Taller 4-5 Matemáticas Especiales

1 Problemas

1) Los siguientes problemas se refieren a una barra cilíndrica con coeficiente de difusión térmica $\delta = 1$, longitud L y temperatura inicial dada por $f(x)$. En cada caso resuelva de manera explícita la ecuación del calor para cada condición inicial dada.

i $u(0,t) = 100,\ u(1,t) = 0,\ \ f(x) = 30\sin(\pi x),\ \ L = 1$ m.

ii $u(0,t) = 100,\ u(\pi,t) = 50,\ f(x) = \begin{cases} 33x,\ 0 < x \leq \pi/2 \\ 33(\pi - x),\ \pi/2 < x \leq \pi \end{cases},\ L = \pi$ m.

iii $L = \pi,\ f(x) = 100,\ \ \partial u/\partial x(0,t) = \partial u/\partial x(\pi,t) = 0$

iv $L = \pi,\ f(x) = \begin{cases} 100x, \text{ si } 0 < x \leq \pi/2 \\ 100(\pi - x), \text{ si } \pi/2 < x < \pi \end{cases},\ \partial u/\partial x(0,t) = \partial u/\partial x(\pi,t) = 0$

Soluciones

i

$$u(x,t) = 100(1-x) + 30e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) - \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)}{n}$$

ii

$$u(x,t) = 100 - \frac{50x}{\pi} + \sum_{n \text{ par}} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx) + \sum_{n \text{ impar}} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx), \text{ donde } b_n \text{ está dado por:}$$

$$b_{(2k+1)} = \frac{-12(25 - 11(-1)^k + 50k)}{(1+2k)^2\pi},\ k = 0,1,2,3...$$

$$b_{2k} = \frac{50}{\pi k},\ k = 0,1,2,3...$$

Luego

$$u(x,t) = 100 - \frac{50x}{\pi} - \frac{50}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-(2k)^2 t}\sin(2kx)$$
$$- \frac{12}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{25 - 11(-1)^k + 50k}{(1+2k)^2}e^{-(2k+1)^2 t}\sin((2k+1)x)$$

iii

$$u(x,t) = 100$$

iv

$$u(x,t) = 25\pi - \frac{200}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-4(2k+1)^2 t}\cos(2(2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

2) Grafique en *Mathematica* cada una de las soluciones anteriores, y muestre su evolución en forma animada.

3) Suponga que en una barra ciclíndrica tiene longitud $L = 1$ m y coeficiente de difusión térmica $\delta = 1$. Suponga además que a través de cada extremo está fluyendo calor al medio circundante en una medida proporcional a la temperatura de dicho extremo, con constante de proporcionalidad $\kappa = 1$, y que su distribución de tempertaura inicial está dada por $f(x)$.

i Muestre que este problema puede modelarse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= -u(0,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = -u(1,t) \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

ii Use separación de variables para hallar una primera solución en la forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ donde

$$\begin{aligned} G'(t) - kG(t) &= 0 \\ F''(x) - kF(x) &= 0, F'(0) = -F(0), F'(1) = -F(1). \end{aligned}$$

ii Muestre que $k = \mu^2$, con $\mu = 1$ o $k = -\mu^2$, con $\mu = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.

iii Muestre que cada caso anterior produce una solución $G_0(t) = e^t, F_0(x) = e^{-x}$, $G_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}, F_n(x) = n\pi\cos(n\pi x) - \sin(n\pi x)$

iv Muestre que lsd funciones $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ son ortogonales bajo el producto $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

v Muestre finalmente que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0 e^t e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi)^2 t} \left(n\pi\cos(n\pi x) - \sin(n\pi x)\right), \\ c_0 &= \frac{2e^2}{e^2 - 1} \int_0^1 f(x)e^{-x} dx \\ c_n &= \frac{2}{1 + n^2\pi^2} \int_0^1 f(x) \left(n\pi\cos(n\pi x) - \sin(n\pi x)\right) dx \end{aligned}$$

4 Considere un cilindro de longitud L dispuesto a lo largo del eje x. Suponga que $\kappa = 1$, y que la temperatura en un instante t_0 es la misma para todos los puntos del cilindro situados en la sección vertical A_x, con coordenada x, e

igual a $u(x,t_0) = x^2 + 3x + 1$ unidades de temperatura. Calcule la magnitud y la dirección del flujo de calor que atraviesa la cara izquierda de la rodaja de cilindro comprendida entre x_0 y $x_0 + h$.

Solución

El fujo de calor que atraviesa la sección A_{x_0} tiene la dirección $-\operatorname{grad}(u) = -\partial u/\partial x e_1$ evaluada en $x = x_0$, donde e_1 denota el vector unitario en dirección positiva. Como $n = -e_1$, entonces la cantidad de calor que atraviesa A_{x_0} en el instante t_0 en la dirección de n será igual a $\langle -(2x_0+3)e_1, -e_1\rangle\, A = (2x_0+3)A$ (El calor escapa del cilindro en la dirección del normal exterior).

5) Suponga que una bola de cobre B, de radio unitario, se calienta a 100 grados centígrados. Si la esfera se sumerge en un litro de agua que está a 20 grados, y si todo su calor se transfiere al agua, calcule la temperatura del agua una vez la bola se haya enfriado totalmente. El calor específico del cobre es $c = 0.093$, y su densidad es $\rho = 8.96$ gramos /cm^3 ($\rho = 8960$ kg/m^3)

Solución

En unidades La cantidad de calor contenida en la esfera está dada por

$$\begin{aligned} E &= \int\limits_B c\rho u(x,y,z,t)dV = \int\limits_B 0.093 \times 8960 \times 100 \int\limits_B dV \\ &= 83328 \times \frac{4\pi}{3} = 349044 \text{ Joules.} \end{aligned}$$

Ahora, 1 Jouls es igual a 0.000239006 Kilo Caloría. luego la energía contenida en B es igual a 83.4 KCal. Como cada kilo caloría aumenta la temperatura de un litro de agua en un grado centigrado, la temperta tura final del agua será $20 + 83.4 = 103.4$ grados centígrados.

6) Una membrana rectangular de lados a, b comienza a vibrar desde el reposo con forma inicial dada por $f(x,y) = x(a-x)(b-y)y$. Si suponemos que $c = 1$, calcule su función de movimiento $u(x,y,t)$.

Solución

$$u(x,y,t) = \frac{16a^2b^2}{\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1][(-1)^m - 1]}{(mn)^3} \sin(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \cos(\pi \sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2 t})$$

7) Una membrana rectangular de lados $a = b = 1$, y $c = 1/\pi$ comienza a vibrar desde el reposo con forma inicial dada por $f(x,y) = \sin(3x)\sin(\pi y)$. Calcule su función de movimiento $u(x,y,t)$

Solución

$f(x,y) = \sin(3x)\sin(\pi y)\cos(\sqrt{10}t)$

8) Deduzca, usando el método de separación de variables presentado en clase, la ecuación de movimiento para una membrana rectangular de lados a, b con constante $c = \sqrt{\tau/\rho}$ que comienza a vibrar con velocidad inicial dada por una función $g(x,y)$.

Solución

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(b_{mn}\cos(\lambda_{mn}t) + b^*_{mn}\sin(\lambda_{mn}t))\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b}),$$

con

$$\begin{aligned}
b_{mn} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})dxdy \\
b^*_{mn} &= \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})dxdy \\
\lambda_{mn} &= \pi\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}.
\end{aligned}$$

9) Si la función de movimiento de una membrana rectangular está dada por $u(x,y,t) = \sin(4\pi x)\sin(\pi y)\cos(t)$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, encuentre las líneas nodales y simule su movimiento en *Mathematica*.

Solución

$x = 1/4$, $x = 1/2$, $x = 3/4$. Código:

```
a = 1; b = 1; c = 1; mmax = 5; nmax = 3;
f[x_, y_] := Sin[4*Pi*x]*Sin[Pi*y];
lambda[i_, j_] := Pi*Sqrt[(i/a)^2 + (j/b)^2];
For[i = 1, i < mmax, i++,
For[j = 1, j < nmax, j++,
B[i, j] =
Integrate[
f[x, y]*Sin[(i*Pi*x)/a]*Sin[(j*Pi*y)/b], {x, 0, a}, {y, 0, b}];
];
];
membrana[x_, y_, t_] =
Sum[B[i, j]*Sin[i*Pi*x/a]*Sin[j*Pi*y/b]*Cos[c*lambda[i, j]*t], {i,
1, mmax}, {j, 1, nmax}];
Manipulate[
Plot3D[membrana[x, y, t], {x, 0, a}, {y, 0, b},
PlotRange -> {{0, a}, {0, b}, {-0.3, 0.3}}, Mesh -> 50], {t, 0, 10,
0.01}]
```

10) Para cada entero $k \geq 1$:

i encuentre la ecuación $u_k(r,t)$ que representa la vibración de un a membrana circular de radio unitario y constante $c = 1$, si la condición inicial es $f(r) = \frac{2}{J_1^2(\alpha_k)}J_0(\alpha_k r)$.

ii Haga en *Mathematica* una animación de la solución.

iii Calcule el período de cada solución.

iv Calcule sus curvas nodales.

Solución

i La solución general es $u(r,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\alpha_n r)\cos(\alpha_n t)$, con $b_n = \int\limits_0^1 f(r) J_0(\alpha_n r) r dr$.

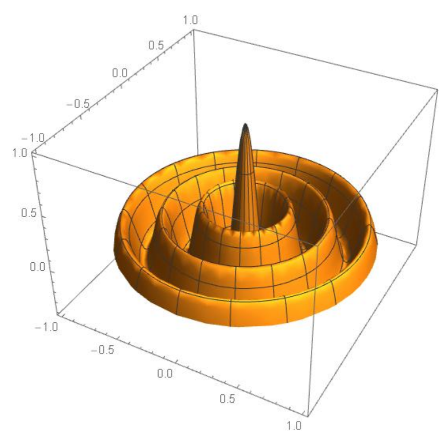
Como las funciones $J_0(\alpha_m r)$ forman un conjunto ortogonal se sigue que $b_n = 0$, si $n \neq k$ y

$$b_k = \int\limits_0^1 \frac{2}{J_1^2(\alpha_k)} J_0^2(\alpha_k r) r dr = \frac{2}{J_1^2(\alpha_k)} \int\limits_0^1 J_0^2(\alpha_k r) r dr = \frac{2}{J_1^2(\alpha_k)} \frac{J_1^2(\alpha_k)}{2} = 1.$$

Luego $u_k(r,t) = J_0(\alpha_k r)\cos(\alpha_k t)$.

ii Por ejemplo, para $k = 7$, use el código:

```
a = 1; b = 1; c = 1;

alph7 = N[BesselJZero[0, 7]];

u[r_, t_] := N[BesselJ[0, alph7*r]]*Cos[alph7*t];

maxi = MaxValue[{u[r, 0], 0 <= r <= a}, r];

mini = MinValue[{u[r, 0], 0 <= r <= a}, r];

Animate[ParametricPlot3D[{r*Cos[theta], r*Sin[theta], u[r, t]}, {r, 0, 1}, {theta, 0,
   2 Pi},

PlotRange -> {{-a, a}, {-b, b}, {Min[-Abs[mini], -Abs[maxi]], Max[Abs[mini], Abs[maxi]]}},
   Mesh -> 15, PlotTheme -> "Scientific"], {t, 0, 10*Pi, Appearance -> "La-
   beled"}, AnimationRepetitions -> 1, AnimationRunning -> False, Animation-
   Rate -> .005]
```



iii El período está dado por $p_k = 2\pi/\alpha_k$.

iv Las curvas nodales están dadas por el locus de puntos $N = \{(r,\theta) : u(r,\theta,t) = 0$, para $t \geq 0\}$. En nuestro caso $N = \{(r,\theta) : J_0(\alpha_k r)\cos(\alpha_k t) = 0$, para $t \geq 0\}$ y por tanto $J_0(\alpha_k r) = 0$. Pero la función J_0 de Bessel es cero precisamente en cada α_n. De aquí que $r = \alpha_n/\alpha_k$, con $0 \leq \alpha_n/\alpha_k \leq 1$. Luego $\alpha_n \leq \alpha_k$. Las curvas nodales debrán ser entonces círculos concéntricos con radio $r = \alpha_1/\alpha_k, \alpha_2/\alpha_k, \ldots, \alpha_k/\alpha_k$.