Integración

Integrales Dobles

Dada una función $f\,(x, y)$ vamos a estudiar la integral definida de esta función sobre una región en el plano.

La idea es similar a la de la integral definida de una función de una variable $\int_a^b F(x)dx$. Cuando $F(x) \geq 0$ en $[a, b]$, esta integral representa el área bajo la curva $y = F(x)$ sobre el intervalo.

Recordemos que la integral puede definirse sin recurrir al concepto de área mediante **sumas de Riemann**.

Integrales dobles sobre un rectángulo

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cuyo dominio es un rectángulo cerrado R con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo R puede describirse en términos de dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$ que representan a sus lados a lo largo de los ejes x e y.

$$R = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\} \quad \text{o} \quad R = [a, b] \times [c, d]$$

Si $(x, y) \geq 0$ en R, la gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$ que está arriba del rectángulo R.

Nuestro objetivo es hallar el volumen del sólido S limitado por el rectángulo R como "piso", la superficie de la gráfica de f como "techo", y los cuatro planos verticales como paredes ($x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$).

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos R_{ij}, para lo cual se subdividen los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ en n y m subintervalos respectivamente, de igual ancho ($\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $\Delta y = \frac{d-c}{m}$)

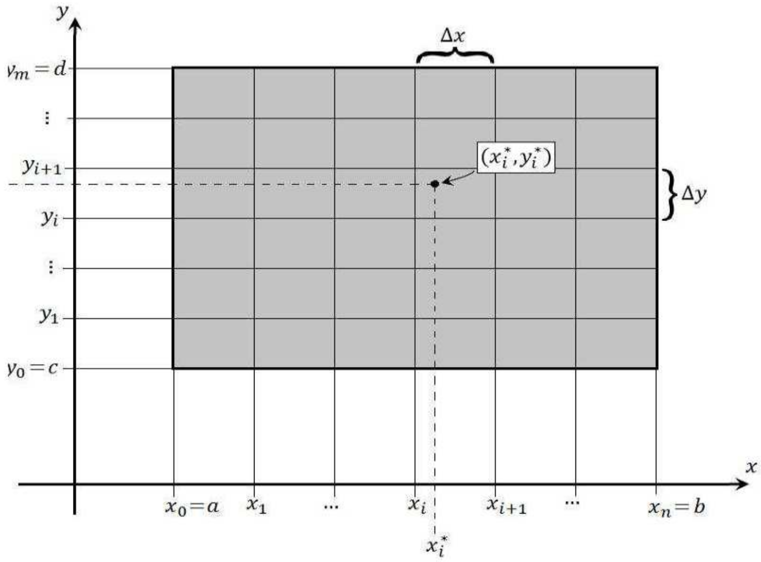
Cada uno de estos nm subrectángulos de R tiene área igual a $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Tomaremos un punto de "muestra" (x^*_{ij}, y^*_{ij}) en cada subrectángulo R_{ij}, y aproximamos la parte del sólido S que está arriba de ese rectángulo R_{ij} con un paralelepípedo (o "columna") de base R_{ij} y altura $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$. De modo que esta "columna" tiene volumen $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A$.

Si realizamos este proceso de aproximación para los nm subrectángulos y sumamos los volúmenes de todas las columnas, obtendremos una aproximación del volumen total de S.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A$$

Esta suma se llama ***Doble suma de Riemann***



Definición 0.1. *La integral doble de una función de dos variables f sobre el rectángulo R se define como el siguiente límite:*

$$\int\int_R f(x,y)dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

Si este límite existe.

Sabemos por lo visto en Matemática 2, que evaluar una integral de una variable utilizando su definición (en base a sumas de Riemann) es una tarea difícil, pero el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) proporciona un método más simple para calcularla.
Para integrales dobles resulta aún mas complicado, sin embargo veremos una forma práctica que en general nos permitirá calcular las integrales dobles.

Integrales dobles iteradas

Supongamos que $f(x,y)$ es una función continua de dos variables definida en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$.
Entonces en la siguiente integral$A(x_0) = \int_c^d f(x_0,y)dy$ la variable $x = x_0$ queda fija mientras $f(x_0,y)$ se integra con respecto a y, desde $y = c$ hasta $y = d$.
Como $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ nos da una expresión que no depende de y sino de x, podemos integrar ésta ahora con respecto a x, desde $x = a$ hasta $x = b$, $\int_a^b A(x)dx$ y obtenemos

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Esta expresión se conoce como **integral iterada**

En general escribiremos: $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$ indicando que primero integramos con respecto a x, desde a hasta b, y luego integramos la expresión resultante con respecto a y, desde c hasta d.

De manera similar tenemos la integral iterada $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dx\right] dy$

Tenemos un teorema, que no demostraremos, que nos permite calcular la integral doble sobre un rectángulo de una función continua mediante integrales iteradas, integrando de la forma más conveniente.

Teorema 0.2 (Teorema de Fubini para integrales dobles)**.** *Si $f: R \subset \mathbb{R}^{\not\vDash} \to \mathbb{R}$ es una función continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$, entonces:*

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Ejemplo 0.3. *Calcular $\int\int_R ysen(xy)dA$ siendo $R = [1, 2] \times [0, \pi]$*

Como $f(x, y)$ es una función continua en R, podemos usar el teorema de Fubini para calcular la integral.

$$\int\int_R y\sin(xy)dA = \int_0^\pi \left(\int_1^2 y\sin(xy)dx\right) dy = \int_0^\pi \left.(-\cos(xy))\right|_1^2 dy$$
$$= \int_0^\pi [-cos(2y) + cos(y)]dy = \left[-\frac{1}{2}sen(2y) + sen(y)\right]\Bigg|_0^\pi = 0$$

Si en lugar de iterar de esta forma, cambiamos el orden de integración:

$$\int\int_R y\sin(xy)dA = \int_1^2 \int_0^\pi y\sin(xy)dydx$$

para resolver esta integral es necesario integrar por partes (quedando un poco más complicado que la primer elección)

Propiedades 0.4. *Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones y supongamos que existen las integrales dobles $\int\int_R f(x,y)dA$ y $\int\int_R g(x,y)dA$, donde R es un rectángulo. Entonces se cumple:*

1. ***Linealidad:***
   $\int\int_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \int\int_R f(x,y)dA + \int\int_R g(x,y)dA$.

   $\int\int_R cf(x,y)dA = c\int\int_R f(x,y)dA$, *donde $c \in \mathbb{R}$. para cualquier c real*

2. ***Aditividad en la región de integración:***
   Si $R = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 no se intersecan salvo quizás en sus fronteras, entonces $\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_{R_1} f(x,y)dA + \int\int_{R_2} f(x,y)dA$

3. ***Monotonía:***
   Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ $\forall(x,y) \in D$, entonces $\int\int_R f(x,y)dA \geq \int\int_R g(x,y)dA$.

4. ***Aditividad en la región de integración:***
   Si $R = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 no se intersecan salvo quizás en sus fronteras, entonces $\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_{R_1} f(x,y)dA + \int\int_{R_2} f(x,y)dA$

5. ***Acotamiento:***
   Si para todo $(x,y) \in R$ vale que $|f(x,y)| \leq M$ entonces: $\left|\int\int_R f(x,y)dA \geq M.área(R)\right|$

Integrales dobles en una región plana general

Supongamos que D es una región acotada, es decir que existe un rectángulo R tal que $D \subset R \subset \mathbb{R}^2$. Definimos entonces una nueva función F, con dominio en el rectángulo R de la siguiente forma:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in R - D \end{cases}$$

Entonces si la integral doble de F sobre R *existe* (notar que es una integral sobre un rectángulo), definimos la integral de f sobre D como:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$$

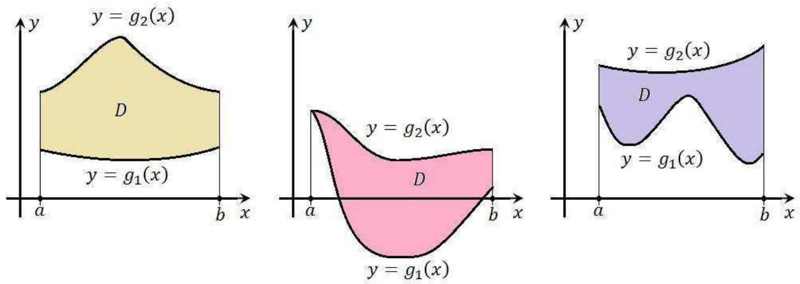
Si bien esta es la forma general de calcular la integral doble en una región plana, no siempre es necesario utilizar este camino, esto depende básicamente de la forma de la región.

- **Región del tipo I.**

  Una región plana es de tipo I si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de la *variable* x, esto es:

  $$D_I = \{(x,y) : a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

  donde $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$.

  Entonces, **la integral doble sobre una región de tipo I** será:

  $$\int\int_{D_I} f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

- **Región de tipo II**

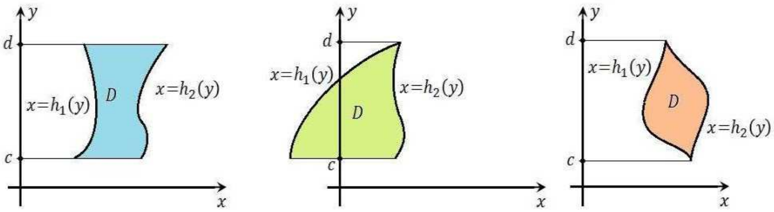
  Una región plana es de tipo II si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de la *variable* y, esto es:

  $$D_{II} = \{(x,y) : c \leq y \leq d; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

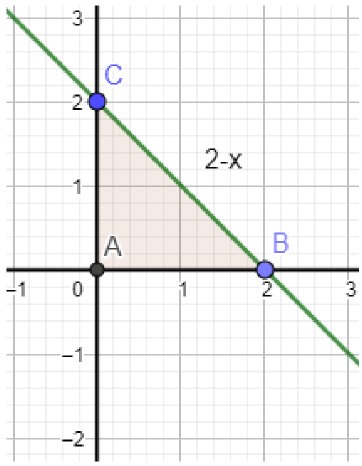
  donde $h_1(y)$ y $h_2(y)$ son funciones continuas en $[c,d]$.

  De modo que**la integral doble sobre una región de tipo II** será:

  $$\int\int_{D_{II}} f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$



Ejemplo 0.5. *Hallar* $\int\int_D (x^2+y^3)dA$, *donde* D *es el triángulo en el plano* xy *con vértices* $(0,0)$, $(2,0)$ *y* $(0,2)$



Observamos que este triángulo D *puede pensarse tanto como una región de tipo I o como de tipo II.*

Como en este caso la dificultad de la integración es la misma, podemos elegir calcularla pensándola como de cualquier tipo, por lo tanto vamos a pensarla como una región del tipo I:

sobre el eje x *nos movemos de* 0 *a* 2, *luego vamos desde la recta* $y=0$ *hasta arriba a la recta* $y=2-x$, *luego*

$$D=\{(x,y): 0\leq x\leq 2; 0\leq y\leq 2-x\}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_D (x^2+y^3)dA &= \int_0^2\int_0^{2-x}(x^2+y^3)dydx \\
&= \int_0^2 \left(x^2y+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2-x} dx = \int_0^2\left(x^2(2-x)+\frac{(2-x)^4}{4}-0x^2-\frac{0^4}{4}\right)dx \\
&= \int_0^2\left(4-8x+8x^2-3x^3+\frac{x^4}{4}\right)dx = \left[4x-4x^2+\frac{8}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{x^5}{20}\right]\Bigg|_0^2 = \frac{44}{15}
\end{aligned}$$

Aplicaciones de las Integrales Dobles

- **Área de una región plana**

$$\int\int_R dA = area(R)$$

- **Volumen de un sólido**

Hemos visto ya que, para f continua y no negativa en todos los puntos de una región D, la integral doble nos ayuda a calcular el volumen de un sólido, si $V = \left\{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, 0 \le z \le f(x, y)\right\}$ entonces

$$vol(V) = \int\int_D f(x, y)dA$$

- **Masa y centro de masa de una placa delgada**

La masa M de una placa bidimensional R que tiene una densidad superficial de masa variable descrita por una función $\rho(x, y)$ está dada por:

$$M = \int\int_R \rho(x, y)dA$$

y las coordenadas del centro de masa pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\int\int_R x\rho(x, y)dA}{M}; \qquad \bar{y} = \frac{\int\int_R y\rho(x, y)dA}{M}$$