(x + y), \alpha^2.x.y)$$
   $$\neq (\alpha.(x + y), \alpha.x.y) = \alpha.(x + y, xy) = \alpha.L(x, y) = \alpha.L(v)$$

3. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $L(x, y, z) = x + y + z + 4$

   Esta aplicación tampoco cumple ninguna de las dos condiciones.

Pueden probarse fácilmente usando las condiciones de la definición de transformación lineal las siguientes propiedasdes:

Propiedades 0.4. *Dada una transformación lineal $L : V \to W$, se cumplen las siguientes propiedades:*

- $L(0_v) = 0_w$.
- $\forall v \in V,\ L(-v) = -L(v)$.
- *Si* $v_1, \dots, v_n \in V$ *entonces* $L(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \cdots + \alpha_n L(v_n)$.

Como **toda** transformación lineal cumple estas propiedades, podemos usarla para mostrar que si una aplicación no la cumple, entonces esa aplicación no es lineal.

En particular es muy útil la propiedad de que toda transformación "lleva el cero al cero" pero no hay que confundirse! la utilidad proviene de utilizar la contrarrecíproca de la propiedad. Es decir, si no cumple la propiedad no es una transformación lineal, si la cumple hay que seguir mirando.

Por ejemplo, $L(x, y) = (x, y, x + y)$ es tal que $L(0_{R2}) = L((0, 0)) = (0, 0, 0) = 0_{R^3}$ y ya probamos que es una transformación lineal.
Por otro lado, $L(x, y, z) = (x, 1, z)$ no cumple que $L(0_{R3}) = 0_{R^3}$ y como vimos antes no es lineal pero $L(x, y) = (x + y, xy)$ si cumple que $L(0_{R2}) = 0_{R^2}$ y tampoco es lineal.

Imagen y Núcleo de una transformación lineal

Sea $L : V \to W$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W, se definen:

Definición 0.5. *El* **Núcleo de una transformación lineal L** *es el conjunto de vectores $v \in V$ que son transformados o "enviados" al vector nulo 0_w de W. Es decir,*

$$Nu(L) = \{v \in V : L(v) = 0_w\}$$

Definición 0.6. *La* **Imagen de la transformación lineal L** *es el conjunto de vectores $w \in W$ que son imagen por L de elementos $v \in V$ y se denota como $Im(L)$ ó $L(V)$.*

$$Im(L) = \{w \in W : \exists v \in V \ w = L(v)\} \tag{1}$$

También podemos analizar la imagen de un subespacio de V en lugar de hacerlo para todo el espacio.

Ejemplo 0.7. *Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L((x, y, z)) = (z, x + y)$*

- *Queremos hallar $Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^3 : L(v) = 0\}$.*
  Sabemos que si $v \in Nu(L)$ entonces $L(v) = 0$, es decir, $v = (x, y, z)$ y $(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2} = L(v) = L(x, y, z) = (z, x+y)$, entonces $(0, 0) = (z, x+y)$ y tenemos que $z = 0$ y $x+y = 0, \quad x = -y$, luego $v = (x, y, z) = (x, -x, 0)$
  Por lo tanto $Nu(L) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x, z = 0, x \in R\} = \big\{v \in \mathbb{R}^3 : v = (x, -x, 0)\big\}$.

  Para encontrar la imagen de L, $Im(L) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \exists v \in \mathbb{R}^3 \ w = L(v)\}$, tomamos cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ tales que satisfaga: $(a, b) = w = L(v) = L(x, y, z) = (z, x + y)$, luego $(a, b) = (z, x + y)$ y tenemos que $a = z$ cualquier real y $b = x+y$ que también lo cumple cualquier número real (buscamos un real que sea suma de otros dos, no hay más restricciones que esa). Por lo tanto los vectores $w = (a, b) = (a, b)$ y $Im(L) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in R\} = \mathbb{R}^2$.

Teorema 0.8. *Si $L : V \to W$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W, entonces:*

1. *El núcleo $Nu(L)$ es un subespacio de V.*

2. *La imagen $Im(L)$ es un subespacio de W.*

Demostración:

1. Para probar que $Nu(L)$ es un subespacio de V debemos mostrar que se cumplen las condiciones del teorema de subespacios :

   $Nu(L) \neq \emptyset$ pues siempre vale que $L(0) = 0$, para toda transf lineal entonces al menos $0_V \in Nu(L)$ (además con esto vemos que contiene al neutro)

   Veamos que la suma es cerrada :
   Sean $v_1, v_2 \in Nu(L)$ (esto es, $L(v_1) = 0 = L(v_2)$), probemos que $v_1 + v_2 \in Nu(L)$, es decir que $L(v_1 + v_2) = 0$.

   $L(v_1 + v_2) \underbrace{=}_{*} L(v_1) + L(v_2) = 0 + 0 = 0$. (* `ya que L es lineal`

   Ahora probemos que el producto por escalar es cerrado en $Nu(L)$:
   Sean $\alpha \in R$ y $v \in Nu(L)$ entonces por ser L lineal $L(\alpha.v) = \alpha.L(v) = \alpha.0 = 0$ y por lo tanto $\alpha.v \in Nu(L)$

2. Mostremos que $Im(L)$ cumple las condiciones para ser un subespacio de W:

   Como vimos antes, $L(0_V) = 0_W$, esto muestra que dado $0_W \in W$ existe un $v = 0_V \in V$ tal que $L(v) = w = 0_W$ entonces la imagen de L contiene al neutro de W y $Im(L) \neq \emptyset$

   Clausura de la suma: dados $w_1, w_2 \in Im(L)$, valdrá que $w_1 + w_2 \in Im(L)$
   Queremos mostrar que existe un $v \in V$ tal que $L(v) = w_1 + w_2$, sabemos que existen $v_1, v_2 \in V$ tal que $L(v_1 = w_1$ y $L(v_2) = w_2$. Entonces, si tomamos $v = v_1 + v_2$ en V (ya que V es un espacio vectorial y la suma es cerrada en V) vale que $L(v) = L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w_1 + w_2$ como queríamos mostrar.

   Clausura del producto por escalar: dados $\alpha \in R$ y $w \in Im(L)$, vale que $\alpha.w \in Im(L)$
   Como $w \in Im(L)$ existe $v \in V$ tal que $L(v) = w$, podemos tomar $\overline{v} = \alpha.v$ en V, entonces $L(\overline{v}) = L(\alpha.v) = \alpha.L(v) = \alpha.w$, así encontramos un elemento de V que transformado por L nos da $\alpha.w$, lo que significa que $\alpha.w$ está en la imagen de L.

Ejemplo 0.9. *Dada $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L((x, y)) = (0, y)$, hallar los subespacios núcleo e imagen y sus respectivas bases y dimensión:*

- $Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = 0\}$.
  Sabemos que $L(v) = 0$ si y sólo si $y = 0$ ya que $L(v) = L(x, y) = (0, y)$, luego $v \in Nu(L)$ si y sólo si $y = 0$, por lo tanto $Nu(L) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \langle(1, 0)\rangle$.
  La base de $Nu(L)$ será $B_N = \{(1, 0)\}$ y su dimensión es 1.

- *Para encontrar la imagen de L, $Im(L) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \exists v \in \mathbb{R}^2\ w = L(v)\}$, tomamos cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ tales que satisfaga: $(a, b) = w = L(v) = L(x, y) = (0, y)$, luego $(a, b) = (0, y)$ y por lo tanto los vectores $w = (a, b) = (0, b)$ y $Im(L) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\} = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\} = \langle(0, 1)\rangle$.*
  Luego, la base de la $Im(L)$ es $B_I = \{(0, 1)\}$ y la dimensión es 1.

Teorema 0.10. *Si $L : V \to W$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W de dimensión finita, entonces:*

$$dim(Nu(L)) + dim(Im(L)) = dim(V)$$

Demostración:
Supongamos que $dim(V) = n$. Observemos que como tanto el núcleo como la imagen son subespacios de V sus dimensiones deben ser menores a la dimensión del espacio total V (a lo más pueden llegar a ser igual a la dimensión de V en los casos triviales de la transformación Nula o la transformación Identidad).

Sea $B_N = \{v_1.....v_k\}$ **una base del** $Nu(L)$ (o sea, $dim(Nu(L)) = k$).
Claramente, $L(v_i) = 0$ para todo $v_i \in B_N$.

Como los vectores de la base B_N son vectores de V y obviamente son linealmente independientes, podemos usarlos para conseguir una base de V.
Partiendo de la base B_N y la extendemos a $B = \{v_1.....v_k, v_{k+1}, ...v_n\}$ (n vectores l.i de V generan el espacio)
.

Ahora busquemos una base de $Im(L)$.
Sea $w \in Im(L)$, por definición existe un $v \in V$ tal que $w = L(v)$. Como v pertenece a V puede escribirse como combinación de los vectores de la base B:

$v = a_1v_1 + ... + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + ... + a_nv_n$, entonces:

$w = L(v) = L(a1v_1 + ... + a_k v_k + a_{k+1}v_{k+1} + ... + a_n v_n) =$
$= a1L(v_1) + ... + a_k L(v_k) + a_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + a_n L(v_n) = a_1 0 + ... + a_k 0 + a_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + a_n L(v_n) = a_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + a_n L(v_n)$

Luego, todo vector en $Im(L)$ es combinación lineal de $\{L(v_{k+1}), ..., L(v_n)\}$, además son linealmente independientes ya que si suponemos que $0_W = c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_n L(v_n$ como L es lineal tendríamos que $L(c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_n L(v_n) = 0$ y $c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_n L(v_n$ pertenecería al $Nu(L)$ y por lo tanto sería combinación lineal de los vectores de B_N, entonces $c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_n L(v_n = b_1 v_1 + ... + b_k v_k$ y de aquí podemos escribir $c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_n L(v_n - b_1 v_1 + ... - b_k v_k = 0$ una combinación lineal nula con todos vectores linealmente independientes en V (son los de la base B de V), entonces todos los coeficientes son ceros,en particular $c_{k+1} = ... = c_n = 0$. Así, los vectores $\{L(v_{k+1}), ..., L(v_n)\}$ generan $Im(L)$ y son independientes, y por lo tanto forman una base.

La dimensión de la imagen, la cantidad de vectores en la base, será igual a la cantidad de vectores de la base de V quitando los vectores que provenían de la base del núcleo.

Esto es, $dim(Im(L)) = dim(V) - dim(Nu(L)) = n - k$

Y así, $dim(Nu(L)) + dim(Im(L)) = dim(V)$

Se puede observar que en los ejemplos anteriores se cumple la propiedad.

Corolario 0.11.

- *Una transformación lineal inyectiva conserva la independencia lineal*
- *Una transformación lineal sobreyectiva cubre todo el codominio*

Demostración:

- Recordemos que una aplicación L es inyectiva si $v_1 \neq v_2 \Rightarrow L(v_1) \neq L(v_2)$ (ó, equivalentemente $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$).
  Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, la inyectividad es equivalente a que $Nu(L) = \{0_V\}$.
  En efecto, si suponemos que L es inyectiva, $L(v) \neq L(0_V) = 0_W$ para todo $v \neq 0_V$ por lo que el núcleo sólo podrá contener al cero. Por otro lado, si $Nu(L) = \{0_V\}$ podemos tomar dos vectores cualesquiera v_1, v_2 en V y suponer que $L(v_1) = L(v_2)$ entonces $L(v_1) - L(v_2) = 0$ pero como L es lineal tenemos que $L(v_1 - v_2) = 0$ y entonces $v_1 - v_2 \in Nu(L)$ pero como el núleo contiene solamente al vector nulo, $v_1 - v_2 = 0$ y $v_1 = v_2$, por lo tanto L es inyectiva.

  Ahora con esto probemos que una transformación lineal inyectiva conserva la independencia:
  Sea $U = \{u_1, ...u_k\}$ un subconjunto linealmente independiente de V y sea $L : V \to W$ una transformación lineal inyectiva, o lo que es lo mismo, una transformación tal que $Nu(L) = \{0_V\}$, tenemos que probar que $L(U) = \{L(u_1), ...L(u_k)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

  Armamos la combinación nula con los vectores de $L(U)$, $0_W = c_1 L(u_1) + ... + c_k L(u_k) = L(\underbrace{c_1 u_1 + ... + c_k u_k}_{\in Nu(L) = \{0_V\}})$,
  y de manera similar a lo probado en el teorema vemos que esto implica que los c_i son todos cero.

- Recordemos que una aplicación L es sobreyectiva si para todo elemento w del codominio existe un elemento$v$ del dominio tal que su imagen por L es w.
  Decir que la transformación cubre todo el codominio es lo mismo que decir que la imagen de la transformación es todo el codominio. Dada una transformación lineal $L : V \to W$, ya sabemos que $Im(L)$ es un subespacio del espacio W, el codominio, usando las dimensiones de los espacios y que los vectores de la imagen generarán W llegamos a que $Im(L) = W$.

Con la transformación del último ejemplo vemos muy claramente que éstas propiedades no se cumplen si la aplicación no es inyectiva o sobreyectiva respectivamente.
$L((x, y)) = (0, y)$ no es inyectiva y se ve de manera fácil que transforma la base canónica por ejemplo en un conjunto que contiene al vector nulo; y tampoco es sobreyectiva y ya mostramos que la imagen no es todo R^2 si no un plano.

Propiedad 0.12. *Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, con V un espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base arbitraria de V , entonces L queda completamente determinada por los n vectores $\{L(v_1), ..., L(v_n)\}$, es decir, por las n imágenes de los vectores de la base.*

Esto nos dice que podemos conocer una transformación lineal conociendo solamente como actúa con los vectores de una base cualquiera.

Ejemplo 0.13. *Hallar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que :*
$L(1, 0, 0) = (1, 0)$, $L(0, 1, 0) = (-1, -6)$, $L(0, 0, 1) = (0, 4)$

Tenemos que encontrar $L(x, y, z) =?$, sabemos cuanto vale en los vectores de una base, en este caso la base canónica y vamos a usar esos datos para ver cuanto vale en cualquier vector del espacio de salida.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, escribimos el vector en la base $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ y aplicamos la transformación lineal L para encontrar su valor:

$L(x, y, z) = L(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xL((1, 0, 0)) + yL((0, 1, 0)) + zL((0, 0, 1)) = x(1, 0) + y(-1, -6) + z(0, 4) = (x, 0) + (-y, -6y) + (0, 4z) = (x - y, -6y + 4z)$

Luego, $L(x, y, z) = (x - y, -6y + 4z)$ es la transformación buscada.

0.1 Representación matricial-Matriz asociada

Consideremos una transformación $L : V \to W$, con V un espacio vectorial de dimnesión n y W otro espacio vectorial (que eventualmente puede ser igual a V) de dimensión m, y sean $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente.

Primeramente evaluamos como actúa L sobre cada vector de la base B_V y luego escribiremos al vector resultante (que pertenece al subespacio W) en términos de los vectores de la base B_W. En efecto,

$$L(v_j) = w = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{ij}w_i + \cdots + a_{mj}w_m$$

Entonces, con las coordenadas a_{ij} formamos la columna j de la matriz A que reprsentará a L en las bases B_V y B_W, es decir:

$$[L]_{B_V B_W} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{12} \\ a_{21} & .. & a_{2m} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 0.14. *Dada $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L((x, y, z)) = (3x, y - z, 2z + x)$, hallar la matriz A asociada a L en las base $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $B_c = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.*

Comenzamos evaluando como actúa L sobre los vectores de la base B y luego escribimos el vector resultante en la base caónica.

$$L(1, 1, 1) = (3.1, 1 - 1, 2.1 + 1) = (3, 0, 3) = 3(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

$$L(1, 0, -1) = (3.1, 0 - (-1), 2.(-1) + 1) = (3, 1, -1) = 3(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + -1(0, 0, 1)$$

$$L(0, 1, 0) = (3.0, 1 - 0, 2.0 + 0) = (0, 1, 0) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

Con las coordenadas de cada vector formamos las columnas de la matriz y así obtenemos:

$$[L]_{BBc} = A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observar que como utilizamos la base canónica para el espacio de llegada las columnas coinciden los vectores imágenes

En el caso especial las transformaciones entre espacios de R^n tenemos la propiedad extra que dice que aplicar la transformación a un vector es lo mismo que multiplicar al vector por la matriz asociada.
Esto es,

Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea A una matriz asociada, entonces $L(v) = A.v$ (obviamente v debe estar expresado en la misma base usada para hallar A).

Por ejemplo, en el caso anterior tenemos que: $L((x, y, z)) = (3x, y - z, 2z + x) = \begin{pmatrix} 3x \\ y - z \\ 2z + x \end{pmatrix}$ (lo escribiremos así para multipllicar y visualizarlo mejor).

$$A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 3y \\ y + z \\ 3x - y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3x \\ y - z \\ 2z + x \end{pmatrix}$$

Pero si usamos la base canónica también para el espacio de salida (o expresamos $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en la base usada para V) obtendremos la igualdad.

$L(1, 0, 0) = (3, 0, 1) = \mathbf{3}(1, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 1, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 1)$

$L(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = \mathbf{0}(1, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 1)$

$L(0, 0, 1) = (0, -1, 2) = \mathbf{0}(1, 0, 0) + \mathbf{-1}(0, 1, 0) + \mathbf{2}(0, 0, 1)$

$$[L]_{BBc} = C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y ahora si

$$C. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ y - z \\ 2z + x \end{pmatrix}$$