Números Racionales y Números Reales

1 Números Racionales

Un **número racional** es todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros (o más precisamente, un entero y un natural positivo, o sea, podemos considerar que el denominador nunca es negativo)

Es decir, una fracción común $\frac{a}{b}$ con *numerador* a y *denominador* b distinto de cero.

El término **racional** alude a una fracción o parte de un todo.

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ (o bien Q) que deriva de *cociente* (Quotient en varios idiomas europeos).

Estrictamente, un **número racional** es el conjunto de todas las *fracciones equivalentes* a una dada; de todas ellas, se toma como representante canónico de dicho número racional a la *fracción irreducible.*

Observación 1.1. *Este conjunto de números incluye a los números enteros.*

Cualquier entero n *se puede expresar como el número racional* $\frac{n}{1}$ *debido a eso se escribe frecuentemente* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

También se dice que $\mathbb{Z}$ *está contenido en* $\mathbb{Q}$ *pero técnicamente los racionales contienen un subanillo isomorfo al anillo de los números enteros.*

1.1 Artimética de los Números Racionales

- **Equivalencia entre fracciones**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textit{ si y sólo si } \quad ad = bc$$

- **Orden de los números racionales**

  Cuando ambos denominadores son positivos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$*si y sólo si* $\quad ad < bc$

  Si alguno de los denominadores es negativo, las fracciones deben convertirse en otras equivalentes con denominadores positivos, siguiendo las ecuaciones: $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad y \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$

- **Operaciones entre Números Racionales**

1. **Suma**:
   Se define la suma o adición de dos racionales a la operación que a todo par de números racionales le hace corresponder otro racional de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

   Como el producto y la suma de enteros son operaciones cerradas el resultado de la suma de fracciones devuelve otra fracción (cociente de dos enteros), por lo tanto la operación de adición está bien definida y es cerrada.
   Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales, observemos que dado que el producto y la suma de enteros son conmutativas vale que:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

   Y por lo tanto, la suma de racionales es conmutativa. De manera similar se puede probar que la suma es asociativa.

   Concluimos que la suma es cerrada, asociativa y conmutativa.

   El elemento **neutro** para la suma de racionales es el mismo neutro que para la suma de enteros, el 0.

2. **Resta**:
   El inverso aditivo u opuesto existe y está dado por: $-(\frac{a}{b})=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$

   La operación que a todo par de racionales le hace corresponder su diferencia se llama **resta** o *diferencia* y se la considera operación *inversa* de la suma $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+(-\frac{c}{d})$

3. **Multiplicación**:
   La multiplicación o producto de dos números racionales está dado por:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

   Por la definción anterior del producto en $\mathbb{Q}$ y por ser el producto de enteros cerrado en $\mathbb{Z}$ queda claro que la multiplicación de racionales es una operación cerrada.

   Veamos que el producto es asociativo: Sean $\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ números racionales.
   Por definición de producto y recordando que el producto de enteros es asociativo vale:

$$\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\left(\frac{ac}{bd}\right).\frac{e}{f}=\frac{(ac)e}{(bd)f}=\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}.\left(\frac{ce}{df}\right)=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$$

   Mostrando que el producto de racionales es asociativo. De igual forma se puede mostrar facilmente que el producto es conmutativo.

   La multiplicación de racionales es cerrada, asociativa y conmutativa.

   El elemento **neutro** para el producto de racionales es el mismo neutro que para el producto de enteros, el 1.

4. **División**:
   Inversos:
   El inverso multiplicativo existe en los números racionales y está dado por: $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ con $a \neq 0$

   Se define la división o *cociente* de dos racionales r entre s distinto de 0, al producto de r por el inverso de s, esto es:
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$$

   Observemos que como decimos que los racionales son no nulos a y c (los numeradores) son disntintos de 0*, por lo tanto no tendremos problemas al dividir o buscar inversos*

1.2 Densidad de los racionales

Los números racionales cumplen la propiedad arquimediana o de *densidad*, esto es, para cualquier par de números racionales existe otro número racional situado entre ellos, propiedad que no está presente en los números naturales ni en los números enteros.

Una forma de mostrar que $\mathbb{Q}$ es denso es tomar dos números racionales y encontrar otro racional entre ellos.

Sean x e y en $\mathbb{Q}$
Supongamos que $x < y$, entonces $2x = x + x < x + y$

y de la misma forma $x + y < y + y = 2y$
Luego, $2x < x + y < 2y$, y diviendo todo por 2 nos queda $x < \frac{x+y}{2} < y$
el número $z = \frac{x+y}{2}$ es el racional que existe entre x e y.

2 Números Irracionales

Un **número irracional** es un número que no puede ser expresado como cociente de dos enteros, es decir que no puede ser una fracción $\frac{m}{n}$ donde m y n sean enteros (con n diferente de cero)

Ejemplo 2.1. $\sqrt{5}$ *es un número irracional.*

Supongamos que no se cumple la afirmación, es decir, $\sqrt{5}$ *es un número racional.*

Entonces puede representarse como el cociente de dos números enteros, o sea existen m, n en $\mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ (n no puede ser 0*). Para facilitar las cuentas vamos a suponer que m y n no tienen factores en común, es decir, son coprimos (será un fracción irreducible).*
Luego, si elevamos al cuadrado $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ y operamos vamos a obtener:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 5 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow n^2 5 = m^2$$

Cuando definimos los enteros de la fracción que igualamos a $\sqrt{5}$ pusimos $n \neq 0$. Obviamente m no puede ser 0 *(ya que si no llegaríamos a un absurdo, $\sqrt{5} = 0$)*

Observemos que tampoco m y n pueden ser iguales a 1 o -1.

Si $m=1$, $\sqrt{5}=\frac{1}{n}$ o equivalentemente, $5=\frac{1}{n^2}$ que es igual a $n^2 5=1$, lo cual es un absurdo ya que 5 no divide a 1.

Pasa lo mismo si $m=-1$.

Si ahora suponemos que $n=1$ (o de la misma forma $n=-1$) obtenemos que $\sqrt{5}=\frac{m}{1}$ o lo que es lo mismo $5=m^2$.

Como m no es 0, ni 1 o -1, podemos aplicar el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA), m será producto finito de primos, por lo tanto:

$$5=m^2=\left(p_1^{h_1}....p_i^{h_i}\right)^2=\left(p_1^{2h_1}....p_i^{2h_i}\right)$$

Luego, el número primo 5 aparece una vez del lado izquierdo de la igualdad y una cantidad par de veces (que puede ser ninguna, cero veces) del lado derecho. Lo cual es un absurdo.

Ahora si, como m y n son números enteros (diferentes de 1, -1 y 0), por el TFA , son producto finito de números primos (y esa factorización es única salvo el orden)

$$\left(q_1^{s_1}....q_r^{s_r}\right)^2 5=\left(p_1^{t_1}....p_k^{t_k}\right)^2$$

$$\left(q_1^{2s_1}....q_r^{2s_r}\right) 5=\left(p_1^{2t_1}....p_k^{2t_k}\right)$$

Cada primo aparece una cantidad par de veces en cada uno de los lados de la igualdad, salvo el número primo 5 que aparece una cantidad impar ($2s_i+1$) de veces en el lado izquierdo (que puede ser una sola vez) y una cantidad par ($2t_j$) de veces en la lado derecho (que puede ser 0 veces), Absurdo!!.

Por lo tanto, no existen enteros tales que $\sqrt{5}$ sea cociente de ambos.

$\sqrt{5}$ es un número irracional.

2.1 Números Irracionales - Clasificación

Los números irracionales se clasifican en dos tipos:

Número algebraico:

Son la solución de alguna ecuación algebraica y se representan por un número finito de radicales libres o anidados en algunos casos.

Número trascendente:

No pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidadas; provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc.)

2.2 Números Irracionales - Propiedades

Estas son algunas propiedades importantes de los números irracionales

- La suma y la diferencia de un número racional y de un número irracional es un número irracional
- El producto de un racional diferente de cero por un irracional es un número irracional

- El cociente entre un racional no nulo y un irracional, es un número irracional
- El inverso de un número irracional es número irracional

Observación 2.2. *La suma y el producto de irracionales no son operaciones cerradas.*

Pensemos por ejemplo en el producto de $\sqrt{5}$ *por si mismo, o si al número irracional* π *le restamos la "parte" decimal de* π*, queda* 3 *que es un número entero.*

3 Números Reales

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales incluye tanto a los números racionales como a los irracionales.

Los números reales pueden ser descritos y construidos de varias formas, algunas simples aunque carentes del rigor necesario para los propósitos formales de matemáticas y otras más complejas pero con el rigor necesario para el trabajo matemático formal.

Con los números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas (suma, resta, producto, división y además potencias y raíces) con diversas excepciones importantes:

1. No existen raíces de orden par (cuadradas, cuartas, sextas, etc.) de números negativos en números reales
2. La división por cero no está definida (pues cero no posee inverso multiplicativo)
3. No se puede hallar el logaritmo de un número real negativo, cualquiera sea la base de logaritmos

El conjunto de los números reales junto con la suma y el producto usual, dotado del orden habitual que es compatible con estas operaciones, tiene estructura de **cuerpo**.