Números Complejos

Falta definir imaginario puro y las leyes de De Moivre

1 Introducción

Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$x^2 - 9 = 0$$

no es difícil encontrar que los números 3 y -3 satisfacen nuestra ecuación, o sea son soluciones.

Ahora pensemos en otra ecuación,

$$x^2 + 9 = 0$$

Ya sea por despeje directo o usando la fórmula de resolución de la ecuación de cuadrática vemos que esta nueva ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales. Llegamos a una raíz cuadrada de un número negativo y sabemos que eso no puede pasar *(recordar la regla de los signos)*

Pero este tipo de ecuaciones y otras similares que no tienen solución en $\mathbb{R}$ aparecen a menudo en las ciencias y la ingeniería, y lo vienen haciendo desde hace mucho!!

Ya en el siglo I a.c hay referencias a raíces cuadradas de números negativos en el trabajo de matemáticos griegos como Herón de Alejandría.
Luego, se hicieron patentes en el siglo XVI cuando matemáticos italianos como Tartaglia o Cardano buscaban fórmulas que dieran raíces exactas de polinomios de grado 2 y 3.

Los números complejos constituyen una extensión de los números reales , que permite obtener todas las raíces de cualquier polinomio.

Los números complejos son además utilizados en la representación de funciones trigonométricas y por ende, de funciones periódicas.

2 Definición - Forma binómica

Definimos al número i (unidad imaginaria) como aquel número que satisface la siguiente igualdad:

$$i^2 = -1$$

Esto nos permite ampliar al conjunto de los números reales y por lo tanto escribiremos a un **número complejo** z de la siguiente forma:

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Esta manera de introducir a los números complejos es a través de lo que llamamos *forma binómica del número complejo*

Luego el conjunto de números complejos, al que denotaremos como $\mathbb{C}$, se define por comprensión de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

Observemos que si tenemos $b = 0$ "recuperamos" a los números reales

Definición 2.1. *Dado un número complejo $z = a + ib$, se definen la parte real y la parte imaginaria de z como:*

$$Re(z) = a$$
$$Im(z) = b,$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$

Definición 2.2. *Dos números complejos son* ***iguales*** *si lo son las partes reales e imaginarias respectivamente.*

Es decir, dados dos números complejos z_1 y z_2, vale la igualdad si :

$$Re(z_1) = Re(z_2)$$
$$Im(z_1) = Im(z_2),$$

Definición 2.3. *El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ se lo denota como $\bar{z}$ ó z^* y se lo define como:*

$$\bar{z} = a - ib$$

Observamos que $\overline{(\overline{z})} = z$

3 Operaciones Aritméticas entre Números Complejos

- **Suma de Complejos**

  Definición 3.1. *Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, se define la* ***suma*** *de estos dos números como:*

  $$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

  Ejemplo 3.2. *Sean $z_1 = 1 + i2$ y $z_2 = 3 - i4$ entonces,*

  $$z_1 + z_2 = (1 + i2) + (3 - i4) = (1 + 3) + i(2 - 4) = 4 - i2$$

Observación 3.3. *Como sumamos "parte real con parte real" y "parte imaginario con parte imaginaria", todos números reales, podemos asegurar que la suma es cerrada, devuelve un número complejo y además será asoaciativa y conmutativa.*

También observamos que el ***neutro*** *para la suma de complejos es el número* $0 = 0 + i0$

- **Opuesto y Resta de Complejos**

Definición 3.4. *Dado un número complejo* $z = a + ib$ *se define el* ***opuesto*** *de* z *y se lo denota como* $-z$ *al complejo* $-z = -a - ib$.

(Observemos que $z + (-z) = 0$ que como dijimos antes es el neutro para la suma)

Esto nos permite definir la operación **resta** entre dos complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ como sigue:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - i\,(a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1) + (-a_2 - ib_2)$$

Es decir, no es más que sumarle a z_1 el opuesto de z_2.

Ejemplo 3.5. *Sean* $z_1 = 1 + i3$ *y* $z_2 = 2 - i5$,

$$z_1 - z_2 = (1 + i3) - (2 - i5) = (1 + i3) + (-2 + i5) = -1 + i8$$

- **Producto de Complejos**

Definición 3.6. *Dados dos números complejos* $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$, *se define el producto de estos dos números como:*

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a_1 + ib_1)\,.\,(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + ib_1ib_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 - b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7. *Sean* $z_1 = 2 + i3$ *y* $z_2 = 4 - i5$ *entonces,*

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (2 + i3)\,.\,(4 - i5) = 2.4 + 2(-i5) + i3.4 + i3.(-i5) \\ &= 8 - i10 + i12 - i^2 15 = 8 - i10 + i12 + 15 \\ &= (8 + 15) + i(-10 + 12) = 23 + i2 \end{aligned}$$

Observación 3.8. *De la definición de este producto vemos que es cerrado, asociativo y conmutativo.*

Observemos, además, que el ***neutro*** *para el producto de complejos es el número* $1 = 1 + i0$

- **Inverso y Cociente de Complejos**

Definición 3.9. *Dado el número complejo $z = a + ib \neq 0 + i0$, se define el inverso de z y se lo denota como z^{-1} al siguiente número:*

$$z^{-1} = \frac{1.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{a - ib}{(a+ib).(a-ib)}$$

Ejemplo 3.10. *Queremos calcular el inverso del complejo $z = 2+i$ (y obviamente queremos que ese inverso sea un número complejo, o sea, que tenga una parte real y una parte imaginaria mulpliticada por i) entonces,*

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{2-i3}{(2+i3).(2-i3)} = \frac{2-i3}{((2.2+3.3)+i(2.(-3)+3.2))} \\ &= \frac{2-i3}{13} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13} \end{aligned}$$

Definición 3.11. *Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + \imath b_1$ y $z_2 = a_2 + \imath b_2 \neq 0 + \imath 0$, se define el cociente de estos dos números y se lo denota como $\frac{z_1}{z_2}$, al producto de z_1 con el inverso de z_2 es decir:*

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1.z_2^{-1} = \frac{(a_1 + \imath b_1).(a_2 - \imath b_2)}{(a_2 + \imath b_2)(a_2 - \imath b_2)} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + \imath(-a_1b_2 + a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.12. *Por ejemplo si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 3 + i4$ entonces,*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} = \frac{(1+i).(3-i4)}{(3+i4)(3-i4)} = \frac{7-i}{25} = \frac{7}{25} - i\frac{1}{25}$$

- **Potencias de Complejos**

Potencias del número i

Sabemos que $i^2 = -1$, ahora nos preguntamos ¿cuánto vale i^n?

Observamos que:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 i = -1.i \\ i^4 &= i^2 i^2 = -1.-1 = 1 \end{aligned}$$

Esto nos permite inferir que $i^m = i^r$ siendo $m = 4q + r; 0 \leq r < 4$ ya que

$$i^m = i^{4q+r} = i^{4q} i^r = \left(i^4\right)^q i^r = 1^q i^r = 1.i^r = i^r$$

Ejemplo 3.13. *Calculemos las potencias* 173 *y* 1354 *de* i.

$$\begin{aligned} i^{173} &= i^{4\cdot 43+1} = i^{4\cdot 43} i^1 = \left(i^4\right)^{43} i = 1^{43} i = i \\ i^{1354} &= i^{4\cdot 338+2} = i^2 \end{aligned}$$

Con esta misma idea podemos calcular potencias de cualquier imaginario puro:

$$(ai)^m = a^m . i^r \, siendo \quad m = 4q + r; 0 \leq r < 4$$

Ejemplo 3.14.

$$(2i)^{15} = 2^{15} i^{15} = (4096) i^3 = (4096)(-i) = -4096i$$

Ahora tratemos de calcular $(a + ib)^2$, usemos la regla del binomio

$$(a + ib)^2 = a^2 + 2.a.bi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + (-b^2) = (a^2 - b^2) + i2ab$$

Si queremos calcular $(a + ib)^3$ o alguna potencia superior , debemos multiplicar al anterior o recordar el desarrollo del binomio de Newton.

No “parece” algo muy práctico, más adelante veremos otra manera de calcular potencias.

4 Plano Complejo - Diferentes representaciones

4.1 Representación en par ordenado

Geométricamente, un número complejo puede representarse como un punto en el plano, como un *par ordenado.*

Un número complejo z sería un par ordenado (a, b) donde a es la parte real y b la parte imaginaria de mi complejo.

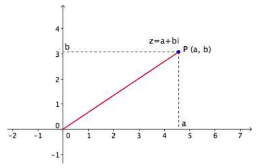
Se pueden definir en esta forma de manera natural la igualdad entre complejos como la igualdad entre pares ordenados (esto es, la primera coordinado del primer par debe ser igual a la primera coordenada del segundo par, y la segunda coordenada del primer par será igual a la segunda coordenada del segundo par); la suma de complejos y el producto por un escalar (por un real), siempre coordenada a coordenada.

Las operaciones de producto y cociente no son ya tan intuitivas.

La unidad imaginaria, nuestro i, se representará por el par $(0, 1)$.

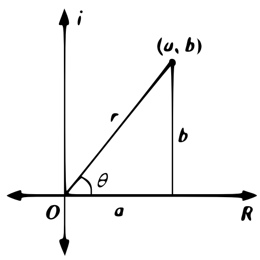
Esta forma de representación es la que muchos eligen para introducir el conjunto de los números complejos.

El concepto de número complejo extiende así la recta real a un espacio bidimensional, el llamado **Plano Complejo**.



4.2 Módulo y Argumento

De la representación en el plano complejo de un número z se puede ver que hay asociado a cada número complejo un número real que es su *distancia* al origen y llamaremos **módulo** del complejo y al que denotaremos como $|z|$, y un *ángulo* θ, que es el que forma el segmento de recta $|z|$ con el eje real positivo, al que llamaremos **argumento** de z y se definen de la siguiente forma:



Definición 4.1.

$$módulo\ de\ z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$argumento\ de\ z = \theta = \arctan(b/a)$$

Observemos que hay infinitos ángulos equivalentes a θ (es decir, ángulos que satisfacen que su tangente es igual a $\frac{b}{a}$) por eso tenemos que elegir el rango para que no haya confusión.
Nosotros en este curso vamos a pedir que $0 \leq \theta < 2\pi$

En términos de estos valores diremos que dos complejos z y w son **iguales** si :

$$módulo\ de\ z = |z| = |w| = módulo\ de\ w$$

$$\theta = argumento\ de\ z = argumento\ de\ w = \alpha + 2k\pi$$

Observando el gráfico y recordando propiedades y defenciones trigonométricas

$$\cos(\theta) = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{|z|}$$
$$\sin(\theta) = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{|z|}$$

se puede expresar la parte real y la parte imaginaria de cada complejo en forma binómica $z = a + ib$ como:

$$Re(z) = a = |z|\cos(\theta)$$
$$Im(z) = b = |z|\sin(\theta)$$

Y a partir de esto obtener nuevas representaciones.

- **Forma Trigonométrica**

$$z = a + ib = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

- **Forma Exponencial**
  Usando la formula de Euler
  $$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha);$$
  y la forma trigonométrica de un número complejo, obtenemos una forma cómoda de escribir a un número complejo z que se conoce como forma exponencial del complejo y se la define como:
  $$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$$

- **Forma Polar**
  La muy usada forma polar toma los elementos básicos, módulo y argumento. Es muy sencilla y práctica pero no es muy intuitiva para realizar operaciones.
  $$z = |z|_\theta$$

4.3 Operaciones en forma exponencial

La forma polar, trigonométrica o exponencial de un complejo resulta muy conveniente para el producto y cociente, y por ende para las potencias (que ya vimos eran tediosas para la forma binómicas).

Aqui trabajaremos solamente con la forma exponencial pero en las otras formas se opera de manera similar.

- **Producto y cociente de complejos en forma exponencial**

  Dados dos números complejos escritos en su forma exponencial, $z_1 = |z_1|e^{i\alpha_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\alpha_2}$, podemos escribir el producto y el cociente de dos número complejos de manera simple como:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|e^{i\alpha_1}|z_2|e^{i\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{i\alpha_1}e^{i\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|e^{i\alpha_1}}{|z_2|e^{i\alpha_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. *1. Calcular el producto de* $z_1 = |\sqrt{8}|e^{i\frac{5}{4}\pi}$ *y* $z_2 = |2|e^{i\frac{3}{2}\pi}$

$$z_1.z_2 = \left(|\sqrt{8}|e^{i\frac{5}{4}\pi}\right).\left(|2|e^{i\frac{3}{2}\pi}\right) = \sqrt{8}.2e^{i\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi\right)} = \sqrt{2.4}2e^{i\left(\frac{11}{4}\pi\right)} = |\sqrt{2}.2.2|e^{i\frac{8+3}{4}\pi} = |4\sqrt{2}|e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Recordemos que el argumento no puede ser mayor a 2π

2. Calcular el cociente entre $z_1 = |\sqrt{2}|e^{i\frac{\pi}{4}}$ *y* $z_2 = |4|e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{4e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2^3}}e^{i\left(-\frac{1}{12}\right)\pi} = \frac{1}{\sqrt{2^3}}e^{i\frac{23}{12}\pi}$$

observemos que el argumento no puede ser menor que 0

- **Potencias de un número Complejo**

Notamos que al escribir un número complejo en su forma exponencial resulta fácil calcular el producto o el cociente de dos números complejos, de manera similar ocurre con la forma trigonom'etrica o polar (aunque hay que recordar reglas y propiedades), esto nos permite definir la potencia n de un número complejo de manera muy simple.

Sea $z = |z|e^{i\alpha}$, n un número natural,

$$z^n = \underbrace{z.\dots.z.\dots.z}_{n} = \underbrace{|z|e^{i\alpha}.\dots.|z|e^{i\alpha}}_{n} = \left(\underbrace{|z|.\dots.|z|}_{n}\right)\left(\underbrace{e^{i\alpha}.\dots.e^{i\alpha}}_{n}\right) = |z|^n e^{i(\alpha+\dots+\alpha)} = |z|^n e^{in\alpha}$$

Luego,

$$z^n = \left(|z|e^{i\alpha}\right)^n = |z|^n e^{in\alpha}$$

Ejemplo 4.3. *Calcular* $(2+2i)^{15}$

Primero pasemos nuestro complejo $z = 2+2i$ *a la forma exponencial, calculando módulo y argumento:*

$$|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

El argumento de z*, llamemoslo* α*, podemos obtenerlo con calculando el arcotangente de* $\frac{2}{2}$ *o graficando nuestro complejo en el plano y "viendo" que el ángulo formado es de* 45^o *o* $\frac{\pi}{4}$

Ahora, $2+2i = z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *y la potencia* 15 *quedará :* $z^{15} = \left(2\sqrt{2}\right)^{15}\left(e^{i15\frac{\pi}{4}}\right) = 2^{22}\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$

- **Raíces n-ésimas de un complejo**

Definición 4.4. *Dado un número complejo $z = |z|e^{i\alpha}$, se define a las **raíces n-ésimas de z** (y se las denota como $z^{1/n}$), como los números complejos w que satisfacen la siguiente ecuación $w^n = z$.*

Observemos que dos complejos en forma exponencial son iguales si sus módulos coinciden y sus argumentos son iguales más algún múltiplo de 2π.

Luego, dado $z = |z|e^{i\alpha}$ y $n \in \mathbb{N}$ las raíces n-ésimas de z, las $w = |w|e^{i\varphi}$ tales que $w^n = z$, cumplen que :

$$|z|e^{i\alpha} = z = w^n = \left(|w|e^{i\varphi}\right)^n = |w|^n e^{in\varphi}$$

Entonces

$$|z| = |w|^n \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$$
$$n\varphi = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \phi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{N}$$

Observación 4.5. *Supongamos que $k > n$, podemos fijar $k = n + r$ con $0 < r < n$ y*

$$\varphi_k = \tfrac{\alpha+2k\pi}{n} = \tfrac{\alpha+2(n+r)\pi}{n} = \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{(2n+2r)\pi}{n} = \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{(2n)\pi+(2r)\pi}{n} = \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{(2r)\pi}{n} + \tfrac{(2n)\pi}{n} = \tfrac{\alpha+(2r)\pi}{n} + 2\pi = \varphi_r$$

Como $r < n$ obtenemos una ra'iz "repetida"

Entonces $w = |w|e^{\phi}$ donde $|w| = \sqrt[n]{|z|} = |z|^{1/n}$ y $\varphi = \frac{\alpha+2k\pi}{n}; 0 \leq k < n$, es decir :

Definición 4.6. *Las raíces n-ésimas de z están dadas por la siguiente expresión:*

$$w_k = |z|^{1/n} e^{\frac{\alpha+2k\pi}{n}}; 0 \leq k < n$$

Ejemplo 4.7. *Calcular las raíces cuartas de $2 + 2i$*

Ya habíamos obtenido la forma exponencial de este complejo, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Como habla de raíces cuartas entendemos que $n = 4$, entonces.

$$|w| = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2^3}$$

$$\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}; \quad 0 \leq k \leq 3$$

Entonces,

$$\varphi_0 = \frac{\frac{\pi}{4} + 2.0\pi}{4} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$
$$\varphi_1 = \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4} = \frac{\frac{9\pi}{4}}{4} = \frac{9\pi}{16}$$

$$\varphi_2 = \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} = \frac{\frac{17\pi}{4}}{4} = \frac{17\pi}{16}$$
$$\varphi_3 = \frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{4} = \frac{25\pi}{16}$$

Por lo tanto, las raíces cuartas serán:

$$w_0 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{\pi}{16}}$$
$$w_1 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{9\pi}{16}}$$
$$w_2 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{17\pi}{16}}$$
$$w_3 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{25\pi}{16}}$$