Tabla de integrales www.vaxasoftware.com/indexes.html

$\int dx = x + C$	$\int k dx = kx + C$
$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$
$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\|x+a\| + C$	$\int \frac{u'}{u+a} dx = \ln\|u+a\| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int u' e^u dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq 1)$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	$\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + C$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	$\int u'(1 + \tan^2 u) dx = \tan u + C$
$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\operatorname{cotan} x + C$	$\int \frac{u'}{sen^2 u} dx = -\operatorname{cotan} u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

Integral de la suma o resta	$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$
Integración por partes	$\int u dv = uv - \int v du$
Regla de Barrow	$\int_a^b f(x) dx = F(x)\|_a^b = F(b) - F(a)$

Siendo: $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ funciones de $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{C}$ constantes.

Tabla de Primitivas (o “Antiderivadas”),

que corresponde a las funciones de una variable que han estudiado en Matemática 2.

Luego, comenzamos con un repaso, con algunas integrales, en la que realizamos todos los pasos con detalle, pero ustedes irán resumiéndolos a medida que vayan resolviendo los ejercicios del Trabajo Práctico.

1)

$$I = \int (-1/x^3 + 5/x - x^{-3} + 9*\mathrm{senx})*dx,$$

observen que tienen una integral indefinida; luego expresan al primer término con una potencia con exponente negativo, separan en términos, extraen factores constantes de los argumentos, y queda:

$$I = -1*\int x^{-3}*dx + 5*\int (1/x)*dx - \int x^{-2/3}*dx + 9*\int \mathrm{senx}*dx,$$

integran (observen que tienen todas integrales que están en la tabla), y queda:

$$I = -1*x^{-2}/(-2) + 5*\mathrm{Ln}|x| - x^{1/3}/(1/3) + 9*(-\mathrm{cosx}) + C,$$

resuelven coeficientes,y queda:

$$\mathbf{I = (1/2)*x^{-2} + 5*Ln|x| - 3*x^{1/3} - 9*cosx + C},$$

que es la solución general de esta integral indefinida, que corresponde a una familia de funciones, que difieren todas en el valor que le asignen a la constante arbitraria C; luego, pueden verificar que esta es efectivamente la solución de la integral derivando esta última expresión, y verán que obtienen la expresión del argumento de la integral original.

2)

$$I = \int (x^2/3 - 3*x - \sqrt{(x)} + 5)*dx,$$

observen que tienen una integral indefinida; luego expresan a la raíz como una potencia con exponente fraccionario, separan en términos, extraen factores constantes de los argumentos, y queda:

$$I = (1/3)*\int x^2*dx - 3*\int x^1*dx - \int x^{1/2}*dx + 5*\int 1*dx,$$

integran (observen que tienen todas integrales que están en la tabla), y queda:

$$I = (1/3)*x^3/3 - 3*x^2/2 - x^{3/2}/(3/2) + 5*x + C,$$

resuelven coeficientes (OJO con el tercer término), y queda:

$$\mathbf{I = (1/9)*x^3 - (3/2)*x^2 - (2/3)*x^{3/2} + 5*x + C},$$

que es la solución general de esta integral indefinida, que corresponde a una familia de funciones, que difieren todas en el valor que le asignen a la constante arbitraria C; luego, pueden verificar que esta es efectivamente la solución de la integral derivando esta última expresión, y verán que obtienen la expresión del argumento de la integral original.

3)

$$I = \int_{-2}^{4} (3*(x - 1/3)^2 - 8*e^x)*dx,$$

observen que desarrollan el binomio elevado al cuadrado en el primer término, luego distribuyen el factor común (observen que agregamos un factor neutro en el tercer término), y queda:

$$I = \int_{-2}^{4} (3*x^2 - 2*x + (1/3)*1 - 8*e^x)*dx,$$

observen que tienen una integral definida; luego integran (observen que integramos término a término en forma directa, y que indicamos con corchetes que deben evaluar con Regla de Barrow entre x = -2 y x = 4), y queda:

$$I = [\ 3*\mathbf{x^3/3} - 2*\mathbf{x^2/2} + (1/3)*\mathbf{x} - 8*\mathbf{e^x}\ ],$$

resuelven coeficientes en los dos primeros términos, y queda:

$$I = [\ 3x^3 - x^2 + (1/3)*x - 8*e^x\ ],$$

evalúan, y queda:

$$I = (\ \mathbf{4}^3 - \mathbf{4}^2 + (1/3)*\mathbf{4} - 8*e^{\mathbf{4}}\ ) - (\ (\mathbf{-2})^3 - (\mathbf{-2})^2 + (1/3)*(\mathbf{-2}) - 8*e^{\mathbf{-2}}\ ),$$

y queda para ustedes hacer el cálculo.

Método de Sustitución (o de Cambio de Variable)

Ustedes ya vieron que para derivar funciones compuestas hemos empleado a Regla de la Cadena y, en general, para integrar funciones compuestas aplicamos el Método de Sustitución, y observen que en la segunda columna de la Tabla de Primitivas tienen planteadas en forma general algunas integrales que se resuelven con este método.

4)

$$\mathbf{I = \int (\ \cos(5*x^3)*x^2\ )*dx},$$

---

observen que esta integral indefinida no es de resolución directa, pero observen que en el primer factor de su argumento tienen la expresión de una composición de funciones, por lo que pueden plantear la sustitución a partir de la expresión **primaria**:

$$\mathbf{w = 5*x^3},$$

aquí derivan (observen que expresamos a la derivada como cociente entre diferenciales), y queda:

$$dw/dx = 15*x^2,$$

y de aquí despejan:

$$\mathbf{dw/15 = x^2*dx}$$

---

luego, sustituyen las expresiones coloreadas por sus expresiones equivalentes en negrita, y la integral queda:

$$I = \int (\ \cos\mathbf{w}\ )*\mathbf{dw/15},$$

extraen el divisor numérico como un factor fraccionario, y queda:

$$I = (1/15)* \int \cos\mathbf{w}*\mathbf{dw},$$

integran (observen que ahora la resolución es directa), y queda:

$$I = (1/15)*\mathrm{sen}\mathbf{w} + C,$$

aquí vuelven a sustituir la expresión original (observen que está coloreada con verde), y queda:

$$\mathbf{I = (1/15)*\cos(5*x^3) + C}.$$

5)

$$I = \int (e^{2x} / (e^{2x} + 4))*dx,$$

aquí observen que el argumento consiste en una expresión fraccionaria, por lo que ordenamos expresiones, y planteamos una sustitución a partir de la expresión divisora, y queda:

$$\mathbf{I = \int (1 / (e^{2x} + 4))* e^{2x} *dx},$$

----

observen que esta integral indefinida no es de resolución directa, pero que pueden plantear la sustitución a partir de la expresión **divisora**:

$$\mathbf{w = e^{2x} + 4},$$

aquí derivan (observen que expresamos a la derivada como cociente entre diferenciales, y que se debe aplicar la Regla de la Cadena en el primer término), y queda:

$$dw/dx = 2*e^{2x},$$

y de aquí despejan:

$$\mathbf{dw/2 = e^{2x}*dx}$$

----

luego, sustituyen las expresiones coloreadas por sus expresiones equivalentes en negrita, y la integral queda:

$$I = \int (1/\mathbf{w})*\mathbf{dw/2},$$

extraen el divisor numérico como un factor fraccionario, y queda:

$$I = (1/2)* \int (1/\mathbf{w})*\mathbf{dw},$$

integran (observen que ahora la resolución es directa), y queda:

$$I = (1/2)*Ln|\mathbf{w}| + C.$$

aquí vuelven a sustituir la expresión original (observen que está coloreada con verde, y que toma siempre valores positivos), y queda:

$$\mathbf{I = (1/2)*Ln(e^{2x} + 4) + C}.$$

Luego, tengan en cuenta que en el caso de tener que resolver una integral definida por medio del Método de Sustitución, todo consiste en resolver la integral indefinida correspondiente, y una vez resuelta ésta, pasar a evaluar con Regla de Barrow.

Además, tengan en cuenta que puede llegar a encontrarse con integrales que requieran más de un ensayo para resolverlas por medio del Método de Sustitución, o puede llegar a ser que la integral en cuestión no se pueda resolver con este método.

También tengan en cuenta que al aplicar este método, siempre queda una nueva integral, la que puede ser de resolución directa, puede que se resuelva a su vez con una nueva aplicación del Método de Sustitución, o que se resuelva por otro método. Además, existen integrales que solamente se pueden resolver en forma aproximada por métodos numéricos, que no veremos en este curso, como por ejemplo ocurre con la función cuya expresión es:

$$f(x) = e^{-x^2},$$

cuya gráfica es "una campana", y que es empleada en Probabilidades y Estadística, y que ustedes han visto en Matemática 3.

Método de Integración por Partes

Este método es útil cuando se tiene una multiplicación de funciones, y en forma general queda expresado por la ecuación integral:

$$\int u * dv = u*v - \int v*du,$$

y observen que siempre tendrán un término resuelto, y una integral subsidiaria, la cuál debe ser de menor complejidad, o a lo sumo de igual complejidad, que la integral que deben resolver, y OJO: tienen que considerar que la integral subsidiaria es una nueva integral, cuya resolución puede ser directa, o por medio de este método, o por medio del Método de Sustitución, o por medio de otros métodos de resolución de integrales.

Luego, para los casos más frecuentes, la elección de las funciones u y **dv** se puede visualizar en la tabla siguiente:

Clasificación	**Argumento**	**u**	**dv**
Grupo 1	x^n*e^x	x^n	e^x*dx
	x^n*cosx		$cosx*dx$
	x^n*senx		$senx*dx$
Grupo 2	$Ln\|x\|*x^n$	$Ln\|x\|$	x^n*dx
Grupo 3 "recursivas"	$senx*e^x$	senx	e^x*dx
	$cosx*e^x$	cosx	
OJO: hay otros casos además de los que resumimos en este cuadro			

A continuación, vamos con algunos ejemplos de integrales que se resuelven por medio de este método.

6)

$$I = \int Ln|x| * x^3*dx,$$

Plantean las expresiones:

u = **Ln|x|**, aquí derivan, y queda:: **du = (1/x)*dx**,

dv = **x^3*dx**, aquí integran, y queda: **v = x^4/4**

----

luego, aplican el Método de Integración por Partes, y queda:

$$I = Ln|x|*x^4/4 - \int (x^4/4)*(1/x)*dx,$$

ordenan factores en el primer término, simplifican y extraen el divisor constante de la integral, y queda:

$$I = (1/4)*x^4*Ln|x| - (1/4)* \int x^3*dx,$$

resuelven la integral subsidiaria (observen que su resolución es directa), y queda:

$$I = (1/4)*x^4*Ln|x| - (1/4)* x^4/4 + C,$$

resuelven el coeficiente en el segundo término, y queda:

$$\mathbf{I = (1/4)*x^4*Ln|x| - (1/16)* x^4 + C}.$$

7)

$$I = \int senx * x*dx,$$

ordenan factores en el argumento de la integral, y queda:

$$I = \int x*senx*dx,$$

Plantean las expresiones:

u = **x**, aquí derivan, y queda:: **du = 1*dx**,

dv = **senx*dx**, aquí integran, y queda: **v = -cosx**

----

luego, aplican el Método de Integración por Partes, y queda:

$$= x*(-cosx) - \int (-cosx)*1*dx =$$

resuelven signos en los dos términos, resuelven el argumento de la integral, y queda:

$$= -x*cosx + \int cosx*dx =$$

resuelven la integral subsidiaria (observen que su resolución es directa), y queda:

$$\mathbf{= -x*cosx + senx + C}.$$

8)

Vamos con una integral “recursiva”.

$I = \int \text{senx} * e^x * dx$

Plantean las expresiones:

u = **senx**, aquí derivan, y queda:: **du = cosx*dx**,

dv = **e^x*dx**, aquí integran, y queda: **v = e^x**

---

luego, aplican el Método de Integración por Partes, y queda:

$I = \text{senx} * e^x - \int e^x * \text{cosx} * dx$,

ordenan factores en el primer término y en el argumento de la integral subsidiaria, y queda:

$I = e^x * \text{senx} - \int \text{cosx} * e^x * dx$

Plantean las expresiones para la resolución de la integral subsidiaria (observen que también la podemos resolver con el Método de Integración por Partes):

u = **cosx**, aquí derivan, y queda:: **du = -senx*dx**,

dv = **e^x*dx**, aquí integran, y queda: **v = e^x**

---

luego, aplican el Método de Integración por Partes, y queda:

$I = e^x * \text{senx} – (\text{cosx} * e^x - \int e^x * (-\text{senx}) * dx)$,

distribuyen el signo en el agrupamiento (OJO con este paso), ordenan factores en el segundo término y en el argumento de la nueva integral subsidiaria, y queda:

$I = e^x * \text{senx} – e^x * \text{cosx} - \int \text{senx} * e^x * dx$,

OJO ACÁ: observen que en el último término tienen la expresión original, por lo que sustituyen, y queda la ecuación:

$I = e^x * \text{senx} – e^x * \text{cosx} – I$,

suman I en ambos miembros, y queda:

$2*I = e^x * \text{senx} – e^x * \text{cosx}$,

multiplican por 1/2 en todos los términos, introducen la constante de integración, y queda:

$\mathbf{I = (1/2) * e^x * senx – (1/2) * e^x * cosx + C}$.

Observen que decimos que en este ejemplo resolvimos una integral “recursiva”, porque en el proceso de su resolución volvimos a obtener la expresión de la integral que queríamos resolver, y al final terminamos despejando su expresión a partir de una ecuación, y, por último, introdujimos la constante de integración.

9)

Vamos con una sustitución “rara”.

$$I = \int e^{\sqrt{(x)}} * dx,$$

expresan al exponente como una potencia, y queda:

$$I = \int e^{\wedge} \mathbf{x^{1/2}} * \mathbf{dx},$$

---

observen que sustitución a partir de la expresión del exponente:

$$\mathbf{w} = \mathbf{x^{1/2}},$$

aquí derivan (observen que expresamos a la derivada como cociente entre diferenciales), y queda:

$$dw/dx = (1/2)*x^{-1/2},$$

aquí multiplican por 2 en ambos miembros, y queda:

$$2*dw/dx = x^{-1/2},$$

aplican la propiedad de las potencias con exponentes fraccionarios, y queda:

$$2*dw/dx = 1/\mathbf{x^{1/2}},$$

aquí vuelven a sustituir, y queda:

$$2*dw/dx = 1/\mathbf{w},$$

y de aquí despejan:

$$\mathbf{2*w*dw} = \mathbf{dx}$$

---

luego, sustituyen las expresiones coloreadas por sus expresiones equivalentes en negrita, y la integral queda:

$$I = \int e^{\mathbf{w}} * \mathbf{2*w*dw},$$

aquí extraen el factor constante, ordenan factores, y queda:

$$I = 2 * \int \mathbf{w} * \mathbf{e^{w}*dw},$$

Plantean las expresiones para aplicar el Método de Integración por Partes:

$\mathbf{u} = \mathbf{w}$, aquí derivan, y queda: $\mathbf{du = 1*dw}$,

$\mathbf{dv} = e^{w}*dw$, aquí integran, y queda: $\mathbf{v = e^{w}}$

---

luego, aplican el Método de Integración por partes, y queda:

$$I = 2 * (w*e^{w} - \int e^{w}*1*dw),$$

distribuyen el factor común, resuelven el argumento de la integral, y queda:

$$I = 2*w*e^{w} – 2 * \int e^{w}*dw,$$

resuelven la integral subsidiaria (observen que su resolución es directa), y queda:

$$I = 2*\mathbf{w}*e^{w} – 2*e^{\mathbf{w}} + C,$$

aquí sustituyen (recuerden: $w = x^{1/2}$), y queda:

$$\mathbf{I = 2*x^{1/2}*e^{\wedge}x^{1/2} – 2*e^{\wedge}x^{1/2} + C}.$$