Algunas Integrales dobles

La integración doble corresponde a la integración de funciones de dos variables, que se realiza en forma iterada (primero con respecto a una de las variables, y a continuación con respecto a la otra); y recuerden que en el apunte de teoría ustedes han visto que el orden de integración es indiferente, de acuerdo con el Teorema de Fubini, por lo que ustedes podrán elegir cuál es la variable a integrar primero, a fin que los planteos y los cálculos sean los más sencillos posibles, <u>con la precaución de recordar que los límites de integración deben ser todos numéricos para efectuar el cambio de orden de integración en forma directa</u>.
Además, no olviden tener en cuenta los métodos de integración (Sustitución y Partes, sobre todo), que ustedes han estudiado en Matemática 2, y de los que hemos presentado un repaso.
Luego, vamos con algunos ejemplos.

<u>Integrales dobles con límites de integración que son todos numéricos</u>

Aquí recuerden que el orden de las variables es indistinto, y que pueden permutar el orden de integración, con la única precaución de permutar también los límites que corresponden a cada variable.

9 a)

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} (x^4*y + y^2)*dy*dx =$$

integran con respecto a la variable y, mientras la variable x permanece constante (indicamos con corchetes que deben evaluar con Regla de Barrow entre y = 0 e y = 1):

$$= \int_{-1}^{1} [\, x^4*y^2/2 + y^3/3 \,]*dx =$$

evalúan (recuerden: al valor del argumento para el límite de integración superior le restan el valor numérico para el límite de integración inferior):

$$= \int_{-1}^{1} (\, (x^4*1^2/2 + 1^3/3) - (x^4*0^2/2 + 0^3/3) \,)*dx =$$

resuelven términos y cancelan términos nulos:

$$= \int_{-1}^{1} (\, (1/2)*x^4 + 1/3 \,)*dx =$$

integran con respecto a la variable x:

$$= [\, (1/2)*(x^5/5) + (1/3)*x \,] =$$

evalúan:

$$= \left((1/2)*1^5/5 + (1/3)*1 \right) - \left((1/2)*(-1)^5/5 + (1/3)*(-1) \right) =$$

resuelven términos:

$$= (1/10 + 1/3) - (-1/10 – 1/3) =$$

resuelven agrupamientos:

$$= 13/30 - (-13/30) =$$

resuelven:

$$\mathbf{= 13/15}.$$

9 b)

A modo de ejemplo, plantean la misma integral con el orden de integración cambiado:

$$_0\int^1 {}_{-1}\int^1 (x^4*y + y^2)*dx*dy =$$

integran con respecto a la variable x, mientras la variable y permanece constante (indicamos con corchetes que deben evaluar con Regla de Barrow entre x = -1 y x = 1):

$$= {}_0\int^1 [(x^5/5)*y + y^2*x]*dy =$$

evalúan (recuerden: al valor del argumento para el límite de integración superior le restan el valor numérico para el límite de integración inferior):

$$= {}_0\int^1 (((1/5)*y + y^2*1) - ((-1/5)*y + y^2*(-1)))*dy =$$

resuelven términos:

$$= {}_0\int^1 ((1/5)*y + y^2 + (1/5)*y + y^2)*dy =$$

reducen términos semejantes:

$$= {}_0\int^1 ((2/5)*y + 2*y^2)*dy =$$

integran con respecto a la variable y:

$$= [\ (2/5)*y^2/2 + 2*y^3/3\ ] =$$

evalúan entre y = 0 e y = 1:

$$= (\ (2/5)*1^2/2 + 2*1^3/3\ ) - (\ (2/5)*0^2/2 + 2*0^3/3\ ) =$$

resuelven términos y cancelan términos nulos:

$$= 1/5 + 2/3 =$$

resuelven:

$$\mathbf{= 13/15}.$$

10)

$$I = \iint_R (x^2*y^2 + x)*dA,$$

con el recinto de integración: [0 ; 2] x [1 ; 2]; luego, antes que todo observen que el recinto está expresado como un producto cartesiano, por lo que tienen que el primer intervalo corresponde a la variable x, y que el segundo intervalo corresponde a la variable y; además, la expresión del “diferencial de área” puede expresarse en dos formas:

$$dA = dx*dy$$

$$\text{o}$$

$$dA = dy*dx,$$

según elijan ustedes el orden de integración; luego, si eligen integrar primero con respecto a la variable x, entonces la integral queda:

$$I = {}_1\int^2 {}_0\int^2 (x^2*y^2 + x)*dx*dy =$$

integran con respecto a la variable x, mientras la variable y permanece constante (indicamos con corchetes que deben evaluar con Regla de Barrow entre x= 0 y x = 2):

$$= {}_1\int^2 [\ (x^3/3)*y^2 + x^2/2\ ]*dy =$$

evalúan (recuerden: al valor del argumento para el límite de integración superior le restan el valor numérico para el límite de integración inferior):

$$= {}_{1}\int^{2} (((8/3)*y^2 + 2) - (0*y^2 + 0))*dy =$$

resuelven términos y cancelan términos nulos:

$$= {}_{1}\int^{2} ((8/3)*y^2 + 2)*dy =$$

integran con respecto a la variable y:

$$= [(8/3)*(y^3/3) + 2*y] =$$

evalúan:

$$= ((8/3)*(8/3) + 2*2) - ((8/3)*(1/3) + 2*1) =$$

resuelven términos:

$$= (64/9 + 4) - (8/9 + 2) =$$

resuelven agrupamientos:

$$= 100/9 - 26/9 =$$

resuelven:

$$\mathbf{= 74/9},$$

y queda para ustedes la opción de plantear la integral con respecto a la variable y en primera instancia, y probar que se verifica el Teorema de Fubini.

<u>Integrales dobles con límites de integración que son expresiones de funciones</u>

Aquí recuerden que se debe integrar primero la variable cuyos límites de integración son expresiones de funciones, y muchas veces es muy conveniente hacer un gráfico de la región de integración, sobre todo si se hace necesario cambiar el orden de las variables de integración.

11)

$$I = {}_{0}\int^{1} {}_{0}\int^{x\wedge 2} (x + 2*y)*dy*dx =$$

integran con respecto a la variable y, y queda:

$$= {}_0\int^1 [\ x*y + y^2\ ]*dx =$$

evalúan entre y = 0 e y = x^2, y queda:

$$= {}_0\int^1 (\ (x*x^2 + (x^2)^2) - (x*0 + 0)\ )*dx =$$

resuelven el argumento de la integral, y queda:

$$= {}_0\int^1 (\ x^3 + x^4\ )*dx =$$

integran con respecto a la variable x, y queda:

$$= [\ x^4/4 + x^5/5\ ] =$$

evalúan entre x = 0 y x = 1, y queda:

$$= (1/4 + 1/5) – (0 + 0) =$$

resuelven, y queda:

$$\mathbf{= 9/20}.$$

12)

$$I = {}_0\int^{\pi/2} {}_0\int^{\cos\theta} e^{\mathrm{sen}\theta}*dr*d\theta =$$

introducen el factor neutro (1), y queda:

$$= {}_0\int^{\pi/2} {}_0\int^{\cos\theta} e^{\mathrm{sen}\theta}*1*dr*d\theta =$$

integran con respecto a la variable r, y queda:

$$= {}_0\int^{\pi/2} e^{\mathrm{sen}\theta}*[\ r\ ]*d\theta =$$

evalúan entre r = 0 y r = cosθ, y queda:

$$= {}_0\int^{\pi/2} e^{\mathrm{sen}\theta}*\cos\theta*d\theta =$$

Planteo Auxiliar:

aquí plantean la sustitución (o cambio de variable):

$w = sen\theta$, de donde tienen: **$dw = cos\theta * d\theta$**,

con los nuevos límites de integración:

$w = sen(0) = 0$ y $w = sen(\pi/2) = 1$

---

luego, sustituyen expresiones, y queda:

$$= \int_0^1 e^w * dw =$$

integran con respecto a la variable w, y queda:

$$= [\, e^w \,] =$$

evalúan entre w = 0 y w = 1, y queda:

$$= e^1 - e^0 =$$

resuelven potencias, y queda:

$$= \mathbf{e - 1}.$$

Atención: insistimos en que para estos dos últimos casos, u otros casos similares, también es posible cambiar el orden de integración pero ello requiere graficar el recinto, y expresar los nuevos límites de integración, y puede darse la situación que al cambiar el orden se facilite la integración, se dificulte o se imposibilite, o que sea indistinta la dificultad en la resolución.

Más integrales dobles

En los ejercicios siguientes, nos limitaremos a describir las regiones de integración, y quedará para ustedes hacer los gráficos de las mismas.

13)

$$I = \iint_D x^2 * y^3 * dA,$$

con la región de integración D descrita por las inecuaciones dobles:

$$0 \leq x \leq 2$$
$$-x \leq y \leq x;$$

y observen que los límites para la variable y son expresiones de funciones, cuyas gráficas tienen las ecuaciones cartesianas: **y = -x** (recta bisectriz del segundo y del cuarto cuadrante), e **y = x** (recta bisectriz del primer y del tercer cuadrante); luego, hagan ustedes el gráfico, y seleccionen el sector comprendido entre las dos rectas, desde x = 0 hasta x = 2, y verán que queda un triángulo cuyos vértices son los puntos: (0;0), (2;-2) y (2;2), y sobre todo, observen:

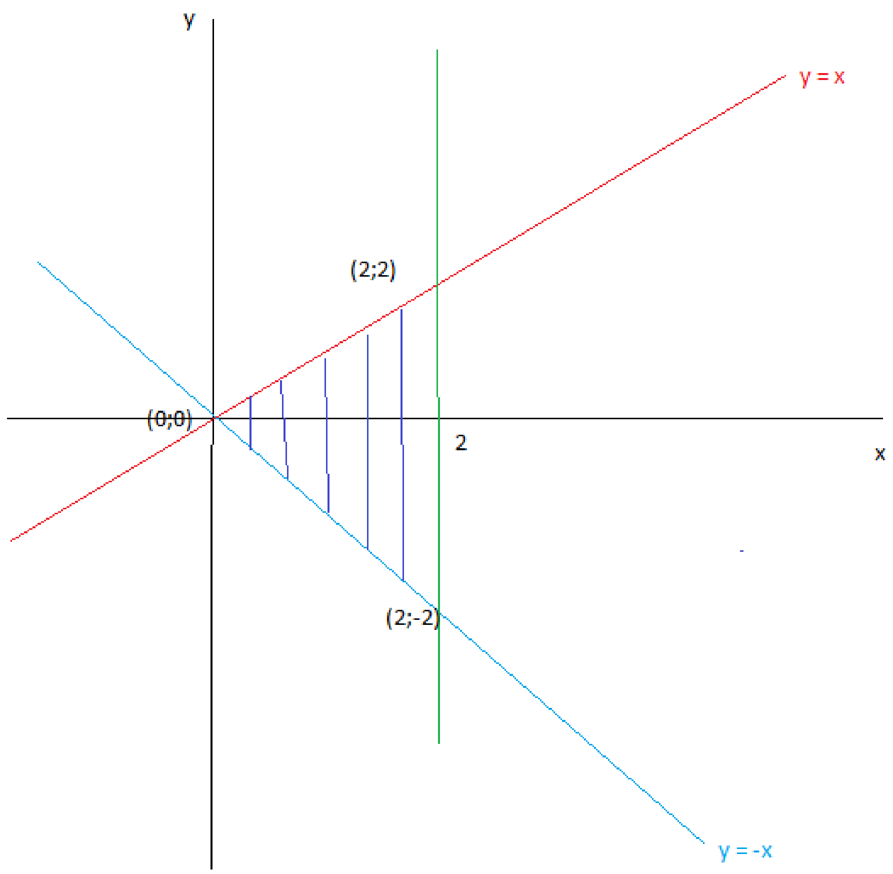
que su "borde inferior" es un segmento incluido en la recta cuya ecuación es: y = -x,

que su "borde superior" es un segmento incluido en la recta cuya ecuación es: y = x,

que el punto ubicado "más a la izquierda" es el vértice cuya abscisa es: x = 0,

y que los puntos ubicados "más a la derecha" tienen todos abscisa: x = 2;

luego, plantean la integral (observen que el planteo es "región tipo I"), y queda:



$$\mathbf{I} = \int_0^2 \int_{-x}^{x} \mathbf{x^2 * y^3 * dy * dx} = \ldots$$

y queda para ustedes resolver esta integral.

14)

$$I = \iint_D (x + y)*dA,$$

con la región de integración limitada por las curvas cuyas ecuaciones son:

$$\mathbf{y = \sqrt{(x)} = x^{1/2}},$$

que corresponde a una semiparábola con eje de simetría X y vértice (0;0) incluida en el primer cuadrante,

$$\mathbf{y = x^2},$$

que corresponde a una parábola con eje de simetría Y y vértice (0;0) incluida en el primero y en el segundo cuadrante;

luego, hagan un gráfico, y verán que la región está limitada “inferiormente” por la segunda curva, y que está limitada “superiormente” por la primera curva, por lo que pueden plantear uno de los intervalos de integración:

$$\mathbf{x^2 \le y \le x^{1/2}};$$

luego, para establecer los límites de integración para la variable x, igualan las expresiones que tienen en las ecuaciones de las curvas, y queda:

$$x^2 = x^{1/2},$$

elevan al cuadrado en ambos miembros, y queda:

$$x^4 = x,$$

restan x en ambos miembros, extraen factor común en el primer miembro, y queda:

$$x*(x^3 - 1) = 0,$$

y de aquí tienen dos opciones:

$$\mathbf{x = 0},$$

o

$x^3 – 1 = 0$, y de aquí despejan: $\mathbf{x = 1}$, por lo que tienen el intervalo de integración:

$$\mathbf{0 \leq x \leq 1};$$

luego, plantean la integral, y queda:

$$\mathbf{I = \ _0\!\int^1 {}_{x^2}\!\int^{x^{(1/2)}} (x + y)*dy*dx} =$$

y queda para ustedes resolver.

15)

$$I = \iint_D (y*x^3 + y*e^{3x})*dA,$$

extraen factor común en el argumento de la integral, y queda:

$$I = \iint_D y*(x^3 + e^{3x})*dA,$$

donde la región de integración D es un triángulo cuyos vértices son los puntos:

(0;0), (3;0) y (3;3);

luego, hagan un gráfico, y verán que la región está limitada “inferiormente” por el eje X, cuya ecuación cartesiana es: y = 0, y que está limitada “superiormente” por la recta que pasa por los puntos (0;0) y (3;3), cuya ecuación cartesiana es: y = x, por lo que pueden plantear uno de los intervalos de integración:

$$\mathbf{0 \leq y \leq x};$$

luego, observen que el punto ubicado “más a la izquierda” es el vértice cuya abscisa es: x = 0, y que los puntos ubicados “más a la derecha” tienen todos abscisa: x = 3, por lo que pueden plantear el intervalo de integración:

$$\mathbf{0 \leq x \leq 3};$$

luego, plantean la integral, y queda:

$$I = \ _0\!\int^3 {}_0\!\int^x y*(x^3 + e^{3x})*dy*dx = \ldots$$

y queda para ustedes resolver, y tengan en cuenta que la segunda integral que les quedará la podrán resolver con el Método de Integración por Partes que ya hemos considerado.

Con respecto al ejercicio (5) del Trabajo Práctico, que corresponde al cálculo de <u>Volúmenes de sólidos “3D” cuya base es una región del plano cartesiano XY</u>, observen todos los incisos del ejercicio 5 tienen todo para plantear los intervalos de integración, ya que las regiones de integración son las bases de los sólidos que se indican, y las expresiones de las funciones a integrar las tienen en las ecuaciones de las superificies que limitan superiormente a los sólidos; luego, todo se limita a plantear y resolver integrales dobles.

16)

Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el paraboloide cuya ecuación cartesiana es:

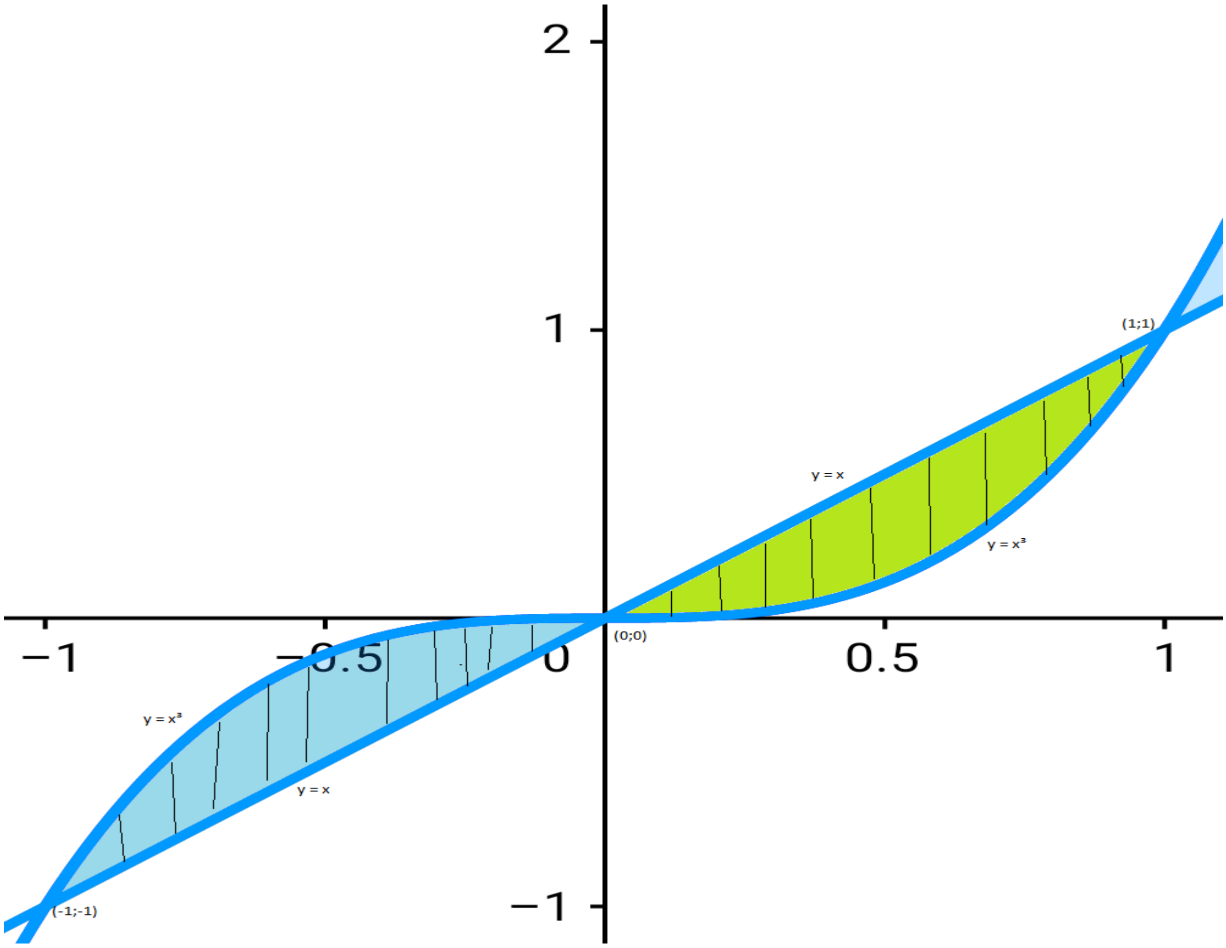
$$z = 9 - x^2 - y^2,$$

y limitado inferiormente por la región incluida en el plano XY, limitada por las curvas cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$y = x^3,$$

y

$$y = x.$$



Luego, a fin de determinar con precisión cuáles son las intersecciones entre las dos curvas, igualan expresiones, y queda la ecuación:

$$x^3 = x,$$

restan x en ambos miembros, y queda:

$$x^3 – x = 0,$$

extraen factor común, y queda:

$$x*(x^2 – 1) = 0,$$

y por anulación de una multiplicación, tienen las opciones:

$$\mathbf{x = 0}$$

o

$x^2 – 1 = 0$, y de aquí despejan: $\mathbf{x = -1}$ o $\mathbf{x = 1}$,

por lo que tienen que los puntos de intersección entre las dos curvas tienen las abscisas:

$$x = -1,\ x = 0 \text{ y } x = 1;$$

y con un recurso informático, ustedes pueden visualizar la base del sólido, a la que tienen divididas en dos subregioes de integración:

1°)

D_1, descrita por las inecuaciones dobles:

$$\mathbf{x \leq y \leq x^3},$$

$$\mathbf{-1 \leq x \leq 0},$$

a la que le corresponde la porción de sólido cuyo volumen tiene la expresión:

$$V_1 = \int_{-1}^{0} \int_{x}^{x^3} (9 – x^2 – y^2) * dy*dx = \dots$$

y ustedes pueden completar la resolución de esta integral;

2°)

D_2, descrita por las inecuaciones dobles:

$$\mathbf{x^3 \leq y \leq x},$$

$$\mathbf{0 \leq x \leq 1},$$

a la que le corresponde la porción de sólido cuyo volumen tiene la expresión:

$$V_2 = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} (9 - x^2 - y^2) * dy*dx = \ldots$$

y ustedes pueden completar la resolución de esta integral;

luego, plantean la expresión del volumen total del sólido como la suma de los volúmenes de sus dos porciones, y queda;

$$\mathbf{V = V_1 + V_2},$$

y queda para ustedes reemplazar valores y hacer el cálculo final.

Quedan para ustedes resolver las integrales que hemos planteado, y los ejercicios que tienen en el TP,

y si les resulta necesario, no dejen de consultar todo lo que necesiten.