1)

Decidir si este conjunto de vectores es un subespacio vectorial de R^3:

$S_1 = \{ < x ; y ; z > \in \mathbb{R}^3 : y - z \geq 0 \}$.

Aquí observen que la **condición** que cumplen los elementos del conjunto S1 está expresada mediante una desigualdad, la que traducida a lenguaje coloquial queda expresada: "**la segunda componente de cada elemento es mayor o igual que la tercera componente**"; luego (acá sí, hay que ser un poco observador y también "pícaro"), observen que si consideran un par de vectores opuestos entre sí, entonces tendrán que la condición se cumple para uno de ellos, pero no se cumple para el otro, como mostramos en este Contraejemplo:

$u = < 3 ; 8 ; 1 >$, para este vector: $y - z = 8 - 1 = 7 \geq 0$, Verifica,

$-u = < -3 ; -8 ; -1 >$, para este vector: $y - z = -8 - (-1) = -7 < 0$, No verifica,

por lo tanto S_1 con la suma no conforman un grupo conmutativo, porque algunos de sus elementos no admite elemento opuesto y, por lo tanto, **pueden concluir que el conjunto S_1 no es un subespacio vectorial de R^3**.

2)

Decidir si este conjunto de vectores es un subespacio vectorial de R^3:

$S = \{ < x ; y ; z > \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \}$.

Aquí planteamos las tres condiciones que deben verificarse para que el subconjunto S del espacio vectorial R^3 sea un subespacio vectorial de este último, como ustedes han visto en las clases de teoría:

1°)

"**el vector nulo del espacio vectorial R^3: $o = < 0 ; 0 ; 0 >$ debe pertenecer al subconjunto S**",

aquí observen que las componentes de este vector son:

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

a continuación plantean la condición que tienen coloreada en la expresión del subconjunto S, y queda:

$x + y =$ (aquí reemplazan valores) $= 0 + 0 = 0$,

por lo que pueden concluir que **el vector nulo del espacio vectorial R^3 pertenece al conjunto S**;

2°)

"**la suma suma de dos vectores pertenecientes al subconjunto S también pertenece a éste**",

aquí plantean las expresiones de dos elementos que pertenecen al conjunto S, y queda:

$$u_1 = < x_1 ; y_1 ; z_1 >\text{, con la condición: } x_1 + y_1 = 0 \text{ (1),}$$
$$u_2 = < x_2 ; y_2 ; z_2 >\text{, con la condición: } x_2 + y_2 = 0 \text{ (2),}$$

a continuación, plantean la expresión del vector suma de estos dos vectores, y queda:

$$u_1 + u_2 = < x_1 ; y_1 ; z_1 > + < x_2 ; y_2 ; z_2 >,$$

resuelven la suma vectorial, y queda:

$$u_1 + u_2 = < x_1 + x_2 ; y_1 + y_2 ; z_1 + z_2 >,$$

aquí observen que las componentes de este vector son:

$$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ z = z_1 + z_2,$$

a continuación plantean la condición que tienen coloreada en la expresión del subconjunto S, y queda:

$$x + y = \text{(aquí sustituyen expresiones)} = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \text{(ordenan y asocian términos)} =$$
$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \text{(sustituyen los valores señalados (1) (2))} = 0 + 0 = 0,$$

por lo que pueden concluir que **la suma de dos vectores pertenecientes al subconjunto S también pertenece al mismo**;

3°)

"**el producto de un escalar real por un vector perteneciente al subconjunto S también pertenece a éste**",

aquí plantean las expresión de un elemento que pertenece al conjunto S, y de un escalar real, y queda:

$$u_1 = < x_1 ; y_1 ; z_1 >\text{, con la condición: } x_1 + y_1 = 0 \text{ (3),}$$
$$k \in \mathbb{R},$$

a continuación, plantean la expresión del vector producto del escalar por el vector planteado, y queda:

$$k*u_1 = k*< x_1 ; y_1 ; z_1 >,$$

resuelven la multiplicación de escalar por vector, y queda:

$$k*u_1 = < k*x_1 ; k*y_1 ; k*z_1 >,$$

aquí observen que las componentes de este vector son:

$$x = k*x_1,\ y = k*y_1,\ z = k*z_1,$$

a continuación plantean la condición que tienen coloreada en la expresión del subconjunto S, y queda:

$x + y =$ (aquí sustituyen las expresiones de las componentes) $= k*x_1 + k*y_1 =$ (extraen factor común) =

$= k*(x_1 + y_1) =$ (reemplazan el valor señalado (3)) $= k*0 = 0$,

por lo que pueden concluir que **el producto de un escalar real por un vector perteneciente al subconjunto S también pertenece al mismo**;

por último, como se cumplen las condiciones (1°), (2°) y (3°), entonces pueden concluir que **el conjunto S es un subespacio vectorial de R^3**.

3)

Sea L: $R^3 \rightarrow R^3$, L es una transformación lineal, de la que se conoce:

L(1;1;1) = < 1 ; 2 ; 3 > (1),

L(0;1;0) = < 1 ; -1 ; 0 > (2),

L(-1;-1;1) = < 5 ; 4 ; 3 > (3).

Aquí pueden comenzar por expresar a los vectores que tienen en los argumentos de la transformación lineal en función de los vectores canónicos de R^3 (observen que en la segunda igualdad no es necesario este planteo):

para el primer argumento tienen:

< 1 ; 1 ; 1 > = 1*< 1 ; 0 ; 0 > + 1*< 0 ; 1 ; 0 > + 1*< 0 ; 0 ; 1 >,

a continuación, aplican la transformación lineal en ambos miembros, y queda:

L(1 ; 1 ; 1) = L(1*< 1 ; 0 ; 0 > + 1*< 0 ; 1 ; 0 > + 1*< 0 ; 0 ; 1 >),

aplican la definición de transformación lineal en el segundo miembro (recuerden que pueden separar en términos y extraer factores escalares), y queda:

L(1 ; 1 ; 1) = L(1 ; 0 ; 0) + L(0 ; 1 ; 0) + L(0 ; 0 ; 1),

aquí sustituyen la expresión señalada (1) en el primer miembro, y la expresión señalada (2) en el segundo término en el segundo miembro, y queda:

< 1 ; 2 ; 3 > = L(1 ; 0 ; 0) + < 1 ; -1 ; 0 > + L(0 ; 0 ; 1),

restan la expresión coloreada en ambos miembros, y queda:

< 0 ; 3 ; 3 > = L(1 ; 0 ; 0) + L(0 ; 0 ; 1) (4);

para el tercer argumento tienen:

$$< -1 ; -1 ; 1 > = -1*< 1 ; 0 ; 0 > - 1*< 0 ; 1 ; 0 > + 1*< 0 ; 0 ; 1 >,$$

a continuación, aplican la transformación lineal en ambos miembros, y queda:

$$L(-1 ; -1 ; 1) = L(-1*< 1 ; 0 ; 0 > - 1*< 0 ; 1 ; 0 > + 1*< 0 ; 0 ; 1 >),$$

aplican la definición de transformación lineal en el segundo miembro (recuerden que pueden separar en términos y extraer factores escalares), y queda:

$$L(-1 ; -1 ; 1) = -L(1 ; 0 ; 0) - L(0 ; 1 ; 0) + L(0 ; 0 ; 1),$$

aquí sustituyen la expresión señalada (3) en el primer miembro, y la expresión señalada (2) en el segundo término en el segundo miembro, y queda:

$$< 5 ; 4 ; 3 > = -L(1 ; 0 ; 0) - < 1 ; -1 ; 0 > + L(0 ; 0 ; 1),$$

suman la expresión coloreada en ambos miembros, y queda:

$$< 6 ; 3 ; 3 > = -L(1 ; 0 ; 0) + L(0 ; 0 ; 1) \quad (5);$$

luego, suman miembro a miembro las ecuaciones señaladas (4) (5), resuelven, cancelan términos opuestos, y queda:

$$< 6 ; 6 ; 6 > = 2*L(0 ; 0 ; 1),$$

dividen por 2 en ambos miembros, resuelven la expresión vectorial en el segundo miembro, y luego despejan:

$$L(0 ; 0 ; 1) = < 3 ; 3 ; 3 > \quad (6);$$

luego, restan miembro a miembro las ecuaciones señaladas (4) (5), resuelven, cancelan términos opuestos, y queda:

$$< -6 ; 0 ; 0 > = 2*L(1 ; 0 ; 0),$$

dividen por 2 en ambos miembros, resuelven la expresión vectorial en el segundo miembro, y luego despejan:

$$L(1 ; 0 ; 0) = < -3 ; 0 ; 0 > \quad (7);$$

y observen que en las igualdades vectoriales coloreadas con rojo y señaladas (2) (6) (7) tienen las expresiones de los transformados de los vectores canónicos de R^3.

Luego, plantean la expresión de la transformación lineal en estudio, y queda (observen que aquí volvemos a expresar al argumento como combinación lineal de los vectores canónicos, y que volvemos a aplicar la definición de transformación lineal):

$$L(x;y;z) =$$

$$= L(<x;0;0> + < 0 ; y ; 0 > + < 0 ; 0 ; z >) =$$

$$= L(x;0;0) + L(0 ; y ; 0) + L(0 ; 0 ; z) =$$

$$= L(x*< 1 , 0 ; 0 >) + L(y*< 0 ; 1 ; 0 >) + L(z*< 0 ; 0 ; 1 >) =$$

$$= x* L(1 , 0 ; 0) + y*L(0 ; 1 ; 0) + z*L(0 ; 0 ; 1),$$

aquí sustituyen las expresiones señaladas (2) (6) (7), y queda:

$$L(x;y;z) = x*< -3 ; 0 ; 0 > + y*< 1 , -1 ; 0 > + z*< 3 ; 3 ; 3 >,$$

a continuación resuelven los productos de escalares por vectores, y queda:

$$L(x;y;z) = < -3x ; 0 ; 0 > + < y ; -y ; 0 > + < 3z ; 3z ; 3z >,$$

finalmente, resuelven la suma vectorial, y la expresión de la transformación lineal en estudio queda:

$L(x;y;z) = < -3x + y + 3z \; ; \; -y + 3z \; ; \; 3z >$,

y observen que esta expresión es válida si los elementos del dominio (R^3) y de la imagen (R^3) están expresados en la base canónica del espacio vectorial R^3.

4)

¿Las matrices cuadradas de orden n*n que son invertibles conforman un subespacio vectorial de R^{n*n}?

Llamemos S al conjunto de matrices cuadradas de orden n*n que son invertibles. Luego, recuerden que este conjunto con la suma de matrices deben conformar un grupo conmutativo, por lo que deben cumplir con la Ley de Existencia del Elemento Neutro, además de las otras leyes que ustedes han estudiado.

Luego, pueden concluir que el conjunto S no es un subespacio de R^{n*n}, **porque la matriz nula no es invertible** y, por lo tanto no pertenece al conjunto, y entonces tienes que S con la suma usual de matrices no conforman un grupo conmutativo.

5)

¿Las matrices cuadradas de orden 2*2 que no son invertibles conforman un subespacio vectorial de R^{2*2}?

Llamemos T al conjunto de matrices cuadradas de orden 2*2 que son invertibles. Luego, recuerden que este conjunto con la suma de matrices deben conformar un grupo conmutativo, por lo que deben cumplir con la Ley de Cierre, además de las otras leyes que ustedes han estudiado.

Luego, a modo de contraejemplo, vamos a considerar dos matrices pertenecientes al conjunto T, y por lo tanto no invertibles, cuya suma sí resulta ser invertible. Por ejemplo, consideren las matrices (aquí recuerden que una matriz cuadrada que es invertible tiene determinante distinto de cero, y recuerden que ustedes han estudiado en Matemática 1 que el determinante de una matriz cuadrada de orden dos es igual a la resta del producto de los elementos de su diagonal principal, menos el producto de los elementos de su diagonal secundaria):

$$A = \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix},$$

aquí observen que el determinante de esta matriz es igual a cero, por lo que A pertenece al conjunto en estudio, y por lo tanto tienen que la matriz A no es invertible;

$$B = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix},$$

aquí observen que el determinante de esta matriz es igual a cero, por lo que B pertenece al conjunto en estudio, y por lo tanto tienen que la matriz B no es invertible,

luego, plantean la expresión de la matriz suma de la matriz A más la matriz B, y queda:

A + B =

3 0

0 1,

y aquí observen que el determinante de esta matriz es:

det(A + B) = 3, que es distinto de cero,

por lo que esta matriz <u>sí es invertible</u> y, por lo tanto, no pertenece al conjunto T, por lo que pueden concluir que el conjunto T con la suma de matrices no verifica la Ley de Cierre y, por lo tanto, no conforma un grupo conmutativo con la suma usual de matrices y, por lo tanto, **el conjunto T no es un subespacio vectorial de R^{2x2}.**

6)

Mostrar que la Transformación Identidad es lineal, y determinar su Núcleo y su Imagen.

Aquí plantean la expresión de la Transformación Identidad, cuyo dominio es un espacio vectorial V, y cuyo codominio es el mismo espacio vectorial V, y queda:

T(u) = u,

y observen que esta expresión en lenguaje coloquial es: “el transformado de un vector es igual a dicho vector”, a continuación, plantean la definición de transformación lineal, y queda:

1°a)

T(u + v) = (recuerden: “el transformado de un vector es igual a dicho vector”) = **u + v (1 a)**,

1°b)

T(u) + T(v) = (OJO: aquí resuelven cada término por separado) = **u + v (1 b),**

y <u>como las expresiones señaladas (1 a) y (1 b) coinciden</u>, entonces pueden concluir que **la primera condición se cumple**,

2°a)

T(k*u) = (recuerden: “el transformado de un vector es igual a dicho vector”) = **k*u (2 a)**,

2°b)

k*T(u) = (OJO: aquí resuelven el segundo factor) = **k*u (2 b),**

y como las expresiones señaladas (2 a) y (2 b) coinciden, entonces pueden concluir que **la segunda condición se cumple**.

Luego, como tienen que se cumplen las dos condiciones establecidas en la definición de Transformación Lineal, entonces pueden concluir que **la Transformación Identidad es una Transformación Lineal.**

Luego, plantean la condición que cumplen los elementos que pertenecen al Núcleo de una Transformación Lineal (recuerden: "el transformado de un vector perteneciente al Núcleo es igual al vector nulo perteneciente al codominio"), y queda (observen que designamos "**u**" a un elemento genérico perteneciente al Núcleo de la Transformación Lineal Identidad, que designamos "**o**" al vector nulo del espacio vectorial V, y que designamos "**n**" a la dimensión de dicho espacio vectorial):

$$\mathbf{T(u) = o},$$

aquí resuelven el primer miembro (recuerden: "el transformado de un vector es igual a dicho vector"), y queda:

$$\mathbf{u = o},$$

con lo que pueden concluir que el vector nulo es el único elemento perteneciente al Núcleo, cuya expresión queda:

$$\mathbf{N = \{ o \}},$$

y su dimensión es:

$$\mathbf{dim(N) = 0};$$

luego, de acuerdo con el **Teorema de las Dimensiones**, tienen que "la suma de la dimensión del Núcleo de una Transformación Lineal, más la suma de la dimensión de su Imagen, es igual a la dimensión de su Dominio", pueden plantear la ecuación:

$$\mathbf{dim(N) + dim(Im) = dim(V)},$$

aquí sustituyen el valor de la dimensión del Núcleo y la expresión de la dimensión del dominio, y queda:

$$\mathbf{0 + dim(Im) = n},$$

cancelan el término nulo, y finalmente queda:

$$\mathbf{dim(Im) = n},$$

y como tiene que la dimensión del codominio (V) es igual a la dimensión de la imagen, entonces pueden concluir:

$$\mathbf{Im = V},$$

por lo que tienen que la imagen de la Transformación Lineal Identidad es igual a su codominio, que es el espacio vectorial V.

7)

Dado el espacio vectorial "conjunto de polinomios cuyo grado es tres o menor que tres", mostrar cuál es su base canónica.

Plantean la expresión de este espacio vectorial, y queda:

$$P_3[x] = \{ p(x) = a + b*x + c*x^2 + d*x^3, \text{ con } \{a,b,c,d\} \subset \mathbb{R} \},$$

introducen el elemento neutro de la multiplicación en los números reales en el primer elemento de la expresión del elemento genérico de este espacio vectorial, y queda:

$$P_3[x] = \{ p(x) = a*1 + b*x + c*x^2 + d*x^3, \text{ con } \{a,b,c,d\} \subset \mathbb{R} \},$$

y observen que un conjunto generador de este Espacio Vectorial es el conjunto:

$$B = \{ 1 ; x ; x^2 ; x^3 \},$$

a continuación, plantean la "combinación lineal nula", y queda (designamos A, B, C y D a los escalares reales):

$$A*1 + B*x + C*x^2 + D*x^3 = 0,$$

expresan al segundo miembro como el elemento neutro del Espacio Vectorial en estudio, y queda:

$$A*1 + B*x + C*x^2 + D*x^3 = 0*1 + 0*x + 0*x^2 + 0*x^3,$$

y por igualdad entre expresiones polinómicas (recuerden: igualamos miembro a miembro los términos con grados iguales), queda:

$$A = 0, B = 0, C = 0, D = 0,$$

por lo que pueden concluir que los elementos pertenecientes al conjunto B son linealmente independientes y, por lo tanto, tienen que **el conjunto B es una base del espacio vectorial $P_3[x]$**, cuya dimensión es 4.