MATEMÁTICA IV - 2020

TPS - NÚMEROS

(15) ESCRIBA EN LA FORMA BINÓMICA LOS SIGUIENTES NÚMEROS.

b) $\sqrt{-20} = \sqrt{(-1).20} = \sqrt{-1}\,\sqrt{20} \underset{\substack{\uparrow \\ i^2=-1}}{=} i\sqrt{4.5} = 2i\sqrt{5} = \underline{0 + i\,2\sqrt{5}}$

$\rightarrow Re(\sqrt{-20}) = 0 \quad , \quad Im(\sqrt{-20}) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(16) ENCUENTRE EL CONJUGADO DE LOS SIGUIENTES NÚMEROS

$z_5 = m + in$

RECORDAMOS QUE DADO UN NÚMERO COMPLEJO z ESCRITO EN SU FORMA BINÓMICA $z = x + iy$, SE DEFINE SU NÚMERO COMPLEJO $\bar{z} = z^* = x - iy$ (ES DECIR TIENE LA MISMA PARTE REAL QUE z, PERO LA PARTE IMAGINARIA ESTÁ CAMBIADA DE SIGNO RESPECTO A z)

ENTONCES SI $z_5 = m + in \rightarrow \bar{z}_5 = z_5^* = m - in$

(17) INDIQUE LA PARTE REAL $Re(z)$ Y LA PARTE IMAGINARIA DE LOS SIGUIENTES COMPLEJOS:

ANTES QUE NADA RECORDAMOS QUE DADO UN COMPLEJO z ESCRITO EN SU FORMA BINARIA $x + iy = z$

SE DEFINEN :

Re (z) AL El NUMERO REAL x

Im (z) AL El NUMERO REAL y (ES El NÚMERO REAL

QUE ACOMPAÑA A LA UNIDAD IMAGINARIA i)

ENTONCES

b) $z = 7 = 7 + i0 \rightarrow Re(z) = 7$

$Im(z) = 0$

c) $z = (3+i) + (5-4i) = (3+5) + i(1-4)$

$= 8 - 3i \rightarrow Re(z) = 8$

$Im(z) = -3$

(1E) LA SUMA DE UN NÚMERO COMPLEJO Y

SU CONJUGADO ES -8 Y LA SUMA DE SUS MÓDULOS

ES 10. DE QUÉ NÚMEROS COMPLEJOS SE TRATAN?

SEA NUESTRO NUMERO COMPLEJO z, El CUAL

ESCRIBIREMOS EN FORMA BINARIA.

$z = a + ib$

$\downarrow$

$\bar{z} = z^* = a - ib$

$\rightarrow z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = -8$

$\rightarrow z + \bar{z} = 2a = 2\,Re(z) = -8 \rightarrow \underline{a = -4}$

PERO ADEMÁS SABEMOS QUE $|z| + |\bar{z}| = 10$

$\rightarrow 10 = |z| + |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (-b)^2}$

$= 2\sqrt{a^2 + b^2}$

$\rightarrow 5\ \cancel{\frac{10}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + b^2}$

$\rightarrow 5 = \sqrt{16 + b^2} \longrightarrow 25 = 16 + b^2$

$\downarrow$

$\begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \Big\rangle\ 9 = 25 - 16 = b^2$

$\rightarrow$ si $b_1 = 3 \rightarrow z_1 = -4 + 3i \Rightarrow \bar{z}_1 = -4 - 3i$

si $b_2 = -3 \rightarrow z_2 = -4 - 3i = \bar{z}_1$

$\bar{z}_2 = -4 + 3i = z_1$

$\rightarrow$ LOS COMPLEJOS SON $\begin{cases} z = -4 + 3i \\ \bar{z} = -4 - 3i \end{cases}$

(19) EXPRESAR LOS SIGUIENTES NUMEROS EN FORMA BINÓMICA: a) $\frac{1 + 3i}{3 - i}$

$$\frac{1+3i}{3-i} \underset{\uparrow}{=} \frac{1+3i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} \underset{\uparrow}{=} \frac{3+i+9i+3i^2}{3^2-i^2}$$

MULTIPLICO DISTRIBUYO

Y DIVIDO POR EL CONJUGADO DEL DENOMINADOR

$$\underset{\substack{\uparrow\\ i^2=-1}}{=} \frac{\cancel{3}+10i-\cancel{3}}{10} = i = 0+i.1$$

(20) ENCUENTRE x E y TALES QUE

a) $x-15i = 9+5yi$

RECORDAMOS QUE DOS COMPLEJOS $z, w \in \mathbb{C}$ SON IGUALES

SI $Re(z) = Re(w)$ y $Im(z) = Im(w)$

$$\rightarrow \begin{matrix} x=9 \\ -15=5y \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x=9 \\ y=-3 \end{matrix}}$$

(21) ENCONTRAR EL VALOR DE k PARA QUE EL NUMERO

COMPLEJO $\dfrac{2-(1+k)i}{1-ki}$ SEA UN NÚMERO REAL.

$$Z = \frac{2-(1+k)i}{1-ik} \underset{\uparrow}{=} \frac{2-(1+k)i}{1-ik} \cdot \frac{(1+ik)}{1+ik} \underset{\uparrow}{=} \frac{(2-(1+k)i)(1+ik)}{1+k^2}$$

MULTIPLICO Y DIVIDO POR EL CONJUGADO DE $1-ik$

si $w = 1+ik$, $w\bar{w} = \bar{w}.w = |w|^2$

$$\underset{\text{DISTRIBUTIVA}}{=} \frac{2(1+ik) - i(k+1)(1+ik)}{1+k^2}$$

$$= \frac{2+2ik - i(k+1) - i^2 k(k+1)}{1+k^2}$$

$$\underset{i^2=-1}{=} \frac{2+k(k+1) + i(2k-1-k)}{1+k^2}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{2+k(k+1)}{1+k^2} + i\frac{(k-1)}{1+k^2}$$

SEPARO PARTE REAL E IMAGINARIO

COMO QUEREMOS QUE NUESTRO COMPLEJO $\underline{z}$ SEA EN REAL ES UN NUMERO REAL $\Rightarrow Im(z) = 0$

$$\rightarrow \frac{k-1}{1+k^2} = 0 \quad (\text{como } 1+k^2 \neq 0) \rightarrow \underline{k=1}$$

por lo cual $Z = \frac{2+1(1+1)}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{R}$

(22) CALCULAR LOS SIGUIENTES POTENCIAS.

b) $-i^{1026}$

PARA ELLO RECORDEMOS QUE:

$i = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = 1$

$\rightarrow$ USANDO EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN, O LA DIVISIÓN DE 1026 POR 4, EN EFECTO

$$1026 = 4 . 256 + 2$$

producto de potencias de igual base

$$\rightarrow -i^{1026} = -i^{4.256+2} = -i^{4.256} . i^2$$

$i^4 = 1$

$$= -(i^4)^{256} i^2 = -(1)^{256} i^2 = 1$$

$i^2 = -1$

potencia de potencia

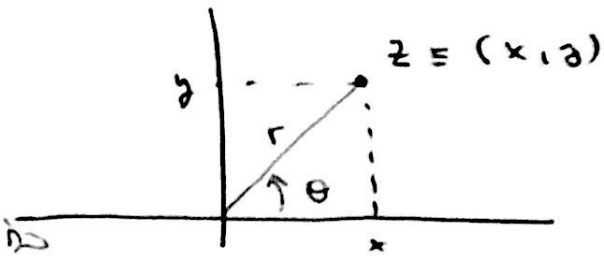
(23) EN CONTRAR LAS FORMAS DE PAR ORDENADO, TRIGONOMÉTRICA Y EXPONENCIAL DE LOS SIGUIENTES COMPLEJOS EN SU FORMA BINÓMICA.

$z_5 = 5i$, $z_6 = -7$ y $z_8 = 2 - 2i$

DADO UN COMPLEJO $z = x + iy$ SABEMOS QUE HAY UN PAR ORDENADO UNÍVOCAMENTE DETERMINADO DE MANERA QUE $z \equiv (x, y)$

POR OTRO LADO DADA LA RELACIÓN ENTRE EL COMPLE

JO Z Y EL PAR ORDENADO (x, y) PODEMOS UBICAR AL COMPLEJO Z EN EL PLANO



SI $x = r\cos\theta$

$y = r \operatorname{sen}\theta$

<u>OBS</u> θ MEDIDO EN RADIANES, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\rightarrow \dfrac{y}{x} = \tan\theta$; $r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ (DEF. $|z|$)

$$\rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{arctg}\theta = y/x \end{cases}$$

(PERO OJO LA TANGENTE REPITE VALORES CADA π)

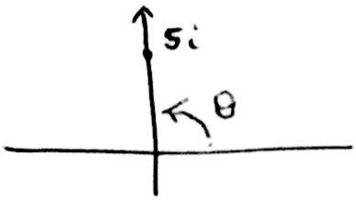
<u>OBS</u> SI DIVIDIMOS EL PLANO COMPLEJO EN CUATRO CUADRANTES

II	I
III	IV

, NÚMEROS COMPLEJOS QUE PERTENECEN AL CUADRANTE I TIENEN LA MISMA TANGENTE QUE LOS COMPLEJOS QUE "VIVEN" EN EL TERCER CUADRANTE POR EJEMPLO $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$ MISMA TANGENTE PERO $z_1 \neq z_2$

LO MISMO SUCEDE CON LOS COMPLEJOS QUE VIVEN EN EL II Y IV CUADRANTE. PARA EVITAR AMBIGÜEDADES ES RECOMENDABLE COMO PRIMER paso ubicar el complejo en el plano.

$$z_5 = 5i = 0 + 5i$$



Acá es otro ejemplo de la importancia de dibujar en el plano complejo puesto que de intentar calcular arctan y/x llegamos a un error (que proviene de "dividir por cero"!) sin embargo "a simple vista" es fácil determinar que $\theta = \pi/2 \rightarrow \theta_5 = \pi/2$ y $|z_5| = 5$

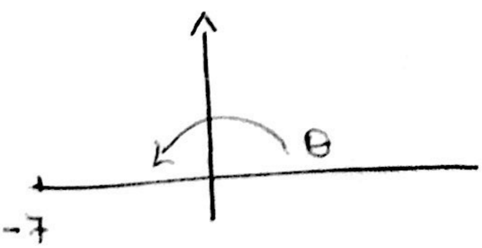
$$\rightarrow z_5 = 5i \equiv (0,5)$$

$$\equiv |z_5| (\cos\theta_5 + i \sin\theta_5)$$

$$= 5 (\cancel{\cos \pi/2}^{\,0} + i \sin \pi/2) = i5$$

$$= 5 e^{i\pi/2}$$

$$z_6 = -7$$



Nuevamente en este caso podemos usar el ojo para determinar que $\theta = \pi$

si, en cambio, usamos la definición

$\arctan 0 = 0$

↑ la calculadora responde

PERO COMO VIMOS ANTES z_6 ESTÁ EN EL EJE X

NEGATIVO $\rightarrow$ $\theta_6 = \arctan 0 + \pi \rightarrow \underbrace{\theta = \pi}$

SUMO π PUES $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

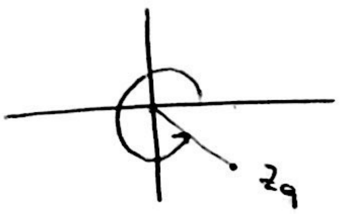
$\rightarrow z_6 \equiv (-7, 0)$

$\equiv |z_6| (\cos\theta_6 + i \operatorname{sen} \theta_6)$

$= |z_6| (\cos\pi + \cancel{i \operatorname{sen}\pi}^{\,0}) = -7$

$\equiv 7 e^{i\pi}$

$z_9 = 2 - 2i$



$\Rightarrow |z_9| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\tan\theta = -\frac{2}{2} = -1$

$\rightarrow \arctan -1 = -\pi/4 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$

si $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\rightarrow \theta_9 = 7/4\,\pi$

$\rightarrow z_9 = 2 - 2i \equiv (2, -2)$

$\equiv \sqrt{8}\,(\cos(7/4\,\pi) + i \operatorname{sen}(7/4\,\pi))$

$= \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 2i$

$\equiv \sqrt{8}\, e^{i\,7/4\,\pi}$

24 REALIZAR LAS SIGUIENTES OPERACIONES:

c) $z_9 \cdot z_6 \underset{\uparrow}{=} 7e^{i\pi} \cdot \sqrt{8}\, e^{i\, 7/4\, \pi}$

APROVECHAMOS SU FORMA EXPONENCIAL

MODULO DE POTENCIAS

$$= 7 \cdot \sqrt{8}\; e^{i(\pi + 7/4)\pi}$$

$$= 7 \cdot 2\sqrt{2}\; e^{i \frac{11}{4}\pi} \underset{\uparrow}{=} 14\sqrt{2}\; e^{i\left(\frac{8+3}{4}\right)\pi}$$

RECORDAMOS QUE $2\pi \equiv$ VUELTA

$$= 14\sqrt{2}\; e^{i\left(2\pi + \frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$= \sqrt{2}\, 14\; e^{2i\pi}\; e^{i\, 3/4\, \pi}$$

$$\underset{\uparrow}{=} 14\sqrt{2}\; e^{3/4\, \pi i} = 14\sqrt{2}\left(\cos(3/4\,\pi) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\cancel{\sin 2\pi}^{\,0} = 1$$

$$= 14\cancel{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) = \underbrace{-14 + 14i}$$

RESULTADO QUE SE PODÍA OBTENER DIRECTAMENTE DE HACER $z_9 \cdot z_6$ EN SU FORMA BINARIA

e) $z_9^{\,9} = \left(\sqrt{8}\, e^{i\, 7/4\, \pi}\right)^9$

$$= (\sqrt{8})^9\, e^{i \frac{7}{4} \cdot 9\pi} = (\sqrt{8})^9\, e^{i\frac{63}{4}\pi}$$

$\to z_9^{\,9} = (\sqrt{8})^9\, e^{i\left(\frac{8\cdot 7+7}{4}\right)\pi} = (\sqrt{8})^9\, e^{i(2\cdot 7\pi + 7/4\pi)}$

$= (\sqrt{8})^9 \big(\underbrace{e^{i2\pi}}_{1}\big)^7 \cdot e^{i\,7/4\pi} = (\sqrt{8})^9 (1)^7\, e^{i\,7/4\pi}$

$= (\sqrt{8})^9 \left[\cos(7/4\pi) + i\,\mathrm{sen}(7/4\pi)\right]$

$2^3 = 8$

$\stackrel{\downarrow}{=} (\sqrt{2}\,2)^9 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

$= \dfrac{(\sqrt{2})^9\, 2^9}{\sqrt{2}} - i\,\dfrac{(\sqrt{2})^9\, 2^9}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^8\, 2^9 - i(\sqrt{2})^8\, 2^9$

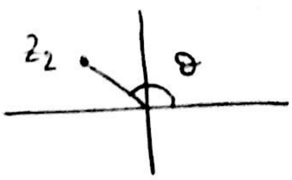
$= 2^4 \cdot 2^9 - i\, 2^4 2^9 = 2^{13} - i\, 2^{13}$

e) Las raíces cuartas de $z_2 = -1+i$

para hallar los complejos "w" tales que

$w^4 = z_2$ lo primero que vamos a hacer

es escribir a z_2 en su forma exponencial.



Si repetimos los razonamientos anteriores vemos que:

$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\theta_2 = \arctan -1 = \frac{3}{4}\pi$

$\rightarrow \quad z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\,3/4\,\pi}$

Entonces las raíces cuartas de z_2 son los 4 complejos que llamaré w_k tales que

$w_k^{\,4} = z_2$ y están dadas por:

$$w_k = \sqrt[4]{|z_2|}\; e^{i\left(\frac{\theta_2 + 2k\pi}{4}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$\uparrow$ Hay 4 raíces distintas

$$= \sqrt[4]{\sqrt{2}}\; e^{i\left(\frac{3/4 + 2k\pi}{4}\right)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[8]{2}\; e^{i\left(\frac{3/4 + 2.0\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2}\; e^{i\,3/16\,\pi} \\ w_1 = \sqrt[8]{2}\; e^{i\left(\frac{3/4 + 2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2}\; e^{i\frac{11}{16}\pi} \\ w_2 = \sqrt[8]{2}\; e^{i\left(\frac{3/4 + 4\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2}\; e^{i\frac{19}{16}\pi} \\ w_3 = \sqrt[8]{2}\; e^{i\left(\frac{3/4 + 6\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2}\; e^{i\frac{27}{16}\pi} \end{cases}$$

Estas son las 4 raíces cuadradas distintas de z_2!

EJERCICIOS ADICIONALES

⑤ LA SUMA DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS ES 6, EL MÓDULO DEL PRIMERO ES $\sqrt{13}$ Y DEL SEGUNDO ES 5 ¿DE QUÉ NÚMEROS COMPLEJOS SE TRATA?

DADOS $z = a + ib$

$w = u + iv$

SE SABE QUE:

① $z + w = (a + ib) + (u + iv) = 6$

② $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

③ $|w| = \sqrt{u^2 + v^2} = 5$

AHORA BIEN DE ① Y SABIENDO QUE DOS COMPLEJOS SON IGUALES CUANDO LA PARTE REAL E IMAGINARIO DE AMBOS SON IGUALES, PODEMOS OBTENER QUE

$$\begin{cases} a + u = 6 \\ b + v = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 6 - u \\ b = -v \end{cases}$$

AHORA ELEVO ② AL CUADRADO →

$$13 = a^2 + b^2 \underset{\uparrow}{=} (6 - u)^2 + v^2$$

$b = -v$

$a = 6 - u$

DE ESTA ÚLTIMA SALE QUE

$$\underline{v^2 = 13 - (6-u)^2}$$

POR OTRO LADO SI ELEVO ③ AL CUADRADO TENEMOS

$$u^2 + v^2 = 25$$

→ REEMPLAZO v^2 EN ESTA ÚLTIMA:

$$u^2 + 13 - (6-u)^2 = 25$$

$$\cancel{u^2} + 13 - (36 - 2 \cdot 6 \cdot u + \cancel{u^2}) = 25$$

$$13 - 36 + 12u = 25$$

$$\rightarrow 12u = 25 + 36 - 13 = 48$$

$$\rightarrow u = 48/12 \rightarrow \underline{u = 4}$$

$$\rightarrow v^2 = 13 - (6-4)^2 = 13 - (2)^2 = 9 \rightarrow v_1 = 3, \quad v_2 = -3$$

$$\rightarrow b = -v \rightarrow b_{1,2} = -(\pm 3) \rightarrow b_1 = -3, \quad b_2 = 3$$

$$\rightarrow a = 6 - u = 6 - 4 = 2$$

ENTONCES LOS COMPLEJOS SON:

$$z_1 = 2 + i(-3) = 2 - 3i \quad ; \quad w_1 = 4 + 3i$$

$$z_2 = 2 + i3 = \bar{z}_1 \qquad w_2 = 4 - 3i = \bar{w}_1$$

(6) ENCONTRAR EL VALOR DE h PARA QUE EL COMPLEJO

$$z = \frac{1+3hi}{7+(h-2)i}$$ SEA UN IMAGINARIO PURO.

$$z = \frac{1+3hi}{7+(h-2)i} \underset{\uparrow}{=} \frac{1+3hi}{7+(h-2)i} \frac{(7-(h-2)i)}{(7-(h-2)i)}$$

MULTIPLICO Y DIVIDO POR EL DENOMINADOR CONJUGADO.

$$\underset{\text{DISTRIBUTIVA}}{=} \frac{7 - i(h-2) + 21hi - 3h(h-2)i^2}{49 + (h-2)^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ i^2=-1}}{=} \frac{7 + 3h(h-2) + i\left[21h - (h-2)\right]}{49 + (h-2)^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SEPARO} \\ \text{PARTE REAL} \\ \text{E IMAGINARIO}}}{=} \frac{7 + 3h(h-2)}{49 + (h-2)^2} + \frac{i(20h+2)}{49+(h-2)^2}$$

SI z ES IMAGINARIO PURO $\Rightarrow Re(z) = 0$

$$\Rightarrow 7 + 3h(h-2) = 0$$

$\rightarrow 3h^2 - 6h + 7 = 0 \rightarrow$ BHASKARA

$$h = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.7.3}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36-84}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{-48}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{(-1)48}}{6} = \frac{6 \pm i\sqrt{3.16}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm i\sqrt{3}.4}{6} = 1 \pm i\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\rightarrow$ si restringimos el valor de h a que sea real $\rightarrow$ NO existe un $h \in \mathbb{R}$ tal que z sea imaginario puro

si h puede ser complejo $\rightarrow$ $h = 1 \pm i\frac{2}{\sqrt{3}}$

(7) Las raíces cúbicas de $z_5 = 5e^{i\pi/2}$

$\rightarrow$ buscamos los $w_k^3 = z_5$

$$w_k = \sqrt[3]{|z_5|}\, e^{i\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$\rightarrow w_0 = \sqrt[3]{5}\, e^{i\left(\frac{\pi/2 + 0}{3}\right)} = \sqrt[3]{5}\, e^{i\pi/6}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{5}\, e^{i\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{5}\, e^{i\,5/6\,\pi}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{5}\, e^{i\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{5}\, e^{i\,9/6\,\pi}$$