Resolución de algunos ejercicios del TP5 parte 1

Resolución del Ejercicio 2

a. Analicemos si la siguiente afirmación es V ó F:

$$a/b \ y \ b/a \ entonces /a/ = /b/.$$

Luego tenemos como datos:

$$a/b,$$

es decir, a divide a b por definición, esto es, existe un $k \in Z$ tal que:

$$b = a \cdot k \ (1)$$

y

$$b/a,$$

es decir, b divide a a por definición, esto es, existe un $h \in Z$ tal que:

$$a = b \cdot h \ (2)$$

Notemos que si reemplazamos (2) en (1) tenemos:

$$b = (b \cdot h) \cdot k$$

Aplicamos propiedad asociativa

$$b = b \cdot (h \cdot k)$$

de lo cual se deduce que

$$(h \cdot k) = 1$$

entonces nos preguntamos si ¿existen valores de $h \in Z$, $k \in Z$ tal que $(h \cdot k) = 1$ se cumpla? La respuesta es: si existen siempre que $h = k = 1$ ó $h = k = -1$ de lo cual se puede concluir que $/a/ = /b/$ es cierto.
Finalmente hemos demostrado que la afirmación es verdadera.

c. Analicemos si la siguiente afirmación es V ó F:

$a/b + c$ entonces a/b ó a/c

En éste caso, vemos que es falsa, ya que si consideramos:

$$a = 2,$$

$$b = 5,$$

$$c = 3$$

luego $a/b + c$, se cumple, pues existe un entero k tal que $b + c = 5 + 3 = 8 = 2k$, tomando como $k = 4$, pero a/b y a/c no se cumplen, ya que no es posible encontrar enteros h y t tal que cumplan: $5 = 2h$ y $3 = 2t$

Resolución del Ejercicio 3

Para poder realizar éste ejercicio, hay que recordar el teorema del algoritmo de la división:

Sean p y $q \in Z$ entonces existen y son únicos dos enteros c, al cual llamamos cociente y r al que llamamos resto tal que:

$$p = qc + r$$

Además r debe cumplir $0 \leq r < /q/$.
Ahora sí podremos realizar el ejercicio: llamemos n a dicho número
Primero: sabemos lo siguiente: existen enteros c, c' tal que:

$$n = 4.c + 2 \ (1)$$

$$n = 3.c' + 1 \ (2)$$

a. Luego para saber el resto de la división por 12 de n, es decir,

$$n = 12.h + r,$$

con $h \in Z$ y $0 \leq r < /12/ = 12$.

tenemos:

Si multiplicamos a la ecuación (1) por 3 y a la ecación (2) por 4 tenemos:

$$3n = 12.c + 6 \ (1')$$

$$4n = 12.c' + 4 \ (2')$$

Luego si resto (2')-(1') nos queda:

$$4n - 3n = (12.c' + 4) - (12.c + 6)$$

Realizo distributiva del producto con respecto a la suma

$$n = (12.c' + 4) - 12.c - 6$$

uso propiedad Asociativa

$$n = (12.c' - 12.c) + 4 - 6$$

luego

$$n = 12.(c' - c) - 2$$

pero como el resto debe cumplir

$0 \leq r < 12$, luego agrego +12 y-12 y no se altera la igualdad

$$n = 12.(c' - c) - 2 + 12 - 12$$

uso propiedad Asociativa nuevamente

$$n = [12.(c' - c) - 12] + [-2 + 12]$$

saco factor común 12

$$n = [12.(c' - c - 1)] + [10]$$

$$n = 12.(c' - c - 1) + 10$$

luego por propiedad de cierre en suma de enteros resulta que,

$c' - c - 1 = h \in Z$

Finalmente tenemos:

$$n = 12.h + 10$$

Concluimos que resto de la división por 12 de n es $r = 10$.

Resolución del Ejercicio 4

(ii) Busco mcd $(120, 50)$

Para ello, necesito realizar la descomposición factorial de cada número:

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$50 = 2 \times 5^2$$

Luego MCD es:

$$mcd(120, 50) = 2 \times 5 = 10$$

(Observar: el MCD, en éste caso 10 divide tanto a 120 como a 50 -recordar definición de MCD.)

(vi) Busco mcd $(-60, 45) = mcd(60, 45)$

Para ello, necesito realizar la descomposición factorial de cada número:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

Luego MCD es:

$$mcd(60, 45) = 3 \times 5 = 15$$