Taller 4 Matemáticas Especiales

1 Problemas

1) Los siguientes problemas se refieren a una barra cilíndrica con coeficiente de difusión térmica $\delta = 1$, longitud L y temperatura inicial dada por $f(x)$. En cada caso resuelva de manera explícita la ecuación del calor para cada condición inicial dada.

i $u(0,t) = 100,\ u(1,t) = 0,\ \ f(x) = 30\sin(\pi x),\ \ L = 1$ m.

ii $u(0,t) = 100,\ u(\pi,t) = 50,\ f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 33x,\ 0 < x \leq \pi/2 \\ 33(\pi - x),\ \pi/2 < x \leq \pi \end{array} \right.$, $L = \pi$ m.

iii $L = \pi,\ f(x) = 100,\ \ \partial u/\partial x(0,t) = \partial u/\partial x(\pi,t) = 0$

iv $L = \pi,\ f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 100x, \text{ si } 0 < x \leq \pi/2 \\ 100(\pi - x), \text{ si } \pi/2 < x < \pi \end{array} \right.$, $\partial u/\partial x(0,t) = \partial u/\partial x(\pi,t) = 0$

Soluciones

i

$$u(x,t) = 100(1-x) + 30e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) - \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)}{n}$$

ii

$$u(x,t) = 100 - \frac{50x}{\pi} + \sum_{n \text{ par}} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx) + \sum_{n \text{ impar}} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx), \text{ donde } b_n \text{ está dado por:}$$

$$b_{(2k+1)} = \frac{-12(25 - 11(-1)^k + 50k)}{(1+2k)^2\pi},\ k = 0, 1, 2, 3...$$

$$b_{2k} = \frac{50}{\pi k},\ k = 0, 1, 2, 3...$$

Luego

$$u(x,t) = 100 - \frac{50x}{\pi} - \frac{50}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-(2k)^2 t}\sin(2kx)$$
$$- \frac{12}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{25 - 11(-1)^k + 50k}{(1+2k)^2}e^{-(2k+1)^2 t}\sin((2k+1)x)$$

iii

$$u(x,t) = 100$$

iv

$$u(x,t) = 25\pi - \frac{200}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-4(2k+1)^2 t}\cos(2(2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

2) Grafique en *Mathematica* cada una de las soluciones anteriores, y muestre su evolución en forma animada.

3) Suponga que en una barra ciclíndrica tiene longitud $L = 1$ m y coeficiente de difusión térmica $\delta = 1$. Suponga además que a través de cada extremo está fluyendo calor al medio circundante en una medida proporcional a la temperatura de dicho extremo, con constante de proporcionalidad $\kappa = 1$, y que su distribución de tempertaura inicial está dada por $f(x)$.

i Muestre que este problema puede modelarse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= -u(0,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = -u(1,t) \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

ii Use separación de variables para hallar una primera solución en la forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ donde

$$\begin{aligned} G'(t) - kG(t) &= 0 \\ F''(x) - kF(x) &= 0, F'(0) = -F(0), F'(1) = -F(1). \end{aligned}$$

ii Muestre que $k = \mu^2$, con $\mu = 1$ o $k = -\mu^2$, con $\mu = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.

iii Muestre que cada caso anterior produce una solución $G_0(t) = e^t, F_0(x) = e^{-x}$, $G_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}, F_n(x) = n\pi\cos(n\pi x) - (n\pi x)$

iv Muestre que lsd funciones $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ son ortogonales bajo el producto $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$

v Muestre finalmente que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0 e^t e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi)^2 t}\left(n\pi\cos(n\pi x) - (n\pi x)\right), \\ c_0 &= \frac{2e^2}{e^2-1}\int\limits_0^1 f(x)e^{-x}dx \\ c_n &= \frac{2}{1+n^2\pi^2}\int\limits_0^1 f(x)\left(n\pi\cos(n\pi x) - (n\pi x)\right)dx \end{aligned}$$