Matemática 4 - Clase de Consulta: 10-2-21

1)

Dado el conjunto de vectores:

$$S = (< 1 ; 0 ; 1 >, < 1 ; 1 ; 1 >, < 0 ; 0 ; 1 >):$$

a) ¿S genera a R^3?

b) Si no genera a R^3, indicar a qué subespacio vectorial de R^3 sí genera.

a)

Observen que el conjunto S está incluido en R^3, y que su cardinal es: $|S| = 3$; luego, tienen dos situaciones posibles:

1°)

si los elementos del conjunto S sí son linealmente independientes,

entonces tendrían que S es una base de R^3, y por lo tanto S genera a R^3,

2°)

si los elementos del conjunto S no son linealmente independientes,

entonces tendrían que S genera a un subespacio vectorial de R^3,

e incluye a una base de dicho subespacio vectorial.

Luego, plantean la "combinación lineal nula" (designamos con: a, b, c, a los escalares), y queda la ecuación vectorial:

$$a*< 1 ; 0 ; 1 > + b*< 1 ; 1 ; 1 > + c*< 0 ; 0 ; 1 > = < 0 ; 0 ; 0 >,$$

resuelven la combinación lineal en el primer miembro, y queda:

$$< a + b ; b ; a + b + c > = < 0 ; 0 ; 0 >,$$

por igualdad entre vectores, igualan componente a componente, y queda el sistema de ecuaciones:

$\mathbf{a + b = 0}$,

$\mathbf{b = 0}$,

$\mathbf{a + b + c = 0}$,

reemplazan el valor coloreado en las demás ecuaciones, cancelan términos nulos, y queda:

$\mathbf{a = 0}$,

$a + c = 0$,

a continuación reemplazan el ultimo valor remarcado en la última ecuación, cancelan el término nulo, y queda:

$\mathbf{c = 0}$,

y como los tres escalares (a, b, c) son iguales a cero, entonces concluyen que **los elementos del conjunto S son Linealmente Independientes**; luego observen que el cardinal (cantidad de elementos) del conjunto S es:

$\mathbf{|S| = 3}$,

y como es igual a la dimensión del espacio vectorial R^3 (como vimos en clase), entonces pueden concluir

que el conjunto **S es** generador-**base** (o base, directamente) **de R^3**,

y recuerden que R^3 es un subespacio vectorial de sí mismo.

2)

Dado el conjunto de vectores:

T = (< 1 ; 0 ; 1 >, < 1 ; 1 ; 1 >, < 2 ; 1 ; 2 >):

a) ¿T genera a R^3?

b) Si T no genera a R^3, indicar a qué subespacio vectorial de R^3 sí genera.

a)

Observen que el conjunto T está incluido en R^3, luego, tienen dos situaciones posibles:

1°)

si los elementos del conjunto T sí son linealmente independientes,

entonces tendrían que T es una base de R^3, y por lo tanto T genera a R^3,

2°)

si los elementos del conjunto T no son linealmente independientes,

entonces tendrían que T genera a un subespacio vectorial de R^3,

e incluye a una base de dicho subespacio vectorial.

Luego, plantean la "combinación lineal nula" (designamos con: a, b, c, a los escalares), y queda la ecuación vectorial:

a*< 1 ; 0 ; 1 > + b*< 1 ; 1 ; 1 > + c*< 2 ; 1 ; 2 > = < 0 ; 0 ; 0 >,

resuelven la combinación lineal en el primer miembro, y queda:

< a + b + 2c ; b + c ; a + b + 2c > = < 0 ; 0 ; 0 >,

por igualdad entre vectores, igualan componente a componente, y queda el sistema de ecuaciones:

a + b + 2c = 0,

b + c = 0, de aquí despejan: b = -c (1),

a + b + 2c = 0,

a continuación sustituyen la expresión señalada (1) en las demás ecuaciones, reducen términos opuestos, y queda:

a + c = 0, de aquí despejan: a = -c (2),

a + c = 0,

a continuación sustituyen la expresión señalada (2) en la última ecuación, cancelan el términos opuestos, y queda:

0 = 0,

que es una identidad verdadera, pero observen que en las expresiones señaladas (1) (2) pudieron despejar:

b = -c,

a = -c,

pero no pudieron despejar c, por lo que tienen entonces que el escalar "c" puede tomar cualquier valor real y, por lo tanto también puede tomar valores distintos de cero, por lo que tienen que los elementos del conjunto T no son linealmente independientes;

luego, consideren el subconjunto incluido en el conjunto T, cuyos elementos son los vectores "asociados" a los escalares "a" y "b" que sí pudieron despejar, y queda:

T_1 = { < 1 ; 0 ; 1 > , < 1 ; 1 ; 1 > }, y observen que los elementos de este subconjunto sí son linealmente independientes, pero observen también que el cardinal de este conjunto es:

$$|T_1| = 2,$$

por lo que pueden concluir que el subconjunto T_1 es una base de un subespacio vectorial U de R^3, cuya dimensión es:

$$\mathbf{dim(U) = 2}.$$

b)

Plantean la expresión de un elemento genérico perteneciente al subespacio vectorial U en función de los elementos de su base (llamamos m, n a los escalares), y queda:

$$m * < 1 ; 0 ; 1 > + n * < 1 ; 1 ; 1 > = < x ; y ; z >,$$

resuelven la combinación lineal en el primer miembro, y queda:

$$< m + n ; n ; m + n > = < x ; y ; z >,$$

por igualdad entre expresiones vectoriales, igualan componente a componente, y queda el sistema de ecuaciones:

$$m + n = x,$$

$$\mathbf{n = y},$$

$$m + n = z,$$

sustituyen la expresión coloreada en las otras dos ecuaciones, y queda:

$m + y = x$, de aquí despejan: $\mathbf{m = x - y}$,

$$m + y = z,$$

sustituyen esta última expresión coloreada en la última ecuación, y queda:

$$x - y + y = z,$$

cancelan términos opuestos, y finalmente queda:

$$x = z,$$

restan z en ambos miembros, y queda:

$$\mathbf{x - z = 0},$$

que es la ecuación que expresa la condición que cumplen los elementos del subespacio vectorial U, cuya expresión es:

$$\mathbf{U = \{ < x ; y ; z > \in R^3 : x - z = 0 \}}.$$