Taller 1

1. Suponga que una cuerda homogénea de densidad $\rho = 10\hat{}(-3)$ kg/m y de longitud 1 m se some a una tesnsión $T = 49$ Newtons. Suponga que inicialmente toma la forma de la función $f(x) = x(x-1)^2$, $0 \leq x \leq 1$.

   a Plantee la ecuación de onda junto con las correspondientes condiciones de frontera y condiciones iniciales.

   b Resuelva de manera explicita la ecuación de onda para esta cuerda.

   c Utilice *Mathematica* para simular el movimiento de esta cuerda.

   d Determine los móduos fundamentales de vibración

   $$u_n(x,t) = b_n \sin(n\pi x/L)\cos(cn\pi t/L).$$

   Calcule sus frecuencias y simule su movimiento en *Mathematica*.

2. Resuelva en cada uno de los siguientes casos el correspondiente problema de frontera, para una cuerda homogénea de densidad ρ, longitud 1 m, posición inicial dada por $f(x)$, y sujeta a una tensión T, de tal manera que $c = \sqrt{T/\rho}/(2L)$ sea el valor especificado en cada caso.

   a $f(x) = 0.05\sin(\pi x)$, $c = 1/\pi$

   b $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$, $c = 4$.

   c $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{10}x, & \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{20}(1-x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$, $c = 1/\pi$.

3. Suponga que sobre una cuerda de longitud L, densidad ρ, atada en los extremos, y sometida a una tensión constante T, actua en el instante t una fuerza externa vertical determinada por una *función de densidad de fuerza* $\kappa(x,t)$. Esto significa que sobre un tramo cualquiera de cuerda comprendido entre x y $x+h$ actua una fuerza F en la dirección vertical negativa cuya magnitud está dada por $F = \int\limits_{x}^{x+h} \kappa(s,t)ds$. Siga un procedimiento similar al expuesto más arriba para determinar la ecuación de movimiento de la cuerda. Muestre que dicha ecuación es precisamente

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{1}{\rho}\kappa(x,t)\right), \quad c = \sqrt{T/\rho}.$$

   En el caso particular en el que la fuerza F es la fuerza de gravedad, con $\kappa(x,t) = g\rho$, donde g es la constante gravitatoria, $g = 9.8$ m/s^2, deduzca que la ecuación de movimiento toma la forma

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + g\right).$$

Si F es la fuerza de resistencia del aire, proporcional a la velocidad de la cuerda, se puede tomar $\kappa(x,t) = \mu \partial u/\partial t(x,t)$, donde $\mu > 0$ es una cierta constante de proporcionalidad. Muestre que en este caso la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

4. *Use el método de separación de variables para resolver la ecuación anterior en el caso particular en que la cuerda tiene longitud $L = \pi$, $c = 1$, $\mu = \rho$, $u(x,0) = \sin(x)$.

5. Siga un procedimiento similar al explicado en las notas para hallar la solución de la ecuación de onda en el caso en el que la velocidad inicial de la cuerda esté dada por una función $\partial u/\partial t(x,0) = g(x)$.

Las soluciones apoarecen en las notas de clase.