Fracciones numéricas positivas menores o iguales que la unidad

Vamos con algunos ejemplos muy sencillos, para fracciones numéricas menores que la unidad:

$$0,6 = 3/5 = 3 / (3 + 2) < 1,$$
$$0,83333\ldots = 5/6 = 5 / (1 + 5) < 1,$$
$$0,43333\ldots = 13/30 = 13 / (2 * 13 + 4) < 1,$$

y observen que el numerador también figura en el denominador, pero "aumentado", ya sea multiplicado por un factor positivo o sumado con otro término positivo, y esta es una característica de las fracciones numéricas postivas y menores que la unidad.

Expresiones algebraicas fraccionarias que toman valores menores o iguales que la unidad

Consideren las inecuaciones, y observen que sus numeradores y sus denominadores de sus primeros miembrostoman valores positivos:

$$x^2 / (x^2 + y^2) \le 1 \ (1)$$
$$y^2 / (x^2 + y^2) \le 1 \ (2),$$

y observen que en ellas se verifica también que los numeradores en sus primeros miembros toman valores menores o iguales que sus denominadores, tal como pudieron ver en los ejemplos numéricos;

luego, extraen raíz cuadrada positiva en ambos miembros de ambas inecuaciones, y queda:

$$\sqrt{(x^2)} / \sqrt{(x^2 + y^2)} \le \sqrt{(1)},$$
$$\sqrt{(y^2)} / \sqrt{(x^2 + y^2)} \le \sqrt{(1)},$$

a continuación, aplican propiedades del valor absoluto en los numeradores de los primeros miembros, resuelven los segundos miembros, y queda:

$$|x| / \sqrt{(x^2 + y^2)} \le 1 \ (3),$$
$$|y| / \sqrt{(x^2 + y^2)} \le 1 \ (4),$$

y observen que las expresiones señaladas (1) (2) (3) (4) son las que permiten acotar, a la hora de aplicar el Teorema de Encaje para demostrar la existencia de un límite.

Algunos límites

3 b)

Observen que tienen que estudiar el límite:

$$\mathbf{Lím[(x;y) \to (0;0)] \ [(7x^2 - 2y^2)/(x^2 + y^2) + 1] =}$$

antes que todo, observen que el numerador y el denominador del primer término en el argumento de este límite tienden los dos a cero, por lo que tenemos por el momento que este límite es indeterminado;

luego, extraen denominador común en el argumento del límite, y queda:

$$= \text{Lím}[(x;y) \to (0;0)] \ [(7x^2 - 2y^2 + x^2 + y^2) / (x^2 + y^2)] =$$

reducen términos semejantes en el argumento del límite, y queda:

$$\mathbf{= Lím[(x;y) \to (0;0)] \ [(8x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)]}.$$

Observen ahora que es en esta instancia donde tenemos que estimar la existencia o no existencia del límite, y para ello tenemos que plantear los límites iterados, o elegir trayectorias que pasen por el origen de coordenadas, y observen que si consideran: x = 0 tienen que el límite es igual a -1, y que si consideran: y = 0 entonces tienen que el límite es igual a 8, por lo que ya visualizan que este límite no existe, por lo que podemos plantear, ahora con cierta formalidad, los límites "iterados":

$$\text{Lím}(y\to 0)\ (\ \text{Lím}(x\to 0)\ [\ (8x^2 - y^2)\ /\ (x^2 + y^2)]\ ) = \text{Lím}(y\to 0)\ [\ -y^2/y^2\ ] = \text{Lím}(y\to 0)\ [\ -1\ ] = -1,$$

$$\text{Lím}(x\to 0)\ (\ \text{Lím}(y\to 0\ [\ (8x^2 - y^2)\ /\ (x^2 + y^2)]\ ) = \text{Lím}(x\to 0)\ [\ 8x^2/x^2\ ] = \text{Lím}(x\to 0)\ [\ 8\ ] = 8,$$

y como tienen que los límites iterados tienen distintos resultados, entonces pueden concluir que **el límite que están estudiando no existe**.

3 g)

Observen que tienen que estudiar el límite:

$$\textbf{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [\ x*y\ /\ \sqrt{(x^2 + y^2)}\ ],$$

antes que todo, observen que el numerador y el denominador del primer término en el argumento de este límite tienden los dos a cero, por lo que tenemos por el momento que este límite es indeterminado.

Observen ahora que es en esta instancia donde tenemos que estimar la existencia o no existencia del límite, y para ello tenemos que plantear los límites iterados, o elegir trayectorias que pasen por el origen de coordenadas, y observen que si consideran: x = 0 tienen que el límite es igual a 0, y que si consideran: y = 0 entonces tienen que el límite es igual a 0, por lo que ya visualizan que los límites iterados no nos informan que este límite no existe, por lo que podemos plantear trayectorias rectilíneas que pasen por el punto en estudio (observen que en el argumento de la raíz cuadrada en el denominador tienen una suma de potencias pares con exponentes iguales), cuya ecuación general es:

$$y = \mathbf{m*x};$$

luego, sustituyen esta expresión, y queda el límite de variable única:

$$\textbf{Lím}[x\to 0]\ [\ x*m*x\ /\ \sqrt{(x^2 + (m*x)^2)}\ ] =$$

reducen factores semejantes en el numerador, resuelven el segundo término en el argumento de la raíz cuadrada, y queda:

$$= \text{Lím}[x\to 0]\ [\ m*x^2\ /\ \sqrt{(x^2 + m^2*x^2)}\ ] =$$

extraen factor común en el argumento de la raíz cuadrada, y queda:

$$= \text{Lím}[x\to 0]\ [\ m*x^2\ /\ \sqrt{(x^2*(1+ m^2)}\ ] =$$

distribuyen la raíz cuadrada (observen que su argumento es una multiplicación de expresiones, y queda:

$$= \text{Lím}[x\to 0]\ [\ m*x^2\ /\ [\sqrt{(x^2)}*\sqrt{(1+ m^2)}\ ] =$$

aquí aplican propiedades del valor absoluto $\mathbf{x^2 = |x|^2}$ y $\mathbf{\sqrt{(x^2)} = |x|}$, y queda:

$$= \text{Lím}[x\to 0]\ [\ m*|x|^2\ /\ [|x|(1+ m^2)\ ] =$$

simplifican, y queda:

$$= \text{Lím}[x\to 0]\ [\ m*|x|\ /\ (1+ m^2)\ \mathbf{= 0},$$

y luego, como tienen que las "trayectorias más adecuadas" que han empleado conducen a que este límite existiría, por lo que tienen que responder la pregunta:

¿ L = 0 ?

luego, pasan a demostrarlo con el Teorema de Encaje, que para nuestro punto en estudio: (0;0) toma la forma:

"si: $0 \le |f(x;y) - \mathbf{L}| \le g(x;y)$, y $\text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [g(x;y)] = 0$, entonces: $\mathbf{L = 0}$";

luego, sustituyen la expresión de la función y el límite en estudio, y queda:

$$0 \leq |\, x^*y \,/\, \sqrt{(x^2 + y^2)} - 0 \,| =$$

cancelan el término nulo, y queda:

$$= |\, x^*y \,/\, \sqrt{(x^2 + y^2)} \,| =$$

distribuyen el valor absoluto entre los factores de su argumento (observen que uno de dichos factores es una de las expresiones que permiten acotar), y queda:

$$= |x|^*|\, y \,/\, \sqrt{(x^2 + y^2)} \,| \leq$$

aquí acotan, y queda:

$$= |x|^*1 =$$

$$= |x| = g(x;y);$$

luego, plantean el límite de esta última expresión para el punto en estudio, y queda:

$$\text{Lím}[(x;y) \to (0;0)]\ [g(x;y)] = \text{Lím}[(x;y) \to (0;0)]\ |x| = \mathbf{0},$$

por lo que ya tienen demostrado que el límite en estudio existe y su valor es: **L = 0**.

Comentario importante:

Observen que en este último desarrollo tienen demostrada la inecuación.

$$|\, x^*y \,/\, \sqrt{(x^2 + y^2)} \,| \leq |x|,$$

aplican la propiedad del valor absoluto y las desigualdades, y queda la inecuación doble:

$$-|x| \leq x^*y \,/\, \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq |x|,$$

plantean el límite de las expresiones de los tres miembros para el punto en estudio, y queda:

$$\text{Lím}[(x;y) \to (0;0)]\ [\, -|x| \,] \leq \text{Lím}[(x;y) \to (0;0)]\ [\, x^*y \,/\, \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq \text{Lím}[(x;y) \to (0;0)]\ [\, |x| \,],$$

resuelven los límites en el primero y en el tercer miembro (observen que ambos son inmediatos), y queda:

$$0 \leq \text{Lím}[(x;y) \to (0;0)]\ [\, x^*y \,/\, \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq 0,$$

por lo que pueden concluir que el límite de la expresión central para el punto en estudio es: **L = 0**.

Sugerencia:

Queda para ustedes probar que con el cambio a coordenadas polares se llega a la misma conclusión.