Matemática IV- 2020
TP6 - Relaciones y Congruencia

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 0, -1\}$ y $B = \{2, 3, 1\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones de A en B. Justifica.

   (a) $R = \{(1; 2), (0; 3)\}$

   (b) $R = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3)\}$

   (c) $R = \{(3; 1)\}$

   (d) $R = \emptyset$

2. Sea $A = \{$*-3,-2,-1,0,1,2,3*$\}$, $B = Z$ y la relación viene definida en la forma: xRy si y sólo si *y es el cuadrado de x.*

   Escribe R por extensión. Define R^{-1} por comprensión y por extensión.

3. Sea $A = \{a, b, c\}$

   (a) Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A

   (b) Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A

   (c) Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A

4. Sea A un conjunto arbirtario. Sea $R = \Delta_A$ (diagonal de A) . Analizar qué propiedades tiene R.

5. Sea $A = \{1, 2, 3\}$

   (a) Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A

   (b) Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A

   (c) ¿ Hay alguna conexión entre ser no simétrica y ser antisimétrica? Ejemplificar

6. Determinar si las siguientes relaciones definidas en $A = \{a, b, c, d\}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas:

   - $R_1 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (c, d)\}$
   - $R_2 = \{(a, a); (b, b); (b, c); (c, b); (d, d); (c, c)\}$
   - $R_3 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)\}$

7. Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y las relaciones en A definidas como sigue:

   $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ y $S = \{(b, a), (c, a)\}$

   (a) Decidir justificando si R es reflexiva, simétrica, transitiva, o antisimétrica

   (b) Decidir justificando si S es transitiva y/o antisim étrica

   (c) ¿Qué pares hay que agregar necesariamente a S para que sea reflexiva?

   (d) ¿Qué pares hay que agregar necesariamente a S para que sea sim étrica?

8. Establecer las propiedades de las siguientes realaciones:
   (a) Sea H el conjunto de los seres humanos.
   Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x *es hermano de* y
   (b) Sea H el conjunto de los seres humanos.
   Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x *es hijo de* y
   (c) Sea N el conjunto de los números naturales.
   Sea $\leq$ la relación en N dada por $x \leq y$ si y sólo si x *es menor que* y
   (d) Sea N el conjunto de los números naturales.
   Sea $|$ la relación en N dada por $x|y$ si y sólo si x *divide a* y
   (e) Igual al anterior pero en el conjunto de los enteros.

9. Sea R la siguiete relación en ZxZ dada por $(x, y)R(z, w)$ *si y solo si* $x = z$
   Esta relación se llama *relación de equivalencia asociada a la primera proyección*
   Demostrar que es efectivamente una relación de equivalencia y hallar la $R - clase$ del par (x, y).

10. Sea $f : A \to B$ una función. Sea R la relación en A dada por: xRy si y sólo si $f(x) = f(y)$
    Hallar los conjuntos cocientes para cada una de las siguientes funciones en los reales:
    (a) $f(x) = x^2$
    (b) $f(x) = 2x$

11. Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números 387, 25 y 649

12. Hallar las respectivas clases de 13, 6, 11 y -49 $mod \quad 4$

13. Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números: $(2, 1024)$, $(101, 512)$, $(1501, 1348)$.

14. Analizar para qué valores de m se hacen verdaderas las siguientes congruencias: $5 \equiv 4 \quad mod(m)$, $1 \equiv 0 \quad mod(m)$, $1197 \equiv 286 \quad mod(m)$, $3 \equiv -3 \quad mod(m)$

15. Probar que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

16. Probar las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in Z$:
    (a) $a \equiv a \quad mod(n)$
    (b) $a \equiv b \quad mod(n) \Rightarrow b \equiv a \quad mod(n)$
    (c) $a \equiv b \quad mod(n)$ y $b \equiv c \quad mod(n) \Rightarrow a \equiv c \quad mod(n)$
    (d) $a \equiv b \quad (n) \Leftrightarrow a + c \equiv b + c \quad (n)$
    (e) $a \equiv b \quad (n) \Rightarrow ac \equiv bc \quad (n)$
    (f) $a \equiv 0 \quad (n) \Leftrightarrow n|a$

17. Sea m un entero impar, probar que $m^2 \equiv 1 \quad mod(4)$

18. Probar: todo número es congruente, módulo n, con el resto de su división por n

19. Hallar los resultados de las siguientes operaciones realizadas entre enteros módulo 4 y 5 : $\bar{3} + \bar{1}$; $\bar{5} + \bar{9}$; $\bar{40}.\bar{3}$; $(\bar{3} + \bar{2}).(\bar{6}.\bar{8})$

20. Construir las tablas de sumar y multiplicar de los enteros módulo 2 y 5