Práctica 5, Adicionales

Resolución del Ejercicio 1

Para poder realizar éste ejercicio, hay que recordar el teorema del algoritmo de la división:

Sean p y $q \in Z$ entonces existen y son únicos dos enteros c, al cual llamamos cociente y r al que llamamos resto tal que:

$$p = qc + r$$

Además r debe cumplir $0 \leq r \leq /q/$.
Ahora sí podremos realizar el ejercicio:
Primero: sabemos lo siguiente: existen enteros c, c' tal que:

$$a = 11.c + 4$$

$$b = 11.c' + 7$$

a. Luego para saber el resto de la división por 11 de 3a, es decir,

$$3a = 11.h + r,$$

con $h \in Z$ y $0 \leq r \leq /11/ = 11$.

tenemos:

Reemplazo a

$$3a = 3.(11.c + 4)$$

Realizo distributiva del producto con respecto a la suma

$$3a = 3 \times 11.c + 12$$

pero como el resto debe cumplir

$0 \leq r \leq 11$. y el 12=11 + 1 reemplazo

$$3a = 3 \times 11.c + (11 + 1)$$

uso propiedad Asociativa

$$3a = (3 \times 11.c + 11) + 1$$

saco factor común 11

$$3a = 11.(3.c + 1) + 1$$

luego por propiedad de cierre en producto y suma de enteros resulta que,

$3.c + 1 = h \in Z$

Finalmente tenemos:

$$3a = 11.h + 1$$

Concluimos que resto de la división por 11 de $3a$ es $r = 1$.

b. Luego para saber el resto de la división por 11 de $a + b^2$, es decir,

$$a + b^2 = 11.k + r,$$

con $k \in Z$ y $0 \leq r \leq /11/ = 11$

Si Reemplazo a y b tenemos:

$$a + b^2 = (11.c + 4) + (11.c' + 7)^2$$

Desarrollo el binomio

$$a + b^2 = 11.c + 4 + (11.c')^2 + 2 \times 11c' \times 7 + (7)^2$$

realizo cálculos y asocio llegamos

$$a + b^2 = (11.c + (11.c')^2 + 2 \times 11c' \times 7) + 53$$

saco factor común 11

$$a + b^2 = 11(c + 11.(c')^2 + 14c') + 53$$

pero como el resto debe cumplir

$0 \leq r \leq 11.$ y el $53 = 44 + 9 = 4 \times 11 + 9$

reemplazo

$$a + b^2 = 11(c + 11.(c')^2 + 14c') + (4 \times 11 + 9)$$

vuelvo a sacar factor común y uso propiedad Asociativa

$$a + b^2 = 11(c + 11.(c')^2 + 14c' + 4) + 9$$

luego por propiedad de cierre en producto y suma de enteros resulta que,

$(c + 11.(c')^2 + 14c' + 4) = k \in Z$

Finalmente tenemos:

$$a + b^2 = 11.k + 9$$

Concluimos que resto de la división por 11 de $a + b^2$ es $r = 9$.

Resolución del Ejercicio 2

Analicemos si la siguiente afirmación es V ó F:

a/c y b/c entonces ab/c

En éste caso, vemos que es , ya que si consideramos:

Resolución del Ejercicio 3b

Sabemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es decir, son equivanlentes, $a.d = c.b$, con a, b, c y $d \in Z$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$

b. Queremos probar:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Comencemos:

Sabemos que las fracciones son equivalentes, osea, satisfacen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si sumamos 1 a ambos miembros tenemos

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

Realizamos la suma de fracciones, para ello, podemos usar fracciones equivalentes, es decir, como $b \neq 0$, $d \neq 0$ tenemos

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

Finalmente, las fracciones tienen el mismo denominador, luego realizo la suma y llegamos:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Conclusión: Finalmente mostramos que se cumple $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

De manera análoga, se demuestra que $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ también se satisface.