Funciones de varias variables - Límites y Continuidad

Vamos a estudiar conceptos que ya vieron en Matemámtica 2, pero extendiendo ahora a más de una variable (ya que en general, al estudiar fenómenos del mundo real es usual que una cantidad dependa de más de una variable).

Definición 0.1. *Una función real f de n variables es una regla que asigna a cada n-ulpa de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un único número real $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{1}$$

Donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en donde está definida la función f, a este conjunto D se lo llama ***dominio*** de f, ***Dom(f)***.

Por otro lado, la ***imagen*** o ***rango*** (de D por f) ***Im(f)***,es un subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores que toma f en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es decir, por $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 0.2. *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, analizar su dominio e imagen.*

El $Dom(f)$ está dado por todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ en donde está definida la función, por lo cual:

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\} \end{aligned}$$

El dominio no es más que una bola de radio 1, centrado en $(0, 0, 0)$, es decir la esfera de radio 1 y su interior.

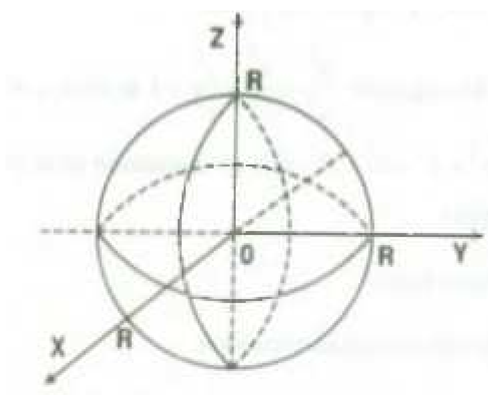


Figure 1: bola de radio 1 con centro en el origen

Por otro lado, para todo valor de $(x, y) \in D$, se tiene que $f(x, y, z) \in [0, 1]$, por lo tanto $Im(f) = [0, 1]$.

1 Funciones de dos variables

Definición 1.1. *Una función real f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y), un único número real $f(x, y)$.*

En este caso el dominio de f $(Dom(f))$, que es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ en el cual está definida la función, se representa como una región del plano, pues está dado por todos los puntos del plano para los cuales $f(x, y)$ es un número real bien definido.
Por otra parte, la imagen de f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por los valores que toma la función f en (x, y).

Si $(x, y) \in D$, se suele escribir $z = f(x, y)$ donde queda explícitamente definido que z es el valor que toma la función f al evaluarla para el par ordenado (x, y).

Ejemplos 1.2.

- *La función nula $f(x, y) = 0$ está definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por tanto $D = \mathbb{R}^2$ y su imagen es el conjunto $Im(f) = \{0\}$.*

- *La función constante $f(x, y) = c$ (siendo c una constante fija) tiene como dominio todo $\mathbb{R}^2$ y su imagen es $Im(f) = \{c\}$.*

- *La función $f(x, y) = ax + by + c$, que se denomina función lineal, tiene como dominio todo $\mathbb{R}^2$ y su imagen es $Im(f) = \mathbb{R}$.*

- *Dada la función $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, determinemos su dominio e imagen:*

  Observamos que f está dada por un cociente, por lo tanto f está bien definida siempre que el denominador sea no nulo. Esto es, $x^2 + y^2 \neq 0$, lo que implica que x e y no pueden ser simultáneamente nulos.

  Por lo tanto $Dom(f) = D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\right\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

  Por otro lado dado que z puede tomar cualquier valor real entonces $Im(f) = \mathbb{R}$.

Representación gráfica de funciones

Una forma de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es mediante la representación de su gráfica.

Para una función $g(x)$ de una variable, recordemos que su gráfica era una curva C en el plano, con ecuación $y = g(x)$; la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S en el espacio, con ecuación $z = f(x, y)$.

Definición 1.3. *Se llama gráfica de una función f de dos variables al conjunto de todos los puntos del espacio con coordenadas (x, y, z) tales que $(x, y) \in Dom(f)$ y $z = f(x, y)$.*

Si llamamos S a la superficie que representa la gráfica de f, entonces:

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in Dom(f); z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in Dom(f)\}$$

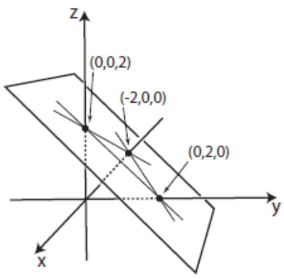
Ejemplos 1.4.

- *La función nula tiene como gráfica la superficie $z = 0$.*
- *La función constante $f(x, y) = c$ se representa gráficamente como el plano (horizontal) de ecuación $z = c$.*
- *La gráfica de la función $f(x, y) = x - y + 2$ es el plano $z = x - y + 2$.*

  Como no hay ninguna condición particular para el dominio de f, consideraremos el dominio natural, $Dom(f) = \mathbb{R}^{\nvDash}$

  Para obtener la imagen observamos que los valores que toma f son $z = x - y + 2$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$, y como vemos que z puede adoptar cualquier valor real, $Im(f) = \mathbb{R}$

  Para trazar la gráfica de f, escribimos $z = f(x, y) = x - y + 2$, que corresponde a la ecuación de un plano.

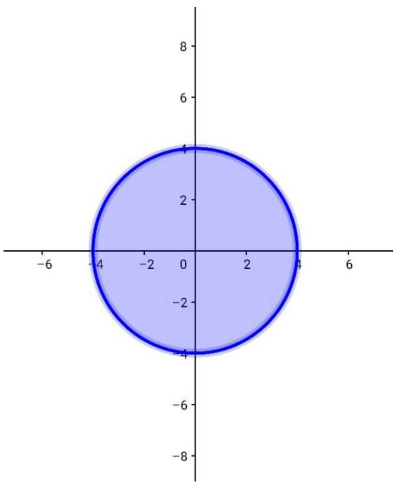


- *Dada la función $f\,(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, hallar el dominio, la imagen y su representación gráfica.*

  El $Dom(f)$ está dado por todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ en donde está definida la función, por lo cual:

$$D \quad = \quad \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\right\}$$

  Corresponde al disco radio 4, centrado en $(0, 0)$, es decir la circunferencia de radio 4 y su interior. Para los puntos fuera de la circunferencia la función no está definida.



Por otro lado, para todo valor de $(x, y) \in D$*, se tiene que* $f(x, y, z) \in [0, 4]$*, pues para los puntos de la frontera del disco se cumple que* $16 - x^2 - y^2 = 0$ *y para el origen* $f(0, 0) = \sqrt{16} = 4$*, por lo tanto* $Im(f) = [0, 4]$.

$$
\begin{aligned}
Graf(f) &= \{(x, y, z) : (x, y) \in Dom(f); z = f(x, y)\} = \left\{(x, y, z) : z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}; (x, y) \in D\right\} = \\
&= \left\{(x, y, z) : z^2 = 16 - x^2 - y^2; (x, y) \in D\right\} = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16; (x, y) \in D\right\}
\end{aligned}
$$

La gráfica corresponde a la (semi)esfera (superior) con centro en el origen y radio 4.

La superficie completa es la esfera pero no puede ser la gráfica de una función (recordar la definición de función, para cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio). Identificamos entonces que la gráfica de la función $f(x, y)$ *con la mitad superior de la superficie de la esfera con centro en el origen y radio 4 (con* $z \geq 0$*).*

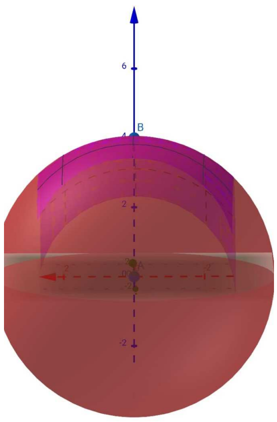


Figure 2: Esfera de radio 4 con centro en (0,0,0)

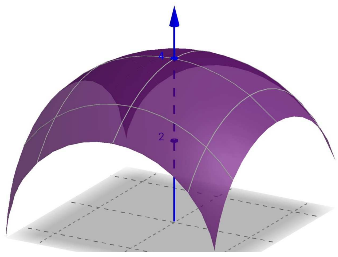


Figure 3: Semiesfera radio 4 con centro en (0,0,0)

Curvas de nivel

Se llama *curva de nivel* k de una función f de dos variables al conjunto de todos los puntos del dominio de la función con coordenadas (x, y) tales que $f(x, y) = k$, donde k es una constante que pertenece a la imagen de f. Llamando C_k a la curva de nivel k, entonces para cada $k \in Im(f)$.

$$C_k = \{(x, y) : (xy) \in Dom(f); f(x, y) = k\}$$

La manera de representar a la función es mediante su *mapa de niveles o mapa de contornos*, que se obtiene dibujando unas cuantas curvas de nivel, para distintos valores de k. Es común tomar valores de k equiespaciados.

Por construcción, para los pares del dominio que forman una dada curva de nivel, la función f toma el mismo valor. Luego, la curva de nivel k muestra todos los pares del dominio donde la gráfica de f tiene nivel o *altura* k.
A partir de las curvas de nivel rotuladas con su nivel o altura de función, se puede inferir la gráfica de la función, elevando mentalmente cada curva de nivel hasta la altura apropiada.
Si se hiciera este procedimiento para todas las curvas de nivel C_k con $k \in Im(f)$, juntas conformarán la gráfica de f.

La curva de nivel C_k de una función $f(x,y)$ es precisamente la proyección en el plano xy de la traza horizontal $z=k$ de la superficie que es gráfica de f.
O sea que, si se dibujan curvas de nivel de una función y se visualizan como si se elevaran hasta el nivel que indica k, es posible trazar mentalmente una gráfica aproximada.

No haremos más hincapié en el estudio de las curvas de nivel, podemos identificar superficies usando GeoGebra y otros graficadores.

2 Límites y Continuidad

El concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones.

Recordemos lo visto para funciones de una variable en el curso de Matmática 2. Intuitivamente, la idea de límite de f cuando x tiende (se acerca) a x_0 es igual a L, significa que a medida que x se acerca a x_0, los valores que va tomando f se acercan cada vez más al valor de L.

Al ser f una función de una variable el dominio está incluido en la recta real, (es unidimensional), sólo hay dos direcciones o caminos posibles para llegar al x_0: desde la izquierda o desde la derecha.
Si el límite por la izquierda es distinto del límite por la derecha, entonces el límite de la función cuando x se acerca a x_0 no existe; mientras que si ambos límites laterales existen y coinciden, entonces la función tiene ese lı́mite.

Para funciones de varias variables el concepto de límite es similar al visto para una variable, aunque el cálculo es un poco más complejo.

Se dice que una función de dos variables $f(x,y)$ tiene límite L (número real fijo) cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0), si para todos los puntos (x,y) cercanos al punto (x_0,y_0), los valores $f(x,y)$ son arbitrariamente próximos al número L.

La definición es similar a la del límite funcional para una variable. Sin embargo, para el caso de una función de dos variables (definida sobre un dominio bidimensional $D \subset R^2$), el punto (x,y) podrá acercarse al punto (x_0,y_0) desde muchas direcciones. De hecho, hay infinitas maneras de acercarse a un punto en el plano.

Definición 2.1. *Se dice que una función $f(x,y)$ tiene límite L si cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0) la función $f(x,y)$ se acerca al valor L y se escribe* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

Formalmente el límite existe si dado un número ϵ existe un número $\delta > 0$, tal que $\forall (x,y) \in Dom(f)$, entonces

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq \delta \to |f(x,y) - L| < \epsilon$$

La diferencia $|f(x,y)-L|$ es la distancia entre los números $f(x,y)$ y L; mientras que $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ es la distancia entre el punto $(x;y)$ en el dominio de la función y el punto (x_0,y_0).
Entonces, la definición dice que la distancia entre $f(x,y)$ y L es arbitrariamente pequeña siempre que la distancia entre (x,y) y (x_0,y_0) sea suficientemente pequeña (aunque no nula). El punto (x_0,y_0) puede no pertenecer al $Dom(f)$, el único requisito es que los puntos varíen en el $Dom(f)$.

Ejemplo 2.2. *Calculemos un límite por definición :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.y^2}{x^2+y^2} \qquad (*)$$

Sea $\epsilon > 0$, queremos encontrar un valor $\delta > 0$ tal que:

si $\underbrace{0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta}_{\sqrt{x^2+y^2}<\delta}$ *entonces* $\left|\frac{x.y^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$

Tenemos que $\left|\frac{x.y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|x\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| = |x| \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon$

Luego, para cualquier ϵ existe un $\delta = \epsilon$ tal que vale (*) como queríamos

La definición de límite de una función sólo hace referencia a la distancia entre los puntos (x, y) y (x_0, y_0), nada dice sobre la dirección de acercamiento. Por tanto, si existe el límite, $f(x, y)$ debe acercarse al mismo valor L independientemente de como el punto (x, y) se acerque a (x_0, y_0). Pero resulta imposible, obviamente, analizar todos los caminos que llegan a (x_0, y_0) para ver a qué valor tiende f por cada uno de ellos.

Para determinar si una función $f(x, y)$ tiene o no límite uno elige dos o tres caminos que nos lleven hacia el punto (x_0, y_0), si resulta que los valores obtenidos para ese límite son distintos según el camino elegido entonces ese límite **NO** existe, y por tanto se tiene un criterio para determinar la no existencia del límite.

Sin embargo, si se prueba por varios caminos y se obtiene el mismo valor de L esto no alcanza para asegurar que el límite exista y sea ese valor pero nos permite *suponer* que el límite existe y toma ese valor L para luego demostrarlo efectivamente usando la definición o algunas propiedades.

A menudo demostrar la existencia del límite resulta a partir de la definición resulta difícil, sin embargo existen diferentes herramientas alternativas como por ejemplo el teorema del encaje o *criterio del "'sandwich"'* que establece:

Teorema 2.3. *Si existen funciones $g(x, y)$ y $h(x, y)$ tales que*

$$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$$

$\forall (x, y) \neq (x_0, y_0)$ *en un disco con centro en (x_0, y_0), y si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

No vamos a demostrar el teorema ni las próximas propiedades.

Propiedades 2.4. *Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante, y sean $f(x,y)$ y (x,y) dos funciones rales de dos variables tales que existen los siguientes límites*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \qquad y \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$
- *¡2-¿* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x,y) = c.L$
- *¡3-¿* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) . g(x,y)) = L.M$
- *¡4-¿* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ *si* $M \neq 0$

Además, si $M = 0$ y $L \neq 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ *no existe.*

Ejemplos 2.5. *1. Dada la función $f(x,y) = x^2y + x^2 + sen(y^2)$, calcular* $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

Se trata de una función que está definida en $(1,0)$, el punto pertenece al dominio, aplicando las propiedades y por evaluación directa:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2y + x^2 + sen(y^2) = 1^2 0 + 1^2 + sen(0^2) = 0 + 1 + sen(0) = 1$$

2. Dada la función $f(x,y) = \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$, calcular $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} f(x,y)$.

Se trata de una funcióon racional que está bien definida en $(2,-1)$. Por lo tanto podemos calcular el límite aplicando la regla del cociente, y por evaluación directa de los polinomios del numerador y denominador:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{52^2(-1)}{2^2+(-1)^2} = -4$$

3. No existe el límite en el $(0,0)$ de $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, ya que si nos acercamos al origen por el eje x la función se acerca a 1, pero si nos acercamos al $(0,0)$ por el eje y la $f(x,y)$ se acerca a -1. Encontramos dos trayectorias que llegan al origen, pero tales que a lo largo de cada una de ellas f toma valores diferentes.

4. Podemos ver que por iterados el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$

Pero si consideramos llegar al origen a lo largo de una recta de $y = mx$ (que pasa por el punto $(0,0)$), resulta que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Lo que nos dará un límite diferente para cada recta con pendiente diferente, entonces no existe el límite.

5. *Se puede probar que la función* $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *tiende a* 0 *por diferentes trayectorias (los ejes,las rectas que pasan por el* $(0,0)$*) pero tiende a otros números si nos acercamos al origen por otras curvas. Por ejemplo, si vamos por* $y=\sqrt{x}$ *el límite será* $\frac{1}{2}$.

6. *Dada la función* $f(x,y)=\frac{5x^2y}{x^2+y^2}$, *calcular* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   Analicemos qué ocurre con la función cuando nos acercamos al punto $(0,0)$ *por diferentes caminos:*

   - ***Probamos Límites iterados:***
     $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x^2\cdot 0}{x^2+0^2}\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$
     $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{5\cdot 0^2y}{0^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$
   - ***Por la recta*** $y=mx$
     $$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2mx}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5mx^3}{(m+1)x^2}=\lim_{x\to}\frac{5m}{m+1}x=0$$
   - ***Por la curva*** $y=x^2$
     $$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2x^2}{x^2+(x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^4}{x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to}\frac{5x^2}{1+x^2}=0.$$

     Como vemos que por distintas trayectorias el límite es el mismo, probaremos con el criterio que es efectivamente ese límite es 0

     Teorema del Encaje

     $$\left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right|=5|y|\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 5|y|$$

     de donde,

     $$-5|y|\leq\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\leq 5|y|$$

     Luego, si tomamos $g(x,y)=-5|y|$ *y* $h(x,y)=5|y|$ *y dado que ambas tienden a* 0 *cuando* $(x,y)\to(0,0)$ *el teorema del encaje nos asegura que:*

     $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^2y}{x^2+y^2}=0$$

Coordenadas Polares

Las coordenadas polares pueden servirnos para calcular límites.
En efecto, si recordamos la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas.

$$x=r\cos(\theta)\qquad\qquad y=r\sin(\theta)$$

podemos decir que $(x,y)\to(0,0)$, por ejemplo, equivale a decir (en coordenadas polares) $r\to 0$ (independientemente del valor de θ)

Ejemplo 2.6. *Sea* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$*, queremos calcular el* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Recordando que en coordenadas polares tenemos que $x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta)$*,*

entonces podemos escribir: $x^2 + y^2 = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2\left\{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right\} = r^2$*, luego,*

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{rcos(\theta)\, r^2 sen^2(\theta)}{r^2cos^2(\theta) + r^2sen^2(\theta)} = \frac{r^3cos(\theta)\, sen^2(\theta)}{r^2} = rcos(\theta)\, sen^2(\theta)$$

por lo cual:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r.cos(\theta)\, sen^2(\theta) = 0$$

independientemente del valor de θ

Sabemos de Matemática 2 que el concepto de función continua está asociado a la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, esto es, una curva sin saltos.
Esta idea de continuidad se generaliza a funciones de varias variables, así para funciones de dos variables el concepto de continuidad está basado en la noción intuitiva de una función cuya gráfica es una superficie sin huecos ni rupturas.

Definición 2.7. *Una función real* $f(x,y)$ *es continua en un punto* (x_0, y_0) *si:*

- $\exists f(x_0, y_0)$.
- $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$
- *Se verifica que* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Decimos que $f(x,y)$ es continua en una región plana R si es continua $\forall (x_0, y_0) \in R$.

La continuidad de una función en un punto significa, intuitivamente, que si se *cambia* el punto (sus coordenadas) en una pequeña cantidad, entonces el valor de la función *cambia* en una pequeña cantidad.

Usando las propiedades de los límites se puede mostrar que las sumas, productos y cocientes, asćomo la composición, de funciones continuas son continuas en sus dominios.
Por ejemplo, una función polinomial de dos variables es continua en todo R^2, la exponencial, seno o coseno de cualquier polinomio en x e y también son funciones continuas en R^2.

Teorema 2.8. *Si* c *es un número real y* f *y* g *son funciones continuas en* (x_0, y_0)*, entonces las funciones siguientes son continuas en* (x_0, y_0)*:*

1. *Múltiplo escalar:* cf
2. *Suma (y diferencia):* $f + g$
3. *Producto:* fg
4. *Cociente:* $\frac{f}{g}$ *, si* $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Teorema 2.9. *Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(goh)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0).*

Ejemplo 2.10. *Estudiar la continuidad de las funciones: $f(x, y) = \frac{5yx^2}{x^2+y^2}$ y $g(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$*

El $Dom(f) = R^2 - (0, 0)$ y observamos que f es continua en todos los puntos de su dominio, puesto que es una función racional.

Ahora nos preguntamos si podemos extender esta función de manera tal de lograr una (nueva) función $F(x, y)$ continua en todo $\mathbb{R}^{\not\models}$ y que coincida con $f(x, y)$ siempre salvo en el origen.
Para ello lo que hace falta es dar un valor apropiado para la función F en el origen: el valor apropiado será el límite de f en el origen, que ya vimos que existe.

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{5yx^2}{x^2+y^2} & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dado que g es una función racional, es continua en su dominio que es el conjunto $Dom(g) = R^2 - (0, 0)$. La función g es discontinua *en $(0, 0)$ porque* ***no*** *está* definida *en ese punto, y nos preguntamos si podemos extenderla con continuidad a una nueva función G como en el caso anterior.*
En este caso, como vimos antes, no existe el límite en el origen. Por lo tanto no se puede definir una función G de manera de extender la continuidad de g a todo el plano.