Los 23 problemas de Hilbert

Se conoce como “Problemas de Hilbert” a una lista de 23 problemas matemáticos compilados por el gran matemático alemán David Hilbert para la conferencia de París del Congreso Internacional de Matemáticos de 1900. Los problemas estaban todos por resolver en aquel momento, y varios resultaron ser muy influyentes en la matemática del siglo XX (y fundacionales para la Computación). Se mencionan a continuación algunos (el nro 10 lo hemos referenciados en la Clase 2; sobre los otros trataremos también, en las Clases 3 a 4):

Problema	Explicación breve	Estado
1	La hipótesis del continuo (esto es, no existe un conjunto cuyo tamaño esté estrictamente entre el de los números naturales y el de los números reales).	Se ha probado la imposibilidad de probarlo como cierto o falso mediante los axiomas de Zermelo-Fraenkel de la Teoría de Conjuntos.
8	La conjetura de Goldbach (cada número par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos números primos).	Abierto.
10	Encontrar un algoritmo que determine si una ecuación diofántica polinómica dada con coeficientes enteros tiene solución entera.	Resuelto. Resultado: no, el teorema de Matiyasevich (1970) implica que no existe tal algoritmo.

Posteriormente, en 1920, Hilbert propuso de forma explícita un proyecto de investigación (en *metamatemática*, como se llamó entonces) que acabó siendo conocido como “Programa de Hilbert”. Quería que la matemática fuese formulada sobre bases sólidas y completamente lógicas. Pensaba que, en principio, esto podía lograrse, mostrando:

1. Toda la matemática se sigue de un sistema finito de axiomas escogidos correctamente.
2. Tal sistema axiomático se puede probar consistente.

En 1931, el matemático Kurt Gödel demostró con su teorema de incompletitud que el ambicioso plan de Hilbert era imposible tal como se planteaba. El segundo requisito no podía combinarse con el primero de forma razonable, mientras el sistema axiomático fuera genuinamente finito. Sin embargo, no se decía nada respecto de la demostración de la completitud de la matemática mediante un sistema formal diferente.

La necesidad de entender el trabajo de Gödel llevó al desarrollo de la teoría de la computabilidad, y después de la lógica matemática como disciplina autónoma, en la década de 1930 - 1940. De este debate nació la informática teórica de Alonzo Church y Alan Turing. En particular, el *Entscheidungsproblem* (en castellano, el problema de decisión) fue el reto en lógica simbólica de encontrar un algoritmo general que decidiera si una fórmula de la lógica de primer orden es un teorema. En 1936, de manera independiente, Church y Turing demostraron que es imposible escribir tal algoritmo. Como consecuencia, es también imposible decidir con un algoritmo si ciertos enunciados de la aritmética son ciertos o falsos. Church demostró que no existe algoritmo que decida para dos expresiones del cálculo lambda si son equivalentes o no. Por su parte, Turing redujo el problema al problema de la detención de las máquinas de Turing. Ambos trabajos se vieron influidos por el trabajo anterior de Gödel, especialmente por el método de asignar números a las fórmulas lógicas para poder reducir la lógica a la aritmética.