Límites

OJO Gente, aquí tengan presentes los conceptos que han visto en Matemática 2, que les serán muy útiles.

Recuerden que las funciones **polinómicas**, **seno**, **coseno** y **exponenciales** son funciones continuas, y lo siguen siendo como funciones de dos, de tres o de más variables, así como son continuas su suma, su resta, su multiplicación y su composición.

Luego, recuerden que si al evaluar el argumento de un límite obtienen un número real, <u>consideramos que este límite es de resolución directa</u>, y consignamos su resultado, por ejemplo en los siguientes ejemplos:

1)

Lím[(x;y)→(3;1)] ($5x - x^2 - 3y^2$) = evaluamos = $5*3 - 3^2 - 3*1^2 = 15 - 9 - 3$ **= 3**,

y observen que hemos resuelto término a término, porque hemos aplicado la propiedad: "el límite de una suma (o resta) de funciones es igual a la suma (o resta) de los límites de las mismas, siempre y cuando estos límites existan".

2)

Lím[(x;y;z)→(0;0;0)] [sen(x + y + z)] = evaluamos = sen(0 + 0 + 0) = sen(0) **= 0**,

y observen que hemos resuelto el argumento del seno, porque hemos aplicado la propiedad: "el límite de una composición de funciones continuas es igual al valor que toma la segunda función para el límite de la primera".

Luego, cuando el argumento del límite es una expresión racional, o de una expresión que es una división en general, recuerden que si tienen que el numerador y el denominador tienden ambos a cero, entonces consideramos que, por el momento, el límite es indeterminado, y que requiere ser estudiada la situación, como la que se presenta en el ejemplo siguiente:

3)

Lím[(x;y)→(0;0)] [$x*y/(x^2+y^2)$] = indeterminado,

ya que el numerador tiende a 0 y el denominador también tiende a cero;

luego, observen que el punto en estudio es (0;0), y que hay infinidad de trayectorias en el plano XY que pasan por él, por lo que "miramos" la expresión del denominador (simplemente, porque es la que nos complica el cálculo), y observen que es una <u>suma de potencias pares con exponentes iguales</u>, por lo que podemos elegir una "familia de trayectorias significativas" que pasen por el punto en estudio, y que en su ecuación se cumpla que las variables (x e y) <u>tengan exponentes iguales</u>; luego, sin dar más vueltas, observen que la familia de trayectorias tiene la ecuación:

$y = m*x$ (rectas que pasan por el origen de coordenadas, que es nuestro punto en estudio, y observen que m es la pendiente de cada recta de la familia, por lo que m toma valores reales);

luego, observen que sustituimos la expresión señalada con rojo en el argumento, y el límite se reduce a una sola variable (como los que ustedes han estudiado en Matemática 2), y queda:

$\text{Lím}[x\to 0]\ [x*m*x/(x^2+[m*x]^2)] =$

aquí reducen factores semejantes en el numerador, resuelven la potencia y extraen factor común en el denominador, y queda;

$= \text{Lím}[x\to 0]\ [m*x^2/(x^2*[1+m^2])] =$

aquí simplifican en el argumento del límite, resuelven (observen que la variable x "desaparece"), y queda:

$= m/(1+m^2)$,

que es una expresión que depende de la pendiente de la recta que escojamos en la familia de trayectorias (por ejemplo: si m = 1 tienen que el límite es igual a 1/2, pero si m = 0 tienen que el límite es igual a 0), por lo que tienen que el límite no es igual para todas las trayectorias, y pueden concluir que el límite que tienen que estudiar en este ejemplo no existe.

En general: si tenemos un límite "indeterminado", elegimos la familia de trayectorias más significativa (que estará caracterizada por un coeficiente, que es la pendiente m para las rectas en el ejercicio que tomamos como modelo), sustituimos la expresión que tenemos en la ecuación de la familia de trayectorias, y reducimos todo a un límite de una variable, y pueden ocurrir dos situaciones:

1°) que el límite dependa del coeficiente, por lo que concluimos que el límite no existe (como nos ocurrió en el ejemplo anterior);

2°) que el límite sea numérico, por lo que sospecharemos que el límite existe, pero tendremos que demostrar su existencia por medio del Teorema de Encaje.

4)

$\text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [x*y/\sqrt{(x^2+y^2)}]$ = indeterminado,

y observen aquí que el denominador del argumento es una raíz cuadrada, cuyo argumento a su vez es una suma de potencias pares con exponentes iguales, por lo que elegimos la misma familia de trayectorias que en el ejemplo anterior, y queda:

$\text{Lím}[x\to 0]\ [x*m*x/\sqrt{(x^2+[m*x]^2)}] =$

aquí reducen factores semejantes en el numerador, resuelven la potencia y extraen factor común en el argumento de la raíz cuadrada en el denominador, y queda;

$= \text{Lím}[x\to 0]\ [m*x^2/\sqrt{(x^2*[1+m^2])}] =$

aquí distribuyen la raíz cuadrada en el denominador, resuelven su primer factor (OJO: observen que simplifican una raíz cuadrada con una potencia cuyo exponente es par), y queda:

$= \text{Lím}[x\to 0]\ [m*x^2/(|x|*\sqrt{[1+m^2]})] =$

aquí simplifican en el argumento del límite (recuerden: $x^2 = |x|^2$), queda:

$= \text{Lím}[x\to 0]\ [m*|x|/\sqrt{(1+m^2)}] = 0$, ya que el numerador tiende a cero, y que el denominador es una expresión distinta de cero,

por lo que podemos “sospechar” que el límite existe y es igual a 0, pero tendremos que demostrarlo, ya que las trayectorias que pasan por el punto en estudio son infinitas, y nosotros solamente hemos estudiado a una parte de ellas, que en este caso son trayectorias rectilíneas.

Expresiones positivas menores o iguales que uno

Recuerden que cualquier fracción positiva, con numerador y denominador positivos, representa a un número racional comprendido entre 0 y 1 si su numerador es menor o igual que su denominador, por ejemplo:

4/5 = 0,8; 2/3 = 0,666…; 9/9 = 1;

luego, observen que las expresiones:

$\mathbf{x^2/(x^2 + y^2)}$ e $\mathbf{y^2/(x^2 + y^2)}$,

toman valores comprendidos entre 0 y 1, ya que su numerador y su denominador son positivos, y su numerador toma valores menores o iguales que su denominador;

luego, observen que si extraen raíz cuadrada positiva, quedan otras dos expresiones:

$\mathbf{|x|/\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ e $\mathbf{|y|/\sqrt{(x^2 + y^2)}}$,

que también toman valores comprendidos entre 0 y 1,

luego, <u>estas cuatro expresiones serán de utilidad para demostrar la existencia del límite de una función cuya expresión contenga a una o varias de estas cuatro expresiones</u>.

Teorema de Encaje (o de Acotación, o “del sándwich”)

Si

$$0 \leq | f(x;y) - L | \leq g(x;y)$$

y

$$\text{Lím}_{(x;y)\to(a;b)}\, g(x;y) = 0$$

entonces:

$$\text{Lím}_{(x;y)\to(a;b)}\, f(x;y) = L,$$

que enunciado con palabras queda:

“Si la diferencia entre la función f y su límite (L) en el punto en estudio (a;b) es menor o igual que una función g, y el límite de esta última es igual a cero en el punto en estudio, entonces el límite de la función f en el punto (a;b) es igual a L”.

Luego, continuamos con el ejercicio (4), en el cuál ya hemos planteado el límite para las trayectorias más significativas, y hemos llegado a la “sospechar” que el límite existe y es igual a cero, por lo que tenemos que responder la pregunta:

$$¿\ \text{Lím}_{(x;y)\to(0;0)}\, [x*y/\sqrt{(x^2+y^2)}] = 0 = L\ ?$$

Luego, pasamos a la aplicación del Teorema de Acotación:

$$0 \leq | f(x;y) - L | \leq$$

sustituyen expresiones:

$$\leq | x*y/\sqrt{(x^2+y^2)} - 0 | \leq$$

cancelan el término nulo en el argumento del valor absoluto:

$$\leq | x*y/\sqrt{(x^2+y^2)} | \leq$$

asocian expresiones en el argumento del valor absoluto:

$$\leq | x*[y/\sqrt{(x^2+y^2)}] | \leq$$

distribuyen el valor absoluto entre los dos factores:

$$\leq | x | * | y/\sqrt{(x^2+y^2)} | \leq$$

aquí observen que la expresión coloreada con rojo toma valores comprendidos entre 0 y 1, por lo que "maximizamos esta expresión", y queda:

$$\leq | x | * 1 \leq$$

resuelven, y queda:

$$\leq | x |,$$

y ya tienen la expresión de la "función de acotación", que para este ejercicio es:

$$g(x;y) = | x |;$$

luego, plantean el límite de la función de acotación para el punto en estudio, y queda:

$$\text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ g(x;y) = \text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ | x | = 0,$$

y como tienen demostrado que se cumplen las dos hipótesis del Teorema de Encaje, entonces aplican dicho Teorema, y pueden concluir:

$$\text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [x*y/\sqrt{(x^2+y^2)}] = 0.$$

Intenten ustedes abordar los demás límites del TP, y llegado el caso, si ustedes lo solicitan pertinente publicaremos resoluciones comentadas de los mismos.