Matemática IV- 2020
TP1 - Límites y Continuidad

1. Determinar el dominio (cuando sea posible graficarlo) de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$

   (c) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y^2 - z^2}$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

   (e) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   (f) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

   (g) $f(x,y) = e^{-x^2+y^2}$

   (h) $f(x,y) = \log\left(9 - x^2 - 9y^2\right)$

   (i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   (j) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$

2. Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

   (a) $f(x,y) = \log\left(9 - x^2 - 9y^2\right)$ en $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ en $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1); (2,2)$

   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)$

3. Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existen:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{(7x^2 - 2y^2)}{x^2+y^2} + 1\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x+y+z)$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^x}{x^2+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2cos(x)}{x^2+y^2}$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida, redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

(a) $f(x,y) = xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5.
- Generar un código que permita construir una función que evaluada en un punto de R^3 mida su distancia a la superficie obtenida como gráfica de la función $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$

- Calcular el siguiente límite por definición: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

  Luego, para entender intuitivamente el límite, generar un código que muestre cómo se va acercando $f(x_0, y_0)$ a su límite L cuando (x,y) se acerca a $(0,0)$. Es decir, escribir un programa que devuelva la lista con los resultados de hacer $|f(x,y) - 0|$ para $(x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$ por ejemplo, tales que $|(0,0) - (\frac{1}{n}, \frac{1}{m})| = \frac{1}{n^2+m^2} < \delta$ (p.e para $n = 10$, $m = 10$, $n = 100$, $m = 1000$, etc...)

Ejercicios Adicionales

1. Analizar los siguientes límites:

   (a) $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{2x^2y^3}{x^2+y^4})$

   (b) $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{x(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   (c) $lim_{(x,y)\to(0,1)} \quad (\frac{2xy-2x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}})$

   (d) $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{yx^3-xy^3}{x^2+y^2})$

2. Dada la función $f(x,y) = xy.\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$ definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen y demostrarlo.

3. Estudiar la continuidad en todo el plano R^2 de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (2,2) \\ 2 & \text{si} \quad (x,y) = (2,2) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$