Espacios Vectoriales

Definición 0.1. *Un* ***Espacio Vectorial sobre el cuerpo K*** *es una estructura algebraica* ***(V,+,.)*** *creada a partir de un conjunto no vacío V, una operación interna "+" llamada suma (definida sobre los elementos del conjunto V), y una operación externa "."llamada producto por escalar (definida entre dicho conjunto y el cuerpo matemático K, que serán los reales o los complejos).*

Estas operaciones son cerradas en V y además deben cumplirse 8 propiedades fundamentales (axiomas).

Esto es, Dado $(V, +, .)$ sobre K, se tiene que:

"+" es cerrado en V, es decir, $\forall v_1, v_2 \in V,\ \ v_1 + v_2 \in V$.

"." es cerrado en V, es decir, $\forall v \in V$ y $\forall k \in K,\ \ k.v \in V$.

Además, se deben satisfacer los siguientes 8 axiomas que se pueden separar en dos clases:
Para la operación "suma"("+"):

- "+" debe ser conmutativa, es decir: $\forall v_1, v_2 \in V;\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
- "+" debe ser asociativa: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V;\ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
- Existencia del elemento *neutro* para "+", es decir, $\exists 0 \in V:\ v + 0 = v, \forall v \in V$.
- Existencia del *opuesto*, es decir, $\forall v \in V,\ \exists -v \in V:\ v + (-v) = 0$.

Mientras que para la operación "producto por escalar" (".")

- "." sea asociativa: $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall v \in V;\ (\alpha\beta).v = \alpha(\beta.v)$.
- "." sea distributiva respecto de la suma de escalares $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall v \in V;\ (\alpha + \beta).v = \alpha.v + \beta.v$.
- "." sea distributiva respecto de la suma de vectores: $\forall \alpha \in K$ y $\forall v_1, v_2 \in V;\ \alpha.(v_1+v_2) = \alpha.v_1+\alpha.v_2$.
- $\forall v \in V,\ \exists 1 \in K:\ 1.v = v$.

Ejemplos 0.2.

1. *$\mathbb{R}^n$, el conjunto de las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, con la suma y el producto por escalar usuales, esto es coordenada a coordenada.*
2. *El espacio $\mathcal{P}_n$ de los polinomios de grado n con $n \in \mathbb{N}$*
   $\mathcal{P}_n = \left\{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0, a_i \in \mathbb{R}\right\}$ (i.e el conjunto de polinomios con grado menor o igual a n) con las operaciones usuales.
3. *El espacio M_{mxn} de matrices, a coeficientes reales, de m filas por n columnas con la suma de matrices y el producto por escalar usuales en cualquier conjunto de Matrices.*
4. *El espacio de las funciones contínuas definidas sobre un intervalo $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con la suma y el producto por escalar usuales.*

   $((f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(cf)(x) = cf(x)$ para todo x en $[a, b]$ y cualquier c real)

0.1 Subespacios Vectoriales

Definición 0.3. *Un subespacio S de un espacio vectorial V es cualquier subconjunto (no vacío) S de V tal que él mismo es un espacio vectorial. Esto es, un subconjunto S de V que es cerrado bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar.*

Como S es subconjunto de V todos sus elementos pertenecen al espacio, entonces 6 de los 8 axiomas/propiedades se satisfacen automáticamente ("se heredan" de V).
Sólo la condición de clausura (ser cerrado para las operaciones) debe ser examinada y verificada para determinar si S es un "subespacio vectorial". Obviamente, S debe ser no vacío y esto se puede verificar mostrando que el elemento neutro de V pertenezca a S.

Proposición 0.4. *Sea V espacio vectorial, y sea $S \subset V$. Entonces S es un subespacio de V si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $S \neq \emptyset$

2. $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$.

3. *Dado* $k \in K$ *y* $\forall s \in S \to k.s \in S$.

Demostración:

Es claro que si S es un subespacio de un espacio vectorial V cumple con las tres condiciones (ya que él mismo es un espacio vectorial)

Ahora veamos que si S cumple con las 3 condiciones entonces será un espacio vectorial:
Las dos operaciones de cerradura ya se dan por hipótesis, al igual que la existencia de al menos un elemento. Como dijimos antes, $S \subset V$ implica que las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa se cumplan para las dos operaciones.
Sólo necesitamos probar las existencias en S del neutro y del opuesto para la operación interna (suma).

- Como para cualquier $k \in K$ y $\forall s \in S \to k.s \in S$, vale que $-1s$ pertenecea S para todo $s \in S$, pero $-1s = -s$! por lo tanto dado un elemento de S el opuesto en V pertenece al subconjunto S.

- Dado cualquier elemento $s \in S$, vimos en el item anterior que su opuesto pertenece a S, luego por hipótesis tenemos que $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$, entonces vale que $s + (-s) \in S$ ya que tanto s como $-s$ son elementos de S pero $s + (-s) = 0$!!! Luego, en neutro 0 pertenece a S

Por lo tanto, S cumple con todos los axiomas de Espacio Vectorial.

Ejemplos 0.5. 1. *El subconjunto de vectores $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.*

Para mostrar que el subconjunto S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ utilicemos la propiedad anterior.

- *Como $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ cumple la condición para pertenecer a S ya que $0 + 0 = 0$, podemos afirmar que $(0, 0) \in S$ y entonces $S \neq \emptyset$ (y además probamos que contiene al neutro para la suma de $\mathbb{R}^2$)*

- *Ahora demostremos que la suma es cerrada en S:*
  Sean $s_1, s_2 \in S$, entonces $s_1 = (x_1, y_1)$ es tal que $x_1 + y_1 = 0$ y $s_2 = (x_2, y_2)$ es tal que $x_2 + y_2 = 0$
  Luego $s_1 + s_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ satisface que $\underbrace{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}_{(x_1+y_1)+(x_2+y_2=0+0=0} = 0$
  mostrando que $s_1 + s_2 \in S$.

- *Por último, veamos que el producto por escalar también es cerrado:*
  Sea $s \in S$ (o sea que $s = (x, y)$ tal que $x + y = 0$) y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha s = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ es tal que $\underbrace{\alpha x + \alpha y}_{\alpha(x+y)=\alpha 0=0} = 0$, y por lo tanto αs pertenece a S.

Como demostramos que S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ (contiene al menos al neutro) cerrado para las operaciones de suma y producto por escalar, por la propiedad anterior S es un subespacio.

2. *El subconjunto de vectores $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ NO es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.*

   Para probar que no es un subespacio alcanza con mostrar que algunos de los axiomas para ser un espacio vectorial ó, más fácil, algunas de las hipótesis de la propiedad no se cumplen.

   En este caso se ve rápidamente que el neutro de $\mathbb{R}^2$ no pertenece S ya que $(0, 0)$ no cumple la propiedad definitoria de S, o sea, no vale claramente que $0 + 0 = 1$.

   Por lo tanto S no será un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$
   ** De manera similar podemos probar que la suma o el producto por escalar no son cerrados en S para mostrar que no es un subespacio*

0.2 Base de un espacio vectorial

La idea subyace es la describir un conjunto infinito como lo es un espacio vectorial a través de un conjunto finito *

- ### Conjunto Generador - Espacio Generado

Definición 0.6. *Dado un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ del espacio vectorial V, se llama **combinación lineal** de los vectores de S, a los vectores v de la forma $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r$, donde los coeficientes $c_1, c_2 \ldots, c_r$ son escalares.*

Definición 0.7. *Se denomina conjunto generador al conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_r$ de vectores de $S \subset V$, y se lo denota gen(S) $= \langle v_1, v_2, \ldots, v_r\rangle$*

Teorema 0.8. *Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ son vectores del espacio vectorial V, entonces el conjunto gen(S) $= \langle v_1, v_2, \ldots, v_r\rangle$ es un subespacio de V.*

Demostración:

Tenemos que mostrar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S forman un subespacio de V :

1. Observemos que $0_v = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_r$, es decir, el vector nulo es combinación lineal de los vectores de S. Además es obvio que S es no vacío.
2. Veamos que la suma es cerrada: sean w_1 y w_2 vectores de *gen(S)*, su suma $w_1 + w_2$ pertenecerá a *gen(S)*, esto es, su suma será combinación lineal de vectores de S.

   $w_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r$
   $w_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r$

   $w_1 + w_2 = (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r) + (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r) =$
   $= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_r + b_r)v_r$
3. Por último probemos que el producto por escalar también es cerrado:

   Sean $w \in gen(S)$ y α un escalar, $\alpha.w$ será combinación lineal de vectores de S:

   $\alpha.w = \alpha.(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r) = \alpha.c_1v_1 + \alpha.c_2v_2 + \cdots + \alpha.c_rv_r = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_rv_r$

   Entonces $\alpha.w \in gen(S)$ y la operación es cerrada.

Demostramos que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores de un espacio vectorial ES un subespacio de ese espacio, y por lo tanto es él mismo un espacio vectorial.

Definición 0.9. *Al conjunto de todos los vectores que se obtienen como combinación lineal de los vectores de S se lo denomina* ***el espacio generado por S*** *y se escribe: gen(S)* $= \langle v_1, v_2, \ldots, v_r\rangle$.

Definición 0.10. *Se dice que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un conjunto generador del espacio vectorial V si y sólo si todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_r$.*

Esto es lo mismo que decir que $V = gen(S)$, ya que siempre vale que $gen(S) \subset V$ y si S es un conjunto generador entonces todo $v \in V$ puede escribirse como combinación lineal de vectores de S y por lo tanto $V \subset gen(S)$.

• Independencia Lineal

Nuestro propósito será encontrar al conjunto generador "más pequeño" posible de un espacio vectorial V, es decir, conjuntos generadores de V con la menor cantidad posible de vectores.

Un conjunto de generadores *minimal* para V será aquel conjunto S de vectores que no tenga elementos redundantes o innecesarios, es decir, *todos los vectores del conjunto S deben ser necesarios* para generar V.

Por tanto ninguno de los vectores de S debe ser combinación lineal de los otros para así asegurarme que no tengo elementos redundantes.

Observemos que si un vector es combinación lineal de otros en un conjunto dado, por ejemplo: $v = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r$ (v sería redundante en $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_r\}$) se puede escribir:

$$0 = v - v = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r - v = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + (-1)v$$

Luego, podemos usar esta idea para ver si hay vectores redundantes, es decir, si dentro de un conjunto de vectores dado hay algunos que son combinaciones lineales de los otros.

Definición 0.11. *Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ de un espacio vectorial V se dicen* **linealmente dependientes** *si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ no todos nulos tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r = 0$*

Equivalentemente,

Definición 0.12. *Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ de un espacio vectorial V se dicen* **linealmente independientes** *si la combinación*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r = 0$$

implica que todos los c_i son nulos.

Una combinación lineal de un conjunto S de vectores *linealmente independientes* es única. Esto es, existe una única manera de expresar un *vector particular* como combinación lineal de los vectores de S linealmente independientes.

Supongamos que podemos expresar a un vector v de dos maneras diferentes:

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r$
$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r$

$v - v = 0 = (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r) - (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r) = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_r + b_r)v_r$

Observamos que no todos los $a_i - b_i$ son cero, entonces encontramos una combinación lineal no nula que nos da como resultado al vector nulo, esto significa que los vectores con Linealmente Dependientes! (obtuvimos y demostramos la proposición contrarrecícproca)

También podemos ver que si el conjunto de vectores no es linealmente independiente se podrá escribir cualquier vector de varias formas (por ejemplo sumando la combinación nula a una expresión particular del vector).

Teorema 0.13. *Si $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son vectores de un espacio vectorial V. Todo vector v en el subespacio generado $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r\rangle$ puede escribirse de manera única como combinación de $v_1, v_2, \ldots, v_r$* ***si y sólo si*** *los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ son linealmente independientes.*

- ## Bases y dimensión

Queremos un conjunto generador minimal, o sea un conjunto que no tenga vectores supérfluos, vimos que esto sucede cuando los vectores son independientes.

Un conjunto generador minimal con vectores independientes, es un conjunto "básico" de vectores, que provee las *piezas* para construir el espacio vectorial V.

Definición 0.14. *Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ forma una **base** del espacio vectorial V, si y sólo si:*

1. *$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ son linealmente independientes, y*
2. *$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ generan V.*

Supongamos que tenemos una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V y un conjunto $M = \{u_1....u_m\}$ de $m > n$ vectores de V.
Queremos analizar la independencia o dependencia lineal del conjunto M, para ello podemos escribir la combinación nula y mirar como son los coeficientes: $0 = c_1u_1 + ... + c_mu_m$

Por otro lado, como B es base del espacio, cada u_i de M será combinación lineal de los vectores de B:

$u_1 = a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n$
....
....
$u_j = a_{1j}v_1 + ... + a_{nj}v_n$
....
....
$u_m = a_{1m}v_1 + ... + a_{nm}v_n$

Reemplanzando en la combinación nula obtenemos:
$0 = c_1u_1 + ... + c_mu_m = c_1(a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n) + ... + c_m(a_{1m}v_1 + ... + a_{nm}v_n) = (c_1a_{11} + ... + c_ma_{1m})v_1 + ... + (c_1a_{n1} + ... + c_ma_{nm})v_n$

Como los v_i son independientes por formar parte de una base, cada coeficiente $c_1a_{i1} + ... + c_ma_{im}$ debe ser cero,

$c_1a_{11} + ... + c_ma_{1m} = 0$
....
$c_1a_{i1} + ... + c_ma_{im} = 0$
....
$c_1a_{n1} + ... + c_ma_{nm} = 0$

Tenemos n ecuaciones homogéneas con $m > n$ incógnitas $c_1....c_m$, siendo entonces compatible intederminado (es decir, hay infinitas soluciones) y por lo tanto los u_i son linealmente dependientes.

De aquí se deduce los siguientes resultados

Teorema 0.15. *Si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, todo conjunto $M = \{u_1....u_m\}$ de $m > n$ vectores de V es linealmente dependiente*

Corolario 0.16. *Si* $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *y* $B' = \{u_1....u_m\}$ *son dos bases de un espacio vectorial* V*, entonces* $m = n$

Es decir, ***todas*** *las bases de un espacio vectorial V (finitamente generado) tienen el mismo número de elementos.*

Definición 0.17. *Si una base de un espacio vectorial* V *tiene* n *vectores, se dice que* V *tiene* dimensión **n**.

En particular, el subespacio $\{\mathbf{0}\}$ se dice que tiene *dimensión 0.*

Un espacio vectorial V se dice de *dimensión finita* si existe un conjunto *finito* de vectores que lo generan. En caso contrario se dice que V tiene *dimensión infinita.*

Teorema 0.18. *Si* V *es un espacio vectorial de "dimensión* n*"* $(n > 0)$ *entonces*

1. *Cualquier conjunto de* n *vectores "linealmente independientes" de* V *genera todo* V *(forman una base de* V*). Además*
2. *Todo conjunto de* n *vectores que generan* V *son "linealmente independientes" (o sea, forman una base de* V*).*

Esto dice que si sabemos la dimensión del espacio y tenemos la cantidad necesaria de vectores no hace falta probar las dos condiciones para ser base, con alguna de las dos bastará.