Ejercicio sobre Continuidad de una función

4 a)

Tienen la expresión de la función a estudiar:

$$f(x;y) = x*y*(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2),$$

y observen que su dominio es el conjunto: $D = R^2 - \{(0;0)\}$,

por lo que ya tienen que esta función no es continua en el origen de coordenadas,

pero observen que esta función sí es continua en todo su dominio, ya que su expresión corresponde a una división de dos funciones:

$$N(x;y) = x*y \text{ (expresión de la función numeradora),}$$

$$D(x;y) = x^2 + y^2 \text{ (expresión de la función divisora),}$$

y observen que son continuas en dicho conjunto y, además, la función divisora no toma el valor cero en el mismo, por lo que pueden concluir que **esta función es continua en el conjunto:** $R^2 - \{(0;0)\}$.

Luego, queda pendiente analizar cuál tipo de discontinuidad presenta esta función en el origen de coordenadas y, para ello, expresan al denominador como su propia raíz cuadrada elevada al cuadrado, y la expresión de la función queda (observen que empleamos una forma alternativa a la que desarrollamos en la clase en línea):

$$f(x;y) = x*y*(x^2 - y^2) / [\sqrt{(x^2 + y^2)}]^2,$$

expresan al denominador como una multiplicación de factores iguales, asocian expresiones, y queda:

$$f(x;y) = [\ x/\sqrt{(x^2 + y^2)}\ ] * [\ y/\sqrt{(x^2 + y^2)}\ ] * (x^2 - y^2),$$

y observen que esta expresión resulta ser una multiplicación entre dos **expresiones que permiten acotar** y una expresión polinómica, por lo que podemos intuir que esta función tiene límite en el punto en estudio, y que este límite es igual a cero, o sea: $L = 0$; luego, planteamos el Teorema de Encaje para esta función y para el punto en estudio, y queda:

$$0 \leq |f(x;y) - L| \leq g(x;y), \text{ y}$$

$$\text{Lím}[(x;y) \to (0;0)] = 0,$$

entonces el limite **L** es válido;

luego, aplicamos el Teorema, y queda:

$$0 \leq |f(x;y) - 0| =$$

cancelan el término nulo, y queda:

$$= |f(x;y)| =$$

sustituyen la última expresión de la función, y queda:

$$= |\ [\ x/\sqrt{(x^2 + y^2)}\ ] * [\ y/\sqrt{(x^2 + y^2)}\ ] * (x^2 - y^2)\ | =$$

distribuyen el valor absoluto entre los factores de su argumento, y queda:

$$= |\ x/\sqrt{(x^2 + y^2)}\ | * |\ y/\sqrt{(x^2 + y^2)}\ | * |\ x^2 - y^2\ | =$$

distribuyen el valor absoluto entre los numeradores y los denominadores de los dos primeros factores (observen que las raíces cuadradas son positivas), y queda:

$$= [\ |x| / \sqrt{(x^2 + y^2)}\ ] * [\ |y| / \sqrt{(x^2 + y^2)}\ ] * |\ x^2 - y^2\ | \leq$$

a continuación acotan, y queda:

$$\leq 1 * 1 * |\ x^2 - y^2\ | =$$

resuelven, y la expresión de la "función de acotación" queda:

$$= |\ x^2 - y^2\ | = g(x;y),$$

luego, plantean el límite de la "función de acotación" en el punto en estudio, y queda:

$$\text{Lím}[(x;y) \rightarrow (0;0)]\ g(x;y) =$$

sustituyen la expresión de la "función de acotación", resuelven el límite (observen que es directo), y queda:

$$= \text{Lím}[(x;y) \rightarrow (0;0)]\ |\ x^2 - y^2\ | = 0,$$

por lo que pueden concluir que el límite de la función para el punto en estudio: (0;0) es: **L = 0**;

luego, observen que podemos redefinir (o extender) a la función, para presentarla como una nueva función "a trozos" (o "partida"), en la forma:

F(x;y) =

$\mathbf{x*y*(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)}$	si $\mathbf{(x;y) \neq (0;0)}$,
0	si $\mathbf{(x;y) = (0;0)}$,

y observen que el dominio de esta nueva función es: $D_F = R^2$, y que es continua en todo su dominio.