Matemática IV- 2020
TP8 - Transformaciones Lineales

1. Analizar si las siguiente aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales.

   a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$

   b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$

   c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2, y + 3x, 1)$

   d) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$

   e) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$

   f) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + z, y + w)$

   g) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (0, 0)$

2. Hallar el núcleo e imagen de cada una de las transformaciones lineales del punto anterior y las dimensiones de cada uno de esos subespacios.

3. Mostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

4. *a)* Es la aplicación identidad una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.

   b) Es la aplicación nula una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.

5. Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

   a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (z - y, z - x)$ con las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

   b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y, z) = (3x + z, y - x, 2z + 2y)$ con la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   c) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+y, z+w)$ con B la base canónica de las matrices de $\mathbb{R}^{2x2}$ y $B_1 = \{(1, 1); (-1, 5)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

6. *a)* Hallar $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que:
   $L(1, 0) = (1, -2)$, $L(0, 1) = (1, -1)$

   b) Hallar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que :
   $L(1, 0, 0) = (1, 0)$, $L(0, 1, 0) = (-1, -6)$, $L(0, 0, 1) = (0, 4)$

c) Hallar $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que:
$L(1,1) = (4,2)$, $L(0,3) = (1,0)$

d) Hallar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sabiendo que :
$L(1,1,1) = (1,2,3)$, $L(0,1,0) = (1,-1,0)$, $L(-1,-1,1) = (5,4,3)$

7. (*) (*para codificar...*)

   - Construir una función en la cual, ingresando como argumento una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W y sus respectivas bases ordenadas, genere la matriz de cambio de base.

   - Construir una función en la cual, ingresando como argumento la imagen por una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W de los vectores de una base de V devuelva la forma de esa transformación (ayuda: una posibilidad es usar el último ejercicio y el código del inciso anterior)

Ejercicios Adicionales

1. Analizar sin son transformaciones lineales, en caso afirmativo hallar núcleo e imagen.

   a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y,z) = (x - 2z, y + 3x, -z)$

   b) $L : \mathcal{P}_3 \to R^4$ definida por $L(p(x)) = (a_3, a_2, a_1, a_0)$
   con $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ y siendo $\mathcal{P}_3$ el espacio de los polinomios de grado 3 (i.e todos los polinomios con grado menor o igual a 3, con las operaciones usuales)

   c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x,y,z) = (xy, x + y + z)$

   d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y,z) = (z,y,1)$

   e) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x + w$

   f) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = z.y$

2. Demostrar que dada cualquier transformación lineal $L : V \to W$ (con V, W espacios vectoriales), el núcleo y la imagen de L forman un subespacio de V y W respectivamente.

3. Dada L una transformación lineal en el espacio vectorial V y $B = \{b_1....b_i...b_n\}$ una base de V. Probar:

   a) Si $L(b_i) = 0$ para cada elemento b_i de la base B, entonces L es la transformación nula.
   b) Si $L(b_i) = b_i$ para cada elemento b_i de la base B, entonces L es la transformación identidad.
   c) Si hay un escalar r tal que $L(b_i) = r.b_i$ para cada vector de la base B, entonces $L(v) = r.v, \forall v \in V$.

4. Hallar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que :

   $L(1,0,1) = (1,0)$, $L(0,1,0) = (1,2)$, $L(1,1,1) = (-1,3)$

5. Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

   a) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y,z,w) = (x+y, y+z, z+w)$ con las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.
   b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y) = (x+y, x-y, 3y)$ con $B_2 = \{(1,1);(-2,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x,y,z) = (z, x+y)$ con $B_3 = \{(1,1,1);(1,0,1);(0,2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(1,2);(0,3)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.