UNLP. Facultad de Informática

Fundamentos de Teoría de la Computación **Curso 2020. Práctica 3**

Temario

- **Lógica de Enunciados**. El Sistema Formal L: axiomas y regla de inferencia. Demostración de teoremas y deducciones en L. Corrección, completitud y decidibilidad de L.

Bibliografía

- Hamilton. Lógica para matemáticos. Capítulo 2.
- Pons, Rosenfeld, Smith. Lógica para Informática. Capítulo 1.

Ejercicios

1. Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ tres fórmulas bien formadas (*fbfs*) del sistema formal $\mathscr{L}$. Dar una demostración sintáctica en $\mathscr{L}$ de los siguientes teoremas. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

   i- $\vdash_{\mathscr{L}} ((\neg\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$

   ii- $\vdash_{\mathscr{L}} (\neg\neg\mathscr{B} \to \mathscr{B})$

   iii- $\vdash_{\mathscr{L}} ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\neg\mathscr{B} \to \neg\mathscr{A}))$

2. Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ tres fórmulas bien formadas (*fbfs*) del sistema formal $\mathscr{L}$. Dar una demostración sintáctica en $\mathscr{L}$ de las siguientes deducciones. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

   i- $\{((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{C}), \mathscr{B}\} \vdash_{\mathscr{L}} (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$

3. Sea $\Gamma = \{\mathscr{A}_1,...,\mathscr{A}_n\}$ n > 0, un conjunto de *fbfs* del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$. ¿Es cierto que si Γ es satisfactible entonces $\vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$?. Fundar.

4. Sea Γ un conjunto de *fbfs* del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$. ¿Es cierto que para todo Γ_i tal que $\Gamma_i \subset \Gamma, \Gamma_i \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$?. Fundar.

5. Sean Γ y Γ_0 conjuntos de *fbfs* del C. de Enunciados. ¿Es cierto que para todo Γ existe algún $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que si $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$ entonces $\Gamma_0 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$?. Fundar.
   Nota : relacionar con ejercicio 10.

6. Sea Γ un conjunto de *fbfs* del C. de Enunciados. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs* del C. de Enunciados. ¿Es cierto que si $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{B}$ y $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_{\mathscr{L}} \neg\mathscr{B}$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$?. Fundar

7. Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ *fbfs* del C. de Enunciados. Sea Γ un conjunto de *fbfs* del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \cup \{\mathscr{A}, \mathscr{B}\} \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{C}$ y también se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$.

i- ¿Es cierto que $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} (\mathscr{C} \rightarrow \mathscr{B})$?. Fundar.

ii- ¿Es cierto que $\vdash_{\mathscr{L}} (\mathscr{A})$?. Fundar.

8. Sea Γ un conjunto de *fbfs* del C. de Enunciados.
Se define el <u>conjunto de consecuencias lógicas</u> de Γ como:

$$Con(\Gamma) = \{\mathscr{A} /\ \Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}\}$$

Dadas las *fbfs* $p \rightarrow q$ y q, ¿cuál es la relación entre los conjuntos $Con_{\mathscr{L}}(p \rightarrow q)$ y $Con_{\mathscr{L}}(q)$?. ¿Son iguales, el primero incluye al segundo, el segundo incluye al primero?. Representar gráficamente. Fundar

9. Sean Γ_1 y Γ_2 conj. de *fbfs* del C. de Enunciados.

i $\Gamma_1 = \{r, \neg s\}$ Calcular $Con_{\mathscr{L}}(\Gamma_1)$.

ii $\Gamma_2 = \{r, \neg s, s \vee \neg r\}$. Calcular $Con_{\mathscr{L}}(\Gamma_2)$.

10. Sea Γ un conj. de *fbfs* del C. de Enunciados. Se dice que Γ es independiente si para toda *fbf* $\mathscr{A} \in \Gamma$ no ocurre $\{\Gamma - \mathscr{A}\} \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$

i- Sea $\Gamma = \{p, q, \neg p\}$. ¿Es independiente?. Fundar

ii- Sea $\Gamma = \{p, q\}$. ¿Es independiente?. Fundar

iii- Demostrar que para todo Γ finito, $Con_{\mathscr{L}}(\Gamma) = Con_{\mathscr{L}}(\Gamma')$ donde Γ' es un conjunto independiente.

11. Se sabe que para todo Γ finito existe algún Γ' independiente tal que $Con_{\mathscr{L}}(\Gamma) = Con_{\mathscr{L}}(\Gamma')$. Construir un ejemplo donde las afirmaciones previas se verifican y $\Gamma' \not\subset \Gamma$ (ni trivialmente $\Gamma' = \Gamma$).

12. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos de *fbfs* del C. de Enunciados. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs* del C. de Enunciados.
Si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$, entonces:

i- ¿Es cierto que $\Gamma_1 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{B}$?. Fundar.

ii- ¿Es cierto que $\Gamma_2 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{B}$?. Fundar.

iii- ¿Es cierto que $\Gamma_2 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$?. Fundar.

iv- ¿Es cierto que $\Gamma_1 \vdash_{\mathscr{L}} (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$?. Fundar.

Si $\Gamma_2 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$ y ocurre que para cada $\mathscr{B}$ en $\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{B}$, entonces:

i- ¿Es cierto que $\Gamma_2 = \Gamma_1$?. Fundar.

ii- ¿Es cierto que $\Gamma_2 \vdash_{\mathscr{L}} \neg\mathscr{B}$?. Fundar.

iii- ¿Es cierto que $\Gamma_1 \vdash_{\mathscr{L}} \mathscr{A}$?. Fundar.