Clase de Consulta, 4-2-21

1)

Sea la transformación: L: $R^{2*2} \rightarrow R^2$, con la ley de formación:

$L(A) = < x + z \,;\, y + w >$.

en la cuál la expresión de la matriz genérica perteneciente al dominio de esta transformación es:

$$A = \begin{matrix} x & y \\ z & w \end{matrix}.$$

Mostrar que esta transformación es lineal, e indicar su Núcleo, su Imagen y las dimensiones de los mismos.

A continuación plantean las dos condiciones que deben verificarse para que una transformación sea lineal:

1°)

"El transformado de la suma de dos elementos pertenecientes al dominio de la transformación es igual a la suma de los transformados de dichos elementos":

$$L(A_1 + A_2) = L(A_1) + L(A_2);$$

Plantean las expresiones genéricas de dos elementos pertenecientes al dominio de la tranformación, y queda:

$$A_1 = \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{matrix},$$

y

$$A_2 = \begin{matrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{matrix},$$

a continuación plantean la expresión de la suma de estos dos elementos, y queda:

$$A_1 + A_2 = \begin{matrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{matrix},$$

a)

plantean la expresión del transformado de la suma de los dos elementos, y queda:

$$L(A_1 + A_2) =$$

sustituyen la expresión del elemento transformado, y queda:

$$= < x_1 + x_2 + z_1 + z_2 \,;\, y_1 + y_2 + w_1 + w_2 > =$$

conmutan y asocian términos en las expresiones de las componentes, y queda:

$$= < (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) \,;\, (y_1 + w_1) + (y_2 + w_2) > =$$

expresan como una suma de vectores, y queda:

$$= < x_1 + z_1 \,;\, y_1 + w_1 > + < x_2 + z_2 \,;\, y_2 + w_2 > =$$

sistituyen las expresiones de los transformados de los vectores, y queda:

$$= L(A_1) + L(A_2),$$

2°)

"El transformado del producto de un escalar: **k** $\in \mathrm{R}$ por un elemento perteneciente al dominio de la transformación es igual a la multiplicación del dicho escalar por el transformado del elemento":

$$L(k*A_1) = k*L(A_1);$$

plantean las expresiones del producto de un escalar: **k** $\in \mathrm{R}$ por uno de uno de los elementos genéricos pertenecientes al dominio de la transformación, y queda:

$$k*A_1 =$$

$$\begin{matrix} k*x_1 & k*y_1 \\ k*z_1 & k*w_1 \end{matrix},$$

i)

plantean la expresión del transformado del producto del escalar por el elemento genérico, y queda:

$$L(k*A_1) = < k*x_1 + k*z_1 \,;\, k*y_1 + k*w_1 >,$$

ii)

plantean la expresión del producto del escalar por el transformado del elemento, y queda:

$$k*L(A_1) =$$

sustituyen la expresión del transformado del elemento, y queda:

$$= k*< x_1 + z_1 \,;\, y_1 + w_1 > =$$

resuelven el producto del escalar por el vector, y queda:

$$= < k*(x_1 + z_1) \,;\, k*(y_1 + w_1) > =$$

distribuyen en las expresiones de las componentes, y queda:

$$= < k*x_1 + k*z_1 \,;\, k*y_1 + k*w_1 >,$$

y como se verifican las dos condiciones planteadas, entonces pueden concluir que <u>la transformación lineal L es lineal</u>.

Luego, plantean la condición que cumplen los elementos pertenecientes al Núcleo de esta transformación, y queda la ecuación vectorial:

$$L(A) = < 0 \,;\, 0 >,$$

sustituyen la expresión de la transformación en el primer miembro, y queda:

$$< x + z \,;\, y + w > = < 0 \,;\, 0 >,$$

por igualdad entre expresiones vectoriales, igualan componente a componente, y queda el sistema de ecuaciones:

$x + z = 0$, de aquí despejan: $z = -x$,

$$y + w = 0$$, de aquí despejan: $w = -y$;

a continuación plantean la expresión general de un elemento perteneciente al núcleo, y queda:

$$A_N = \begin{matrix} x & y \\ z & w \end{matrix},$$

sustituyen expresiones, y queda:

$$A_N = \begin{matrix} x & y \\ -x & -y \end{matrix},$$

decomponen como suma de elementos según cada parámtro, y queda:

$$A_N = A_{N1} + A_{N2} = \begin{matrix} x & 0 \\ -x & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & y \\ 0 & -y \end{matrix} = x* \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{matrix} + y* \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix},$$

y como ustedes pueden demostrar, tienen que las dos matrices numéricas coloreadas son Linealmente Independientes y, por lo tanto, conforman una base del núcleo de la Transformación lineal L, y también tienen que la dimensión del núcleo es:

$$\dim(N) = 2.$$

A continuación, plantean el **Teorema de las dimensiones**:

$$\dim(N) + \dim(Im) = \dim(Dom),$$

a continuación reemplazan los valores de las dimensiones del Núcleo y del dominio de la transformación lineal (observen que la dimensión del dominio es 4), y queda:

$$2 + \dim(Im) = 4,$$

aquí restan 2 en ambos miembros, y queda:

$$\mathbf{dim(Im) = 2},$$

y como el codominio de la tranfsormaciónes: R^2, cuya dimensión es 2, y como la imagen de la transformación lineal es un subespacio vectorial de su codominio (aquí recuerden que todo espacio vectorial es un subespacio de sí mismo), entonces pueden concluir:

$$\mathbf{Im = R^2}.$$

2)

Sea la transformación lineal **L:** $\mathbf{R^3 \rightarrow R^3}$, cuya expresión es:

$$\mathbf{L(x ; y ; z) = < x + y ; x + 2y ; x + y >},$$

determinar su Núcleo, su Imagen, y las dimensiones de los mismos.

Para comenzar, observen que las dimensiones del dominio y del codominio de esta transformación lineal son:

$$\mathbf{dim(Dom) = 3},$$

y

$$\mathbf{dim(Codom) = 3}.$$

Núcleo (abreviamos los comentarios, que son análogos a los que empleamos en el ejercicio anterior):

$$\mathbf{L(x ; y ; z) = < 0 ; 0 ; 0 >},$$

$$\mathbf{< x + y ; x + 2y ; x + y > = < 0 ; 0 ; 0 >},$$

por igualdad entre vectores, plantean el sistema de ecuaciones:

$\mathbf{x + y = 0}$, de aquí despejan: $\mathbf{y = -x}$,

$\mathbf{x + 2y = 0}$,

$\mathbf{x + y = 0}$,

sustituyen la expresión despejada en las otras dos ecuaciones, y queda:

$\mathbf{-3x = 0}$, de aquí despejan: $\mathbf{x = 0}$, sustituyen en el despeje anterior resuelven, y queda: $\mathbf{y = 0}$,

$\mathbf{0 = 0}$, que es una Identidad Verdadera;

luego, plantean la expresión de un elemento genérico del núcleo, y queda:

$$\mathbf{u_N = < x ; y ; z >} = \text{sustituyen expresiones} = \mathbf{< 0 ; 0 ; z > = z * < 0 ; 0 ; 1 >},$$

y como tienen que todos los elementos pertenecientes al Núcleo son múltiplos escalares de un un vector fijo, entonces tienen que una base del Núcleo de la transformación lineal es el conjunto unitario:

$$\mathbf{B_N = \{ < 0 ; 0 ; 1 > \}},$$

y observen que la dimensión del núcleo es:

$$\mathbf{dim(N) = 1.}$$

A continuación, plantean el **Teorema de las dimensiones**:

$$\mathbf{dim(N) + dim(Im) = dim(Dom)},$$

a continuación reemplazan los valores de las dimensiones del Núcleo y del dominio de la transformación lineal, y queda:

1 + dim(Im) = 3,

aquí restan 1 en ambos miembros, y queda:

dim(Im) = 2,

y como tienen que la dimensión de la imagen es menor que la dimensión del codominio de la tranfsormación, entonces pueden concluir que <u>la imagen de la transformación lineal es un subespacio vectorial de su codominio</u>.

Imagen.

Plantean la expresión general de un elemento de la imagen, y queda (observen que empleamos directamente la expresión de la ley de formación de la transformación lineal, a fin de abreviar el desarrollo):

$$w_{Im} =$$

$$= < x + y ; x + 2y ; x + y > =$$

$$= < x ; x ; x > + < y ; 2y ; y > =$$

$$= x^* < 1 ; 1 ; 1 > + y^* < 1 ; 2 ; 1 >,$$

y de aquí tienen que un conjunto generador de la imagen de la transformación lineal, y una posible base, es:

$$B = \{ < 1 ; 1 ; 1 > ; < 1 ; 2 ; 1 > \},$$

a continuación queda para ustedes demostrar que los elementos de este conjunto son Linealmente Independientes, y que el conjunto B es base de la imagen de la transformación lineal, cuya dimensión es:

dim(Im) = 2;

luego, pueden verificar que el **Teorema de las dimensiones** se verifica:

dim(N) + dim(Im) = dim(Dom),

1 + 2 = 3,

y recuerden que la Imagen es un subespacio vectorial del Codominio de la Transformación Lineal, y observen que ya tienen todo lo necesario para definir a dicha imagen como conjunto de vectores.

3)

Dada la transformación lineal:

L: R^3 -> R^3,

L(x ; y ; z) = < x + y ; x + 2y ; x + y >,

plantear la expresión de su Matriz Asociada en bases canónicas.

Observen que las dimensiones del dominio y del codominio de esta transformación lineal son:

dim(Dom) = 3 y **dim(Codom) = 3**.

Luego, plantan las expresiones de los transformados de los vectores canónicos del dominio, y queda:

L(1;0;0) = < 1 ; 1 ; 1 > (observen que estos son los elementos de la **1° columna** de la matriz**)**,

L(0;1;0) = < 1 ; 2 ; 1 > (observen que estos son los elementos de la **2° columna** de la matriz**)**,

L(0;0;1) = < 0 ; 0 ; 0 > (observen que estos son los elementos de la **3° columna** de la matriz**)**, y observen que la matriz asociada a esta transformación lineal queda expresada (tengan en cuenta que consideramos que la base del codominio de la transformación lineal también es canónica):

$$M_L = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}.$$

4)

Sea la transformación lineal: L: $R^3 \rightarrow R^2$, definida por: L(x;y;z) = < z ; x + y >,

en la que la base del dominio es el conjunto: B_d = { <1;1;1>, <1;0;1>, <0;2;1> },

y la base del codominio es el conjunto: B_{cd} = { <1;2>, <1;1> }.

Plantean las expresiones de los transformados de los vectores pertenecientes a la base del dominio, y queda:

L(1;1;1) = **< 1 ; 2 >**,

L(1;0;1) = **< 1 ; 1 >**,

L(0;2;1) = **< 1 ; 2 >**,

y observen que, hasta aquí, han obtenido las expresiones de los vectores transformados, que hemos coloreado con rojo, como combinaciones lineales de los vectores canónicos; luego, plantean a estos vectores como combinaciones lineales de los vectores de la base del codominio que tienen en su enunciado, y queda el sistema de tres ecuaciones vectoriales con seis incógnitas escalares:

a*< 1 ; 2 > + b*< 0 ; 3 > = < 1 ; 2 >,

m*< 1 ; 2 > + n*< 0 ; 3 > = < 1 ; 1 >,

p*< 1 ; 2 > + q*< 0 ; 3 > = < 1 ; 2 >,

a continuación resuelven las expresiones en los primeros miembros en todas las ecuaciones, y queda:

< a ; 2a + 3b > = < 1 ; 2 >,

< m ; 2m + 3n > = < 1 ; 1 >,

< p ; 2p + 3q > = < 1 ; 2 >,

a continuación, por igualdad entre expresiones vectoriales, igualan componente a componente, y quedan tres sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, uno de ellos por cada una de las ecuaciones vectoriales:

$a = 1,$

$2a + 3b = 2,$

$m = 1,$

$2m + 3n = 1,$

$p = 1,$

$2p + 3q = 2,$

a continuación, resuelven los tres sistemas de ecuaciones, y sus soluciones quedan, respectivamente:

a = 1, **b = 0**,

por lo que la expresión del primer vector transformado expresado en la base del codominio, queda:

L(**1;1;1**) = **< 1 ; 0 >**,

m = 1, **n = -1/3**,

por lo que la expresión del segundo vector transformado expresado en la base del codominio, queda:

L(**1;0;1**) = **< 1 ; -1/3 >**,

p = 1, **q = 0**,

por lo que la expresión del primer vector transformado expresado en la base del codominio, queda:

L(**1;1;1**) = **< 1 ; 0 >**;

luego, recuerden que cada una de las expresiones obtenidas corresponde a una columna de la matriz asociada a la transformación lineal, por lo que **la matriz asociada a la transformación lineal queda expresada:**

$$\mathbf{M_L} = \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{0} \end{matrix}.$$

5)

Dada una transformación lineal: L: V -> W, mostrar que su núcleo es un subespacio de su dominio.

Aquí recuerden que el núcleo de una transformación lineal es un subconjunto de su dominio, por lo que queda demostrar que, además, es un subespacio del mismo.

1°)

$L(o_V) = o_W$, por lo tanto: $o_V \in N_L$,

2°)

$u \in N_L$, y $v \in N_L$, entonces tienen que:

$L(u) = 0_w$,

$L(v) = 0_w$,

a continuación plantean la expresión del transformado de la suma de los dos elementos pertenecientes al núcleo de la transformación lineal, y queda (observen que omitimos comentarios a fin de abreviar el desarrollo):

$L(u + v) = L(u) + L(v) = o_w + o_w = o_w$, por lo tanto tienen: $(u + v) \in N_L$.

3°)

$u \in N_L$, entonces tienen que: $L(u) = 0_w$,

$k \in R$,

a continuación plantean la expresión del transformado del producto de un escalar por uno de los elementos perteneciente al núcleo de la transformación lineal, y queda:

$L(k*u) = k*L(u) = k*o_w = o_w$, por lo tanto $k*u \in N_L$;

por lo tanto, pueden concluir **que el núcleo de una transformación lineal es un subespacio de su dominio**.

6)

Dada una transformación lineal: L: V -> W, mostrar que su imagen es un subespacio de su codominio.

.

Aquí recuerden que la imagen de una transformación lineal es un subconjunto de su codominio, por lo que queda demostrar que, además, es un subespacio del mismo.

1°)

$o_W = L(o_V)$, por lo tanto: $o_w \in Im_L$,

2°)

$s \in Im_L$, y $t \in Im_L$, entonces tienen que:

$s = L(u)$,

$t = L(v)$,

con u y v pertenecientes al dominio de la transformación lineal,

a continuación plantean la expresión de la suma de los dos elementos pertenecientes a la imagen de la transformación lineal, y queda (observen que omitimos comentarios a fin de abreviar el desarrollo):

$(s + t) = L(u) + L(v) = L(u + v)$,

y tienen que $(s + t)$ es el transformado del elemento $(u + v)$, que pertenece al dominio de la transformación lineal, por lo tanto tienen: $(s + t) \in Im_L$,

3°)

$t \in Im_L$, entonces tienen que:

$$t = L(v),$$

$$k \in R,$$

a continuación plantean la expresión del producto de un escalar por uno de los elementos perteneciente a la imagen de la transformación lineal, y queda:

$$k^*t = k^* L(v) = L(k^*v),$$

y tienen que t es el transformado del elemento k*v que pertenece al dominio de la transformación lineal, por lo tanto tienen: $t \in Im_L$;

por lo tanto, pueden concluir que **la imagen de una transformación lineal es un subespacio de su codominio**.