

Jerarquía de la Computabilidad

Comentario: Tratar de hacer los ejercicios del 1 al 3 (el 2 y 3 revisten alguna dificultad, pero sus soluciones son similares a las vistas en clase), y algunos incisos del ejercicio 4 (todos mencionados en la Clase 2).

Ejercicio 1. Responder breve y claramente los siguientes incisos:

1. ¿En qué difieren los lenguajes recursivos, recursivamente numerables no recursivos, y no recursivamente numerables?
2. Probar que $R \subseteq RE \subseteq \mathcal{Q}$.
3. ¿Todo lenguaje de la clase CO-RE tiene una MT que lo acepta?
4. Justificar por qué los lenguajes Σ^* y \emptyset son recursivos.
5. Si $L \subseteq \Sigma^*$, ¿se cumple que $L \in R$?
6. Justificar por qué un lenguaje finito es recursivo.
7. Justificar por qué si $L_1 \in CO-RE$ y $L_2 \in CO-RE$, entonces $(L_1 \cap L_2) \in CO-RE$.

Ejercicio 2. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes recursivamente numerables de números naturales representados en notación unaria (por ejemplo, el número 5 se representa con 11111). Probar que también es recursivamente numerable el lenguaje $L = \{x \mid x \text{ es un número natural representado en notación unaria, y existen } y, z, \text{ tales que } y + z = x, \text{ con } y \in L_1, z \in L_2\}$.

Ayuda: la prueba es similar a la de la propiedad de clausura de la clase RE con respecto a la operación de concatenación.

Ejercicio 3. Dada una MT M_1 con $\Sigma = \{0, 1\}$:

1. Construir una MT M_2 que determine si $L(M_1)$ tiene al menos una cadena.
2. ¿Se puede construir además una MT M_3 para determinar si $L(M_1)$ tiene a lo sumo una cadena? Justificar.

Ayuda para la parte (1): Si $L(M_1)$ tiene al menos una cadena, entonces existe al menos una cadena w de unos y ceros, de tamaño n , tal que M_1 a partir de w acepta en k pasos. Teniendo en cuenta esto, pensar cómo M_2 podría simular M_1 considerando todas las cadenas de unos y ceros hasta encontrar eventualmente una que M_1 acepte (¡cuidándose de los casos en que M_1 entre en loop!).

Ejercicio 4. Considerando los lemas estudiados en la Clase 2, indicar/probar/construir:

1. Cómo se implementaría copiar el input w en la cinta 2 de la MT M (Lema 2).
2. Cómo se implementaría borrar el contenido de la cinta 2 de la MT M (Lema 2).
3. Probar la correctitud de la construcción (Lema 2).
4. Cómo se implementaría la suma de 1 al contador i en la MT M (Lema 3).
5. Cómo se implementaría ejecutar en M , i pasos de las MT M_1 y M_2 (Lema 3).
6. Probar la correctitud de la construcción (Lema 3).
7. Construir la MT M solución y probar su correctitud (Lema 4).
8. Probar la correctitud de las construcciones de las MT de la Clase Práctica 2.
9. Probar las otras propiedades de clausura de R y RE mencionadas en la Clase 2.