Repaso: Derivación de Matemática 2

Tablas de derivadas de funciones de una variable
Esta es una tabla que pueden buscar en Google, entre otras muchas, que contiene a la gran mayoría de expresiones que las que trabajaremos en este curso

TABLA DE DERIVADAS

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA	FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
a	0	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
x	1	$\operatorname{sen} u$	$u'\cos u$
x^2	$2x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
x^m	$m \cdot x^{m-1}$	$\cos u$	$-u'\operatorname{sen} u$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+tg^2 x$
$k.f(x)$	$k.f'(x)$	tgu	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$cotgx$	$\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1+cotg^2 x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$cotg\ u$	$\frac{-u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -(1+cotg^2 u)\cdot u'$
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$	$\sec x$	$tg\ x \cdot \sec x$
$(f \circ g)(x)$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$	$\sec u$	$u' \cdot tg\ u \cdot \sec u$
u^m	$m \cdot u^{m-1} \cdot u'$	$cosec\ x$	$-cotg\ x \cdot cosec\ x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$cosec\ u$	$-u' \cdot cotg\ u \cdot cosec\ u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$arc\ \operatorname{sen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$lg_a\ x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$arc\ \operatorname{sen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$lg_a\ u$	$\frac{u'}{u \ln a}$	$arc\ \cos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$arc\ \cos u$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
e^u	$u'e^u$	$arc\,tg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x.\ln a$	$arc\,tgu$	$\frac{u'}{1+u^2}$
a^u	$a^u.\ln a\ u'$	$arc\ ctg\ x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
u^v	$u^v\left(v'\ln u + \frac{v.u'}{u}\right)$	$arc\ ctg\ u$	$\frac{-u'}{1+u^2}$

a,k ,m son constantes u,v,f,g,son funciones de la variable x

Luego, recuerden que las reglas de derivación que han estudiado en Matemática 2 siguen vigentes para la derivación parcial, con la salvedad que **cuando derivamos parcial mente con respecto a una de las variables, tienen que considerar que todas las expresiones que no dependen de dicha variable son constantes**.

A modo de ejemplo, vamos con algunos ejemplos:

1)

$\mathbf{f(x;y) = 3*x^2*y + y^3}$,

cuyas derivadas parciales quedan expresadas (observen que separamos en términos, y que las derivaciones son directas):

$\mathbf{f_x(x;y) =}$ $3*2*x*y + 0$ $\mathbf{= 6*x*y}$;

$\mathbf{f_y(x;y) =}$ $3*x^2*1 + 3*y^2$ $\mathbf{= 3*x^2 + 3*y^2}$.

2)

$\mathbf{f(x;y) = y*Ln(x)}$,

cuyas derivadas parciales quedan expresadas (observen que las derivaciones son directas):

$\mathbf{f_x(x;y) =}$ $y*(1/x)$ $\mathbf{= y/x}$;

$\mathbf{f_y(x;y) =}$ $1*Ln(x)$ $\mathbf{= Ln(x)}$.

3)

$\mathbf{f(x;y) = e^{x*y} + sen(x^2 + y)}$,

cuyas derivadas parciales quedan expresadas (observen que separamos en términos, y que en ambos términos aplicamos la Regla de la Cadena):

$\mathbf{f_x(x;y) =}$ $e^{x*y}*1*y + \cos(x^2 + y)*(2*x + 0)$ $\mathbf{= y*e^{x*y} + 2*x*cos(x^2 + y)}$;

$\mathbf{f_y(x;y) = e^{x*y}*x*1 + cos(x^2 + y)*(0 + 1) = x*e^{x*y} + cos(x^2 + y)}$.

4)

$f(x;y) = x^y = [\ e^{Ln(x)}\ ]^y = e^{y*Ln(x)}$,

cuyas derivadas parciales quedan expresadas (observen que aplicamos la Regla de la Cadena):

$\mathbf{f_x(x;y) =}$ $e^{y*Ln(x)} * y*(1/x)$ $\mathbf{= (y/x)*e^{y*Ln(x)}}$;

$\mathbf{f_y(x;y) =}$ $e^{y*Ln(x)} * 1*Ln(x)$ $\mathbf{= Ln(x)*e^{y*Ln(x)}}$.

En los dos ejercicios que siguen, observen que operamos sobre las expresiones de las funciones antes de pasar a derivar, a fin de lograr que la tarea sea más sencilla.

5)

$\mathbf{f(x;y;z) = \sqrt{(z^2 - x^2 - y^2)} = (z^2 - x^2 - y^2)^{1/2}}$,

cuyas derivadas parciales quedan expresadas (observen que aplicamos la Regla de la Cadena):

$\mathbf{f_x(x;y;z) =}$ $(1/2)*(z^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} * (-2*x)$ $\mathbf{= -x*(z^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}}$,

$\mathbf{f_y(x;y;z) =}$ $(1/2)*(z^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} * (-2*y)$ $\mathbf{= -y*(z^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}}$,

$\mathbf{f_z(x;y;z) =}$ $(1/2)*(z^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} * (2*z)$ $\mathbf{= z*(z^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}}$.

6)

$\mathbf{f(x;y;z) =}$ $x*y*z + 1/(x^2 + y^2 + z^2)$ $\mathbf{= x*y*z + (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}}$,

cuyas derivadas parciales quedan expresadas (observen que separamos en términos, y que aplicamos la Regla de la Cadena):

$\mathbf{f_x(x;y;z) =}$ $1*y*z + (-1)*(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} * (2*x)$ $\mathbf{= y*z - 2*x*(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}}$,

$\mathbf{f_y(x;y;z) =}$ $x*1*z + (-1)*(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} * (2*y)$ $\mathbf{= x*z - 2*y*(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}}$,

$\mathbf{f_z(x;y;z) =}$ $x*y*1 + (-1)*(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} * (2*z)$ $\mathbf{= x*y - 2*z*(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}}$.

Definición de derivadas parciales de una función en un punto de su dominio

Recuerden que en Matemática 2 estudiaron la definición, en la cuál la derivada de una función se planteaba por medio del límite de su cociente incremental:

$f'(x_0) = \text{Lím}(h\to 0)\ [\ f(x_0+h) - f(x_0)]/h;$

luego, extendemos esta idea para plantear las expresiones de las derivadas parciales de una función de dos variables en un punto $P_0(x_0;y_0)$ perteneciente a su dominio, y quedan:

Derivada parcial con respecto a x: $f_x(x_0;y_0) = \text{Lím}(h\to 0)\ [\ f(x_0+h;y_0) - f(x_0;y_0)\ ]/h$,

y

Derivada parcial con respecto a y: $f_y(x_0;y_0) = \text{Lím}(k\to 0)\ [\ f(x_0;y_0+k) - f(x_0;y_0)\ ]/k$.

Luego, para calcular derivadas por medio de la definición,

es muy conveniente plantear la tarea en tres etapas:

1°) plantear las expresiones que tienen en el numerador del cociente incremental,

2°) sustituir expresiones, y optimizar el argumento del límite,

3°) resolver el límite, con las técnicas que han estudiado en Matemática 2.

Luego, vamos con algunos ejemplos

7)

$f(x;y) = x*y^2$, en el punto: **$P_0(2;3)$**,
y observen que pueden plantear las expresiones de las derivadas parciales por medio de las reglas de derivación, y luego evaluar, y así tener un control para los resultados que hayan obtenido al calcularlas por medio de la definición.

<u>Derivada parcial con respecto a x</u>:
1°)
$f(2;3) = 2*3^2 = 18$,
$f(2+h;3) = (2+h)*3^2 = 18 + 9*h$;
2°)
$f_x(2;3) =$ Lím(h→0) [f(2+h;3) – f(2;3)]/h, sustituyen expresiones:
$f_x(2;3) =$ Lím(h→0) [18 + 9*h – 18]/h, cancelan términos opuestos en el numerador:
$f_x(2;3) =$ Lím(h→0) [9*h]/h, simplifican:
3°)
$f_x(2;3) =$ Lím(h→0) [9], resuelven (observen que la resolución es directa):
$f_x(2;3) = 9$.

<u>Derivada parcial con respecto a y</u>:
1°)
$f(2;3) = 2*3^2 = 18$,
$f(2;3+k) = 2*(3+k)^2 = 2*(9 + 6*k + k^2) = 18 + 12*k + 2*k^2$;
2°)
$f_y(2;3) =$ Lím(k→0) [f(2;3+k) – f(2;3)]/k, sustituyen expresiones:
$f_y(2;3) =$ Lím(k→0) [$18 + 12*k + 2*k^2 – 18$]/h,
cancelan términos opuestos en el numerador:
$f_y(2;3) =$ Lím(k→0) [$12*k + 2*k^2$]/k, extraen factores comunes en el numerador:
$f_y(2;3) =$ Lím(k→0) [2*k*(6 + k]/k, simplifican:
3°)
$f_y(2;3) =$ Lím(k→0) [2*(6 + k)], resuelven (observen que la resolución es directa):
$f_y(2;3) = 12$.

8)

$f(x;y) = x - y + 2$, en el punto: **$P_0(0;1)$**,

y observen que pueden plantear las expresiones de las derivadas parciales por medio de las reglas de derivación, y luego evaluar, y así tener un control para los resultados que hayan obtenido al calcularlas por medio de la definición.

<u>Derivada parcial con respecto a x</u>:

1°)

$f(0;1) = 0 - 1 + 2 = 1$,

$f(0+h;1) = f(h;1) = h - 1 + 2 = h + 1$;

2°)

$f_x(0;1) =$ Lím(h→0) [f(0+h;1) – f(0;1)]/h, sustituyen expresiones:

$f_x(0;1) =$ Lím(h→0) [h + 1 – 1]/h, cancelan términos opuestos en el numerador:

$f_x(0;1) =$ Lím(h→0) [h]/h, simplifican:

3°)

$f_x(0;1) =$ Lím(h→0) [1], resuelven (observen que la resolución es directa):

$f_x(0;1) = 1$.

<u>Derivada parcial con respecto a y</u>:

1°)

$f(0;1) = 0 - 1 + 2 = 1$,

$f(0;1+k) = 0 - (1+k) + 2 = 0 - 1 - k + 2 = -k + 1$;

2°)

$f_y(0;1) =$ Lím(k→0) [f(0;1+k) – f(0;1)]/k, sustituyen expresiones:

$f_y(0;1) =$ Lím(k→0) [-k + 1 - 1]/k,

cancelan términos opuestos en el numerador:

$f_y(0;1) =$ Lím(k→0) [-k]/k, simplifican:

3°)

$f_y(0;1) =$ Lím(k→0) [-1], resuelven (observen que la resolución es directa):

$f_y(0;1) = -1$.