Relaciones entre conjuntos

1 Relación binaria entre A y B

Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos A y B llamamos *producto cartesiano de A por B* y lo anotamos $A \times B$ al conjunto determinado por: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$

Definición 1.1. *Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una* relación binaria *definida entre los mismos es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, caracterizado por alguna propiedad común a sus elementos*

$$R = \{(x, y)/(x, y) \in A \times B\} \subset A \times B$$

Muchas veces cuando $(x, y) \in R$ escribiremos xRy y diremos que x está relacionado por R con y.

Como todo conjunto, las relaciones están dadas por extensión*, dando todos los pares que la componen, o por* comprensión *dando la propiedad que la caracteriza.*

Ejemplos 1.2.

1. *Si $A = \{x/x \text{ es vocal}\}$ y $B = \{brisa, sol, mar, nube\}$ y la relación en $A \times B$ viene definida por: xRy si y sólo si x es letra de y.*

   Entonces,la relación definida por extensión quedaría:

   $R = \{(i, brisa); (a, brisa); (a, mar); (o, sol); (u, nube); (e, nube)\}$

2. *Si $A = \{$enteros pares entre -4 y 10 inclusive$\}$, $B = Z$ y la relación viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x*

   Entonces,la relación definida por extensión quedaría:

   $R = \{(-4, 16); (-2, 4); (0, 0); (2, 4); (4, 16); (6, 36); (8, 64); (10, 100)\}$

- **Dominio e Imagen de una Relación**

  Sea R una relación de A en B.

  Se llama **dominio** de R al conjunto de elementos x de A tales que $(x, y) \in R$

  $$Dom_R = \{x \in A : (x, y) \in R\}$$

  Se llama **imagen** de R al conjunto de elementos y de B tales que $(x, y) \in R$

  $$Im_R = \{y \in B : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.3. *Dados los conjuntos* $A = \{a, e, i\}$ *y* $B = \{sol, nube, cielo\}$ *y la relación* R *en* $A \times B$ *definida por:* xRy *si y sólo si* x *es letra de* y*, esto es:* $R = \{(e, nube), (i, cielo)\}$

Luego,

$$Dom(R) = \{e, i\} \subset A$$

$$Im(R) = \{nube, cielo\} \subset B$$

- **Relación Inversa**

Sea R una relación de A en B. Se llama **relación inversa** de R al subconjunto de $B \times A$ definido por

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.4. *Sean* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ *y* $B = \{-27, -16, -8, -2, -1, 0, 1, 2, 8, 16, 27\}$*, y sea* R *de* A *en* B *definida por :* xRy *si y sólo si* x *es el cubo de* y*; dada por extensión por:*

$R = \{(-8, -2); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (8, 2); (27, 3)\}$

Entonces, $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} = \{(-2, -8); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (2, 8); (3, 27)\}$

es decir, $yR^{-1}x$ *si y sólo si* y *es la raíz cúbica de* x

- **Composición**

Dadas las relaciones R en $A \times B$ y S en $B \times C$ se puede construir la relación composición

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subset A \times C$$

Ejemplo 1.5. *Sean* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$*,* $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *y* $C = \{-5, -4, -3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *subconjuntos de enteros.*

Sea R *de* A *en* B *definida por :* xRy *si y sólo si* x *es el opuesto de* y*, y escrita por extensión:*

$R = \{(-2, 2); (-1, 1); (0, 0); (1, -1); (2, -2)\}$

Sea S *de* B *en* C *definida por :* xRy *si y sólo si* y *es el doble de* x*, y escrita por extensión:*

$S = \{(-2, -4); (-1, -2); (0, 0); (1, 2); (2, 4)\}$

Ahora busquemos la relación compuesta. Observemos que podremos encontrar SoR *de* A *en* C *pero no* RoS*.*

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} = \{(-2, 4); (-1, 2); (0, 0); (1, -2); (2, -4)\}$$

Observación 1.6. *La composición de una relación R de A en B y su inversa R^{-1} de B en A, será una relación especial llamada* ***relación Identidad****.*

$$R^{-1}oR = \left\{(x,z) : (x,y) \in R, (y,z) \in R^{-1}\right\} = \left\{(x,z) : (x,y) \in R, (y,x) \in R^{-1}\right\} = \{(x,x)\} = \Delta_A$$

También podemos obtener $RoR^{-1} = \Delta_B$

2 Relaciones Binarias en un conjunto

Si una relación R es tal que $R \subset A \times A$, se dice que está definida en el conjunto A. En este tipo de relaciones se pueden definir las siguientes propiedades:

- **Reflexividad**: R será *reflexiva* si para todo $x \in A$ vale que xRx
- **Simetría**: R será *simétrica* si para todo x, y en A vale que xRy implica yRx
- **Antisimetría**: R será *antisimétrica* si xRy e yRx implican que $x = y$ para todo x, y en A
- **Transitividad**: R será *transitiva* si para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz

Obs: Vemos que las propiedades (en especial las de simetría, antisimetría (que no es la opuesta a la simetría) y la transitividad) están definidas por un condicional entonces para probarlas debemos mirar bien que *si se cumple que el antecedente es Verdadero tiene que ser Verdadero también el consecuente para que todo el condicional sea Verdadero*, es decir los únicos casos **falsos** son los de antecedente Verdadero y consecuente Falso. Recordemos que de igual manera, *antecedente Falso hace que el condicional sea Verdadero, no importa cual sea el valor de verdad del consecuente*, entonces si no encontramos un par no tenemos que buscar su inverso u otro para componer para probar simetría, antisimetría o trannsitividad.

Ejemplos 2.1. *1. Sea $A = \{a, b, c\}$*

- $R = \{(a,b); (a,a); (b,b)\}$ *es transitiva pero no simétrica ni reflexiva. También es antisimétrica.*

  Como no todos los elementos de A están relacionados consigo mismo R no puede ser reflexiva. Tampoco es simétrica porque vemos que tenemos el par (a,b) pero no está el (b,a). Como todos los pares que se pueden componer tienen en el mismo conjunto R su par compuesto decimos que es transitiva. Cada par que tiene su inverso cumple que su primer coordenada es igual a la segunda.
- $R = \{(a,a); (b,b); (c,c)\}$ *es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva*

  Esta relación es bastante trivial, es la Identidad de A que ya antes mencionamos (Δ_A). Se ve fácilmente que cumple con todas las propiedades (claramente todos los elementos se relacionan consigmo mismo; como la primer coordenada es igual a la segunda en todos los casos, tenemos el par inverso, y por lo tanto será simétrica. La transitividad y antisimetría se da al no cumplirse (o cumplirse de manera trivial al relacionar cada par con él mismo) la conjunciíon del antecedente.

- $R = \{(a,b); (b,c); (a,c); (c,b); (a,a); (b,b); (c,c)\}$ *es reflexiva, transitiva pero no es simétrica ni antisimétrica.*

  Como para cada elemento $x \in A$ encontramos el par (x,x) entonces es reflexiva. Si miramos cada par que puede componerse vemos que está también el compuesto (por ejemplo, (a,b) y (b,c) se pueden componer y nos da (a,c) que está; lo mismo con (a,c) y (c,b) que da (a,b), o (b,c) y (c,b) que devuelven (c,c) y (b,b) que están en R).

  Vemos que no es simétrica ya que tenemos al par (a,b) pero no a su inverso el par (b,a) (no importa que otros pares tengan a su inverso, tiene que darse para todos). Tampoco es antisimétrica ya que está el par (b,c) y el par (c,b) pero $b \neq c$.

  Éste es un ejemplo de una relación que no es ni simétrica ni antisiméstrica, mostrando que una propiedad no es " opuesta " a la otra.

2. *La relación $x \leq y$ en el conjunto de los números naturales es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Obviamente no es simétrica .*

   Observemos que si el "menor" es estricto la relación no sería reflexiva ni antisimétrica.

3. *En el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva (podemos pensarlo geométricamente o recordar que dos rectas del plano son paralelas si tienen igual pendiente).*

2.1 Relaciones de Orden

Una relación R definida sobre un conjunto A reflexiva, antisimétrica y transitiva es una **relación de orden** (ó que es un *orden sobre A*).

Muchas veces diremos que la relación *ordena* S y la notaremos por $\leq$ (no confundir con el orden de los números reales, éste es un ejemplo más de orden). Al par del conjunto y su orden lo denotaremos (A, R) ó $(A, \leq)$ y lo llamamos conjunto ordenado.

Con esto se pretende formalizar la idea intuitiva de orden de un conjunto.

Hay diferentes tipos de órdenes y conjuntos ordenados pero excenden a los contenidos de nuestra materia.

Ejemplos 2.2.

- *Dado $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, y su orden usual, se puede ver fácilmente que se cumplen las tres propiedades para que sea un conjunto ordenado.*

- *Dado un conjunto S, sea $P(S)$ el conjunto de "Partes de S", o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de S.*

  La inclusión de conjuntos $\subseteq$ en $P(S)$ es una relación de orden (todo subconjunto de S está contenido o es igual a si mismo, entonces tenemos la reflexividad. Si vale la doble inclusión entre conjuntos entonces los dos conjuntos son iguales y la relación es antismétrica. Es fácil ver que también vale la propiedad transitiva de la inclusión entre subconjuntos.

- *La relación sobre un conjunto A llamada **relación Identidad** y denotada por Δ_A es una relación de orden.*

Observemos que mientras en el primer ejemplo todos los elementos están relacionados (dados dos números reales cualesquiera x e y, siempre se da que : $x \leq y$, $x = y$ ó $y \leq x$), en el segundo ejemplo hay elementos que no están relacionados (podemos encontrar subconjuntos E y H de S que tengan intersección vacía o que tengan elementos en común pero no se dé ninguna de las dos inlusiones $E \not\subset H$ y $H \not\subset E$.
En estos casos, se dice que el primer ejemplo es un **orden total** mientras que el segundo ejemplo es un **orden parcial**.

Ejemplo 2.3. *La divisibilidad es una relación de orden en* $\mathbb{N}$

Recordemos que a ***divide*** *a b , y se escribe* $a|b$ *si existe un entero c tal que* $b = ac$. *Ahora probemos que esta relación entre números naturales cumple las tres propiedades necesarias para ser una relación de orden.*

- *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n|n$ *ya que existe* 1 *tal que* $n = n.1$*; por lo tanto la relación es reflexiva.*
- *para todo par* $n, m \in \mathbb{N}$, *si* $n|m$ *y* $m|n$ *entonces* $n = m$ *ya que* $n|m$ *implica que existe* k *tal que* $m = nk$*; por otro lado, si* $m|n$ *existe* h *tal que* $n = mh$. *Luego,* $n = mh = (nk)h = n(kh)$ *y como son todos números naturales* $kh = 1$ *y* $n = m$. *De esta manera probamos que la relación es antisimétrica.*
- *dados tres números naturales cualesquiera,* n, m, r *tales que* $n|m$ *y* $m|r$, *entonces probaremos que* $n|r$ *para demostrar que la relación es transitiva.*

  Como $n|m$ *existe* k *tal que* $m = nk$ *y como* $m|r$ *existe* h *tal que* $r = mh$*;*

  luego, $r = mh = (nk)h = n(hk)$ *entonces existe un natural* $t = hk$ *tal que* $r = nt$ *y por lo tanto* $n|r$ *como queríamos probar.*

Observemos que si en lugar del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tomamos el conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$, no se cumplirá la propiedad de antisimetría (ya que $n| - n$ y $-n|n$ PERO $n \neq -n$).
La divisibilidad en $\mathbb{Z}$ no es un orden.

2.2 Relaciones de Equivalencia

Diremos que una relación R definida sobre un conjunto A reflexiva, simétrica y transitiva es una **relación de equivalencia** (ó que es un *equivalencia en* A)

Muchas veces notaremos a una relación de equivalencia R por $\sim$, $\approx$ ó $\equiv$

La idea de equivalencia sobre un conjunto permite establecer una relación entre los elementos del conjunto que comparten cierta característica o propiedad. Esto permitirá reagrupar dichos elementos.

Ejemplos 2.4.

1. *La igualdad matemática (ya sean conjuntos numéricos o conjuntos en general) es trivialmente una relación de equivalencia.*
2. *La relación sobre un conjunto A llamada* ***relación Identidad*** *y denotada por* Δ_A *es una relación de equivalencia.*
3. *Antes vimos que en el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto esta relación es una Equivalencia.*

4. *Pensemos en los ángulos (esto ya lo usamos cuando trabajamos con los argumentos de los números complejos en forma trigonométrica, polar o exponencial!!).*

   Decimos que $\alpha \sim \beta$ si y sólo si existe un entero k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$

   Claramente la relación es reflexiva ya que para $k = 0$ todo ángulo está relacionado con sí mismo. Supongamos que $\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$, luego $\beta = \alpha - 2k\pi = \alpha + 2(-k)\pi$, y por lo tanto $\beta \sim \alpha$ mostrando que la relación es simétrica.
   Por último probemos que la relación es transitiva. Si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \delta$ entonces veremos que $\alpha \sim \delta$
   $\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$
   $\beta \sim \delta$ entonces existe h tal que $\beta = \delta + 2h\pi$
   por lo tanto, $\alpha = \beta + 2k\pi = (\delta + 2h\pi) + 2k\pi = \delta + 2(h + k)\pi$ con $h + k$ entero, obtendiendo que $\alpha \sim \delta$

2.2.1 Clases de Equivalencia

Definición 2.5. *Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $a \in A$ se denominará* ***clase de equivalencia de a*** *y se denotará $\bar{a}$ al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a por R. Es decir, $\bar{a} = \{x \in A : xRa\}$*

Cualquier elemento de $\bar{a}$ se llama *representante* de la clase, y en particular, como la relación es reflexiva se da que $a \in \bar{a}$, luego para todo $a \in A$, a es representante de la clase $\bar{a}$

Ejemplos 2.6.

1. *La relación de equivalencia L es paralela a M en el conjunto de las rectas del plano, podemos tomar como representante de cada* **clase** *a la recta que pasa por el origen*

2. *En el ejemplo de equivalencia entre ángulos podemos tomar como representante de cada clase a los ángulos dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ (como hacíamos con los argumentos de los complejos).*

3. *Cuando se trabaja con números racionales sabemos que una propiedad que tienen las fracciones es la siguiente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ac = bd$, entonces por lo general uno toma o "se queda" con la fracción irreducible que la cumpla.*
   Esa fracción irreducible será la representante de la clase bajo la relación de equivalencia dada por esa propiedad característica.

Teorema 2.7. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A, se cumple:*

1. *Para todo $a \in A$, $\bar{a} \neq \emptyset$*

2. *Si $a, b \in A$ tales que $\bar{a} = \bar{b}$ entonces aRb*

3. *Sean $a, b \in A$ entonces $\bar{a} \neq \bar{b}$ si y sólo si $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$*

Esto es, las clases de equivalencia son conjuntos no vacios y disjuntos.

Sin hacer la demostración formal del teorema observemos que: como R es una relación de equivalencia entonces es reflexiva y por lo tanto para todo elemento $a \in A$ se tiene aRa y por lo tanto al menos ese elemento a estará en la clase de a, así $\bar{a} \neq \emptyset$.

Usando que la relación es simétrica y transitiva, y la definición de clase de equivalencia, obtendremos la segunda propiedad (dado x cualquier elemento del conjunto $\bar{a}$ por definición de clase xRa, como las clases de a y b son iguales, llegamos a que xRb, entonces por la simetría y transitividad de R vale que aRb).

Para el último es más fácil pensando en la contrarreciproca de la proposición, suponiendo que la intersección es no vacía debemos ver la doble inclusión de los (conjuntos) clases. De la misma forma, suponiendo la igualdad de las clases y usando el item anterior veremos que la intersección no puede ser vacía.

Conjunto Cociente - Particiones

Definición 2.8. *Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de elementos del conjunto A respecto de la relación R se lo llamará* ***conjunto cociente de A respecto de la relación R*** *y se lo denotará:*

$$A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$$

Recordemos, de teoría de conjuntos, una partición de un conjunto es una división del mismo en subconjuntos disjuntos no vacíos.
Es decir, una división en "partes" separadas y no vacías representadas mediante una colección o familia de subconjuntos de dicho conjunto que lo *recubren.*

Formalmente, dado un conjunto no vacio A y $P = \{A_i\}$ con $i \in I$, se dice que P constituye una **partición** de A si y sólo si $A = \cup A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Por último enunciamos un teorema muy importante pero que su demostración excede los alcances de nuestra materia:

Teorema 2.9 (Teorema Fundamental de las relaciones de equivalencia)**.** *Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A , el conjunto cociente A/R es una partición de A.*

Todos estos conceptos seguramente ya los han utilizado (sin tener la definición rigurosa de cada uno) en casos de prueba, encontrar errores etc.