Repaso: Diferenciabilidad

Ya han visto en el apunte de teoría que una función des diferenciable en punto $P_0(x_0;y_0)$ perteneciente a su dominio si se cumple:

$$\text{Lím}[(x;y)\to(x_0;y_0)]\ (\ f(x;y) - [\ f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)*(x - x_0) + f_y(x_0;y_0)*(y - y_0)\ ]/\sqrt{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}\ ) = 0,$$

y observen que para que este límite exista deben cumplirse tres condiciones necesarias:
1°) la función debe estar definida en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$,
2°) la derivada parcial de la función con respecto a x debe existir en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$,
3°) la derivada parcial de la función con respecto a x debe existir en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$,
y observen además que **si alguna de estas condiciones necesarias no se cumple, entonces tienen que la función no es diferenciable en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$**.

Luego, vamos con algunos teoremas sobre diferenciabilidad:

- T_1: “Si una función es diferenciable en el punto en estudio, entonces también es continua en dicho punto”;
- T_2: “Si una función no es continua en el punto en estudio, entonces no es diferenciable en dicho punto”;
- T_3: “Si las dos derivadas parciales de la función son continuas en el punto en estudio, entonces la función es diferenciable en dicho punto”;
- T_4: “Si una función es diferenciable en el punto en estudio, entonces tiene vector gradiente para dicho punto, y su gráfica admite plano tangente en dicho punto”;
- T_5: “Si una función es diferenciable en el punto en estudio, entonces admite derivadas en todas direcciones en dicho punto”;
- T_6: “Si una función no admite derivadas en todas direcciones en el punto en estudio, entonces no es diferenciable en dicho punto”;

y tengan presente que pueden aplicar estos teoremas cuando sea preciso (aquí tengan muy en cuenta que debe cumplirse la hipótesis, o antecedente, del teorema para poder aplicarlo).

Vamos con algunos ejemplos.

1)
$f(x;y) = \text{sen}(x^2+y^2)$,
observen que el domino de esta función es el conjunto: $D = R^2$, y observen además que es una composición de funciones continuas en dicho conjunto, pero observen que no disponemos de un teorema cuya hipótesis sea la continuidad de la función, por lo que planteamos las expresiones de las derivadas parciales de la función, y queda:
$f_x(x;y) = 2*x*\cos(x^2+y^2)$ y **$f_y(x;y) = 2*y*\cos(x^2+y^2)$**,

observen que **estas dos funciones son continuas en R^2**, por lo que aplican el Teorema 3, y pueden concluir que la función es diferenciable en todo su dominio.

2)

$f(x;y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)} = \sqrt{(1 - [x^2+y^2])}$,

observen que el dominio de esta función es el conjunto: $D = \{ (x;y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$, cuya representación gráfica es un disco circular cerrado con centro en el origen de coordenadas y radio igual a uno;

luego, observen que pueden distinguir dos clases de puntos pertenecientes al domino de esta función:

1°)

puntos de su frontera, que es la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$, y observen que la función está definida en los puntos internos a esta circunferencia, pero no lo está en los puntos externos, por lo que tienen que la función no es continua en un entorno (disco abierto) de cualquier punto de esta frontera, por lo que aplican el Teorema 2, y pueden concluir que la función no es diferenciable en ninguno de los puntos de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$;

2°)

puntos interiores a su frontera, que pertenecen al disco circular abierto que es representación gráfica de las soluciones de la inecuación: $x^2 + y^2 < 1$; luego, plantean las expresiones de las funciones derivadas parciales de la función, y queda:

$f_x(x;y) = -x/\sqrt{(1 - [x^2+y^2])}$ y **$f_y(x;y) = -y/\sqrt{(1 - [x^2+y^2])}$**,

y observen que los argumentos de las raíces cuadradas toman valores positivos en todos los puntos en estudio, por lo que tienen que las derivadas parciales son continuas en todos dichos puntos, por ser divisiones entre funciones continuas; luego, aplican el Teorema 3, y pueden concluir que la función es difereenciable en el conjunto: $D_d = \{ (x;y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$, cuya representación gráfica es el disco circular abierto con centro en el origen de coordenadas y radio igual a uno.

Diferenciabilidad y “funciones partidas”

Tengan presente que si el punto en estudio es el punto que está definido en particular, entonces deben aplicar la definición de diferenciabilidad, y pueden comenzar por verificar el cumplimiento de las tres condiciones necesarias, y recuerden que si alguna de ellas no se cumple, entonces pueden concluir que la función no es diferenciable en el punto en estudio.

3)

$f(x;y) =$

$x/(x^2+y^2)$ si $(x;y) \neq (0;0)$

0 si $(x;y) = (0;0)$,

y observen que tienen un punto para el cuál la función está definida en forma particular: A(0;0), y ustedes pueden demostrar que la función no es continua en dicho punto (pueden plantear trayectorias rectilíneas, por ejemplo), por lo que aplican el Teorema 2 y pueden concluir que la función no es diferenciable en el punto en estudio A(0;0), y para los demás puntos, pueden plantear las expresiones de las funciones derivadas parciales, y verificar que existen para todo punto distinto de A(0;0), por lo que aplican el Teorema 3 y pueden concluir que la función es diferenciable en el conjunto: $D_d = \{ (x;y) \in R^2 : (x;y) \neq (0;0) \}$.

4)

f(x;y) =

$x*y^2/(x^2+y^2)$	si $(x;y) \neq (0;0)$
0	si $(x;y) = (0;0)$,

observen que aquí vuelven a tener al origen de coordenadas como punto particular, y a todos los demás puntos definidos con la expresión del primer trozo;

luego, queda para ustedes demostrar que la función es continua en R^2, y para el origen de coordenadas, aplicaremos la definición de continuidad, y comenzaremos por verificar que se cumplen las tres condiciones necesarias (observen que plantearemos las derivadas parciales por medio de sus definiciones):

1°)

f(0;0) = 0 (se cumple);

2°)

$f_x(0;0) = \text{Lím}(h\to 0)\ [\ f(0+h;0) - f(0;0)\ ]/h = \text{Lím}(h\to 0)\ [\ f(h;0) - 0\ ]/h = \text{Lím}(h\to 0)\ [\ f(h;0)\ ]/h =$

$= \text{Lím}(h\to 0)\ [\ h*0^2/(h^2+0^2)\ ]/h = \text{Lím}(h\to 0)\ [\ 0/h^2\ ]/h = \text{Lím}(h\to 0)\ [\ 0/h^3] = 0$,

por lo que tienen que la derivada con respecto a x en el origen de coordenadas existe y es igual a cero;

3°)

$f_y(0;0) = \text{Lím}(k\to 0)\ [\ f(0;0+k) - f(0;0)\ ]/k = \text{Lím}(k\to 0)\ [\ f(0;k) - 0\ ]/k = \text{Lím}(k\to 0)\ [\ f(0;k)\ ]/k =$

$= \text{Lím}(k\to 0)\ [\ 0*k^2/(0^2+k^2)\ ]/k = \text{Lím}(k\to 0)\ [\ 0/k^2\ ]/k = \text{Lím}(k\to 0)\ [\ 0/k^3] = 0$,

por lo que tienen que las derivadas parciales de la función en el origen de coordenadas existen, y OJO aquí, porque no sabemos si son continuas o discontinuas; luego, como se cumplen las tres condiciones necesarias, plantean el límite que tienen en la definición, y queda (observen que reemplazamos la coordenadas del origen, que es nuestro punto en estudio):

$$\textbf{Lím}[(x;y)\to(x_0;y_0)]\ (\ f(x;y) - [\ f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)*(x - x_0) + f_y(x_0;y_0)*(y - y_0)\ ]/\sqrt{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}\ ) =$$

reemplazan los valores correspondientes a las expresiones coloreadas:

$$= \textbf{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ (\ f(x;y) - [\ 0 + 0*(x - 0) + 0*(y - 0)\ ]/\sqrt{[(x-0)^2+(y-0)^2]}\ ) =$$

cancelan todos los términos nulos:

$$= \textbf{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ (\ f(x;y)\ /\ \sqrt{[x^2+y^2]}\ ) =$$

sustituyen la expresión de la función en el primer término en el numerador:

$$= \textbf{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [\ (\ \ x*y^2/(x^2+y^2)\ )\ /\ \sqrt{(x^2+y^2)}\ ] =$$

resuelven la división de expresiones en el argumento del límite:

$$= \textbf{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [\ \ x*y^2\ /\ [(x^2+y^2)*\sqrt{(x^2+y^2)}]\ ] =$$

resuelven la expresión en el denominador del argumento del límite:

$$= \textbf{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [\ \ x*y^2\ /\ (x^2+y^2)^{3/2}\ ] =$$

y pueden ustedes demostrar que este límite no existe (por ejemplo, planteando trayectorias rectilíneas cuya ecuación general es: y = m*x),

por lo que pueden concluir que **esta función no es diferenciable en el punto en estudio A(0;0)**, y queda que sí lo es en el conjunto: $\mathbf{D_d = R^2 - \{ (0;0) \}}$.

Función Linealización y Plano Tangente

Recuerden que en Matemática 2 ustedes estudiaron gráficas de funciones derivables, que eran continuas y "suaves" (no presentaban interrupciones ni "puntos angulosos"). Ahora, para funciones de dos variables que son diferenciables, tenemos que sus gráficas son superficies "suaves" en todo un entorno del punto en estudio (no presentan interrupciones, ni aristas, ni picos, ni "rajaduras").

Luego, si tienen una función de dos variables f(x;y) que es diferenciable en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$, entonces tienen que esta función admite función de linealización en dicho punto, cuya expresión general es:

$$L_{Po}(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)*(x - x_0) + f_y(x_0;y_0)*(y - y_0),$$

cuya gráfica tiene la ecuación cartesiana explícita:

$$z = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)*(x - x_0) + f_y(x_0;y_0)*(y - y_0),$$

y es el plano tangente a la gráfica de la función correspondiente al punto en estudio;

y recuerden que **las únicas funciones que admiten función linealización y plano tangente en un punto de su dominio son las funciones que son diferenciables en dicho punto**.

Luego, vamos con algunos ejercicios del Trabajo Práctico N.º 6.

5)

$f(x;y) = e^{x^2+y^2}$, en el punto A(1 ; 1 ; f(1;1)) que pertenece a su gráfica,

aquí observen que el valor de la tercera coordenada del punto A es: **f(1;1) =** $e^{1^2+1^2}$ $\mathbf{= e^2}$,

y observen que la expresión del punto en estudio es: $P_0(1;1)$.

luego, plantean las expresiones de las funciones derivadas parciales, y queda:

$f_x(x;y) = 2*x*e^{x^2+y^2}$, que al evaluarla en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_x(1;1) = 2*e^2}$,

$f_y(x;y) = 2*y*e^{x^2+y^2}$, que al evaluarla en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_y(1;1) = 2*e^2}$;

luego, sustituyen las expresiones numéricas remarcadas en la expresión de la función linealización y en la ecuación del plano tangente, y queda:

$$\mathbf{L_{Po}(x;y) = e^2 + 2*e^2*(x - 1) + 2*e^2*(y - 1)},$$

$$\mathbf{z = e^2 + 2*e^2*(x - 1) + 2*e^2*(y - 1)}.$$

Aproximaciones con funciones linealización

Las funciones linealización permiten estimar valores de una función diferenciable en un punto cercano al punto en estudio, por ejemplo, miren el anteúltimo ejercicio del Trabajo Práctico N.º 6:

6)

$f(x;y) = x^2 + y^4 + e^{x*y}$, en el punto: $P_0(1;0)$, y estimar: $f(0{,}98;0{,}05)$;

luego, vamos por etapas:

1°)

<u>expresión de la función linealización</u>,

$\mathbf{f(1;0) =} 1^2 + 0^4 + e^{1*0} = 1 + 0 + 1 \mathbf{= 2}$,

$f_x(x;y) = 2*x + 0 + y*e^{x*y}$, que evaluada en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_x(1;0) = 2}$,

$f_y(x;y) = 0 + 4*y^3 + x*e^{x*y}$, que evaluada en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_x(1;0) = 1}$,

reemplazan los valores remarcados en la expresión general de la función linealización, y queda:

$L_{Po}(x;y) = 2 + 2*(x - 1) + 1*(y - 0)$,

cancelan el término nulo y resuelven el coeficiente en el último término, y queda:

$\mathbf{L_{Po}(x;y) = 2 + 2*(x - 1) + y}$;

2°)

<u>estimación del valor de la función</u>,

observen que tienen el punto en consideración:

$P(0;98;0{,}05)$, cuyas coordenadas son: $x = 0{,}98$, e $y = 0{,}05$;

luego, plantean la ecuación de aproximación, y queda:

$\mathbf{f(x;y) \cong L_{Po}(x;y)}$,

luego, sustituyen la expresión de la función linealización, y queda:

$\mathbf{f(x;y) \cong 2 + 2*(x - 1) + y}$,

reemplazan las coordenadas del punto en consideración:

$$\mathbf{f(x;y) \cong 2 + 2*(x - 1) + y},$$

reemplazan las coordenadas del punto en consideración:

$$f(0,98;0,05) \cong 2 + 2*(0,98 - 1) + 0,05,$$

evalúan, y queda:

$$\mathbf{f(0,98;0,05) \cong 2,01},$$

y observen que el valor que obtienen con las calculadoras es:

$$\mathbf{f(0,98;0,05) \cong 2,01}0627,$$

y observen que obtuvieron una buena aproximación, y ello se debe al que el punto en consideración: P(0,98;0,05) y el centro de desarrollo: $P_0(1;0)$ son muy próximos.