1)

Sea el subespacio del espacio vectorial R^3:

$S = \{ < x ; y ; z > \in \mathbb{R}^3 : z = x - y \}$,

determinar una base del mismo, y su dimensión.

Consideran un elemento genérico perteneciente al subespacio S:

$u = < x ; y ; z >$,

sustituyen la expresión de la tercera componente, y queda:

$u = < x ; y ; x - y >$,

expresan a este vector como una suma de vectores según los parámetros (x e y), y queda:

$u = < x ; 0 ; x > + < 0 ; y ; -y >$,

extraen factores escalares reales en los términos, y queda:

$u = x*< 1 ; 0 ; 1 > + y*< 0 ; 1 ; -1 >$;

luego, como el vector genérico perteneciente al subespacio vectorial S es combinación lineal de dos vectores, tienen el conjunto generador del subespacio S:

$B = \{ < 1 ; 0 ; 1 > , < 0 ; 1 ; -1 > \}$;

luego, a fin de verificar si los elementos del conjunto generador B son Linealmente Independientes, plantean la "combinación líneal nula", y queda (designamos: a, b a los escalares):

$a*< 1 ; 0 ; 1 > + b*< 0 ; 1 ; -1 > = < 0 ; 0 ; 0 >$,

resuelven la combinación lineal en el primer miembro, y queda:

$< a ; b ; a - b > = < 0 ; 0 ; 0 >$,

a continuación, por igualdad entre expresiones vectoriales, igualan componente y queda el sistema de ecuaciones:

$a = 0$,

$b = 0$,

$a - b = 0$,

remplazan los valores coloreados en la última ecuación, resuelven, y queda:

$0 = 0$, que es una Identidad Verdadera;

luego, como todos los escalares planteados en la "combinación lineal nula" son iguales a cero, entonces concluyen que los elementos del conjunto B son Linealmente Independientes y, por lo tanto, el conjunto B es una base del subespacio S, cuya dimensión es: **$\dim(S) = |B| = 2$**.

2)

Analizar si la transformación:

$L : R^{2*2} \rightarrow R^2$,

definida en la forma:

L(A) = < a + b ; c + d >,

es una Transformación Lineal.

Observen que el dominio de esta transformación es el conjunto de matrices con dos filas y dos columnas, con elementos reales, cuya dimensión es: dim(DomL) = 4, y consideren las expresiones de dos de sus elementos:

A = B =

a b m n

c d p q

y de la suma de los mismos:

A + B =

a+m b+n

c+p d+q,

y consideren también un escalar (número real) genérico: k,

y también consideren la expresión de este escalar por el primero de los elementos genéricos:

k*A =

k*a k*b

k*c k*d.

Luego, plantean las dos condiciones que deben verificarse para que una transformación sea lineal, y queda:

1°)

"El transformado de la suma de dos elementos pertenecientes al dominio

es igual a la suma de los transformados por separado"

L(A + B) = L(A) + L(B),

a)

L(A + B) = < a+m + b+n ; c+p + d+q >,

b)

L(A) + L(B) = < a+b ; c+d > + < m+n ; p+q > = < a+b + m+n ; c+d + p+q >,

y como tienen que las expresiones resaltadas son iguales, entonces tienen que la primera condición se verifica:

L(A + B) = L(A) + L(B).

2°)

"El transformado de la multiplicación de un escalar por un elemento perteneciente al dominio

es igual a la multiplicación de dicho escalar por el transformado del elemento del dominio"

L(k*A) = k*L(A),

a)

L(k*A) = < k*a + k*b ; k*c + k*d >,

b)

k*L(A) = k*< a+b ; c+d > = < k*(a+b) ; k*(c+d) > = < k*a + k*b ; k*c + k*d >,

y como tienen que las expresiones resaltadas son iguales, entonces tienen que la primera condición se verifica:

L(k*A) = k*L(A).

<u>Luego, pueden concluir que la transofrmación L es una Transformación Lineal</u>.

<u>Núcleo de L:</u>

Plantean la condición que verifican los elementos pertenecientes al Núcleo de la Transformación Lineal (recuerden que el Núcleo es un subespacio vectorial del dominio), y queda la ecuación vectorial:

L(A) = < 0 ; 0 >,

sustituyen la expresión de la transformación en el primer miembro, y queda:

< a+b ; c+d > = < 0 ; 0 >,

por igualdad entre expresiones vectoriales, igualan componente a componente, y queda el sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$a + b = 0$, de aquí despejan: $b = -a$,

$c + d = 0$, de aquí despejan: $d = -c$,

y observen que este sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones, a continuación sustituyen las expresiones despejadas en la expresión del primer elemento genérico perteneciente al dominio de la transformación y la expresión general de un elemento perteneciente a su Núcleo queda:

$A_N =$

a -a

c -c,

a continuación expresan a este elemento como suma de dos expresiones vectoriales, según los parámetros: a, c, y queda:

$A_N =$

a -a + 0 0

0 0 c -c,

y observen que en los términos tienen, respectivamente, las expresiones de los vectores:

$A_{1N} =$

1 -1

0 0,

y

$A_{2N} =$

0 0

1 -1,

que son los elementos de una base del Núcleo de la Transformación Lineal, la cual queda expresada:

$\mathbf{B_N = \{ A_{1N} , A_{2N} \}}$, y observen que también tienen que la dimensión del núcleo es: $\mathbf{dim(N_L) = 2}$.

Luego, plantean el <u>Teorema de las Dimensiones</u>:

"la suma de la dimensión del Núcleo más la dimensión de la Imagen

es igual a la dimensión del dominio, en una Transformación Lineal",

y pueden plantear la ecuación:

$$\dim(N_L) + \dim(I_L) = \dim(Dom_L),$$

reemplazan valores, y queda:

$$2 \quad + \dim(I_L) = \quad 4,$$

y de aquí despejan:

$$\dim(I_L) = 2,$$

pero, recuerden que la dimensión del codominio de la Transformación Lineal es:

$$\dim(Cod_L) = 2,$$

y como estos dos valores son iguales, entonces pueden concluir:

$$\mathbf{I_L} = Cod_L = \mathbf{R^2}.$$

3)

Determinar Núcleo e Imagen de la Transformación Lineal

definida en la forma:

$$\mathbf{L : R^4 \rightarrow R^2.}$$

$$\mathbf{L(x ; y ; z ; w) = < x+y ; 2x+2y >},$$

y aquí observen que la dimensión del dominio es:

$$\mathbf{\dim(Dom_L) = 4},$$

y que la dimensión del codominio es:

$$\mathbf{\dim(Cod_L) = 2}.$$

Núcleo (abreviamos comentarios a fin de simplificar el desarrollo, que es análogo al que empleamos para determinar el núcleo de la tranformación en el ejercicio anterior):

$$L(x ; y ; z ; w) = < 0 ; 0 >,$$

$$< x+y ; 2x+2y > = < 0 ; 0 >,$$

y de aquí tiene el sistema de dos ecuaciones:

$x + y = 0$, de aquí despejan: $y = -x$,

$2x + 2y = 0$,

sustituyen la expresión resaltada en la segunda ecuación, y queda:

$2x + 2(-x) = 0$, resuelven, y queda:

$0 = 0$, que es una igualdad Verdadera,

y observen que este sistema es compatible indeterminado y admite infinitas solcuiones;

luego, plantean la expresión de un elemento genérico perteneciente al Núcleo de la Transformación Lineal, y queda:

$$u =$$

$$= < x \,;\, y \,;\, z \,;\, w > =$$

$$= < x \,;\, -x \,;\, z \,;\, w > =$$

$$= < x \,;\, -x \,;\, 0 \,;\, 0 > + < 0 \,;\, 0 \,;\, z \,;\, 0 > + < 0 \,;\, 0 \,;\, 0 \,;\, w > =$$

$$= x^{*} < 1 \,;\, -1 \,;\, 0 \,;\, 0 > + z^{*} < 0 \,;\, 0 \,;\, 1 \,;\, 0 > + w^{*} < 0 \,;\, 0 \,;\, 0 \,;\, 1 >,$$

por lo que tienen que un conjunto generador del Núcleo es:

$$B_N = \{ < 1 \,;\, -1 \,;\, 0 \,;\, 0 > , < 0 \,;\, 0 \,;\, 1 \,;\, 0 > , < 0 \,;\, 0 \,;\, 0 \,;\, 1 > \},$$

y queda para ustedes demostrar que los elementos de este conjunto son Linealmente Independientes y, por lo tanto, que B es una base del Núcleo de la Transformación Lineal, cuya dimensión es: **$\dim(N_L) = 3$**.

Luego, plantean el Teorema de las dimensiones, y queda la ecuación:

$$\dim(N_L) + \dim(I_L) = \dim(Dom_L),$$

$$3 \quad + \dim(I_L) = \quad 4,$$

de aquí despejan:

$$\dim(I_L) = 1,$$

pero la dimensión del Codominio es:

$$\dim(Cod_L) = 2,$$

y como la dimensión de la Imagen es menor que la dimensión de la Transformación Lineal, entonces tienen que la Imagen es un subespacio vectorial del Codominio de la Transformación Lineal;

luego, plantean la expresión de un elemento genérico perteneciente a la Imagen de la Transformación Lineal, y queda (observen que empleamos la expresión de la ley de formación de la Transformación Lineal, y observen que abreviamos comentarios a fin de simplificar el desarrollo):

$$w =$$

$$= < x+y \,;\, 2x+2y > =$$

$$= < x \,;\, 2x > + < y \,;\, 2y > =$$

$= x^*< 1 ; 2 > + y^*< 1 ; 2 >$,

y como tienen que la expresión del vector es igual en los dos términos, entonces tienen que éste es el único elemento de una base de la imagen de la Transformación Lineal, la cual queda expredsada:

$B_I = \{ < 1 ; 2 > \}$, y la dimensión de la Imagen es: $\dim(I_L) = 1$.