

# MATEMÁTICAS ESPECIALES

J. D. Vélez

Jeferson L. Zapata

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Escuela de Matemáticas

`jdvelez@unal.edu.co`

`jlzapatan@unal.edu.co`

**2018**



# Índice general

<b>1. Ecuación de una cuerda en vibración</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Solución de la ecuación de onda . . . . .	8
1.3. Determinación de $B_n$ . . . . .	10
1.4. Modo fundamental y armónicos . . . . .	15
<b>2. *Escala musical</b>	<b>27</b>
2.1. Escala pitagórica . . . . .	27
2.2. Escala Temperada . . . . .	31
2.3. Acordes mayores y menores en la escala temperada . . . . .	34
<b>3. Series de Fourier</b>	<b>39</b>
3.1. Desarrollo en serie de una función periódica . . . . .	39
3.1.1. Funciones pares e impares . . . . .	48



# Prefacio

Los primeros cuatro capítulos de estas notas están dedicados a analizar desde el punto de vista matemático dos fenómenos clásicos de la física: la vibración de cuerdas, membranas y placas metálicas y la distribución y flujo del calor en un objeto físico. La modelación de estos fenómenos nos lleva de manera natural al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales y a sus problemas de frontera.

En el primer capítulo se introduce la *Ecuación de Onda*, en una dimensión, y se resuelve mediante el método de separación de variables. Este método conduce de manera inmediata a la *Teoría de Series de Fourier*, objeto de estudio del segundo capítulo.

En la segunda parte del primer capítulo, las soluciones de la ecuación de onda se interpretan desde el punto de vista de la descomposición en armónicos. La teoría permite comprender el diseño de los instrumentos musicales de cuerda, así como la construcción de las escalas pitagórica y temperada. Con algunas variaciones, la deducción y solución de la ecuación de onda sigue lo expuesto en cualquiera de los textos [7],[8],[9]. Para una discusión sobre las escalas musicales y su correspondiente construcción matemática, el lector puede consultar [10].

En el tercer capítulo discutiremos otro ejemplo importante de una ecuación diferencial parcial en dos variables: la *Ecuación del Calor*. Para su solución también se utilizará el método de separación de variables. Analizaremos así mismo las distintas soluciones que aparecen al variar las condiciones de frontera ([9]).

En el cuarto capítulo introducimos ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales en tres variables, como son las ecuaciones que modelan la vibración de una membrana rectangular y de una membrana circular. Analizaremos las curvas nodales y su manifestación experimental más llamativa: las llamadas *Figuras de Chladni*.

Los capítulos 5 y 6 están dedicados al análisis complejo y a sus aplicaciones. Discutiremos algunos aspectos de la *Teoría del Potencial*, y sus aplicaciones a la electrostática. En sexto capítulo mostraremos otras aplicaciones del análisis complejo, en este caso al estudio de la polarización de la luz.

Los tres capítulos siguientes pretenden servir de introducción a la *Teoría de las Bases de Groebner* y sus aplicaciones a la robótica, y a la demostración automática de teoremas. No se supone ningún conocimiento previo del tema por parte del lector, solo alguna familiaridad con el lenguaje básico del Álgebra de polinomios. Aquellos interesados exclusivamente en las aplicaciones de la teoría pueden omitir en una primera lectura todas las demostraciones. Este material que no entrará en la evaluación aparecerá en letra más pequeña o señalado mediante un asterisco. Una excelente introducción a la teoría de bases de Groebner se puede leer en [6], [4]. Una muy buena introducción a la robótica aparece en [11].

Los apéndices, al final del texto, están pensados como complemento al material desarrollado en el curso.

# Capítulo 1

## Ecuación de una cuerda en vibración

### 1.1. Introducción

En este capítulo derivaremos la ecuación de onda para la cuerda vibrante, bajo ciertos supuestos, y discutiremos su relevancia en el diseño de los instrumentos de cuerda, así como en la construcción de las escalas musicales. Con algunas variaciones menores, la deducción y solución de la ecuación de onda sigue lo expuesto en cualquiera de los textos [7],[8],[9]. Para una discusión sobre las escalas musicales y su construcción matemática, el lector puede consultar [10].

Una cuerda de longitud  $L$  y densidad constante  $\rho$  (que mediremos en kg/m) permanece atada a dos pesos que cuelgan de sus extremos, cada uno con masa igual a  $m$  kg.

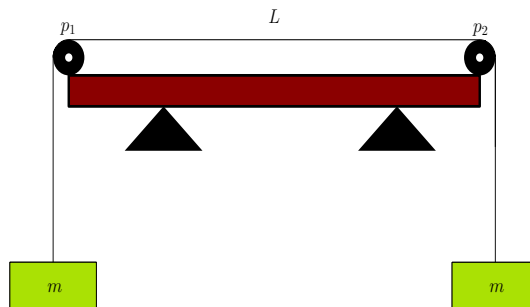


Figura 1.1: Experimento con una cuerda

Situemos un sistema de coordenadas  $(x, u)$  con origen en  $p_1$ , el extremo izquierdo de la cuerda, y orientado positivamente, donde el eje  $x$  se superpone a la cuerda, y apunta hacia la derecha. A continuación tomamos la cuerda y la deformamos ligeramente de tal manera que en el instante  $t = 0$  esta adquiere la forma de una cierta función  $f(x)$ , referida en nuestro sistema de coordenadas.

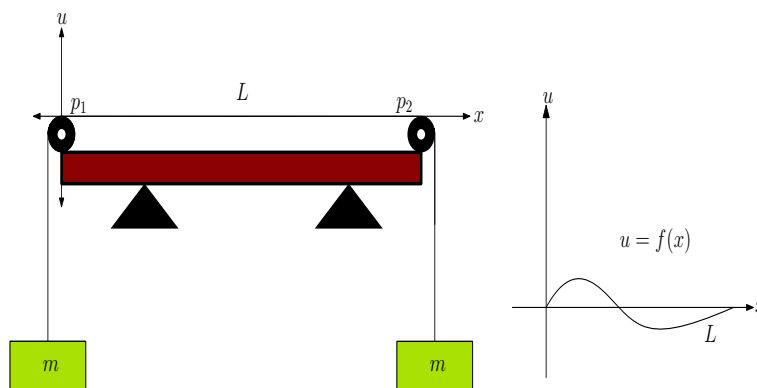


Figura 1.2: Cuerda en vibración

Soltamos luego la cuerda, y observamos cómo comienza a vibrar. Denotemos por  $u(x, t)$  la función que representa la forma que asume la cuerda en el instante  $t$  (puede pensarse que el grafo de  $f_t(x) = u(x, t)$  representa una foto de la cuerda en el instante  $t$ ). Nuestro propósito es encontrar la ecuación diferencial que rige su movimiento. Para ello haremos dos hipótesis fundamentales:

1. Cada punto sobre la cuerda vibra en dirección exclusivamente vertical.
2. Las deformaciones a las cuales se ve sometida la cuerda son siempre muy pequeñas, y despreciables en los extremos. Dicho de manera precisa, en cada instante  $t$  el ángulo  $\theta(x, t)$  que forma la tangente a la cuerda en el punto  $u(x, t)$  con respecto a la horizontal es muy pequeño:  $|\theta(x, t)| \simeq 0$ , y en los extremos se tiene que  $\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0$ .

Consideremos un pequeño trozo de cuerda, comprendido entre  $x$  y  $x + h$ , y en el instante  $t$ , como se muestra a continuación: Denotemos por  $T(x, t)$  la *magnitud* de la tensión de la cuerda en el punto con coordenadas  $u(x, t)$ .



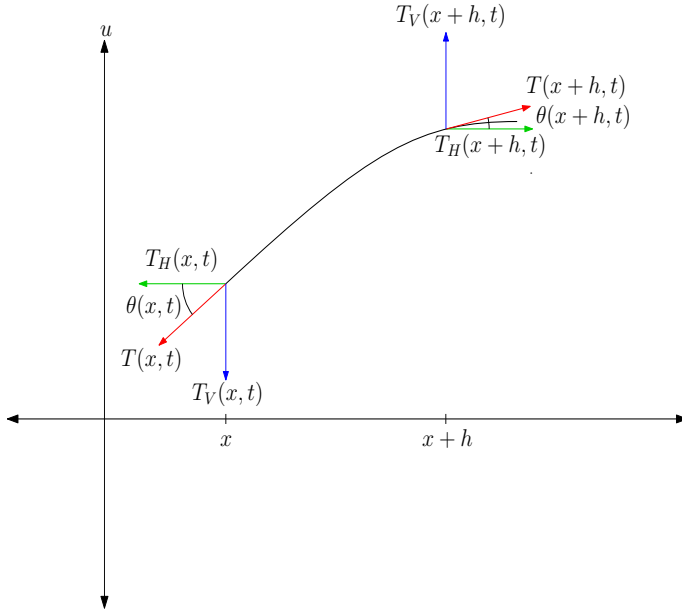


Figura 1.3: Cuerda en vibración

Entonces, la tensión horizontal en cada uno de los puntos  $u(x, t)$  y  $u(x + h, t)$  vendrá dada por

$$T_H(x, t) = T(x, t) \cos \theta(x, t) \text{ y}$$

$$T_H(x + h, t) = T(x + h, t) \cos \theta(x + h, t),$$

respectivamente. De manera similar, la tensión vertical en ambos puntos puede calcularse como:

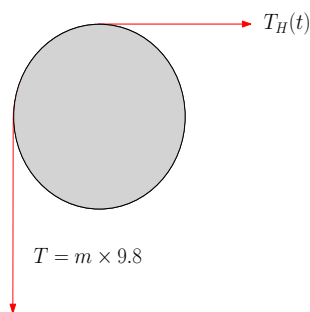
$$T_V(x, t) = T(x, t) \sin \theta(x, t), \text{ y}$$

$$T_V(x + h, t) = T(x + h, t) \sin \theta(x + h, t),$$

respectivamente.

El primer supuesto nos dice que en el instante  $t$  *las tensiones horizontales en los puntos  $u(x, t)$  y  $u(x + h, t)$  deberán ser iguales*, pues cada punto sobre la cuerda solo se mueve en dirección vertical. En consecuencia la tensión horizontal  $T_H(x, t)$  es una función que no depende de la variable  $x$ . Es decir,  $T_H(x, t) = T_H(t)$ , para una cierta función  $T_H(t)$  que dependerá (al menos en principio) exclusivamente del tiempo. De otro lado, en los puntos extremos donde la cuerda descansa sobre los soportes la tensión no posee componente

en la dirección vertical, pues hemos supuesto  $\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0$ . Luego, en cualquier instante  $t$ , la tensión horizontal en los extremos deberá ser igual a la tensión que la porción vertical de cuerda ejerce sobre la respectiva masa que cuelga de ella. Ahora, durante el experimento es posible ver que estas dos masas *permanecen inmóviles*, de aquí que dicha tensión sea constante a través del tiempo, e igual por tanto a  $m \times 9,8$  Newtons. Luego la tensión horizontal  $T_H(t)$ , que es la misma en todo punto de la cuerda, deberá ser igual a esta misma cantidad, que denotaremos por  $T = m \times 9,8$  N. En resumen:



$$T = T_H(x, t) = T(x, h) \cos \theta(x, t), \quad (1.1)$$

para todo  $0 \leq x \leq L$ , y todo  $t \geq 0$ .

Veamos ahora que  $l(x, x+h)$ , la longitud del pedazo de cuerda comprendido entre  $x$  y  $x+h$ , es aproximadamente  $h$ . Para ello recordemos que esta longitud puede calcularse mediante la fórmula

$$l(x, t) = \int_x^{x+h} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(s, t) \right)^2} ds$$

Pero  $\partial u / \partial x(s, t) = \tan \theta(x, t)$ , que elevado al cuadrado es un término muy cercano a cero, pues estamos suponiendo que  $\theta(x, t) \simeq 0$ . Por tanto

$$\sqrt{1 + (\partial u / \partial x(s, t))^2} \simeq 1.$$

Luego:

$$\int_x^{x+h} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(s, t) \right)^2} ds \simeq \int_x^{x+h} 1 ds \simeq h.$$

Finalmente, la diferencia entre las tensiones verticales en  $x$  y  $x+h$  es entonces la única fuerza responsable del movimiento vertical de ese trozo de cuerda. La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza total, la diferencia entre  $T_V(x+h, t)$  y  $T_V(x, t)$ , es igual a la masa del pedazo en cuestión,  $\rho h$ , multiplicada por su aceleración, que viene dada por  $\partial^2 u / \partial t^2$ :

$$T_V(x+h, t) - T_V(x, t) = (\rho h) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Luego

$$T(x+h, t) \sin \theta(x+h, t) - T(x, t) \sin \theta(x, t) = (\rho h) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Reemplazando  $T(x+h, t)$  por  $T / \cos \theta(x+h, t)$  y  $T(x, t)$  por  $T / \cos \theta(x, t)$  (Ecuación 1.1) se obtiene:

$$T \frac{\sin \theta(x+h, t)}{\cos \theta(x+h, t)} - T \frac{\sin \theta(x, t)}{\cos \theta(x, t)} = (\rho h) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pero  $\sin \theta(x, t) / \cos \theta(x, t)$  es igual a  $\tan \theta(x, t)$ , que es igual a la pendiente de la curva  $f_t(x)$ , igual a  $f'_t(x) = \partial u / \partial x(x, t)$ . De aquí se sigue que

$$\frac{\partial u / \partial x(x+h, t) - \partial u / \partial x(x, t)}{h} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Si hacemos  $c = \sqrt{T/\rho}$ , la ecuación toma la forma definitiva:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de onda en una dimensión*. De igual manera a como ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias, para conocer la solución de una ecuación diferencial parcial es necesario determinar las *condiciones iniciales y de frontera*. Hay una condición de frontera natural: como la cuerda se mantiene atada a los extremos se sigue entonces

que  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Además, en el instante  $t = 0$  la cuerda se ha deformado de tal manera que su forma estará descrita por una cierta función  $f(x)$ . Es decir, debemos especificar de antemano el valor de  $u(x, 0) = f(x)$ .

Estamos suponiendo además que la cuerda, que comienza a vibrar en la posición descrita por  $f(x)$ , se suelta desde el reposo, es decir, en  $t = 0$  la velocidad de cada punto sobre la cuerda es cero. Esto nos proporciona una condición inicial natural:  $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$ . En resumen el problema que se debe resolver es el siguiente (c.f. = condición de frontera, c.i. = condición inicial):

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \text{c.f. } u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ \text{c.i.1 } u(x, 0) &= f(x) \\ \text{c.i.2 } \partial u / \partial t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Figura 1.4: Condiciones iniciales y de frontera

## 1.2. Solución de la ecuación de onda

Una manera de resolver la ecuación anterior es suponer que existen soluciones simples donde las variables "pueden separarse", es decir soluciones de la forma  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . A este método se le conoce como *método de separación de variables*. Para una función  $u$  cuyas variables estén *separadas*, la ecuación (1.2) toma la forma

$$F''(x)G(t) = \frac{1}{c^2}F(x)G''(t)$$

En aquellos valores de  $x$  y  $t$  en los cuales  $F(x)$  y  $G(t)$  no se anulan la ecuación anterior puede escribirse como

$$F''(x)/F(x) = G''(t)/c^2G(t). \quad (1.3)$$

Como la función de la izquierda depende solo de la variable  $x$  mientras que la función de la derecha depende solo de la variable  $t$ , ambas funciones deberán ser iguales a una cierta constante  $k$ . Obtenemos entonces de (1.3) dos

ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} F''(x) - kF(x) &= 0 \\ G''(t) - kc^2G(t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Veamos que la función  $u(x, t)$  es no trivial (no es idénticamente nula) si y solo si  $k < 0$ . Distingamos los tres posibles casos:

1. Si  $k = 0$ ,  $F(x)$  es entonces una función lineal de la forma  $F(x) = ax + b$ . La condición de frontera c.f obligaría a que  $F(0) = b = 0$  y  $F(L) = aL = 0$ , y en consecuencia  $F$  sería idénticamente cero, lo cual fuerza a que  $u(x, t)$  se idénticamente igual a cero.
2. Si  $k > 0$ , entonces  $F(x) = Ae^{k_1x} + Be^{-k_1x}$ , con  $A, B$  constantes y  $k_1 = +\sqrt{k}$ . Nuevamente, la condición  $F(0) = F(L) = 0$  fuerza a que  $A = B = 0$ , y  $u$  sería así mismo una función trivial en este caso.
3. Luego la única posibilidad interesante ocurre cuando  $k$  es una constante negativa. Escribamos  $k = -p^2$ , donde  $p = +\sqrt{-k} > 0$ . En este caso la solución general de (1.4) viene dada por

$$F(x) = A \cos(px) + B \sin(px),$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias. Ahora, de la ecuación  $F(0) = 0$  deducimos  $A = 0$ , y de la ecuación  $F(L) = 0$  deducimos  $pL = n\pi$ , y en consecuencia  $p = n\pi/L$ . Para  $n = 1, 2, \dots$ , denotemos por  $F_n(x)$  la función  $F_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ . Para cada  $n > 0$  fijo, la ecuación  $G''(t) - kc^2G(t) = 0$  puede reescribirse como

$$G''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0,$$

cuya solución general es

$$G(t) = B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t), \quad (1.5)$$

con  $\lambda_n = cn\pi/L$ . Derivando con respecto a  $t$  se observa que la condición inicial c.i.2 obliga a que  $B_n^* = 0$ , de tal suerte que cada función

$$B_n \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t)$$

es solución de (1.2), y satisface las condiciones c.f y c.i.2.

Desafortunadamente  $u_n(x, t)$  no tiene por qué satisfacer c.i.1, es decir, no tiene por qué ocurrir que  $u_n(x, 0) = f(x)$  (de hecho esto solo sucede en el caso muy particular en el que  $f(x) = B_n \sin(n\pi x/L)$ ). Para que la solución buscada satisfaga c.i.1 debemos usar una idea más.

Notemos primero que la ecuación de onda (1.2) es *lineal*. Es decir, puede verificarse de inmediato que si  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  son soluciones, y si  $A$  y  $B$  son constantes, entonces la combinación lineal de ambas soluciones  $Au(x, t) + Bv(x, t)$  también es solución. Más aún, como justificaremos más adelante, no solo es posible formar combinaciones lineales finitas de soluciones que también sean solución sino además combinaciones lineales infinitas que siguen siendo soluciones. Es decir, si hacemos  $u_n(x, t) = \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t)$  podemos encontrar una serie convergente de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t), \quad (1.6)$$

$$\lambda_n = cn\pi/L$$

la cual es solución de (1.2). La ganancia radica en el hecho de que ahora esta función  $u(x, t)$  puede escogerse de tal forma que satisfaga c.i.1. Es decir, tal que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L).$$

Dicha serie corresponde al llamado *desarrollo en serie de Fourier de la función  $f(x)$* , asunto que estudiaremos en detalle en el próximo capítulo. Allí mostraremos que, suponiendo ciertas propiedades básicas de la función  $f(x)$ , siempre es posible hallar una expresión de  $f(x)$  como suma infinita

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L) \quad (1.7)$$

si tomamos coeficientes

$$B_n = 2/L \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx, n \geq 0. \quad (1.8)$$

### 1.3. Determinación de $B_n$

Veamos directamente por qué los coeficientes  $B_n$  pueden computarse como en (1.8). Para ello comencemos por calcular las siguientes integrales:

1.  $\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\frac{m\pi x}{L}) dx$ , con  $m \neq n$ , números enteros positivos
2.  $\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi x}{L}) dx$ , con  $n > 0$ , un número entero.

Para calcular la primera integral utilicemos la identidad trigonométrica:

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

tomando  $\alpha = n\pi x/L$  y  $\beta = m\pi x/L$ . De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\frac{m\pi x}{L}) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{L}{2(n-m)\pi} \sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \frac{L}{2(n+m)\pi} \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \Big|_0^L \\ &= \frac{L}{2(n-m)\pi} \sin((n-m)\pi) - \frac{L}{2(n+m)\pi} \sin((n+m)\pi) = 0, \end{aligned}$$

pues  $\sin(k\pi) = 0$  para todo número entero  $k$ .

Para computar la segunda integral utilicemos la identidad

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha),$$

con  $\alpha = n\pi x/L$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2(\frac{n\pi x}{L}) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos(\frac{2n\pi x}{L}) dx \\ &= \frac{L}{2} - \frac{L}{4n\pi} \sin(\frac{2n\pi x}{L}) \Big|_0^L \\ &= \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

pues  $\sin(2n\pi) = 0$ .

Definamos para cada  $n > 0$  la función  $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(n\pi x/L)$ . De lo anterior deducimos que  $\int_0^L \phi_n^2(x) dx = 1$ , e  $\int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$ , si  $m \neq n$ .

Estamos buscando expresar  $f(x)$  en la forma (1.7), es decir, buscamos una expresión de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\frac{L}{2}} \phi_n(x).$$

Para cada  $m > 0$  fijo, multipliquemos formalmente la expresión anterior a ambos lados por  $\phi_m(x)$ . Esto nos produce

$$\phi_m(x) f(x) = \sqrt{\frac{L}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \phi_m(x) \phi_n(x).$$

Ahora, integremos ambos lados:

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_m(x) f(x) dx &= \sqrt{\frac{L}{2}} \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} B_n \phi_m(x) \phi_n(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{L}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx, \end{aligned}$$

donde suponemos, sin demostrarlo, que la sumatoria (infinita) y la integral son operaciones intercambiables.

Sabemos que cada una de las integrales  $\int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx$  es cero, si  $m \neq n$ .

Si  $n = m$ , dicha integral es precisamente  $\int_0^L \phi_m^2(x) dx = 1$ . De aquí que en el lado derecho solo aparezca un término no nulo:

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_m(x) f(x) dx &= \sqrt{\frac{L}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \sqrt{\frac{L}{2}} (0 + \cdots + B_m + \cdots 0) \\ &= \sqrt{\frac{L}{2}} B_m. \end{aligned}$$



Despejando  $B_m$  se obtiene

$$\begin{aligned} B_m &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_m(x) f(x) dx = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(m\pi x/L) f(x) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx, \end{aligned}$$

como se había afirmado.

Si miramos el procedimiento anterior de una manera abstracta podemos reconocer que la forma de hallar  $B_n$  es, en esencia, la misma que se utiliza para determinar los coeficientes de vector cuando este se escribe como combinación lineal de los vectores de una base ortonormal.

Empecemos por recordar que en  $\mathbb{R}^n$ , visto como espacio vectorial, hay un producto interno (el *producto punto*) definido de la siguiente manera: si  $v = (a_1, \dots, a_n)$  y  $u = (b_1, \dots, b_n)$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$ , el producto punto  $u \cdot v$  se define como  $u \cdot v = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ . Este producto goza de las siguientes propiedades

$$u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2 \quad (1.9)$$

$$u \cdot (\alpha v) = \alpha u \cdot v, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

$$u \cdot v = v \cdot u \quad (1.11)$$

$$u \cdot u = |u|^2, \text{ donde } |u| \text{ denota la norma del vector } u. \quad (1.12)$$

De otro lado, recordemos que una base  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  para  $\mathbb{R}^n$  se llama *ortonormal* si satisface las condiciones  $u_i \cdot u_j = 0$ , si  $i \neq j$  y  $u_i \cdot u_i = 1$  (esta última condición significa que la norma de  $u_i$  es igual a 1).

Si  $w$  es un vector arbitrario de  $\mathbb{R}^n$ , como  $B$  es una base, podemos encontrar una combinación lineal (única)

$$w = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n,$$

con coeficientes  $b_j \in \mathbb{R}$ . Estos coeficientes pueden determinarse fácilmente utilizando el producto interno. En efecto, si tomamos el producto punto a ambos lados con un vector fijo  $u_j$  obtenemos:

$$\begin{aligned} w \cdot u_j &= (b_1 u_1 + \dots + b_n u_n) \cdot u_j \\ &= b_1 u_1 \cdot u_j + \dots + b_j u_j \cdot u_j + \dots + b_n u_n \cdot u_j \\ &= b_j u_j \cdot u_j = b_j, \end{aligned}$$

pues  $u_j \cdot u_i = 0$ , si  $i \neq j$  y  $u_i \cdot u_i = 1$ . Vemos pues que el coeficiente  $b_j$  puede calcularse como  $b_j = w \cdot u_j$ .

En analogía con el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , consideremos ahora el conjunto  $V$  de todas las funciones continuas definidas en el intervalo  $[0, L]$ . Este conjunto tiene una estructura de espacio vectorial, donde los "vectores" son ahora funciones con valores reales (dos funciones se suman de manera natural  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , y se multiplican por escalares de manera también natural:  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ). A diferencia de  $\mathbb{R}^n$ , en  $V$  no existen bases finitas, y se dice entonces que  $V$  es un *espacio vectorial infinito-dimensional*. No obstante esta diferencia,  $V$  guarda una similitud más con  $\mathbb{R}^n$ : en el espacio  $V$  también se puede definir un *producto punto* (abstracto), es decir un producto entre vectores (es decir, un producto entre funciones) que igualmente satisface las propiedades básicas (1.9)-(1.12) del producto punto usual en  $\mathbb{R}^n$ . Este producto se define mediante una integral, de la forma siguiente:

$$f \cdot g = \int_0^L f(x)g(x)dx.$$

Utilizando este producto interno, las integrales en (1.3) afirman precisamente que el conjunto  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots\}$  es un *conjunto ortonormal*, es decir,  $\phi_i(x) \cdot \phi_j(x) = 0$ ,  $i \neq j$  y  $\phi_i(x) \cdot \phi_i(x) = 1$ . Este conjunto, sin embargo, no es una base en el sentido convencional, aunque sí resulta ser cierto que todo vector  $f$  en  $V$  es expresable como *suma infinita* de los elementos  $\phi_n(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad c_n \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Como suele ocurrir cuando se trata de sumas infinitas, la convergencia de una serie es asunto delicado. En nuestro caso la convergencia siempre se garantiza, pero al costo de tener que extender el espacio original  $V$  a un espacio vectorial más grande. Este espacio, denotado por  $L^2(I)$ , ( $I = [0, L]$ ), es llamado *el espacio de las funciones Lebesgue medibles, cuadrado integrables en  $I$* . Estos espacios se conocen en matemáticas como *espacios de Hilbert* ([15]), y juegan un papel fundamental en Mecánica Cuántica así como en otras áreas de la física.

Una vez reemplazamos sumas finitas por sumas infinitas (series), el procedimiento para determinar los coeficientes  $c_n$  es exactamente el mismo que usamos en el caso de  $\mathbb{R}^n$ : el coeficiente  $c_m$  se puede obtener tomando el producto interno con  $\phi_m$  a ambos lados de (1.13):

$$f \cdot \phi_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \phi_m(x) = c_m,$$

pues  $\phi_n \cdot \phi_m = 0$ , si  $m \neq n$ , y  $\phi_n \cdot \phi_n = 1$ . Hemos visto entonces que

$$\begin{aligned} c_m &= f \cdot \phi_m = \int_0^L f(x) \phi_m(x) dx \\ &= \int_0^L f(x) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} B_m,$$

Luego  $c_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{2} B_n$ . Reemplazando este valor de  $c_n$  en (1.13) obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{2} B_n \phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{2} B_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

lo cual concuerda con (1.7).

## 1.4. Modo fundamental y armónicos

Notemos que cada término de la solución de la ecuación de onda (1.6),  $u_n(x, t) = B_n \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t)$  es una función periódica de  $t$ , con período  $2\pi/\lambda_n$ , pues

$$\cos(\lambda_n(t + 2\pi/\lambda_n)) = \cos(\lambda_n t + 2\pi) = \cos(\lambda_n t).$$

De aquí se sigue entonces que transcurridos  $p = 2\pi/\lambda_n$  segundos la cuerda retorna a la misma posición. Luego la onda descrita por  $u_n(x, t)$  tiene una frecuencia

$$f_n = 1/p = \lambda_n/2\pi = cn/2L$$

dada en ciclos por segundo, Hz, (Hertz). Dicho de otra forma, en un segundo cada punto de la cuerda completa un total de  $f_n$  ciclos. La suma en (1.6), por ser convergente, obliga a que los coeficientes  $B_n \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . De hecho, el coeficiente  $B_1$  tiende a ser mucho mayor que los siguientes  $B_n$ ,  $n \geq 2$ , y ello hace que la amplitud del primer termino,  $B_1 u_1(x, t)$ , llamado el *modo fundamental*, sea mayor que la amplitud de los *sobretonos o armónicos*,  $B_n u_n(x, t)$ . Es por esta razón que nuestro oído detecta la frecuencia del modo fundamental,  $f_1 = c/(2L)$  como la *frecuencia dominante*, aunque los demás armónicos, cada uno de frecuencia  $cn/2L$ , son percibidos de manera indirecta, haciendo el sonido *más placentero* de lo que sería el sonido de una onda *pura*. Una demostración del llamado canto polifónico, en el que una persona es capaz de cantar una nota y destacar a gusto los distintos modos fundamentales, o *sobretonos*, puede verse en la dirección siguiente: <https://www.youtube.com/watch?v=UHTF1-IhuC0>.

Notemos que si la posición inicial de la cuerda viene dada por  $u_n(x, 0) = B_n \sin(n\pi x/L)$ , entonces los coeficientes restantes de (1.6) son todos cero. En este caso la solución de la ecuación de onda estará dada precisamente por el *modo fundamental*  $u_n(x, t) = B_n \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t)$ . El primer modo,  $u_1(x, 0) = \sin(\pi x/L)$ , tiene la forma que se muestra a continuación

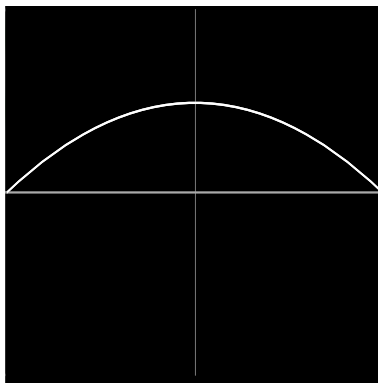


Figura 1.5: Primer modo fundamental

Los modos segundo terecero y cuarto, se muestran a continuación

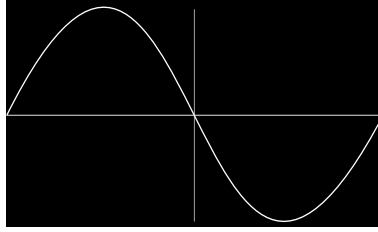


Figura 1.6: Segundo modo fundamental

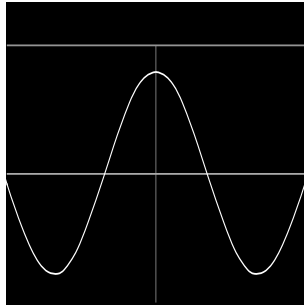


Figura 1.7: Tercer modo fundamental

**Ejemplo 1.4.1.** La tercera cuerda de una guitarra tiene una longitud 1,16 m y pesa 1,0645 gramos. Un tramo de esta cuerda de 43 cm de longitud se pone a vibrar, sujeto a una tensión de 2 kg. Calculemos la frecuencia dominante.

En primer lugar, la densidad de la cuerda es igual a

$$\begin{aligned}\rho &= 1,0645 \times 10^{-3} / 1,16 \\ &= 9,176 \times 10^{-4} \text{ kg/m.}\end{aligned}$$

La tensión, medida en Newtons, viene dada por  $T = 2 \times 9,8 = 19,6$  N. De aquí que

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{T/\rho} = \sqrt{19,6 / 9,176 \times 10^{-4}} \\ &= 146,19 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

Así, la frecuencia fundamental sería  $f = c/2L = 146,15/0,86 \simeq 170$  Hertz (vibraciones por segundo). Al realizar el experimento se obtuvo un valor de 173 Hz, con un error de 3 unidades en 170, es decir, un error del 1,7 %.

**Ejemplo 1.4.2.** Sea  $f(x) = \begin{cases} -\frac{2\varepsilon}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2\varepsilon}{L}(x-L), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$ , la función que

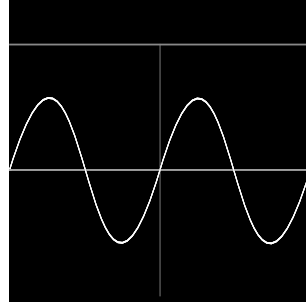
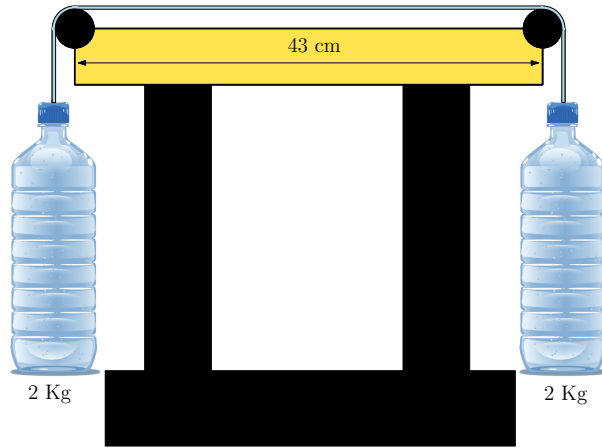


Figura 1.8: Cuarto modo fundamental



describe la forma inicial de una cuerda, la cual, antes de soltarla, se pulsa en su punto medio y hacia abajo una pequeña cantidad  $\varepsilon > 0$ .

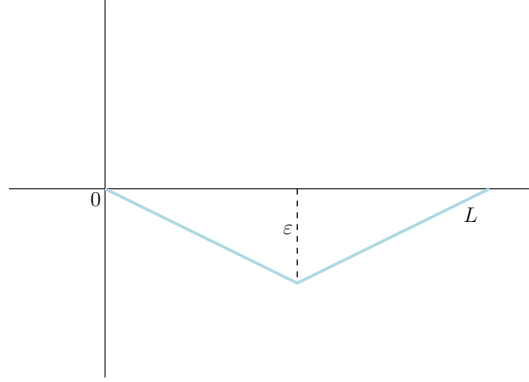
Según vimos, la solución de la ecuación de onda tiene la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right),$$

con  $c = \sqrt{T/\rho}$ , y donde se debe cumplir la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Como se mencionó más arriba, los coeficientes de Fourier  $b_n$  se calculan me-



diante la fórmula:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left( \int_0^{L/2} \left(-\frac{2\varepsilon}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L \frac{2\varepsilon}{L}(x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \end{aligned}$$

Utilizando *Mathematica* (en su defecto la integración se hace fácilmente por partes) vemos que:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{2\varepsilon}{L} \int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{\varepsilon L (n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(\frac{n\pi}{2}))}{n^2 \pi^2} \\ I_2 &= \frac{2\varepsilon}{L} \int_{L/2}^L (x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{-\varepsilon L (2 \sin(\frac{n\pi}{2}) + n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(n\pi))}{n^2 \pi^2} \end{aligned}$$

Sumando ambos integrales, y notando que  $\sin(n\pi) = 0$ , obtenemos:

$$I_1 + I_2 = \frac{-4\varepsilon L}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \frac{4\varepsilon L}{\pi^2 n^2} (-1)^{k+1}, & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

y por consiguiente:

$$b_n = \frac{2}{L} (I_1 + I_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \frac{8\varepsilon}{\pi^2 n^2} (-1)^{k+1}, & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Luego

$$f(x) = \frac{8\varepsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right).$$

De aquí se sigue entonces que

$$u(x, t) = \frac{8\varepsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{c\pi(2k+1)t}{L}\right).$$

En el Ejemplo 1.4.1 se tenía una cuerda de guitarra con  $c = 146,19$  m/s. Si su posición inicial está dada por una deflexión hacia abajo en su punto medio, con  $\varepsilon = 0,005$  m, la vibración de la cuerda puede calcularse utilizando la ecuación anterior.

Los siguientes comandos en Mathematica producen una simulación de esta cuerda:

$$u[x_, t_, \epsilon_, c_, L_] = 8 \frac{\epsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \text{Sin}\left[\frac{(2k+1)\pi}{L} x\right] \text{Sin}\left[\frac{c(2k+1)\pi}{L} t\right];$$

De manera alternativa, esta función puede definirse como :

$$u[x_, t_, \epsilon_, c_, L_] = 8 * \epsilon / \text{Pi}^2 * \text{Sum}[(-1)^(k+1) / (2*k+1)^2 * \text{Sin}[(2*k+1) * \text{Pi} * x / L] * \text{Cos}[c * \text{Pi} * (2*k+1) * t / L], \{k, 0, 5\}];$$

La animación de la función se logra con el siguiente comando

$$\text{Manipulate}[\text{Plot}[u[x, t, 0.005, 146.19, 0.5], \{x, 0, 0.5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-0.008, 0.008\}], \{t, 0, 1\}]$$

Figura 1.9: Experimento con una cuerda



## Ejercicios (Capítulo 1)

1. Suponga que una cuerda homogénea de densidad  $\rho = 10^{-3}$  kg/m y de longitud 1 m se some a una tensión  $T = 49$  Newtons. Suponga que inicialmente toma la forma de la función  $f(x) = x(x-1)^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
  - a Plantee la ecuación de onda junto con las correspondientes condiciones de frontera y condiciones iniciales.
  - b Resuelva de manera explícita la ecuación de onda para esta cuerda.
  - c Utilice *Mathematica* para simular el movimiento de esta cuerda.
  - d Determine los módulos fundamentales de vibración

$$u_n(x, t) = b_n \sin(n\pi x/L) \cos(cn\pi t/L).$$

Calcule sus frecuencias y simule su movimiento en *Mathematica*.

2. Resuelva en cada uno de los siguientes casos el correspondiente problema de frontera, para una cuerda homogénea de densidad  $\rho$ , longitud 1 m, posición inicial dada por  $f(x)$ , y sujeta a una tensión  $T$ , de tal manera que  $c = \sqrt{T/\rho}$  sea el valor especificado en cada caso.
  - a  $f(x) = 0,05 \sin(\pi x)$ ,  $c = 1/\pi$
  - b  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ ,  $c = 4$ .
  - c  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{10}x, & \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{20}(1-x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$ ,  $c = 1/\pi$ .
3. Suponga que sobre una cuerda de longitud  $L$ , densidad  $\rho$ , atada en los extremos, y sometida a una tensión constante  $T$ , actúa en el instante  $t$  una fuerza externa vertical determinada por una *función de densidad de fuerza*  $\kappa(x, t)$ . Esto significa que sobre un tramo cualquiera de cuerda comprendido entre  $x$  y  $x+h$  actúa una fuerza  $F$  en la dirección vertical negativa cuya magnitud está dada por  $F = \int_x^{x+h} \kappa(s, t) ds$ . Siga un procedimiento similar al expuesto más arriba para determinar la

ecuación de movimiento de la cuerda. Muestre que dicha ecuación es precisamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{1}{\rho} \kappa(x, t) \right), \quad c = \sqrt{T/\rho}.$$

En el caso particular en el que la fuerza  $F$  es la fuerza de gravedad, con  $\kappa(x, t) = g\rho$ , donde  $g$  es la constante gravitatoria,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , deduzca que la ecuación de movimiento toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + g \right).$$

Si  $F$  es la fuerza de resistencia del aire, proporcional a la velocidad de la cuerda, se puede tomar  $\kappa(x, t) = \mu \partial u / \partial t(x, t)$ , donde  $\mu > 0$  es una cierta constante de proporcionalidad. Muestre que en este caso la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

4. \*Use el método de separación de variables para resolver la ecuación anterior en el caso particular en que la cuerda tiene longitud  $L = \pi$ ,  $c = 1$ ,  $\mu = \rho$ ,  $u(x, 0) = \sin(x)$ .
5. Siga un procedimiento similar al explicado en las notas para hallar la solución de la ecuación de onda en el caso en el que la velocidad inicial de la cuerda esté dada por una función  $\partial u / \partial t(x, 0) = g(x)$ .

## Soluciones (Capítulo 1)

1) **Condición inicial** 1:  $u(x,0)=g(x)$

```
In[ ]:= g[x_] := x * (x - 1) * (x - 1);
```

Para satisfacer esta condición basta encontrar el desarrollo en serie de Fourier de  $g(x)$ :

```
In[ ]:= 2 * Integrate[g[x] * Sin[Pi * n * x], {x, 0, 1}]
```

Teniendo en cuenta que seno de  $n\pi$  es cero, y después de simplificar, se obtiene:

```
In[ ]:= Simplify[ $\frac{2 (4 n \pi + 2 n \pi \cos[n \pi])}{n^4 \pi^4}$ ]
```

```
Out[ ]:=  $\frac{4 (2 + \cos[n \pi])}{n^3 \pi^3}$ 
```

```
In[ ]:= b[n_] :=  $\frac{4 (2 + \cos[n \pi])}{n^3 \pi^3}$ ;
```

El movimiento de la cuerda puede simularse siguiendo los siguientes comandos:

```
In[ ]:= U[x_, t_] := Sum[ $\frac{4 (2 + \cos[n \pi])}{n^3 \pi^3} * \sin[n * \pi * x] * \cos[\text{Sqrt}[49000] * n * \pi * t]$ , {n, 10}];
```

Manipulate[Plot[U[x, t], {x, 0, 1}, PlotRange -> {-0.15, 0.15}], {t, 0, 10}]

```
In[ ]:= Plot[{x * (x - 1) ^ 2, U[x, 0]}, {x, 0, 1}]
```

La frecuencia del modo fundamental está dada por

```
In[ ]:= frecuencia_fundamental = c/2L
```

```
In[ ]:= F1 = N[Sqrt[49000] / 2]
```

110.68 Hz

Y las demás frecuencias de los otros modos estarán dados por:  $n \times F1 = n \times 110.67$  Hz  
El primer modo (modo fundamental) entonces resulta ser:

```
In[ ]:= u[x_, t_, n_] :=  $\frac{4 (2 + \cos[n \pi])}{n^3 \pi^3} * \sin[n * \pi * x] * \cos[\text{Sqrt}[49000] * n * \pi * t]$ ;
```

Primer modo fundamental;

```
In[ ]:= u[x, t, 1]
```

```
Out[ ]:=  $\frac{4 \cos[70 \sqrt{10} t] \sin[\pi x]}{\pi^3}$ 
```

Segundo Modo fundamental; u[x, t, 2]

```
Out[ ]:=  $\frac{3 \cos[140 \sqrt{10} t] \sin[2 \pi x]}{2 \pi^3}$ 
```

Tercer modo fundamental; u[x, t, 3]

```
Out[ ]:=  $\frac{4 \cos[210 \sqrt{10} t] \sin[3 \pi x]}{27 \pi^3}$ 
```

Figura 1.10: Ejercicio 1

2

**a**  $u(x, t) = 0,05 \sin(\pi x) \cos(t).$

**b**  $u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)\pi x) \cos(4(2k+1)\pi t)$

**c**  $u(x, t) = \frac{9}{10\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n^2} \sin(n\pi x) \cos(nt)$

**3** En la deducción de la ecuación de onda basta considerar las fuerzas verticales sobre el tramo de cuerda comprendido entre  $x$  y  $x+h$ . Como en el texto, a la componente vertical de la tensión debemos añadirle la magnitud de la fuerza exterior que, sobre este tramo de cuerda se puede aproximar como  $h\kappa(x, t)$ . La ley de Newton nos dice entonces que

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(x+h) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x) - h\kappa(x, t) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Esta ecuación puede reescribirse como

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+h) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{h} - \frac{\kappa(x, t)}{T} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\kappa(x, t)}{T} + \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &= \frac{\rho}{T} \left( \frac{\kappa(x, t)}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \left( \frac{\kappa(x, t)}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Si  $\kappa(x, t) = g\rho$ , se obtiene de inmediato:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left( g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right).$$

De otro lado, si  $\kappa(x, t) = \mu \partial u / \partial t(x, t)$  vemos entonces que la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

**4**  $u(x, t) = e^{-t/2} (\cos(\sqrt{3}/2t) + 1/\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}/2t)) \sin(x).$

5 Habíamos concluido más arriba que una solución de la ecuación de onda con condición de frontera  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  estaba dada por

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) G(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)),$$

(ecuación 1.5), para cada entero positivo  $n$ , y donde  $\lambda_n = cn\pi/L$ . Buscamos ahora una solución que, no solo satisfaga  $u(x, 0) = f(x)$ , sino además que satisfaga la condición más general  $\partial u / \partial t|_{t=0} = g(x)$ , con  $g(x)$  no necesariamente cero.

Para ello suponemos, como ya se hizo, que la solución general está dada por una suma infinita de las funciones  $u_n(x, t)$ .

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)).$$

La condición  $u(x, 0) = f(x)$  se cumple si

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (B_n \cos(\lambda_n \times 0) + B_n^* \sin(\lambda_n \times 0)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

lo cual, como ya vimos siempre puede lograrse tomando  $B_n = 2/L \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ .

De otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (-\lambda_n B_n \sin(\lambda_n t) + \lambda_n B_n^* \cos(\lambda_n t)).$$

En  $t = 0$  queremos que se cumpla:

$$g(x) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (\lambda_n B_n^*).$$

En la Sección (1.3) vimos que los coeficientes  $\lambda_n B_n^*$  se pueden calcular como

$$\lambda_n B_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

de donde

$$\begin{aligned} B_n^* &= \frac{2}{L} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

En resumen, el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), \end{aligned}$$

admite como solución la función

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)), \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

# Capítulo 2

## \*Escalas musicales

### 2.1. Escala pitagórica

Recordemos que la frecuencia del tono fundamental (*llamdo frecuencia de la cuerda*) de una cuerda vibrando viene dado por  $f_L = c/(2L)$ , donde  $c = \sqrt{T/\rho}$  es una constante que depende de la tensión y de la densidad de la cuerda. Así, al cambiar la longitud de  $L$  a  $L'$  la frecuencia de la cuerda cambiará en proporción al cociente de las longitudes. Es decir,  $f_{L'} = c/(2L') = (L/L')f_L$ .

Es conocido por todo aficionado a la música que una nota cuya frecuencia sea el doble de otra (una octava más alta, en lenguaje musical) conserva todas sus características esenciales. Lo mismo ocurrirá entre dos notas cuyas frecuencias  $f$  y  $f'$  sean tales que  $f/f'$  es un potencia de dos. En este caso el oído humano las percibirá como si fueran *el mismo* tono, solo que la nota de mayor frecuencia se escuchará más aguda. Por ejemplo, la primera y la sexta cuerda de una guitarra, cuando se tocan al aire, producen una nota *equivalente* (mi), solo que la primera cuerda tendrá una frecuencia igual a cuatro veces la producida por la sexta cuerda, y esta última se oirá entonces como una nota igual a la producida por la primera cuerda, aunque más grave.

Ese hecho experimental fue reconocido por Pitágoras (569 a. C. – 475 a. C), quien al poner a vibrar cuerdas de longitudes  $L$  y  $L'$  se dio cuenta de que cuando el cociente  $L/L'$  era igual a una potencia de dos, las notas musicales producidas por ambas cuerdas al vibrar parecían coincidir, excepto por lo agudo o grave del sonido. Pitágoras también descubrió de manera empírica que cuando hacía sonar simultaneamente dos cuerdas cuyas longi-

tudes estaban en proporción dada por una fracción igual al cociente de dos enteros pequeños, como por ejemplo  $L/L' = 3/2, 4/3, 5/4, 9/8, \dots$  se obtenía un efecto placentero, armónico. Así, por ejemplo, cuando una cuerda de longitud  $L$  se acorta a dos tercios de su longitud su frecuencia al vibrar se multiplica por  $3/2$ ; esto es,  $f_{L'} = (3/2)f_L$ . En esta situación el sonido de ambas cuerdas vibrando de manera simultánea se escucha consonante y muy armónico. Igualmente, la frecuencia de una cuerda de longitud igual a cuatro quintos de la original es igual a  $f_{L'} = (5/4)f_L$ . De nuevo, las dos cuerdas suenan armónicas cuando se escuchan simultáneamente.

Ese efecto de armonía o consonancia aumenta cuando tres cuerdas, de longitudes  $L, (4/5)L$  y  $(2/3)L$ , vibran simultáneamente. Notemos que en este caso sus frecuencias,  $f_L, (5/4)f_L$  y  $(3/2)f_L$  están en proporciones  $5/4$  y  $6/5$ . Un conjunto de tres notas cuyas frecuencias se encuentren en esa proporción se denomina una *triada mayor justa*. De otro lado, cuando la proporción ocurre en el orden contrario,  $6/5$  y  $5/4$ , el sonido de las tres cuerdas al vibrar también resulta muy agradable, aunque carga un inconfundible tinte de nostalgia. Una de estas triadas se denomina *triada menor justa*. Estas dos clases de combinaciones de notas, que en la escala temperada (definida más abajo) reciben el nombre de *acordes mayores* y *acordes menores* son la base de toda la armonía de la música occidental, donde, por supuesto, la armonía aparece enriquecida con muchos otros acordes, como aquel que se obtiene de combinar notas en proporciones  $5/4, 6/5, 7/6$  (una séptima), y otras combinaciones más complejas, como los denominados acordes *disminuidos, aumentados, con segundas, cuartas...*

Volviendo a nuestra discusión sobre la escala pitagórica, la idea de Pitágoras consistió en tomar potencias (positivas y negativas) de la fracción  $3/2$  para construir así una escala musical cuyas frecuencias estuvieran comprendidas entre una cierta frecuencia fundamental  $f_0$  y su octava más próxima  $2f_0$ . Ilustremos la idea de Pitágoras tomando como referencia la frecuencia del do central del piano  $f_0 = 261,626$  Hz. Supongamos que al pulsar una determinada cuerda de longitud  $L$  se obtiene esta frecuencia, llamada en terminología musical, la *tónica*. Entonces, al pulsar esa misma cuerda acortada a  $2/3$  de su longitud se obtendría una nota cuya frecuencia sería  $(3/2)f_0 = 392,439$ , muy cercana, aunque no igual (como explicaré más adelante) al sol central del piano. Si, por otro lado, la cuerda se alargase a una vez y media su longitud,  $(3/2)L$ , su frecuencia entonces disminuirá a  $(3/2)^{-1}f_0 = 2/3f_0 = 174,417$ , nota muy cercana al primer fa a la izquierda del do central. El doble de dicha frecuencia,  $4/3f_0$ , corresponde entonces al primer fa a la derecha del do cen-



tral. De manera similar, una frecuencia de  $(3/2)^2 f_0 = 9/4 f_0$ , al bajarla una octava (dividirla entre 2) nos da una frecuencia de  $9/8 f_0 = 294,329$  Hz, que corresponde aproximadamente al re que sigue inmediatamente a la derecha del do central.

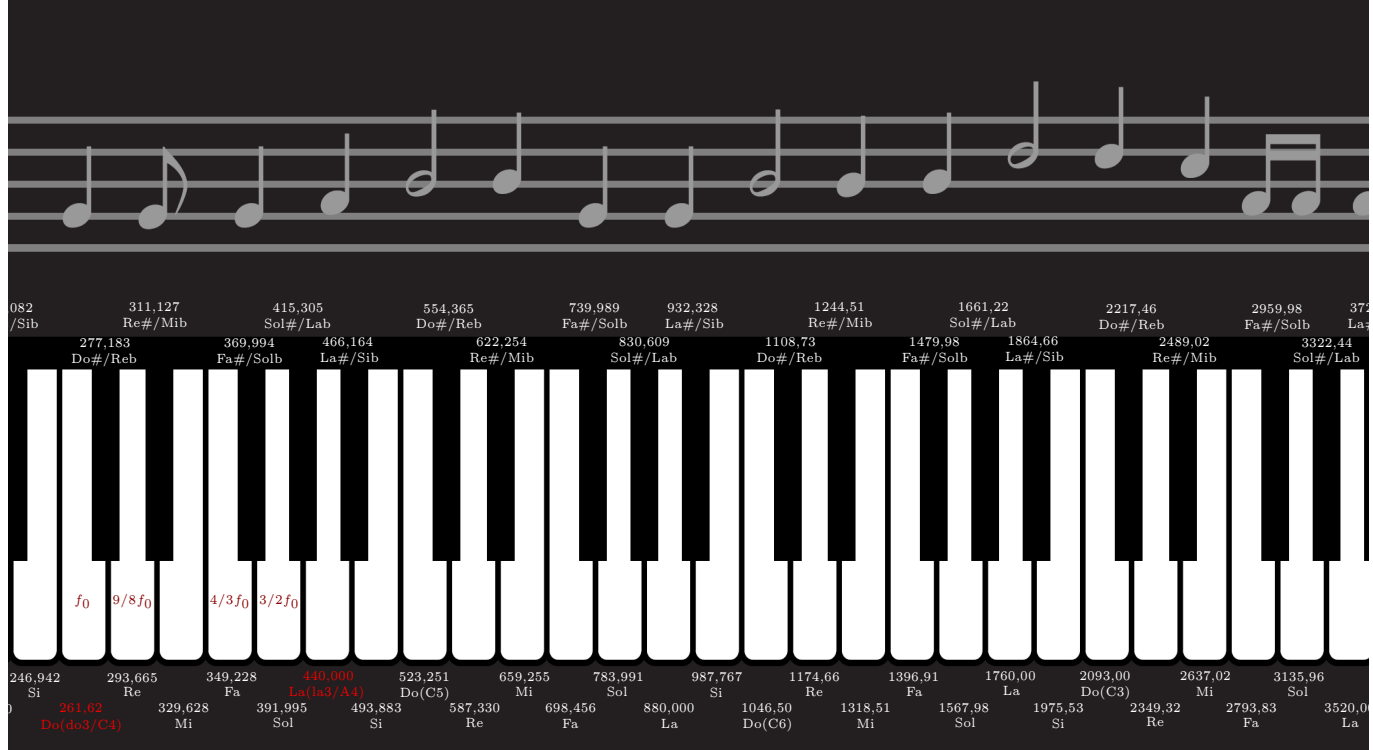


Figura 2.1: Escala Temperada

De manera general, para obtener una nota en la escala pitagórica basta tomar una determinada potencia de  $3/2$  y dividirla (o multiplicarla) por una potencia apropiada de 2 para que la fracción obtenida esté comprendida entre 1 y 2. Esto siempre es posible, pues fijado un entero  $n$  existirá una potencia  $2^k$  para la cual  $2^k < (3/2)^n < 2^{k+1}$ , ya que basta tomar  $k$  de tal manera que  $k < n \log_2(3/2) < k + 1$ . Es decir,  $k$  resulta ser precisamente la parte entera de  $n \log_2(3/2)$ , denotada por  $k = \lfloor n \log_2(3/2) \rfloor$ . Para este valor de  $k$  se obtiene entonces que:  $f_0 < (3^n/2^{n+k})f_0 < 2f_0$ . Es decir, salvo octavas, la nota cuya frecuencia es  $(3/2)^n f_0$  es la misma que aquella cuya frecuencia es  $(3^n/2^{n+k})f_0$ .

Al seguir este procedimiento, y dándole valores a  $n$  iguales a  $1, \dots, 11$  obtenemos la siguiente secuencia de frecuencias:

$$f_0, \frac{3}{2}f_0, \frac{3^2}{2^3}f_0, \frac{3^3}{2^4}f_0, \frac{3^4}{2^6}f_0, \frac{3^5}{2^7}f_0, \frac{3^6}{2^9}f_0, \frac{3^7}{2^{11}}f_0, \frac{3^8}{2^{12}}f_0, \frac{3^9}{2^{14}}f_0, \frac{3^{10}}{2^{15}}f_0, \frac{3^{11}}{2^{16}}f_0, \dots$$

En orden ascendente, estas frecuencias son:

$$f_0, \frac{2187}{2048}f_0, \frac{9}{8}f_0, \frac{19683}{16384}f_0, \frac{81}{64}f_0, \frac{177147}{131072}f_0, \frac{729}{512}f_0, \frac{3}{2}f_0, \frac{6561}{4096}f_0, \frac{27}{16}f_0, \frac{59049}{32768}f_0, \frac{243}{128}f_0$$

Sustituyendo  $f_0 = 261,626$  Hz en la tabla anterior se obtiene:

$$261,626 \text{ Hz}, 279,382 \text{ Hz}, 294,329 \text{ Hz}, 314,305 \text{ Hz}, 331,120 \text{ Hz}, \quad (2.1)$$

$$353,593 \text{ Hz}, 372,510 \text{ Hz}, 392,439 \text{ Hz}, 419,074 \text{ Hz}, 441,4938 \text{ Hz}, \quad (2.2)$$

$$471,4585 \text{ Hz}, 496,6806 \text{ Hz}, \dots$$

frecuencias muy cercanas, pero de ninguna manera idénticas, a las frecuencias correspondientes a la escala del piano moderno, llamada *escala temperada*.

Nota	Frecuencia
DO	261,6256
DO#	279,3824
RE	294,3288
RE#	314,3052
MI	331,1199
FA	353,5934
FA#	372,5099
SOL	392,4384
SOL#	419,0736
LA	441,4932
LA#	471,4578
SI	496,6799

Figura 2.2: Pitagórica

La escala cuyas frecuencia aparece en (2.1) se conoce con el nombre de *escala pitagórica*, durante milenios, referencia obligada en toda la musica europea. Esta escala, sin embargo, comprende muchas más notas que las doce

notas de la escala cromática usual. Tomemos, por ejemplo, la nota que correspondería a la potencia decimosegunda:  $(3/2)^{12}$ . En este caso debemos reducir la fracción, dividiendo  $3^{12}$  entre la potencia  $2^{19}$  para obtener la frecuencia de la correspondiente nota dentro de la tónica y su octava superior. Esta operación nos da:  $(3^{12}/2^{19})f_0 = 1,01364f_0 = 265,19$ . La nota así obtenida tiene una frecuencia muy cercana, pero no igual, a la frecuencia del do central. El cociente entre estas dos frecuencias se denomina *coma pitagórica*. Una coma es entonces igual a 1,01364.

**Observación 2.1.1.** \* *En términos matemáticos, la construcción de la escala pitagórica corresponde a tomar las clases de equivalencia de las fracciones  $(3/2)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  en el grupo  $G = \mathbb{R}^+ / \langle 2^k : k \in \mathbb{Z} \rangle$ , donde  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  denota el grupo multiplicativo de los reales positivos y  $\langle 2^k : k \in \mathbb{Z} \rangle$  el subgrupo cíclico generado por el elemento 2. Esto, ya que las posibles frecuencias así obtenidas, salvo octavas, están en correspondencia con los elementos de  $G$ .*

## 2.2. Escala Temperada

El cociente (intervalo, en lenguaje musical) entre una nota y la siguiente de una escala se llama *semitono*. Observemos que en la escala pitagórica los semitonos no son todos iguales, pues dependen del par de notas consecutivas elegidas, lo cual es indeseable pues cuando se *transporta* una melodía subiendo todas sus notas un semitono (por ejemplo, comenzando en do# o en re, y no en la tónica) ésta dejará de sonar igual, se escuchará extraña y diferente. Este problema motivó la construcción de la escala conocida con la *escala temperada*, la cual fue llevada a su máxima expresión por el genio incomparable de Johann Sebastian Bach (1685-1750). La idea para construir esta escala es sencilla: se siguen utilizando doce notas pero cuyas frecuencias sean escogidas de tal manera que el cociente entre dos notas sucesivas sea constante, lo cual significa que todos los semitonos resultan iguales. Para lograrlo, basta hacer que el cociente entre las frecuencias de dos notas consecutivas sea igual a  $\alpha = 2^{1/12}$ . Así, si partimos del do central del piano,  $f_0 = 261,626$  Hz, las notas de esta nueva escala tendrían frecuencias:  $\alpha f_0, \alpha^2 f_0, \dots, \alpha^{12} f_0 = 2f_0$ :

Se obtiene así la llamada escala musical *temperada*, utilizada en toda la música occidental desde el siglo XVII.

La guitarra, el piano, el oboe, la flauta, y en general todos los instrumentos de la orquesta están contruidos para reproducir las notas de la escala tremperada. En la guitarra, por ejemplo, el diapasón está dividido de tal

Nota	Frecuencia
DO	261,6256
DO#	277,1826
RE	293,6648
RE#	311,127
MI	329,6276
FA	349,2282
FA#	369,9944
SOL	391,9954
SOL#	415,3047
LA	440
LA#	466,1638
SI	493,8833

manera que al pisar una misma cuerda en los distintos trastes su frecuencia aumenta proporcional a  $\alpha$  (un semitono).

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Mi1	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi
Si2	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Sol3	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol
Re4	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re
La5	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La
Mi6	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi

3.62cm

Figura 2.3: Gráfico completo de sostenidos del diapason.

Sabemos que la frecuencia de una determinada cuerda dependerá de  $c = \sqrt{T/\rho}$ , y su frecuencia estará dada por  $f_L = c/(2L)$ , donde  $L = 65$  cm en el caso de la guitarra española. El acto de pulsar la cuerda cuando la mantenemos presionada en el alguno de los traste equivale a acortar la cuerda en cierta magnitud. Denotemos por  $L'$  la longitud de la cuerda acortada, igual en este caso a la distancia entre el traste presionado y el puente. Vimos más arriba que la cuerda vibrará entonces con una frecuencia igual a  $f_{L'} =$

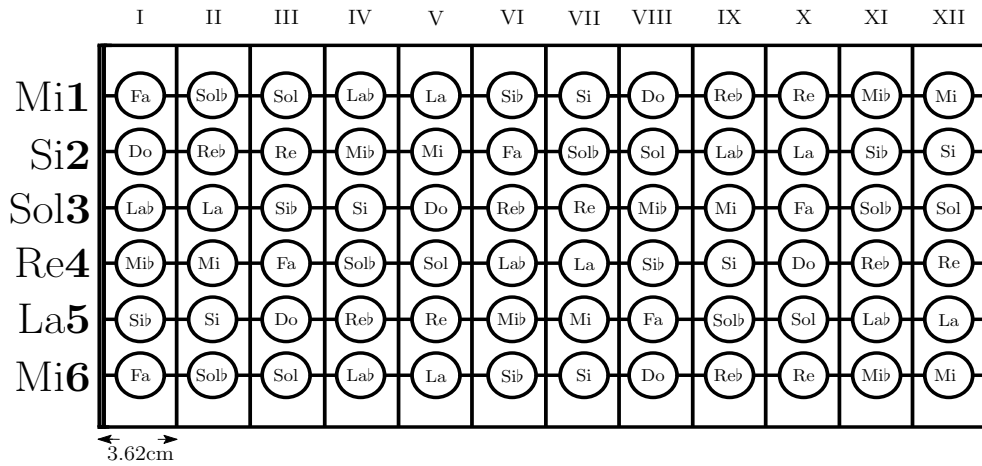


Figura 2.4: Gráfico completo de bemoles del diapasón.

$(L/L')f_L$ . Si queremos, por ejemplo, que  $f_{L'} = \alpha f_L$  debemos hacer que  $L' = L/\alpha = 61,35$  cm. Así, el primer traste deberá estar situado a 61,35 cm del puente. Dividiendo por las potencias sucesivas  $\alpha^2, \alpha^3, \dots$ , etc, se obtienen las posiciones de los siguientes trastes, como se muestra en la tabla siguiente:

No. Traste	Distancia del traste al puente (cm)
Primer traste	61,35
Segundo traste	57,90
Tercero traste	54,66
Cuarto traste	51,59
Quinto traste	48,69
Sexto traste	45,96
Séptimo traste	43,38
Octavo traste	40,94
Noveno traste	38,64
Décimo traste	36,48
Traste once	34,43
Traste doce	32,50

Es un ejercicio elemental determinar cuál deberá ser la tensión de cada cuerda, conocida su densidad, para que al vibrar al aire cada una de las seis cuerdas produzcan las frecuencias que se muestran en la siguiente tabla:

1ra (E):	329,63 Hz
2da (B):	246,94 Hz
3ra (G):	196,00 Hz
4ta (D):	146,83 Hz
5ta (A):	110,00 Hz
6ta (E):	82,41 Hz

### 2.3. Acordes mayores y menores en la escala temperada

Detengámonos a analizar de nuevo las triadas mayores y menores que discutimos más arriba, vistas ahora desde la perspectiva de la escala temperada. Recordemos que una triada mayor consiste de tres notas en proporciones  $4 : 5$  y  $5 : 6$ , lo cual significa que si  $f_1, f_2, f_3$  son las frecuencias de las tres notas correspondientes, entonces  $f_2/f_1 = 5/4$  y  $f_3/f_2 = 6/5$ . Si computamos estos dos cocientes para las notas do, mi, sol del registro central del piano:

Nota	Frecuencia
do	261,6256
mi	329,6276
sol	391,9954

con frecuencias respectivas de  $f_1 = 261,625$ ,  $f_2 = 329,62$  y  $f_3 = 399,99$ , vemos que  $f_2/f_1 = 1,2599$  y  $f_3/f_2 = 1,189$ . Notemos que  $5/4 = 1,25$  y  $6/5 = 1,2$  son valores muy cercanos a estos cocientes. Luego las notas {do, mi, sol} aproximan muy de cerca una triada mayor justa.

De otro lado, las notas do, mib = re#, sol forman aproximadamente una

### 2.3. ACORDES MAYORES Y MENORES EN LA ESCALA TEMPERADA 35

triada menor:

Nota	Frecuencia
do	261,6256
re#	311,127
sol	391,995

pues sus cocientes son  $311,127/261,625 = 1,189 \simeq 6/5$  y  $391,995/311,127 = 1,2599 \simeq 5/4$ .

## Ejercicios (Capítulo 2)

1. La segunda cuerda de la guitarra española está hecha de nilon, de densidad  $\rho = 0,57 \times 10^{-3}$ . La distancia entre la ceja y el puente de la guitarra (igual a la longitud  $L$  de la cuerda) es igual a 65 cm. Calcule la tensión de la cuerda para que al vibrar produzca la nota si que se encuentra inmediatamente a la izquierda del do central del piano (frecuencia = 246,94 Hz).
2. ¿Cómo convertiría su celular en una balanza para pesar objetos?
3. Una cuerda de longitud  $L = 0,5$  m y constante  $c = 440$  m/s vibra de tal suerte que la frecuencia de su modo fundamental es  $f = 440$  Hz. ¿A cuáles notas del piano, aproximadamente, corresponden las frecuencias de su tercero y quinto modo fundamentales?
4. En el problema anterior, ¿cómo se explica que estas dos frecuencias no coincidan con el valor exacto del mi y el do# del piano? ¿Están acaso los pianos desafinados?
5. Calcule las frecuencias  $f_n$  de las notas de la escala pitagórica que corresponden a las potencias  $(3/2)^n$ ,  $n = 0, \dots, 4$ , comenzando en una determinada nota de frecuencia  $f_0$ , y de tal manera que no se extiendan más allá de una octava: es decir, de tal manera que  $f_0 \leq f_n \leq 2f_0$ .
6. Si en el problema anterior  $f_0 = 440$  es la frecuencia que corresponde a la central del piano, ¿cuáles serían, de manera aproximada, las notas del piano que corresponden a  $f_n$ ?

## Soluciones (Capítulo 2)

1. Solución (1): la frecuencia del modo fundamental está dada por  $f = c/2L$ . Luego  $c = 2Lf = \sqrt{T/\rho}$ . Elevando al cuadrado se obtiene  $c^2 = T/\rho = 4L^2 f^2$ , y por tanto

$$T = 4L^2 f^2 \rho = 4 \times (0,65)^2 \times (246,94)^2 \times 0,57 \times 10^{-3} = 58,74 \text{ Newtons.}$$

2. Solución (2): la cuerda del problema anterior se ata de un extremo a un punto fijo, mientras que el otro extremo se amarra al objeto que se desea pesar. Se pulsa la cuerda y se mide con el celular (utilizando, por ejemplo, el programa pitchlab) la frecuencia del sonido. En este caso  $T = 4\rho L^2 f^2$ . La masa en kilogramos del objeto será entonces  $m = T/g$  (donde  $g$  es la aceleración de la gravedad):

$$m = \frac{4\rho L^2}{g} f^2 \simeq 10^{-4} f^2.$$

3. Solución (3): estas frecuencias son  $3c/2L$  y  $5c/2L$ , respectivamente, iguales a  $440 \times 3 = 1320 \text{ Hz}$  y  $440 \times 5 = 2200 \text{ Hz}$ , que corresponden, aproximadamente, a las notas mi (1318.51 Hz ) y do# (do sostenido, 2217,4 Hz).
4. Solución (4): en la escala cromática o temperada la relación entre las frecuencias de una nota y su quinta, en este caso, entre el la y mi que se encuentra en la misma octava, es igual a  $f_{mi} = \alpha^7 f_{la}$ , con  $\alpha = 2^{1/12}$ , que corresponde a  $440 \times 2^{7/12} = 659,255 \text{ Hz}$ . De aquí que el mi que se encuentra una octava más arriba tenga el doble de la frecuencia: 1318,51 Hz. De manera similar, la relación entre una nota y su tercera, en este caso entre la y do# es  $f_{do\#} = \alpha^4 f_{la} = 554,36$ . Así, el do# que se encuentra dos octavas más arriba tendrá una frecuencia igual a  $554,36 \times 4 = 2217,4 \text{ Hz}$ .
5. Solución (5): La nota  $f_n$  tendrá frecuencia igual a  $p(n)f_0$ , donde  $p(n)$  es la fracción que se obtiene a partir de  $(3/2)^n$  dividiendo por una potencia adecuada  $2^k$  de tal manera que  $1/2^k(3/2)^n$  sea un número comprendido entre 1 y 2. Para  $n = 1$ ,  $(3/2)^1$  cumple esta condición, así que  $f_1 = 1,5f_0$ . Para  $n = 2$ ,  $(3/2)^2 f = 9/4$  deberá dividirse por  $2^1$ , de tal manera que  $f_2 = 9/8f_0$ . De manera análoga, para  $n = 3$ ,  $(3/2)^3 = 27/8$  y por tanto  $f_3 = 1/2 \times (3/2)^3 = (27/16)f_0$ ; Para  $n = 4$ ,  $(3/2)^4 = 81/16$  deberá dividirse por  $2^2$ :  $f_4 = 81/64f_0$ .



### 2.3. ACORDES MAYORES Y MENORES EN LA ESCALA TEMPERADA 37

6. Solución (6):  $f_0 = 440 \text{ Hz}$ ;  $f_1 = 660 \text{ Hz}$ ;  $f_2 = 9/8 \times 440 = 495 \text{ Hz}$ ;  
 $f_3 = 27/16 \times 440 = 742,5 \text{ Hz}$ ;  $f_4 = 81/64 \times 440 = 556,87 \text{ Hz}$ .



# Capítulo 3

## Series de Fourier

Este capítulo pretende resumir los teoremas y fórmulas básicas de la teoría de series de Fourier (véase por ejemplo [7]) con el ánimo de que pueda ser utilizadas para solucionar la ecuación de onda desarrollada más arriba, así como otras ecuaciones diferenciales que estudiaremos más adelante. El énfasis se centrará en ejemplos y en los usos de esta herramienta, más que en los desarrollos teóricos. No obstante, daremos referencias apropiadas para el estudiante interesado que desee profundizar en el estudio del análisis armónico, una extensa rama de las matemáticas.

### 3.1. Desarrollo en serie de una función periódica

La teoría de Fourier estudia la manera de aproximar funciones periódicas mediante series infinitas en senos y cosenos. De manera más precisa:

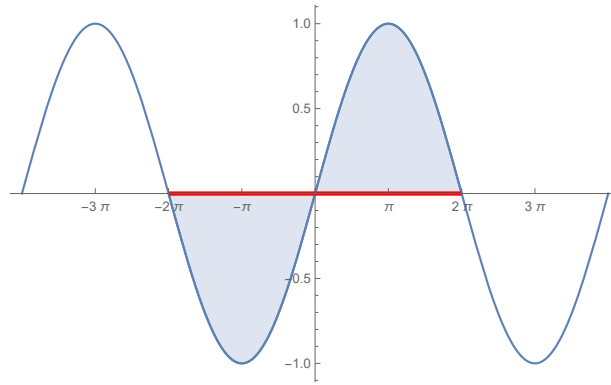
**Definición 3.1.1.** *Una función definida en los reales  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama periódica con período  $p$  si  $f(x + p) = f(x)$ . Al valor positivo más pequeño que satisface esta propiedad se le llama el período fundamental de  $f$ .*

Claramente, si  $f$  tiene período  $p$ , entonces  $f(x + mp) = f(x)$ , para cualquier entero  $m$ . Por ejemplo, las funciones trigonométricas  $\cos(x)$  y  $\sin(x)$  tienen período fundamental  $2\pi$ , pues  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ , y  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ . De otro lado, la función  $f(x) = \sin(2x/3)$  tiene período fundamental

$3\pi$ , pues

$$\begin{aligned} f(x + 3\pi) &= \sin(2/3(x + 3\pi)) = \\ &= \sin(2/3x + 2\pi) = \sin(2/3x) = f(x). \end{aligned}$$

Si el período fundamental de una función es  $p$ , entonces, si hacemos  $L = p/2$ , los valores de la función en el intervalo  $[-L, L]$  determinan los valores de  $f$  en todo el eje real. Por ejemplo,  $f(x) = \sin(x/2)$  tiene período  $P = 4\pi$ . Si conocemos la gráfica de  $f(x)$  entre  $[-2\pi, 2\pi]$ , el resto de la misma puede obtenerse trasladando la gráfica sobre este intervalo a la derecha y a la izquierda un número infinito de veces:



Nos restringiremos a funciones periódicas, de período  $2L$  que sean *suaves a tramos*, una clase suficientemente amplia para casi todos los propósitos de las aplicaciones de las series de Fourier a la ingeniería, y para las cuales son válidos los teoremas fundamentales de la teoría.

Recordemos que si  $f$  es una función definida para todos los puntos de un intervalo  $(a, a + \varepsilon)$ , ( $\varepsilon$  es un número positivo pequeño, y no se exige que  $f$  esté definida en  $a$ ) el **límite por a derecha** de  $f$  en el punto  $a$  se define como  $f(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ , tomando valores  $\varepsilon > h > 0$ . De manera similar, si  $f$  está definida en todos los puntos de un intervalo  $(a - \varepsilon, a)$ , el **límite por la izquierda** de  $f$  en el punto  $a$  está definido como  $f(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a - h)$ .

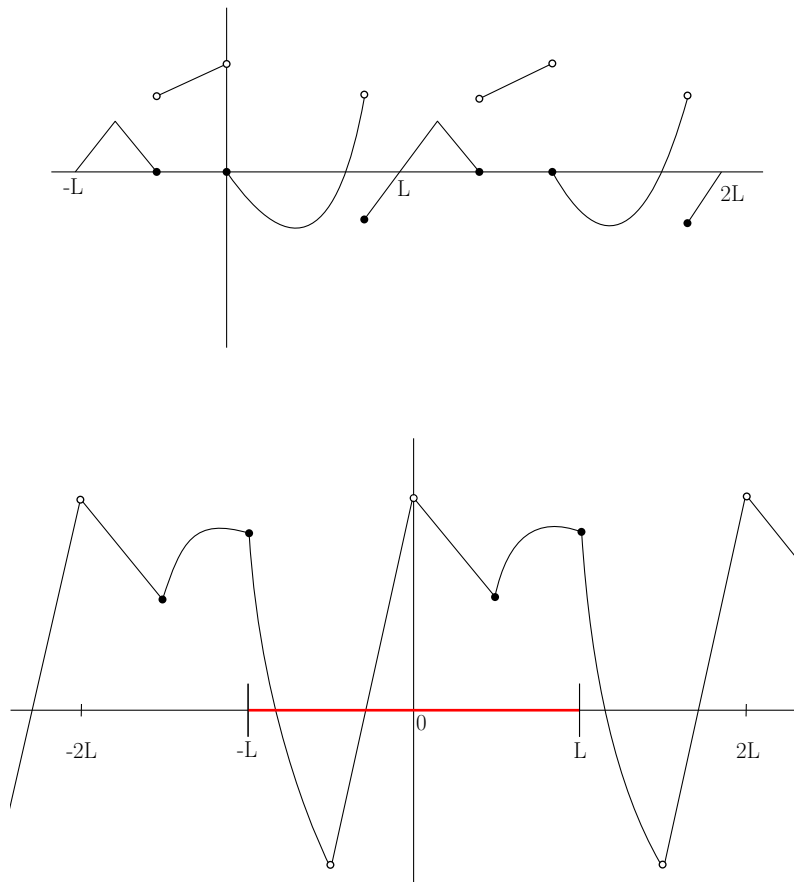
**Definición 3.1.2.** Una función periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con período  $2L$  se llama continua a tramos si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La función es continua en todo punto en el interior del intervalo  $[-L, L]$ , excepto posiblemente en un conjunto finito de puntos  $A$ .

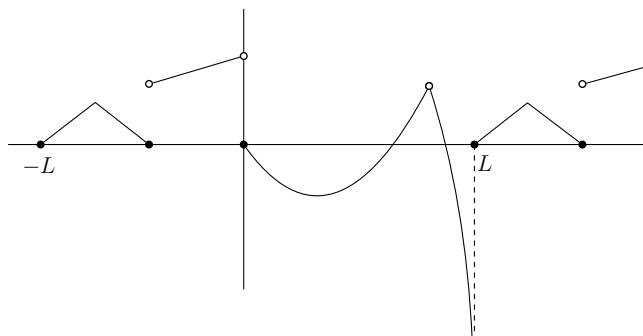
2. En cada punto  $a \in A$  los límites  $f(a^+)$  y  $f(a^-)$  existen.
3. En los extremos del intervalo  $[-L, L]$  los límites  $f((-L)^+)$  y  $f(L^-)$  existen.

La función  $f$  se denomina suave a tramos si  $f$  y su derivada  $f'$  son continuas a tramos.

**Ejemplo 3.1.3.** Las funciones que se muestran en las siguientes gráficas son suaves a tramos.

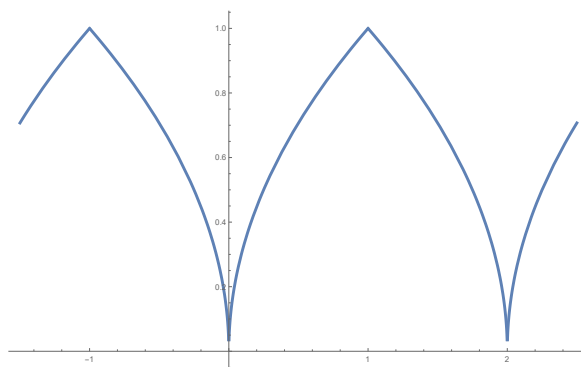


**Ejemplo 3.1.4.** La función mostrada en la gráfica siguiente no es suave a tramos, pues  $f(L^-)$  no existe



**Ejemplo 3.1.5.** La función  $f(x) = \sqrt{x}$ , definida en  $[0, 1]$ , puede extenderse de manera periódica a toda la recta real con período igual a 2 si definimos

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{-x}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



Esta función no es suave a tramos pues ninguno de los dos límites  $f'(0^+)$  y  $f'(0^-)$  existen.

El teorema fundamental para funciones suaves a tramos es el siguiente (ver [9], pag 77).

**Teorema 3.1.6.** Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función periódica con período  $2L$  y suave a tramos. Entonces existe una serie de Fourier

$$s(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

la cual satisface:

1. En cada punto  $x$  se cumple que:

$$(f(x^+) + f(x^-))/2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

2. En aquellos puntos donde  $f$  es continua, el término izquierdo de la igualdad es igual a  $f(x)$  y se tiene en este caso que:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

3. Si además,  $f$  es **continua y  $f'$  es suave a tramos**, entonces en cada punto  $x$  donde  $f'$  sea continua se tiene que

$$f'(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + nb_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Es decir, en estos puntos la serie se puede derivar término a término.

4. Los coeficientes de la serie anterior pueden hallarse mediante las llamadas **fórmulas de Euler**

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (\text{Euler})$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1$$

El cálculo de los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  se hace de manera similar a como procedimos en la sección (1.3), utilizando dos hechos fundamentales:

1. Las funciones

$$B = \{\phi_0(x) = 1, \phi_n(x) = \cos(n\pi x/L), \psi_n(x) = \sin(n\pi x/L), n > 1\}$$



**Leonhard Euler** (15 de abril de 1707 - 18 de septiembre de 1783) fue un matemático, físico, astrónomo, lógico e ingeniero suizo, que hizo importantes e influyentes descubrimientos en muchas ramas de las matemáticas, como el cálculo infinitesimal y la teoría de grafos, a la vez que hizo contribuciones pioneras a varias ramas como la topología y la teoría analítica de números. También introdujo gran parte de la terminología y la notación matemática moderna, en particular para el análisis matemático, como la noción de una función matemática. También es conocido por su trabajo en

forman un sistema ortogonal de vectores en el espacio vectorial de las funciones definidas en  $[-L, L]$ . Es decir, el producto interno de dos funciones *disntintas* de  $B$  es cero, como se puede comprobar por integración directa.

$$\begin{aligned}
 \text{In[34]:= } & \int_{-L}^L \text{Cos}[n * \text{Pi} * x / L] \, dx \\
 & \int_{-L}^L \text{Sin}[n * \text{Pi} * x / L] \, dx \\
 & \int_{-L}^L \text{Cos}[n * \text{Pi} * x / L] * \text{Sin}[n * \text{Pi} * x / L] \, dx \\
 & \int_{-L}^L \text{Cos}[n * \text{Pi} * x / L] * \text{Sin}[m * \text{Pi} * x / L] \, dx \\
 & \int_{-L}^L \text{Cos}[n * \text{Pi} * x / L] * \text{Cos}[m * \text{Pi} * x / L] \, dx \\
 & \int_{-L}^L \text{Sin}[n * \text{Pi} * x / L] * \text{Sin}[m * \text{Pi} * x / L] \, dx
 \end{aligned}$$

$$\text{Out[34]= } \frac{2 L \text{Sin}[n \pi]}{n \pi}$$

$$\text{Out[35]= } 0$$

$$\text{Out[36]= } 0$$

$$\text{Out[37]= } 0$$

$$\text{Out[38]= } \frac{L \left( \frac{\text{Sin}[(m-n) \pi]}{m-n} + \frac{\text{Sin}[(m+n) \pi]}{m+n} \right)}{\pi}$$

$$\text{Out[39]= } \frac{L \left( \frac{\text{Sin}[(m-n) \pi]}{m-n} - \frac{\text{Sin}[(m+n) \pi]}{m+n} \right)}{\pi}$$



2 El producto interno de una función de  $B$  consigo misma se calcula como:

$$\int_{-L}^L \phi_0(x) \phi_0(x) dx = 2L$$

$$\int_{-L}^L \psi_n(x) \psi_n(x) dx = \int_{-L}^L \phi_n(x) \phi_n(x) dx = L$$

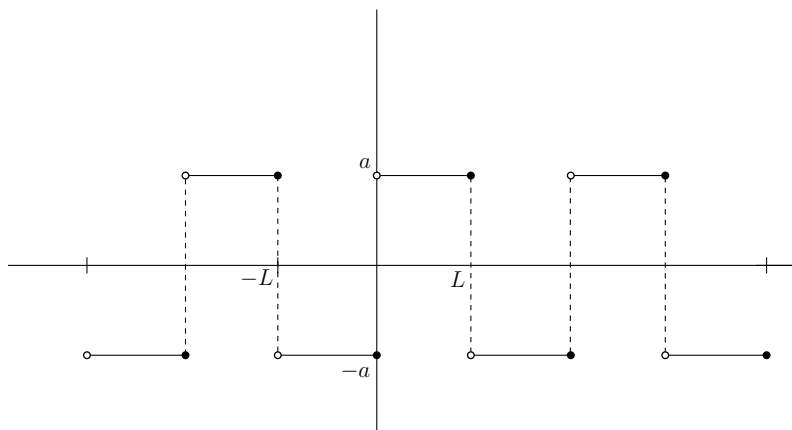
$$\text{In[42]:= } \int_{-L}^L (\text{Sin}[n * \text{Pi} * x / L])^2 dx$$

$$\int_{-L}^L (\text{Cos}[n * \text{Pi} * x / L])^2 dx$$

$$\text{Out[42]= } L - \frac{L \text{Sin}[2 n \pi]}{2 n \pi}$$

$$\text{Out[43]= } L + \frac{L \text{Sin}[2 n \pi]}{2 n \pi}$$

**Ejemplo 3.1.7.** Sea  $f(x)$  la función definida como la extensión periódica, con período  $2L$ , de la función definida como  $f(x) = a$ , si  $0 < x \leq L$ , y  $f(x) = -a$ , si  $-L < x \leq 0$ :



Esta función es claramente suave a tramos. Hallemos su expansión en

serie de Fourier. Las fórmulas de Euler nos dicen que

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2L \int_{-L}^L f(x)dx = 1/2L \left( \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx \right) \\ &= 1/2L(-aL + aL) = 0. \end{aligned}$$

De manera similar, si  $n \geq 1$  sabemos que  $a_n = 1/L \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L)dx$ , y esta integral puede calcularse como suma de integrales

$$\begin{aligned} I_1 &= 1/L \int_{-L}^0 f(x) \cos(n\pi x/L)dx \\ I_2 &= 1/L \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L)dx, \end{aligned}$$

con valores de signo contrario. Luego,  $a_n = 0$ .

Finalmente,  $b_n = 1/L \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x/L)dx$  puede calcularse como la suma de las integrales  $J_1$  y  $J_2$ :

$$\begin{aligned} J_1 &= 1/L \int_{-L}^0 f(x) \sin(n\pi x/L)dx = -a/L \int_{-L}^0 \sin(n\pi x/L)dx \\ &= a/L \int_0^L \sin(n\pi x/L)dx, \end{aligned}$$

y

$$J_2 = 1/L \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L)dx = a/L \int_0^L \sin(n\pi x/L)dx.$$

Por tanto  $J_1 = J_2$  de donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2a}{L} \left( -\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi x/L) \Big|_0^L \right) = -\frac{2a}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \\ &= \frac{2a}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4a}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

De aquí que la serie para  $f(x)$  sea

$$s(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.1)$$

En  $x = 0$  vemos que  $f(0^+) = a$  y  $f(0^-) = -a$ . Luego  $(f(0^+)a + f(0^-))/2 = s(0) = 0$ , como afirma el Teorema 3.1.6.

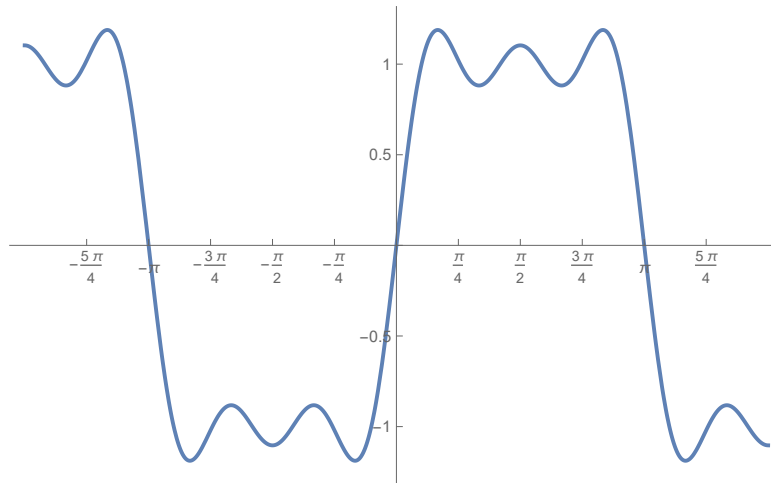
En  $x = L/2$ ,  $f$  es continua y  $f(L/2) = s(L/2) = a$

$$a = s(L/2) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right). \quad (3.2)$$

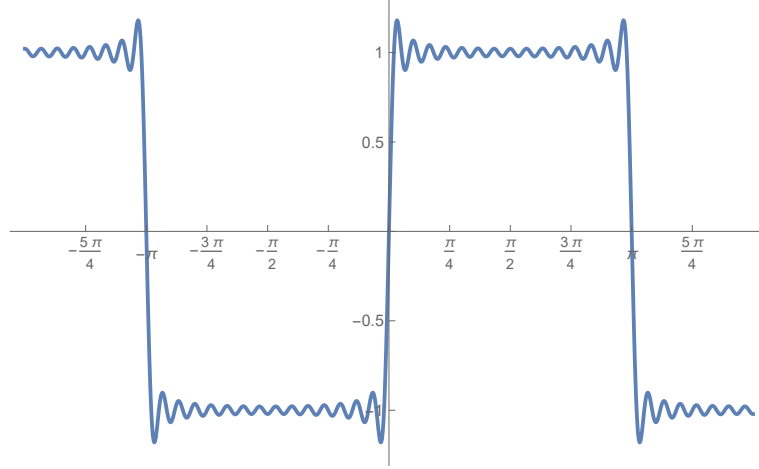
De aquí obtenemos la maravillosa fórmula (debida a Leibniz)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Si hacemos  $a = 1$ ,  $L = \pi$ , la suma de los primeros cinco términos de la series 3.1 nos dan el siguiente gráfico:



y los primeros treinta, el gráfico siguiente:



### 3.1.1. Funciones pares e impares

Como en el ejemplo anterior, en muchas situaciones el computo de los coeficientes de la serie de Fourier puede simplificarse si sabemos que  $f$  es una función *par* o una función *impar*. Recordemos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *par* si  $f(-x) = f(x)$ , e *impar*, si  $f(-x) = -f(x)$ . Ejemplos fundamentales son las funciones  $\cos(n\pi x/L)$ , la cual es par, y  $\sin(n\pi x/L)$ , la cual es impar. Es claro que la paridad de una función sigue las siguientes reglas: *par*  $\times$  *par* = *par*, *impar*  $\times$  *par* = *impar* e *impar*  $\times$  *impar* = *par*.

Supongamos que  $f$  es una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos, y *par*. Entonces,  $f(x) \sin(n\pi x/L)$  será una función *impar* y por consiguiente cada  $b_n = \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx$  es igual a 0, pues el área comprendida entre  $-L$  y 0 es igual al área comprendida entre 0 y  $L$  pero con signo opuesto.

De otro lado, como  $f(x) \cos(n\pi x/L)$  es en este caso *par*, vemos que:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx = 2 \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx,$$

**Observación 3.1.8.** Si  $f$  una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos y par, los coeficientes de su serie de Fourier están dados por:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
b_n &= 0
\end{aligned}$$

De otro lado, si  $f$  es una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos, e *impar*, entonces  $f(x) \cos(n\pi x/L)$  será una función impar y por consiguiente cada  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx$  es igual a 0. En este caso, como  $f(x) \sin(n\pi x/L)$  es par, vemos que:

**Observación 3.1.9.** Si  $f$  una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos e impar, entonces los coeficientes de su serie de Fourier están dados por:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_n &= 0 \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx
\end{aligned}$$

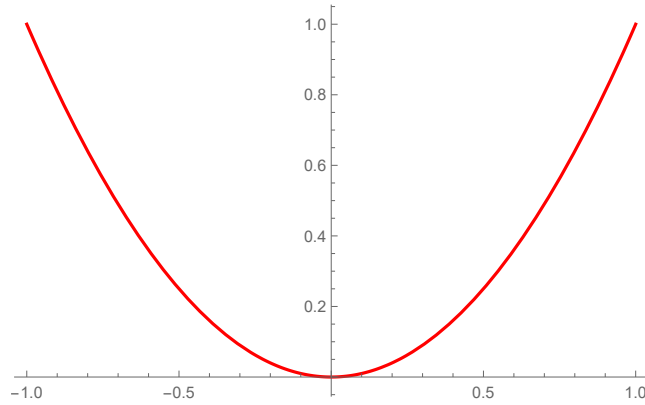
Los siguientes ejemplos nos servirán para ilustrar las fórmulas anteriores.

**Ejemplo 3.1.10.** Sea  $f(x) = x^2$ , definida entre  $[-1, 1]$  y donde esta función se extiende periódicamente (con período igual a 2) a toda la recta real (figura 3.1). Calculemos su serie de Fourier, utilizando para ello las capacidad de integración simbólica de Mathematica.

Como la función es par vemos que  $b_n = 0$ . De otro lado,  $a_0 = 1/2 \int_{-1}^1 x^2 dx = x^3/6|_{-1}^1 = 1/6 + 1/6 = 1/3$ . Además,  $a_n = 2/1 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx$ . La integral puede computarse como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\text{In}[153]:= & \text{Integrate}[x^2 * \text{Cos}[n * \text{Pi} * x], \{x, 0, 1\}] \\
\text{Out}[153]= & \frac{2 n \pi \text{Cos}[n \pi] + (-2 + n^2 \pi^2) \text{Sin}[n \pi]}{n^3 \pi^3}
\end{aligned}$$

Ahora,  $\sin(n\pi) = 0$ , para todo  $n$  mientras que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ . Luego la integral anterior es igual a  $a_n = (-1)^n 4/\pi^2 n^2$ . De aquí que la serie de

Figura 3.1:  $f(x) = x^2$ 

*Fourier sea:*

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

Como  $f(x)$  satisface las condiciones del Teorema 3.1.6, y es continua, vemos que

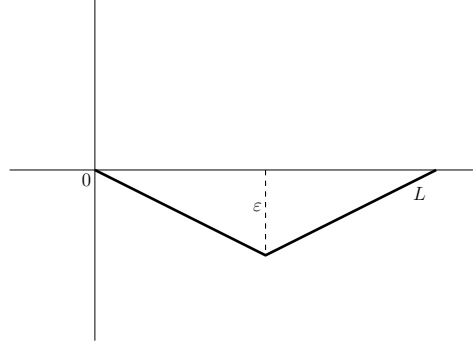
$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

Si evaluamos ambos lados en  $x = 0$ , respectivamente en  $x = 1$ , obtenemos tres extraordinarias fórmulas debidas a Euler:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{12} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \end{aligned}$$

La última fórmula se obtiene sumando las anteriores.

**Ejemplo 3.1.11.** Sea  $f(x) = \begin{cases} -\frac{2\varepsilon}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2\varepsilon}{L}(x-L), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$ , la función que describe las condiciones iniciales de una cuerda que se desplaza hacia abajo una pequeña cantidad  $\varepsilon > 0$  antes de soltarla y ponerla a vibrar.



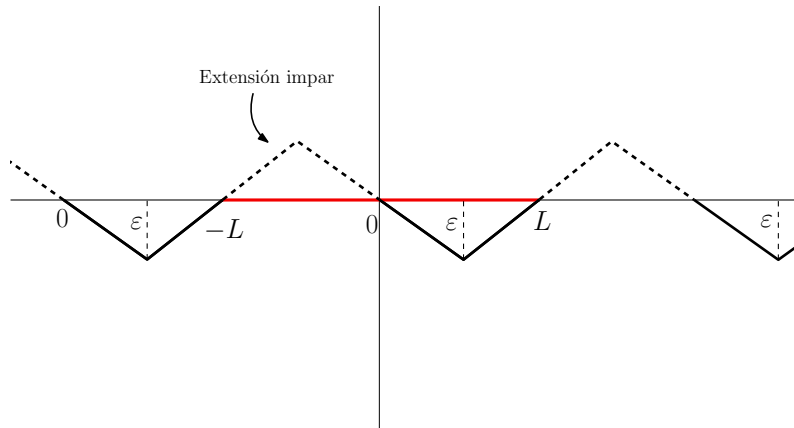
Según lo visto en la Sección 1.2, la solución de la ecuación de onda tiene la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right),$$

donde  $c = \sqrt{T/\rho}$ , y donde se debe cumplir la condición inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Resolvamos entonces el problema de encontrar un desarrollo en serie de Fourier para  $f(x)$  para el cual se cumpla  $a_0 = a_n = 0$ , para todo  $n \geq 1$ . Para ello basta extender la función  $f(x)$  a una función impar, definida en  $[-L, L]$ , y luego extenderla a toda la recta real de manera periódica, como se muestra a continuación:



Los coeficientes de Fourier  $b_n$  se pueden calcular como

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left( \int_0^{L/2} \left(-\frac{2\varepsilon}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L \frac{2\varepsilon}{L}(x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

Utilizando de Nuevo GeoGebra (en su defecto la integración se hace fácilmente por partes) vemos que:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2\varepsilon}{L}\right) \int_0^{L/2} (x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{\varepsilon L(n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(\frac{n\pi}{2}))}{n^2 \pi^2} \\ \frac{2\varepsilon}{L} \int_{L/2}^L (x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{-\varepsilon L(2 \sin(\frac{n\pi}{2}) + n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(n\pi))}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Sumando ambos lados, y notando que  $\sin(n\pi) = 0$ , se obtiene:

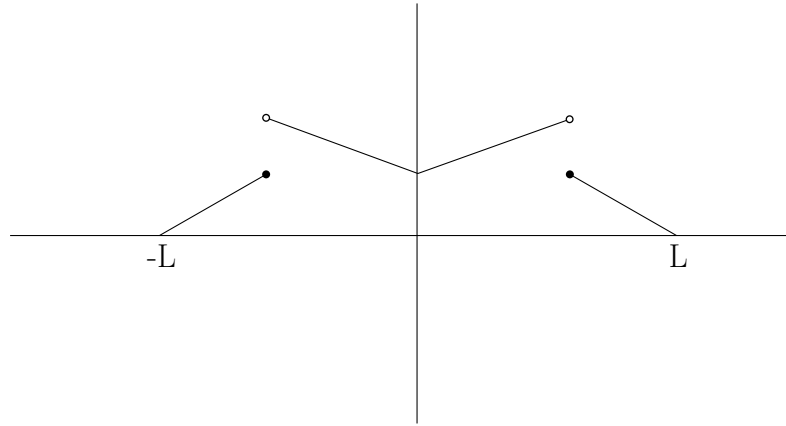
$$b_n = \frac{-8\varepsilon}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \frac{-8\varepsilon}{\pi^2 n^2} (-1)^k \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

Luego

$$f(x) = \frac{8\varepsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right).$$

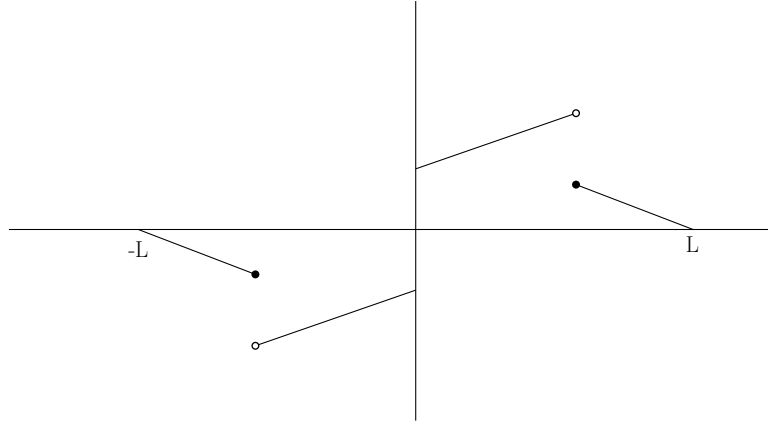
**Observación 3.1.12.** El método del ejemplo anterior puede seguirse para aproximar cualquier función  $f$  definida en un intervalo  $[0, L]$ , bien sea con una serie de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  o de la forma  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

1. Para el primer caso extendemos  $f$  haciéndola par en el intervalo  $[-L, L]$ : para ello, solo basta definir  $f(-x) = f(x)$ , si  $-L \leq x \leq 0$ . Después se extiende de manera periódica a toda la recta real.



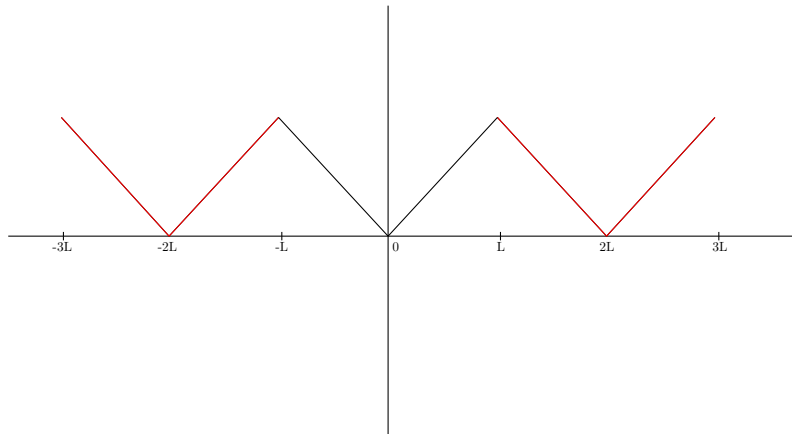


2. En el segundo caso extendemos  $f$  de manera impar a  $[-L, L]$  si definimos  $f(-L) = f(L)$  y  $f(-x) = -f(x)$ , para  $-L < x \leq 0$ , y a continuación extendemos esta función a una función periódica en toda la recta real.



En cada caso los respectivos coeficientes se computan mediante las fórmulas 3.1.8 o 3.1.9.

**Ejemplo 3.1.13.** Hallemos la serie de Fourier de la función  $f(x) = x$ , definida en  $[0, L]$ . Esta función puede extenderse a  $[-L, L]$  de manera par o impar. Por ejemplo, su extensión par, con período  $2L$ , corresponde a la función  $f(x) = |x|$ ,  $-L \leq x \leq L$ , la cual se extiende luego de manera periódica a toda la recta real



Las fórmulas de Euler nos dicen que

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |x| dx = \frac{1}{2L} (2 \int_0^L x dx) = \frac{L}{2}.$$

Para computar  $a_n$  podemos usar el hecho de que la función  $|x| \cos(n\pi x/L)$  es el producto de dos funciones pares y por consiguiente es par. Luego

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x| \cos(n\pi x/L) dx = \frac{2}{L} \int_0^L |x| \cos(n\pi x/L) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L x \cos(n\pi x/L) dx = \frac{-2L}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{-2L}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ es par} \\ \frac{-4L}{n^2 \pi^2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ . Haciendo  $n = 2k$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , vemos que

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-4L}{(2k+1)^2 \pi^2}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

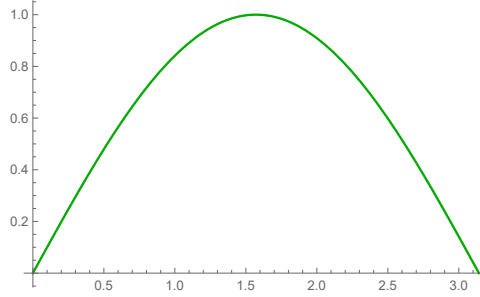
De otro lado,  $|x| \sin(n\pi x/L)$  es una función impar y por consiguiente

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x| \sin(n\pi x/L) dx = 0.$$

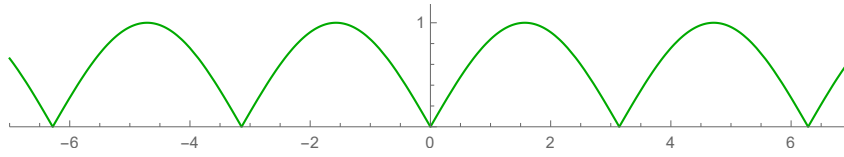
De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{2} + \frac{(-4L)}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) = \\ &= \frac{L}{2} + \frac{(-4L)}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots \right) \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.14.** Consideremos la función  $f(x) = \sin(x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ :



Extendamos de manera par esta función al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , lo cual corresponde a la función  $g(x) = |\sin(x)|$ .



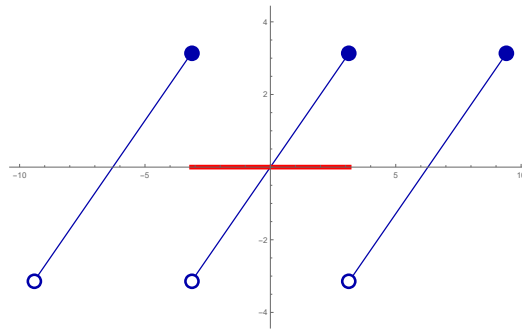
Notemos que esta última función es periódica con período  $2\pi$ . Hallemos su serie de Fourier, usando las fórmulas de Euler y el hecho de que  $\int_0^\pi \cos(\frac{n\pi x}{\pi}) \sin(x) dx = (1 + \cos(n\pi))/(1 - n^2)$  y que  $\int_{-\pi}^\pi \sin(\frac{n\pi x}{\pi}) |\sin(x)| dx = 0$ :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{1}{2\pi} (2 \int_0^{\pi} \sin(x) dx) = \frac{2}{\pi}. \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(\frac{n\pi x}{\pi}) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) \sin(x) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos(n\pi)}{(1 - n^2)} = \frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{(1 - n^2)} \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \sin(nx) dx = 0.
 \end{aligned}$$

De aquí que

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k)^2 - 1} \cos(2kx).$$

**Ejemplo 3.1.15.** Hallemos la serie de Fourier de la extensión impar periódica, con período  $2\pi$ , de la función  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . Esta función es la extensión periódica de  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -\pi < x \leq \pi \\ \pi, & \text{si } x = -\pi \end{cases}$



En este caso la función es impar, y por consiguiente  $a_n = 0$ , para todo  $n \geq 0$  y

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} (2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx) \\ &= \frac{-2}{n} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

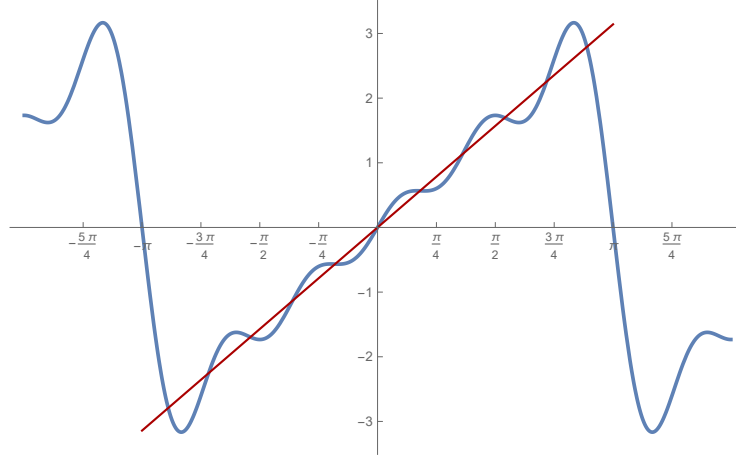
In[153]:= `Integrate[x^2 * Cos[n * Pi * x], {x, 0, 1}]`

Out[153]= 
$$\frac{2 n \pi \cos[n \pi] + (-2 + n^2 \pi^2) \sin[n \pi]}{n^3 \pi^3}$$

De aquí que

$$s(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

La gráfica correspondiente a la suma de los primeros cinco términos de  $s(x)$  se muestra a continuación:



**Ejemplo 3.1.16.** La derivada de la función anterior es suave a tramos, pues es la función constante  $f'(x) = 1$ , excepto cuando  $x = (2k + 1)\pi$ , donde no está definida. No obstante, la serie no puede derivarse término a término, pues  $f$  no es continua. En efecto, al sumar los términos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right) = (-1)^{n+1} \cos(nx)$$

se obtiene la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nx)$  la cual no es convergente, pues el límite del término  $n$ -ésimo no tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Ejemplo 3.1.17.** En el Ejemplo 3.1.13,  $f$  es continua y tanto  $f$  como  $f'$  son suaves a tramos. En este caso  $f'(x)$  es continua, excepto cuando  $x$  es un múltiplo entero de  $L$  ( $x = kL$ ). Al derivar cada término  $\frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right)$  se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) \right) = \frac{\pi}{(2k+1)L} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right).$$

De aquí que

$$f'(x) = \frac{(-4)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right),$$

que coincide con el valor de la serie 3.2 para valores  $x \neq kL$ .

**Observación 3.1.18.** Una función definida en  $[0, L]$  puede extenderse de manera periódica de diferentes maneras, y estas distintas extensiones darán lugar a distintas series de Fourier que, no obstante, deberán coincidir para los valores en  $[0, L]$ .

A manera de ejemplo, la función  $f(x) = x$ , definida inicialmente en el intervalo  $[0, \pi]$  puede extenderse de manera par a todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , como en el Ejemplo 3.1.13; o de manera impar, como en el Ejemplo 3.1.15. En cada caso aparecerán dos aproximaciones diferentes:

$$s_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{(-4)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x), \text{ Ejemplo 3.1.13.}$$

$$s_2(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \text{ Ejemplo 3.1.15.}$$

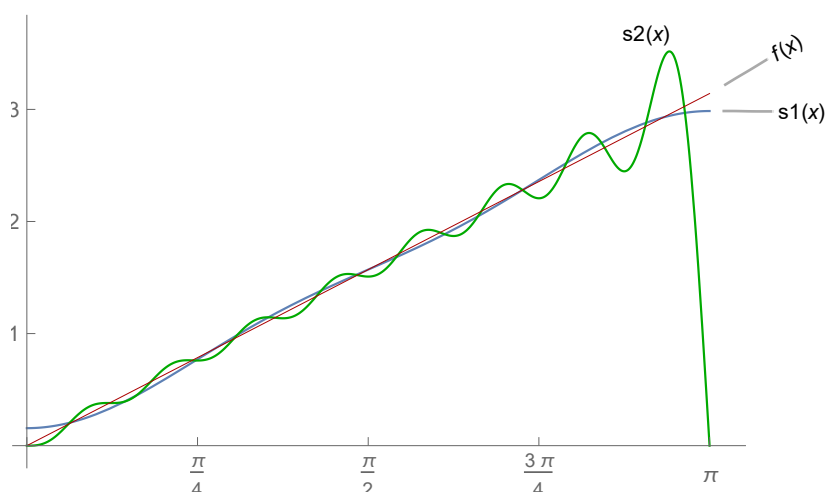


Figura 3.2: Dos aproximaciones de  $f(x) = x$  en  $[0, \pi]$

El siguiente es un programa en Mathematica que permite simular la serie de Fourier que aproxima una  $f(x)$ .

```

In[ ]:= L = Pi; f[x_] := Piecewise[{{x, -L < x < 0}, {x^2, 0 < x < L}}]; ;
a0 =  $\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f[x] \, dx$ ;
a[n_] :=  $\frac{1}{L} \int_{-L}^L f[x] \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] \, dx$ ;
b[n_] :=  $\frac{1}{L} \int_{-L}^L f[x] \sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right] \, dx$ ;
t[x_, k_] = a[k] Cos[ $\frac{k\pi x}{L}$ ] + b[k] Sin[ $\frac{k\pi x}{L}$ ];
g[x_, q_] := a0 +  $\sum_{k=1}^q t[x, k]$ ;
Print["a0=", a0]
Print["an=", a[n]]
Print["bn=", b[n]]
Manipulate[Plot[{f[x], g[x, p]}, {x, -L, L}, Background -> Black, AxesStyle -> Red], {p, 1, 80}]

```





# Bibliografía

- [1] Aspect, A., Dalibard, J., & Roger, G. (1982). *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers*. Physical review letters, 49(25), 1804.
- [2] *BELL'S THEOREM : THE NAIVE VIEW OF AN EXPERIMENTALIST*, <http://arxiv.org/ftp/quant-ph/papers/0402/0402001.pdf>
- [3] Griffiths, D. J. (2005). Introduction to quantum mechanics. Pearson Education India.
- [4] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag 1996.
- [5] Lang, S. *Complex Analysis*, Springer Verlag, (2013).
- [6] Adams, W. W., & Loustaunau, P., *An Introduction to Gröbner bases*, Providence: American Mathematical Society, AMS, (Vol. 3), 1994.
- [7] Erwin Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, 8va edición, capítulos 10, 11, 12.
- [8] David Powers, *Boundary Value Problems, and Partial Differential Equations*, 5th Edition, Chapters 1-5.
- [9] Nakhlé Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier series and Boundary Value Problems*.
- [10] Dave Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Department of Mathematics, Meston Building, University of Aberdeen, Aberdeen AB24 3UE, Scotland, UK, Home page: <http://www.maths.abdn.ac.uk/bensondj/>.

- [11] P., Richard, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control: the Computer Control of Robot Manipulators*, MIT (1981).
- [12] Eisenbud, D, *Commutative Algebra: with a view toward algebraic geometry* (Vol. 150). Springer Science & Business Media (1995).
- [13] M. Gardner, *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*, Alianza Editorial.
- [14] Rayleigh, J. W. S. B. (1896). *The Theory of Sound*. Macmillan.
- [15] Royden, H. L., Fitzpatrick, P. (1988). *Real analysis* (Vol. 32). New York: Macmillan.