Problemas Indecidibles

Comentario: Hacer mínimamente los ejercicios 1 al 4. Ninguno de los ejercicios del trabajo revisten mucha dificultad, muchas de las soluciones se basan en cosas vistas en clase.

Ejercicio 1. Recordar cómo se mostró en la clase 3 que asumiendo R $\subset$ RE se cumple RE $\subset \mathfrak{L}$.

Ejercicio 2. Probar que los lenguajes L_U = {(<M>,w) | M acepta w}, y HP = {(<M>,w) | M para sobre w} pertenecen a la clase RE. *Ayuda: las pruebas son similares a la desarrollada en la clase 3 para demostrar que D = { w_i | M_i acepta w_i } $\in$ RE.*

Ejercicio 3. En la clase 3 se probó que si HP $\in$ R entonces R = RE, demostrando que si existe una MT M_{HP} que decide HP, entonces para cualquier lenguaje L de la clase RE existe una MT M_L que lo decide. En realidad sólo se construyó M_L. Se pide probar que efectivamente M_L para siempre y que $L(M_L) = L$.

Ejercicio 4. Responder cada uno de los incisos (justificar).

a. ¿Se puede decidir si una MT M con una cinta, a partir de la cadena vacía λ, escribe alguna vez un símbolo no blanco? *Ayuda: ¿Cuántos pasos puede hacer M antes de entrar en loop?*
b. ¿Se puede decidir si a partir de un input w, una MT M que sólo se mueve a la derecha para? *Ayuda: ¿Cuántos pasos puede hacer M antes de entrar en loop?*
c. ¿Se puede decidir si dada una MT M, existe un input w a partir del cual M para en a lo sumo 10 pasos? *Ayuda: ¿Hasta qué tamaño de cadenas hay que chequear?*
d. ¿Se puede decidir si dada una MT M, existe un input w de a lo sumo 10 símbolos a partir del cual M para? *Ayuda: ¿En este caso se puede acotar la ejecución de M considerando la cantidad de pasos, la cantidad de celdas recorridas u otro parámetro?*

Ejercicio 5. Explicar cómo enumeraría los números naturales pares, los números enteros, los números racionales y las cadenas de Σ^* siendo $\Sigma = \{0, 1\}$.

Ejercicio 6. Probar que la MT M_{20} construida en la clase 3 para decidir L_{20} = {<M> | M es una MT que a partir del input vacío λ nunca sale de las celdas 1 a 20}, efectivamente para siempre y acepta dicho lenguaje.

Ejercicio 7. Probar que la MT M_L construida en la clase 3 para aceptar L = {<M> | L(M) $\neq \emptyset$} efectivamente cumple que $L(M_L) = L$.

Ejercicio 8. Probar que las MT M_G y M_F presentadas en la clase 3, deciden la Conjetura de Goldbach y el Ultimo Teorema de Fermat, respectivamente, si se asume que HP es recursivo. En otras palabras, se pide verificar la correctitud de la construcción de ambas MT.

Ejercicio 9. Una función f : A $\longrightarrow$ B se dice que es total computable, si y sólo si existe una MT M_f que computa f para todo elemento a $\in$ A. Sea la función $f_{HP} : \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$, tal que:

f(x) = 1, si x = (<M>, w) y M para a partir de w.
f(x) = 0, si x = (<M>, w) y M no para a partir de w, o bien x ≠ (<M>, w).

Probar que la función f_{HP} no es total computable. *Ayuda: Se podría probar que asumiendo que f_{HP} es total computable, se llega a que HP es recursivo. En otras palabras, que se puede construir una MT que decide HP asumiendo que existe una MT que computa totalmente f_{HP}.*

Ejercicio 10. Responder cada uno de los incisos (justificar):

a. Si $L_1 \in$ RE y $L_2 \in$ RE, ¿$L_1 - L_2 \in$ RE?
b. Si $L_1 \cap L_2 \in$ RE, ¿L_1 o $L_2 \in$ RE?
c. Si $L_1 \cup L_2 \in$ RE, ¿L_1 o $L_2 \in$ RE?

Ejercicio 11. Explicar (informal pero claramente) cómo sería una MT que genera la n-ésima fórmula booleana satisfactible, cuya sintaxis contiene variables de la forma x_i, los operadores lógicos del conjunto {¬, $\wedge$, $\vee$}, y paréntesis.