Matemática IV- 2020
TP7 - Espacios Vectoriales

1. Indicar cuál es el elemento neutro en cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

   a) $\mathbb{R}^6$ con las operaciones usuales.

   b) El espacio $\mathcal{P}_3$ de los polinomios de grado 3 (i.e todos los polinomios con grado menor o igual a 3) con las operaciones usuales.

   c) El espacio de matrices reales de 3x4.

   d) El espacio de las funciones contínuas de un intervalo cerrado $[a, b]$ a todo $\mathbb{R}$.

2. En cada espacio vectorial, encontrar el opuesto (o inverso respecto de la suma) de los siguientes vectores:

   a) En $\mathbb{R}^3$, $v = (2, -1, 0)$

   b) En $\mathcal{P}_3$, $p(x) = -3x^2 + 2x + 6$

   c) En el espacio de las matrices reales de 2x3, $v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

3. Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:

   a) $\mathbb{R}^3$

   b) $\mathbb{R}^n$ con n natural.

   c) Las matrices reales de $2x2$

   d) Las matrices reales de nxn

   e) Los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$)

4. Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):

   a) $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

   b) $S = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$

   c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$

   d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$

   e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\}$

   f) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = 1\}$

   g) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

   h) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

5. Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de R^3:

   a) $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$

   b) $S = \{(1, 0, 1); (1, 1, 1); (0, 0, 1)\}$

c) $S = \{(1,0,1);(0,1,0)\}$

6. Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1,0,1);(1,1,0)\}$

7. Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

   a) $S = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1);(1,2,3)\}$
   b) $S = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$
   c) $S = \{(1,0);(0,1);(2,3)\}$
   d) $S = \{(1,-3);(1,-1)\}$
   e) $S = \{(0,2,-1);(1,7,1);(1,3,-1);(0,0,0)\}$
   f) $S = \{(4,1,0,0);(-3,0,1,0);(1,0,0,1)\}$
   g) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$
   h) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

8. Analizar si un conjunto de vectores que contiene al vector nulo puede ser linealmente independiente. Justificar.

9. Si el conjunto de vectores $M = \{u,v,w\}$ de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto $\{u, u+2v, u+2v+3w\}$ es linealmente independiente.

10. Analizar si el conjunto de vectores $\{(2,-1);(1,3)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$.

11. Hallar una base para cada conjunto del ejercicio 4 que sea un subespacios.

* **Ejercicios Adicionales**

1. Analizar si forman un subespacio (de las matrices cuadradas) las matrices reales no invertibles de $2x2$ y las matrices reales invertibles de nxn.

2. $S = \{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_3 = 4a_0, a_i \in \mathbb{R}\}$ es un subepacio del Espacio de polinomios?

3. Decidir si $S = \{(1,2,3);(2,3,1);(-4,1,-1)\}$ genera R^3

4. Defina el subespacio generado por los vectores $\{(1,1,1);(2,-1,3);(-1,2,2)\}$

5. Analizar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

   a) $S = \{(5,-3);(1,2)\}$
   b) $S = \{(3,2,1);(0,0,1);(1,2,3)\}$

6. Analizar si el conjunto de vectores $\{(0,2,-1);(1,1,1);(1,3,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

7. Analizar si $\{x, x^2, x^3\}$ es base de $\{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$ (los polinomios reales de grado menor o igual a 3)