UNLP. Facultad de Informática

Fundamentos de Teoría de la Computación **Curso 2020. Práctica 5**

Bibliografía

- Hamilton. Lógica para matemáticos. Capítulo 3
- Pons, Rosenfeld, Smith. Lógica para Informática. Capítulo 2

Temario

- Lógica de predicados de primer orden. Dominios, Interpretaciones, Satisfacción de fórmulas bien formadas. Niveles de Verdad y falsedad de las fórmulas. Tautologías, contradicciones, fórmulas lógicamente válidas.

Ejercicios

1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x_1, x_2, x_3 en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, y $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con g de aridad 1; f de aridad 2, A_1^2 de aridad 2

   i $\forall x_1(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3)) \to \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3))$.

   ii $\forall x_1(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3))) \to \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3)$.

2. Sean A y B *fbfs* escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de *fbfs* (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

   i $(\forall x)\ A$ $\qquad$ $\exists x A$

   ii $\exists x \exists y A$ $\qquad$ $\exists y \exists x A$

   iii $\exists x \forall y A$ $\qquad$ $\forall y \exists x A$

   iv $\exists x(A \wedge B)$ $\qquad$ $\exists x A \wedge \exists x B$

   v $\exists x(A \vee B)$ $\qquad$ $\exists x A \vee \exists x B$

   vi $\forall x(A \vee B)$ $\qquad$ $\forall x A \vee \forall x B$

3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

   Conjunto de constantes: $\mathcal{C} = \{c, u\}$.

   Sin símbolos de función: $\mathcal{F} = \varnothing$.

   Conjunto de símbolos de predicado: $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.

   Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

   . $I(c) = 0$

. $I(u) = 1$
. $I(A_1^2(x,y)) = \{(x,y) \in N \times N; x \leq y\}$
donde I es una función de interpretación semántica.

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.

i $A_1^2(c,x)$ es satisfactible en I.
ii $A_1^2(u,x)$ es satisfactible en I.
iii $\forall x A_1^2(c,x)$ es satisfactible en I.
iv $\forall x A_1^2(u,x)$ es satisfactible en I.
v $A_1^2(c,x)$ es verdadera en I.
vi $\forall x A_1^2(c,x)$ es lógicamente válida.
vii $A_1^2(u,c) \wedge \neg A_1^2(u,c)$ es contradictoria.

4. Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

   i $\mathcal{C} = \mathcal{F} = \varnothing$, $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.
   . $\forall x \forall y (A_1^2(x,y) \rightarrow A_1^2(y,x))$.
   . $\forall x (A_1^2(x,x))$.
   . $\forall x \forall y \forall z ((A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(y,z)) \rightarrow A_1^2(x,z))$.

   ii $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$, $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con f y A_1^2 de aridad 2.
   . $\forall x (A_1^2(x,c) \rightarrow A_1^2(x,f(y)))$.
   . $\forall x (\neg A_1^2(x,x))$.
   . $\neg \forall x \forall y (A_1^2(x,y))$.

5. Determinar si las siguientes *fbfs* escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.

   i $(\exists x)(\neg A(x)) \vee (\forall x)(A(x) \vee B(x))$.
   ii $\exists y \exists x\ P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y\ P(x,y)$.

6. i Si la *fbf* $A(x)$ es satisfactible, ¿entonces la *fbf* $\exists x A(x)$ es lógicamente válida?. Fundamentar.

   ii La *fbf* abierta $\forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall y \forall x\ P(x,y)$ ¿es lógicamente válida?. Fundamentar.

   iii Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q, ambas de aridad 1. Sea la *fbf* : $(P(c) \vee \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow Q(c)$ ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.

iv Sean A y B dos *fbf* escritas en un lenguaje de primer orden. La *fbf*: $\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)))$ es lógicamente válida? Fundamentar.

7. Sea A una *fbf* de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que A es verdadera en I si y sólo si $\neg A$ es falsa en I.

8. Sea A una *fbf* que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I? Fundamentar.