

FLIPPING BOOK

---

## NOTAS DEL CURSO DE MATEMATICAS ESPECIALES

---

28 de julio de 2018

Juan D. Vélez  
Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín  
Escuela de Matemáticas  
[jdvelez@unal.edu.co](mailto:jdvelez@unal.edu.co)

Jeferson L. Zapata  
Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín  
Escuela de Matemáticas  
[jlzapatan@unal.edu.co](mailto:jlzapatan@unal.edu.co)





---

## Índice general

---

<b>1. Bases de Gröbner</b>	<b>1</b>
1.1. Anillos de polinomios . . . . .	1
1.2. Ideales y Variedades Algebraicas . . . . .	2
1.3. Ordenes monomiales . . . . .	6
1.4. Algoritmo de la división en $k[x_1, \dots, x_n]$ . . . . .	7
1.5. Bases de Gröbner . . . . .	12
1.6. S-polinomios y algoritmo de Buchberger . . . . .	13
1.7. Sistemas de ecuaciones polinómicas . . . . .	16
1.7.1. Soluciones explícitas . . . . .	18
<b>2. Control cinemático de brazos mecánicos</b>	<b>25</b>
2.1. Análisis del caso $l_2 = l_3$ . . . . .	31
2.2. Análisis de un robot con $l_2 \neq l_3$ . . . . .	36
2.3. Brazos en tres dimensiones . . . . .	38
2.4. Simulación en Mathematica . . . . .	39
<b>3. *Demostración mecánica de teoremas en geometría</b>	<b>43</b>
<b>4. Ecuación de una cuerda vibrando</b>	<b>49</b>
4.1. Introducción . . . . .	49
4.2. Solución de la ecuación de onda de una cuerda . . . . .	53
4.3. Modo fundamental y armónicos . . . . .	54
4.4. Escalas musicales . . . . .	57
4.4.1. Escala pitagórica . . . . .	57
4.5. Escala Temperada . . . . .	61
4.5.1. Interludio: lectura de un artículo de Klaus Ziegler . . . . .	67
<b>5. Series de Fourier</b>	<b>71</b>
5.1. Desarrollo en serie de una función periódica . . . . .	71
5.1.1. Funciones pares e impares . . . . .	77
<b>6. Ecuación del calor</b>	<b>89</b>
6.1. Calor y temperatura . . . . .	89
6.2. Ley de Fourier . . . . .	91
6.3. Ecuación del calor en un cilindro de densidad uniforme . . . . .	93

6.4. (Opcional) Ecuación del calor en un cuerpo $P$ . . . . .	94
6.5. Ecuación del calor en un cilindro. . . . .	97
6.5.1. Extremos a temperatura cero . . . . .	97
6.5.2. Solución con temperatura constante arbitraria en los extremos	99
6.5.3. Otras condiciones de frontera . . . . .	102
<b>7. La membrana vibrante</b>	<b>105</b>
7.1. Ecuación de una membrana vibrante rectangular . . . . .	105
7.2. Solución de la ecuación de la membrana rectangular . . . . .	109
7.2.1. Frecuencias de los modos fundamentales y líneas nodales . . . . .	115
7.2.2. Curvas nodales . . . . .	116
7.3. *Curvas nodales en la vibración de una placa rectangular: figuras de Chladni . . . . .	119
7.4. Membranas circulares . . . . .	121
7.5. Apéndice: cómputo del laplaciano en coordenadas polares . . . . .	127
<b>8. Números complejos</b>	<b>129</b>
8.1. Nociones básicas . . . . .	129
8.2. Función exponencial . . . . .	133
8.3. Teorema de Gauss . . . . .	137
8.4. Ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	146
8.5. Funciones armónicas . . . . .	150
<b>9. *Aplicaciones: polarización de un fotón</b>	<b>153</b>
9.1. Modelo clásico . . . . .	153
9.2. Modelo corpuscular . . . . .	155
9.2.1. Polarizadores en serie . . . . .	157
9.2.2. Experimento de Paul Dirac . . . . .	157
9.3. Experimento EPR: entrelazamiento cuántico . . . . .	158
9.3.1. Sistemas de dos o más partículas . . . . .	159
9.3.2. Desigualdad de Bell . . . . .	160
<b>A. Apéndice: demostración del T.F.A</b>	<b>163</b>
A.1. Número de giros de una curva . . . . .	163
<b>B. Apéndice II: Campo eléctrico</b>	<b>169</b>
B.1. Campos vectoriales, gradiente y divergencia . . . . .	169
B.2. Ley de Coulomb . . . . .	170
B.3. Campos eléctricos generados por cargas estáticas . . . . .	171
B.4. Potencial eléctrico . . . . .	175
B.5. Teorema de Gauss . . . . .	176

---

## Introducción

---

Los tres primeros capítulos de estas notas pretenden servir de breve introducción a la teoría de las bases de Gröbner y mostrar algunas aplicaciones elementales a la robótica y a la demostración automática de teoremas. No se supone ningún conocimiento previo del tema por parte del lector, sólo alguna familiaridad con el lenguaje básico del álgebra de polinomios. Aquellos interesados exclusivamente en las aplicaciones de la teoría pueden omitir en una primera lectura todas las demostraciones de los teoremas. Este material, que no entrará en la evaluación, aparecerá en letra más pequeña. El lector podrá encontrar una excelente introducción a la teoría de bases de Gröbner en [1], [6]. Una buena introducción a la robótica puede leerse en [15].

En el cuarto capítulo derivaremos la ecuación de onda para la cuerda vibrante, bajo ciertos supuestos, y discutiremos su relevancia en el diseño de las escalas pitagórica y tempizada. Destacaremos además su importancia en la fabricación de algunos instrumentos de cuerda. Con algunas variaciones, la deducción y solución de la ecuación de onda sigue lo expuesto en cualquiera de los textos [11],[13],[2]. Para una discusión sobre las escalas musicales y su construcción matemática, el lector puede consultar [5].



# CAPÍTULO 1

---

## Bases de Gröbner

---

En este capítulo daremos una introducción básica a una herramienta muy importante en geometría algebraica computacional: las bases de Gröbner. En la sección 1.1 presentaremos los objetos fundamentales de esta teoría que son los polinomios. En la sección 1.2 definiremos las variedades algebraicas que intuitivamente podemos pensar como una generalización a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección también se define el concepto de ideal en el anillo de polinomios y seguidamente en la sección 1.3 definimos un orden para los polinomios. Esto dos últimos conceptos serán fundamentales para generalizar la división larga entre polinomios que es familiar al lector de los cursos introductorios de matemáticas. Finalmente en la sección 1.6 introducimos las bases de Gröbner y en la sección 1.7 el *Algoritmo de Buchberger* para calcular bases de Gröbner de un conjunto de polinomios. Este método será usado en la parte final del capítulo para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas.

### 1.1. Anillos de polinomios

Denotemos por  $k$  a uno cualquiera de los dos campos,  $\mathbb{R}$ , los números reales o  $\mathbb{Q}$ , los racionales. Como es costumbre, el *anillo de polinomios* sobre  $k$  en las variables  $x_1, \dots, x_n$ , se denotará por  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Sus elementos son sumas finitas de la forma

$$f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  denota una tupla de enteros  $\alpha_i \geq 0$ , y cada  $c_\alpha$  denota un elemento de  $k$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f &= 1 + 5x_1x_2 - 2x_3^2, \\ g &= -3 + 2x_1 + 3x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{3}x_1x_2x_3 + x_1^4x_2^5x_3^7, \\ h &= 10 - x_1^7 + \frac{2}{3}x_3^8 \end{aligned}$$

son elementos de  $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$

A cada expresión  $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  se le llama un *monomio* en las variables  $x_1, \dots, x_n$ , y a cada sumando  $c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  se le denomina un *término* de  $f$ . Cada monomio  $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  se pueden denotar de manera abreviada como  $u = x^\alpha$ , donde, recordemos,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , con  $\alpha_i$  enteros no negativos. Así,  $f$  se puede escribir de manera abreviada como

$$f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}.$$

En el ejemplo anterior, el polinomio  $f = 1 + 5x_1x_2 - 2x_3^2$  es suma de tres términos:  $f = u_1 + u_2 + u_3$ , donde:  $u_1 = 1x_1^0x_2^0x_3^0$ ,  $u_2 = 5x_1^1x_2^1x_3^0$ ,  $u_3 = -2x_1^0x_2^0x_3^2$ . Con frecuencia nos referiremos al monomio  $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  simplemente como  $x^\alpha$ , con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , por ejemplo podemos escribir a  $f$  como  $1x^\alpha + 5x^\beta - 2x^\gamma$  donde  $\alpha = (0, 0, 0)$ ,  $\beta = (1, 1, 0)$  y  $\gamma = (0, 0, 2)$ . El *grado* de un monomio se define como la suma de los exponentes  $\alpha_i$ , y se denotará por  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ .

Diremos que *un monomio u divide otro monomio v* si  $u = vm$ , para un cierto monomio  $m$ . Cuando  $v$  divida  $u$  escribiremos  $v|u$ . Esta noción puede extenderse a términos, de manera natural: diremos que *un término  $cx^\alpha$  divide otro término  $dx^\beta$* , si  $x^\alpha|x^\beta$ . Por ejemplo,  $xy^2$  divide  $x^2y^4$ , pues  $x^2y^4 = xy^2(xy^2)$ . Pero  $xz^2$  no divide  $x^2y^3z$ , pues no existe ningún monomio  $v$  tal que  $x^2y^3z = (xz^2)v$  ( $v$  tendría que ser igual a  $xy^3z^{-1}$ , expresión que *no es un monomio* por tener un exponente negativo).

En  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  los elementos se pueden sumar y multiplicar de la manera usual:  $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$  y  $g = \sum_{\beta} d_{\beta} x^{\beta}$  se suman término a término:  $f + g = \sum_{\alpha} (c_{\alpha} + d_{\alpha}) x^{\alpha}$ . Y se multiplican como  $fg = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha} d_{\beta} x^{\alpha+\beta}$ . Aquí, si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , entonces el exponente  $\alpha + \beta$  es por definición  $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ .

**Ejemplo 1.1.1.** En  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ , si  $f = -1 + 2xy - 5xyz$  y  $g = -12 + x + y - 3xy + 8xyz - z^3$ , entonces:

$$f + g = -13 + x + y - xy + 3xyz - z^3.$$

Si  $h = -1 + 8xyz - z^3$  y  $g = -12 + x + y - 3xy$ , entonces

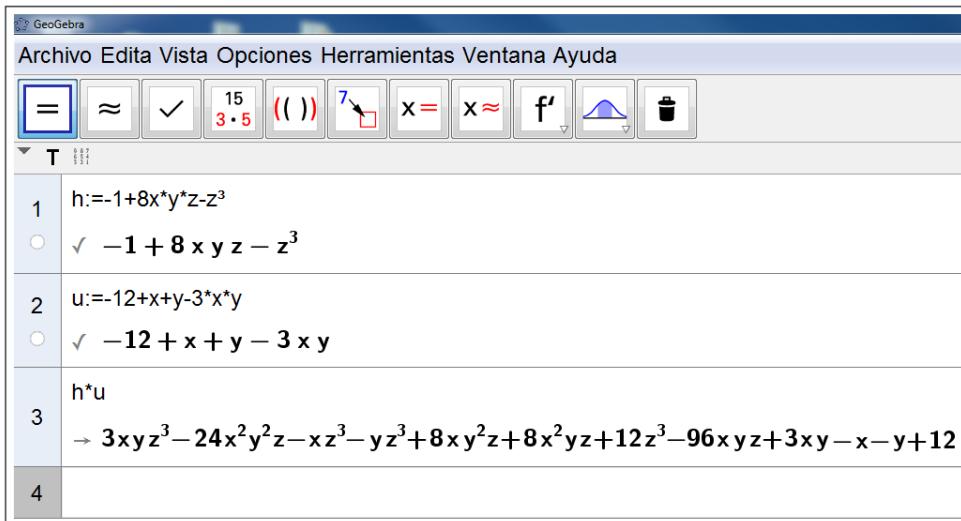
$$hg = 3xyz^3 - 24x^2y^2z - xz^3 - yz^3 + 8xy^2z + 8x^2yz + 12z^3 - 96xyz + 3xy - x - y + 12.$$

En la ventana CAS de GeoGebra, la operación puede hacerse como se muestra a continuación.

## 1.2. Ideales y Variedades Algebraicas

**Definición 1.2.1.** Si  $f_1, \dots, f_m$  son polinomios en  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  entonces el *ideal generado por  $f_1, \dots, f_m$* , que denotaremos por  $I = (f_1, \dots, f_m)$ , es el conjunto de todas las combinaciones lineales de la forma  $g = h_1f_1 + \cdots + h_mf_m$ , con coeficientes arbitrarios escogidos en  $R$ :

$$I = \{g \in R : g = h_1f_1 + \cdots + h_mf_m, \text{ donde } h_i \in R \text{ son arbitrarios}\}.$$



ventana CAS

En general, un subconjunto  $J \subset R$  se llama un *ideal* de  $R$  si para cualquier par de elementos  $f, g$  en  $J$  su suma y diferencia  $f + g, f - g$  están contenidas en  $J$ , así como cualquier producto de la forma  $hf, hg$ , donde  $h$  es cualquier otro polinomio en  $R$ .

Se verifica inmediatamente que  $I = (f_1, \dots, f_m)$  es en efecto un ideal, en el sentido anterior. De hecho, es el ideal más pequeño que contiene  $f_1, \dots, f_m$ . Es decir, cualquier otro ideal de  $R$  que contenga  $f_1, \dots, f_m$  debe contener  $I$ .

**Observación 1.2.2.** Se puede demostrar, recíprocamente, que si  $J$  es un ideal de  $R$ , entonces existen polinomios  $f_1, \dots, f_m$  de tal manera que  $J = (f_1, \dots, f_m)$ . Este Teorema se conoce como *Teorema de la Base de Hilbert* (ver [8]).

**Definición 1.2.3.** Dado un conjunto de polinomios  $A = \{f_1, \dots, f_m\}$  en el anillo  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ , la *variedad algebraica* determinada por  $A$ , que denotaremos por  $V(A)$ , se define como el conjunto de todas aquellas  $n$ -tuplas en  $k^n$  que son ceros comunes a todos los polinomios de  $A$ . Es decir,

$$V(A) = \{c = (c_1, \dots, c_n) \in k^n : f_i(c_1, \dots, c_n) = 0, \text{ para todo } f_i \text{ en } A\}.$$

El conjunto  $V(A)$  de la definición anterior es precisamente el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones

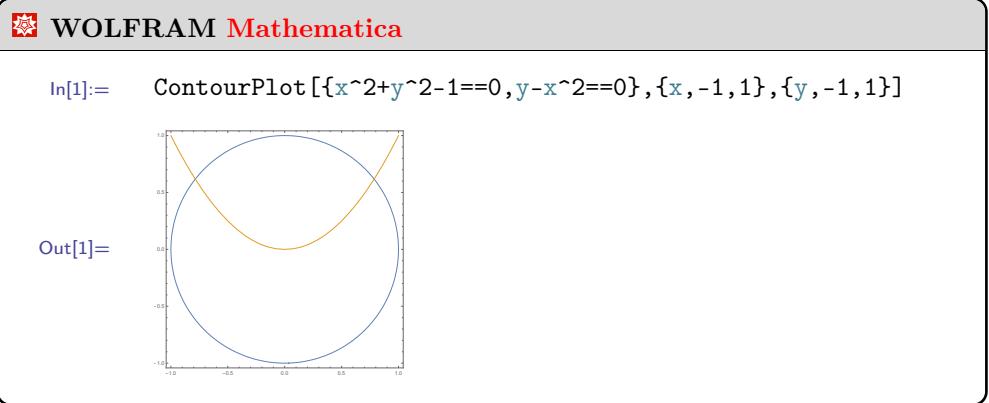
$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.2.4.** 1. Si  $R = \mathbb{R}[x, y]$  y  $A = \{x^2 + y^2 - 1, y - x^2\}$ , entonces  $V(A)$  puede hallarse mediante el comando ResoluciónC[, ]. O de manera directa, si

substituimos  $y = x^2$  en la primera ecuación obtenemos:  $x^2 + x^4 - 1 = 0$ . La fórmula para la ecuación cuadrática proporciona el valor de  $x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . De aquí la única solución no negativa sea  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Luego  $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$  y  $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , y por tanto

$$V(A) = \left\{ \left( \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right), \left( -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right\}$$

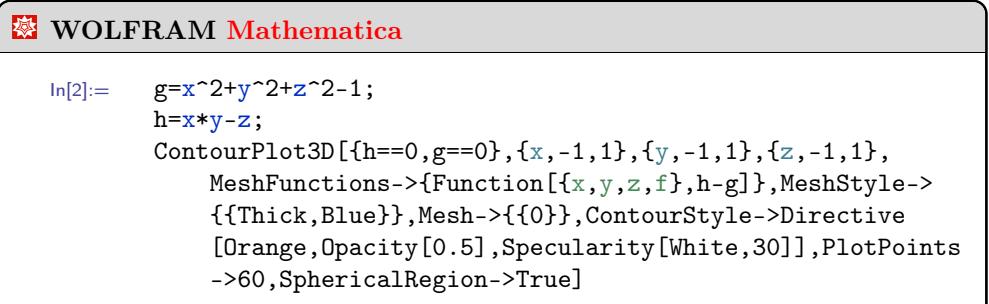
que es precisamente el conjunto formado por los dos puntos donde se cortan la parábola  $y = x^2$  y el círculo unitario  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  y que podemos visualizar en la siguiente gráfica generada en Wolfram Mathematica:

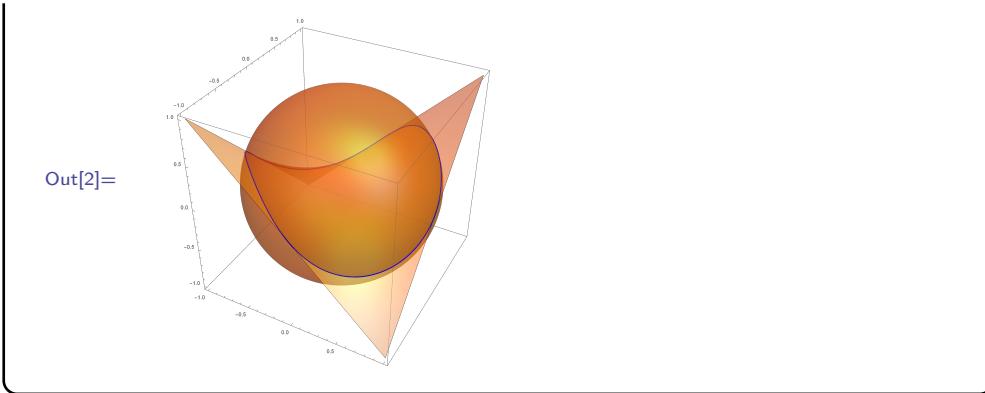


2.  $V(xy - z, x^2 + y^2 + z^2 - 1) \subset \mathbb{R}^3$  es el conjunto de ternas  $(c_1, c_2, c_3)$  en  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen el sistema de ecuaciones polinómicas

$$\begin{aligned} xy - z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, la variedad cortada por  $xy - z$  y  $x^2 + y^2 + z^2 - 1$  es la intersección en  $\mathbb{R}^3$  de la superficie  $z = xy$  y la esfera de radio unitario:





**Observación 1.2.5.** 1.  $V(A) = V(I)$ , donde  $I$  es el ideal de  $R$  generado por los elementos de  $A$ . Primero, observemos que si  $A \subset B$  entonces  $V(B) \subset V(A)$ . Como  $A \subset I$  entonces  $V(I) \subset V(A)$ . De otro lado, la inclusión en el sentido contrario también se cumple, ya que si  $(c) = (c_1, \dots, c_n)$  es un cero común de todos los polinomios de  $A$  también lo es de cualquier elemento que sea una combinación lineal de elementos de  $A$  con coeficientes en  $R$ .

2. Para todo par de ideales  $I, J$  en  $R$  se cumple  $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ . Como  $I \cap J$  está incluido en  $I$  y en  $J$  entonces  $V(I) \subset V(I \cap J)$  y  $V(J) \subset V(I \cap J)$ , y en consecuencia  $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$ . Ahora, veamos que si  $(c) \in V(I \cap J)$  entonces  $(c) \in V(I)$  o  $(c) \in V(J)$ . Razonemos por el absurdo, es decir, supongamos que  $(c)$  fuera un cero común de todos los polinomios contenidos en  $I \cap J$  y que  $(c)$  no estuviera contenido ni en  $V(I)$  ni en  $V(J)$ . Entonces existirían polinomios  $f \in I$  y  $g \in J$  tales que  $f(c) \neq 0$  y  $g(c) \neq 0$ . Por tanto  $fg(c) = f(c)g(c) \neq 0$ . Pero  $fg$  está contenido tanto en  $I$  como en  $J$ , ya que  $I$  y  $J$  son ideales, lo cual estaría en contradicción con nuestra hipótesis de que  $(c) \in V(I \cap J)$ .
3. Para todo par de ideales  $I, J$  en  $R$  se cumple que  $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$ . Esta afirmación se justifica de manera similar.

**Ejercicio 1.2.6.** 1. Encuentre la variedad cortada por cada conjunto de ecuaciones:

$$R = \mathbb{R}[x, y], \quad A = \{2x - y + 1, x^2 + y^2 - 1, x + y + 5\}$$

(Respuesta:  $V(A) = \text{conjunto vacío}$ ).

$$R = \mathbb{Q}[x, y, z], \quad E = \{zx - z + xy, zx^2 + zy^2 + x^2 + y^2, z + 1, y^2 + y\}$$

(Respuesta:  $V(E) = \{(1, 0, -1), (1/2, -1, -1)\}$ ).

2. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es un ideal del anillo  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ :

- $I = R$ ,
- $I = \{0\}$ ,

- $I = \{p \in R : p(0, 0, 0) = 1\}$ ,
  - $I = \{p \in R : \text{el término constante de } p \text{ es cero}\}$ ,
  - $I = \{p \in R : p(1, 1, 1) \neq 0\}$ .
3. Sea  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  un anillo de polinomios. Definamos  $I = \{p(x, y, z) \in R : p(1, -1, 2) = 0\}$ . Compruebe que  $I$  es en efecto un ideal. Verifique además que  $I$  puede ser generado por los polinomios  $f_1 = x - 1, f_2 = y + 1, f_3 = z - 2$ . Es decir,
- $$I = \{g \in R : g = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3, \text{ con } a_1, a_2, a_3 \text{ en } R\},$$
- lo cual, recordemos, lo denotamos como  $I = (x - 1, y + 1, z - 2)$ .
4. Dé un ejemplo de un ideal de  $R$  que no pueda ser generado por un solo polinomio.
5. Muestre que el ideal de  $R = \mathbb{Q}[x, y]$  generado por los polinomios  $f_1 = x^2 + xy - x, f_2 = x - 1, f_3 = xy + 2$  es igual a todo el anillo  $R$ .
6. Sea  $J = (xy, yz, xyz^2)$ , el ideal de  $R$  generado por los polinomios  $xy, yz, xyz^2$ . Explique por qué es cierto que si  $f \in J$  entonces cada uno de los monomios de  $f$  debe ser divisible por algunos de los monomios  $xy, yz, xyz^2$ .
7. (Opcional) Explique por qué si  $I$  es un ideal generado por monomios,  $I = (u_1, \dots, u_t)$ , entonces para saber si un polinomio  $f$  está en  $I$  basta ver que cada uno de sus términos sea divisible por alguno de los monomios  $u_1, \dots, u_t$ .

Notemos que el recíproco siempre es cierto: si cada monomio de  $f$  es divisible por algún  $u_1, \dots, u_t$ , entonces es claro que  $f \in I$ , pues si  $f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} c_\alpha x^\alpha$ , y cada  $c_\alpha x^\alpha = u_{i_\alpha} v_{i_\alpha}$ , para ciertos  $u_{i_\alpha}, v_{i_\alpha}$ , con  $1 \leq i_\alpha \leq t$ , entonces  $f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha}$  es combinación lineal de  $u_1, \dots, u_t$ , con coeficientes polinómicos (en este caso, monomios)  $v_{i_\alpha}$ .

### 1.3. Ordenes monomiales

Empecemos por definir la noción de un *orden monomial* en  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Definición 1.3.1.** Un *orden monomial* es un ordenamiento de todos los monomios de  $R$  (un orden total) que cumple las siguientes propiedades:

1. Si  $x^\alpha > x^\beta$  entonces  $x^\alpha x^\theta > x^\beta x^\theta$  para todo monomio  $x^\theta$ .
2.  $x^\alpha > 1$ , para todo monomio  $x^\alpha$ , con  $\alpha \neq 0$ .

**Ejemplo 1.3.2.** 1. El orden *lexicográfico* (lex): este orden es análogo a la manera como vienen organizadas las palabras en el diccionario (de ahí su nombre). Sean  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  y  $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$  dos monomios. Declaramos  $x^\alpha > x^\beta$  si en el vector diferencia  $\alpha - \beta$  la primera entrada distinta de cero, contando de izquierda a derecha, es positiva. En este caso escribiremos  $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ . Por ejemplo  $x^2y^3 >_{lex} xy^6, x^5y^3z >_{lex} x^5y^2z^2$ .

En este orden, si declaramos  $x > y > z$ , entonces los monomios de  $k[x, y, z]$  quedarían ordenados de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccc}
& 1 & < z & < z^2 & < \cdots & < z^n & < \cdots \\
\cdots & < y & < yz & < yz^2 & < \cdots & < yz^n & < \cdots \\
\cdots & < y^2 & < y^2z & < y^2z^2 & < \cdots & < y^2z^n & < \cdots \\
\cdots & < y^3 & < y^3z & < y^3z^2 & < \cdots & < y^3z^n & < \cdots \\
& \vdots & & & & & \\
\cdots & < y^m & < y^mz & < y^mz^2 & < \cdots & < y^mz^n & < \cdots \\
& \vdots & & & & & \\
\cdots & < x & < xz & < xz^2 & < \cdots & < xz^n & < \cdots \\
\cdots & < x^2 & < x^2z & < x^2z^2 & < \cdots & < x^2z^n & < \cdots \\
& \vdots & & & & & \\
\cdots & < x^k & < x^kz & < x^kz^2 & < \cdots & < x^kz^n & < \cdots \\
& \vdots & & & & & \\
\cdots & < xy & < xyz & < xyz^2 & < \cdots & < xyz^n & < \cdots
\end{array}$$

2. El orden *graduado lexicográfico* (lex): en este orden  $x^\alpha >_{\text{lex}} x^\beta$  si  $|\alpha| > |\beta|$ , o si  $|\alpha| = |\beta|$  y la primera entrada no nula de  $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ , contada de izquierda a derecha es positiva. Por ejemplo  $xy^6 >_{\text{lex}} x^2y^3$  pues el grado del primer monomio es mayor que el grado del segundo, y  $x^2y^2 >_{\text{lex}} x^2yz$  pues el vector de diferencia de grados es igual a  $\alpha - \beta = (0, 1, -1)$ .
3. El orden *graduado lexicográfico inverso* (revlex): en este orden  $x^\alpha >_{\text{revlex}} x^\beta$  si  $|\alpha| > |\beta|$ , o si  $|\alpha| = |\beta|$  y la primera entrada no nula de  $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ , contada de derecha a izquierda es negativa (el monomio con más peso en la cola pierde).

**Ejemplo 1.3.3.** En  $A = R[x, y, z]$ , con  $x > y > z$  en el orden revlex, se tiene, por ejemplo, que  $x^2y^3 >_{\text{revlex}} x^2y^2z$ ,  $x^4y^3 >_{\text{revlex}} x^2y^2z$ ,  $x^3y^3z^2 >_{\text{revlex}} x^2y^4z^2$ ,  $x^6 >_{\text{revlex}} x^3yz^2$ ,  $z^3 >_{\text{revlex}} xy$ .

**Definición 1.3.4.** Sea  $f = \sum a_\alpha x^\alpha$  un polinomio no nulo en  $k[x_1, \dots, x_n]$ , y sea  $>$  un orden monomial fijo. El *término líder* de  $f$ , que denotaremos por  $\text{tl}(f)$ , se define como  $a_\alpha x^\alpha$ , donde  $x^\alpha$  es el monomio más grande respecto al orden monomial que aparece en  $f$ .

**Ejemplo 1.3.5.** Bajo el orden  $>_{\text{lex}}$ , si  $f = -7z^2 + 5xy^2z - 3x^2z^2 - x^3$ , su término líder es  $-3x^2z^2$ . Con el orden lexicográfico  $>_{\text{lex}}$ , su término líder sería  $-x^3$ . Con el orden revlex,  $\text{tl}(f) = 5xy^2z$ .

## 1.4. Algoritmo de la división en $k[x_1, \dots, x_n]$

Nuestro objetivo es dividir  $f \in R = k[x_1, \dots, x_n]$  entre polinomios  $g_1, \dots, g_s$ . Una vez fijado un determinado orden monomial, esto significa que  $f$  puede escribirse en la

forma  $f = a_1g_1 + \dots + a_sg_s + h$ , donde  $a_1, \dots, a_s, h$  son polinomios en  $R$  los cuales satisfacen la siguientes dos propiedades:

1.  $\text{tl}(a_i g_i) \leq \text{tl}(f)$ .
2.  $h = 0$  o bien  $h$  es una combinación lineal de monomios  $h = c_1 u_1 + \dots + c_l u_l$ , donde ningún monomio  $u_i$  es divisible por ninguno de los términos líderes de los  $g_i$ ,  $\text{tl}(g_1), \dots, \text{tl}(g_s)$ .

Antes de discutir formalmente la existencia de un algoritmo con estas propiedades, veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.4.1.** Dividamos a  $f = x^2y + xy^2 + y^2$  entre  $g_1 = xy - 1$  y  $g_2 = y^2 - 1$ , usando el orden lexicográfico. En primer lugar, vemos que el término líder de  $f$  es divisible por el término líder de  $g_1$  y por el término líder de  $g_2$ . Si dividimos el término líder de  $f$  por el término líder de  $g_1$ , podemos escribir  $f$  en la forma  $f = x(xy - 1) + x + xy^2 + y^2$ .

Volvemos a repetir este proceso: tratamos de eliminar  $xy^2$ , el término líder del polinomio  $xy^2 + x + y^2$ . Nuevamente, podríamos elegir para ello el término líder de  $g_1$  o el de  $g_2$ . Usemos nuevamente  $g_1$ : escribamos  $x + xy^2 + y^2$  en la forma  $xy^2 + x + y^2 = y(xy - 1) + x + y + y^2$ . Ahora, podemos ver que el término líder de  $x + y + y^2$  no es divisible ni por  $\text{tl}(g_1)$  ni por  $\text{tl}(g_2)$  (esta es una situación que no ocurre en el caso de polinomios en una variable). En este caso seguimos examinando los monomios que le siguen en el orden lexicográfico, que son  $y, y^2$ . Vemos que  $y$  tampoco es divisible, pero  $y^2$  sí lo es. Dividimos nuevamente, en este caso por  $g_2$ :

$$x + y + y^2 = 1 \cdot (y^2 - 1) + x + y + 1.$$

Al llegar a este punto podemos ver que ninguno de los monomios de  $x + y + 1$  es divisible por  $\text{tl}(g_1)$  o  $\text{tl}(g_2)$ . Este último polinomio ha de ser entonces el residuo. Poniendo lo anterior en una sola ecuación vemos que hemos escrito  $f$  como

$$f = \underbrace{(x + y)}_{a_1} g_1 + \underbrace{1}_{a_2} g_2 + \underbrace{(x + y + 1)}_h,$$

donde  $\text{tl}(a_1 g_1) \leq \text{tl}(f)$ ,  $\text{tl}(a_2 g_2) \leq \text{tl}(f)$ , y donde ningún monomio de  $h$  es divisible ni por  $\text{tl}(g_1)$ , ni por  $\text{tl}(g_2)$ .

Pasemos a enunciar de manera rigurosa este procedimiento.

**Teorema 1.4.2.** (*Algoritmo de la división*) Sea  $>$  un orden monomial en  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  y sea  $F = \{g_1, \dots, g_s\}$  una lista ordenada de polinomios en  $R$ . Entonces cada  $f$  en  $R$  puede escribirse en la forma  $f = a_1g_1 + \dots + a_sg_s + h$ , con  $a_i, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ , y donde se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1.  $\text{tl}(a_i g_i) \leq \text{tl}(f)$
2.  $h = 0$ , o  $h$  es una combinación lineal de monomios  $h = c_1 u_1 + \dots + c_l u_l$ , donde ninguno de los monomios  $u_i$  es divisible por  $\text{tl}(g_1), \dots, \text{tl}(g_s)$ , los términos líderes de  $g_1, \dots, g_s$ .

*Demostración.* Sea  $M$  el conjunto formado por todos aquellos monomios de  $f$  que son divisibles por el término líder de algún  $g_i$ . Si ningún monomio de  $f$  tiene esta propiedad entonces podemos tomar  $h$  como el mismo polinomio  $f$ , y todos los  $a_i$  iguales a cero. Por otro lado, si  $M$  no es vacío, nos fijamos en el menor  $i$  tal que  $\text{tl}(g_i)$  divide algún monomio de  $f$ . De todos los posibles monomios divisibles por  $\text{tl}(g_i)$ , escogemos el mayor de todos ellos, digamos  $c_\theta x^\theta$ . Supongamos que  $c_\theta x^\theta = \text{tl}(g_i)m$ , y escribamos  $f$  como  $f = c_\theta x^\theta + f'$ , donde cualquier monomio de  $f'$  divisible por  $\text{tl}(g_i)$  es necesariamente menor que  $c_\theta x^\theta$ . Podemos escribir  $f$  en la forma  $f = \text{tl}(g_i)m + f'$ . Ahora, si  $g_i = \text{tl}(g_i) + g'_i$ , entonces

$$f = \text{tl}(g_i)m + f' = (g_i - g'_i)m + f' = mg_i + (f' - g'_i m)$$

Es claro que  $\text{tl}(g_i)m \leq \text{tl}(c_\theta x^\theta) \leq \text{tl}(f)$ , y que  $\text{tl}(g) \leq \text{tl}(c_\theta x^\theta)$ . Si  $h$  denota el polinomio  $f' - g'_i m$ , vemos entonces que el mayor de los monomios de  $h$  divisible por  $\text{tl}(g_i)$  es necesariamente de grado menor que  $c_\theta x^\theta$ . Esto nos permite aplicarle el mismo razonamiento a  $h$  y concluir la demostración utilizando inducción.  $\square$

Algoritmo de la división en síntesis: se toma como entrada una lista de polinomios  $f, g_1, \dots, g_s$  en  $k[x_1, \dots, x_n]$ , donde se ha establecido previamente un cierto orden monomial.

1. Se encuentra el mayor término  $c_\theta x^\theta$  de  $f$  divisible por algún  $\text{tl}(g_{i_1})$ , digamos  $c_\theta x^\theta = \text{tl}(g_{i_1})m_1$ .
2. Escribimos  $f = c_\theta x^\theta + f'$ , y  $g_{i_1} = \text{tl}(g_{i_1}) + g'$
3. Rescribimos  $f$  en la forma

$$f = \text{tl}(g_{i_1})m_1 + f' = (g_{i_1} - g')m_1 + f' = m_1 g_{i_1} + (f' - g'm_1).$$

Definimos  $h_1 = f' - g'm_1$ . Luego  $f = m_1 g_{i_1} + h_1$ .

4. Los pasos 1-3 se repiten para  $h_1$ , de tal manera que  $h_1$  pueda escribirse ahora como  $h_1 = m_2 g_{i_2} + h_2$ , para un cierto monomio  $m_2$ , y cierto  $g_{i_2}$ . Así que

$$f = m_1 g_{i_1} + h_1 = m_1 g_{i_1} + m_2 g_{i_2} + h_2.$$

5. Los pasos 1-3 se repiten para  $h_2$ , de tal manera que  $h_2$  pueda escribirse como  $h_2 = m_3 g_{i_3} + h_3$ , para un cierto monomio  $m_3$ , y cierto  $g_{i_3}$ . Así que

$$f = m_1 g_{i_1} + m_2 g_{i_2} + m_3 g_{i_3} + h_3.$$

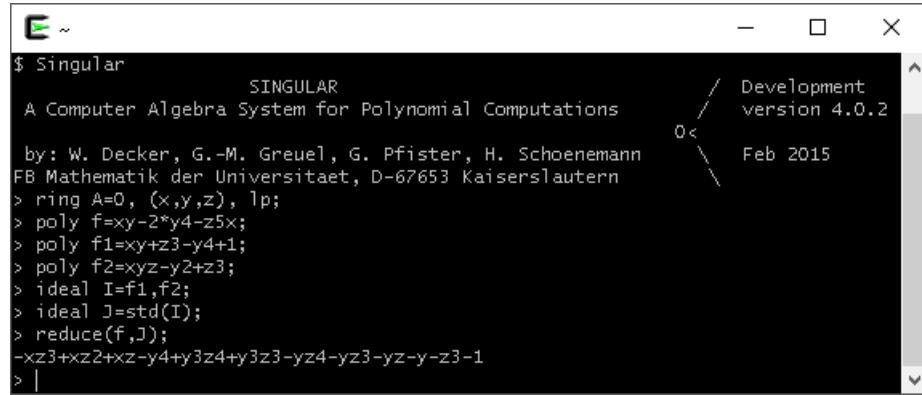
6. Se continua de esta manera, computando  $h_1, h_2, \dots, h_r$ , hasta que el polinomio  $h_r$  sea un *residuo*, es decir, un polinomio para el cual ninguno de sus términos es divisible por ninguno de los términos líderes  $\text{tl}(g_1), \dots, \text{tl}(g_n)$ . En este punto  $f$  se escribirá como

$$f = m_1 g_{i_1} + m_2 g_{i_2} + \dots + m_r g_{i_r} + h_r,$$

que podemos reescribir como  $f = a_1 g_1 + \dots + a_s g_s + h_r$ , con ciertos  $a_i$ , polinomios apropiados.

Existen varios paquetes de cálculo simbólico (infotunadamente no es el caso de *GeoGebra*) que permiten computar el residuo de la división de un polinomio entre un conjunto de polinomios. El paquete *Singular*, de acceso gratuito, es uno de ellos (puede descargarse en la dirección <http://www.singular.uni-kl.de/>).

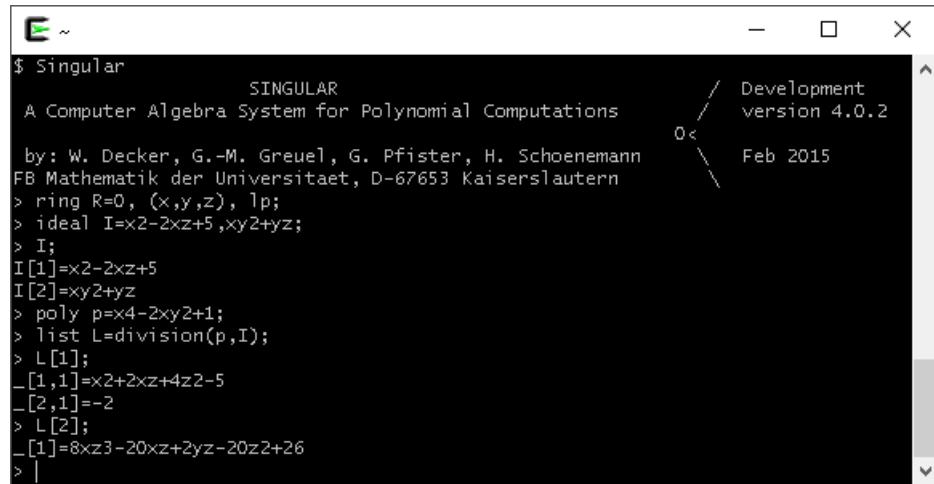
**Ejemplo 1.4.3.** 1. Si, por ejemplo,  $f = xy - 2y^4 - xz^5$ ,  $f_1 = xy + z^3 - y^4 + 1$ ,  $f_2 = xyz - y^2 + z^3$  son polinomios en  $\mathbb{Q}[x, y, z]$ , con orden lexicográfico, el residuo de la división de  $f$  entre  $f_1$  y  $f_2$  puede computarse en singular como se muestra a continuación:



```
$ Singular
      SINGULAR
      A Computer Algebra System for Polynomial Computations
      by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann
      FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern
> ring A=0, (x,y,z), lp;
> poly f=xy-2*y4-z5x;
> poly f1=xy+z3-y4+1;
> poly f2=xyz-y2+z3;
> ideal I=f1,f2;
> ideal J=std(I);
> reduce(f,J);
-xz3+xz2+xz-y4+y3z4+y3z3-yz4-yz3-yz-y-z3-1
> |
```

El residuo resulta ser  $r = -xz^3 + xz^2 + xz - y^4 + y^3z^4 + y^3z^3 - yz^4 - yz^3 - yz - y - z^3 - 1$ .

Para computar los coeficientes  $a_i$  puede utilizarse el comando *division*.



```
$ Singular
      SINGULAR
      A Computer Algebra System for Polynomial Computations
      by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann
      FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern
> ring R=0, (x,y,z), lp;
> ideal I=x2-2xz+5,xy2+yz;
> I;
I[1]=x2-2xz+5
I[2]=xy2+yz
> poly p=x4-2xy2+1;
> list L=division(p,I);
> L[1];
L[1,1]=x2+2xz+4z2-5
L[2,1]=-2
> L[2];
L[2,1]=8xz3-20xz+2yz-20z2+26
> |
```

Por ejemplo, sea  $p = x^4 - 2xy^2 + 1$  y sean  $g_1 = x^2 - 2xz + 5$  y  $g_2 = xy^2 + yz$ . En este caso hemos definido el ideal directamente como el generado por los dos polinomios sin haber definido antes dichos polinomios como lo hicimos en el

ejemplo anterior. La lista  $L$  contiene en su primera entrada,  $L[1]$ , una matriz  $2 \times 1$

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2xz + 4z^2 - 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

cuyas entradas son los polinomios  $a_1 = x^2 + 2xz + 4z^2 - 5$  y  $a_2 = -2$ . La segunda entrada de  $L$ ,  $L[2]$ , contiene el residuo de la división, en este caso igual a  $8xz^3 - 20xz + 2yz - 20z^2 + 26$ .

Entonces podemos escribir a  $p$  como

$$p = \underbrace{(x^2 + 2xz + 4z^2 - 5)}_{a_1} \underbrace{(x^2 - 2xz + 5)}_{g_1} + \underbrace{(-2)}_{a_2} \underbrace{(xy^2 + yz)}_{g_2} + \underbrace{(8xz^3 - 20xz + 2yz - 20z^2 + 26)}_r$$

Para ayuda sobre los comandos y otras características importantes de este software se puede consultar [7].

2. Repitamos el último ejemplo en *Mathematica*:

 **WOLFRAM Mathematica**

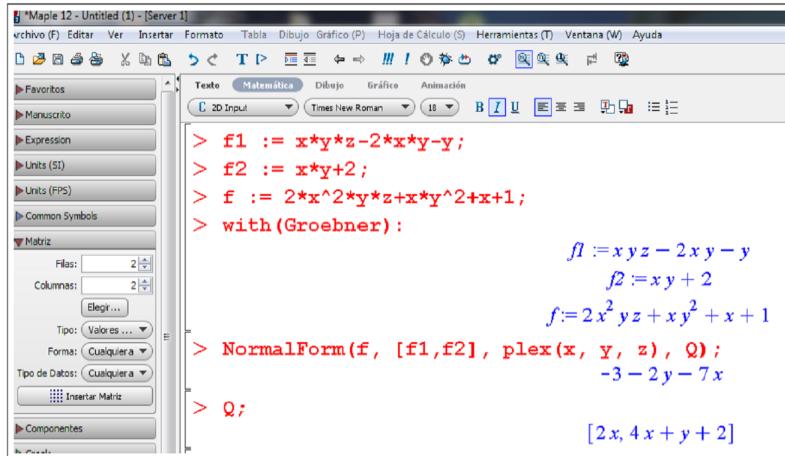
```

In[3]:= p=x^4-2*x*y^2+1
In[4]:= p1=x^2-2*x*z+5
In[5]:= p2=x*y^2+y*z
In[6]:= PolynomialReduce[p, {p1, p2}, {x, y, z}]
Out[6]= {{-5+x^2+2xz+4z^2, -2}, 26-20xz+2yz-20z^2+8xz^3}

```

Podemos encontrar en el resultado final la lista de coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  que teníamos en el ejemplo anterior y también el residuo  $r$ .

3. Sea  $f = 2x^2yz + xy^2 + x + 1$ ,  $f_1 = xyz - 2xy - y$ ,  $f_2 = xy + 2$ . En Maple el comando *NormalForm* computa el residuo y los cocientes de la división:



The screenshot shows a Maple 12 interface with the following input and output:

```

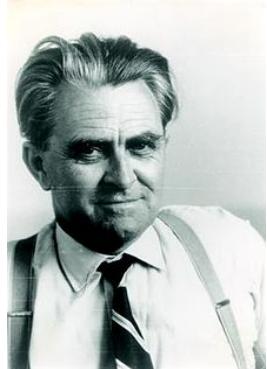
> f1 := x*y*z-2*x*y-y;
> f2 := x*y+2;
> f := 2*x^2*y*z+x*y^2+x+1;
> with(Groebner):
f1 := x*y*z - 2*x*y - y
f2 := x*y + 2
f := 2*x^2*y*z + x*y^2 + x + 1
> NormalForm(f, [f1,f2], plex(x, y, z), Q);
-3 - 2*y - 7*x
> Q;
[2*x, 4*x + y + 2]

```

**Observación 1.4.4.** El algoritmo de la división en varias variables difiere en varios aspectos del algoritmo usual en una variable. En primer lugar, los coeficientes  $a_i$ , y el residuo  $r$  dependen del orden monomial escogido. En general no hay unicidad para los coeficientes  $a_i$ , ni para el residuo  $r$ . Por ejemplo, tomando de nuevo  $f = x^2y + xy^2 + y^2$ ,  $f_1 = xy - 1$ ,  $f_2 = y^2 - 1$ , y dividiendo a  $f$  primero por el término líder de  $f_2$  se obtiene

$$f = (x + 1)f_2 + xf_1 + 2x + 1.$$

Esto nos muestra que para polinomios en más de una variable sólo se obtiene una generalización imperfecta del algoritmo de la división usual. Además, a diferencia del caso en una variable, este algoritmo no resuelve el problema que nos propusimos inicialmente. Por ejemplo, puede ocurrir que al dividir  $f$ , un elemento de un cierto ideal  $I = (f_1, f_2)$ , por  $f_1$  y  $f_2$ , se obtengan dos residuos distintos, dependiendo del orden escogido al efectuar la división: por ejemplo, si  $f = xy^2 - x$ ,  $f_1 = xy + 1$ ,  $f_2 = y^2 - 1$  fácilmente se ve que  $f = yf_1 + 0f_2 + (-x - y)$  y que  $f = xf_2 + 0f_1 + 0$ . Esta situación es sin embargo remediable, como veremos en la próxima clase.



## 1.5. Bases de Gröbner

**Definición 1.5.1.** Sea  $I \subset R = k[x_1, \dots, x_n]$  un ideal diferente de cero. El *ideal de términos líderes* de  $I$ , que denotaremos por  $\text{tl}(I)$ , se define como el ideal generado por todos los términos líderes de todos los polinomios de  $I$ . Es decir,  $\text{tl}(I)$  es el conjunto de todos los elementos de la forma  $g = h_1(c_1x^{\theta_1}) + \dots + h_n(c_nx^{\theta_n})$ , donde cada  $c_i x^{\theta_i}$  es el término líder de algún polinomio en  $I$

$$\text{tl}(I) = \{g : g = h_1(c_1x^{\theta_1}) + \dots + h_n(c_nx^{\theta_n}), c_i x^{\theta_i} = \text{tl}(f_i), f_i \in I, h_i \in R\}.$$

**Observación 1.5.2.** Debemos señalar que si  $I = (f_1, \dots, f_m)$  entonces  $\text{tl}(I)$  no es en general igual al ideal generado por  $\text{tl}(f_1), \dots, \text{tl}(f_m)$ . Por ejemplo, si  $I = (x^3 -$

Wolfgang Gröbner (11 de febrero de 1899 - 20 de agosto de 1980) era un matemático austriaco. Su nombre es más conocido por las bases de Gröbner, utilizadas para cálculos en geometría algebraica. Sin embargo, la teoría de las bases de Gröbner para los anillos polinómicos fue desarrollada por su estudiante Bruno Buchberger en 1965, quien les dio el nombre de Gröbner.

$2xy, x^2y - 2y^2 + x$ , entonces  $\text{tl}(x^3 - 2xy) = x^3$ ,  $\text{tl}(x^2y - 2y^2 + x) = x^2y$ , en el orden lexicográfico graduado. De otro lado, se observa que  $x^2 = x(x^2y - 2y^2 + x) - y(x^3 - 2xy)$  es un elemento de  $I$ , y sin embargo  $\text{tl}(x^2) = x^2 \notin (x^3, x^2y)$ .

No obstante, esta situación nunca se presenta si los generadores del ideal  $I$  forman una *base de Gröbner*.

**Definición 1.5.3.** Fijemos un cierto orden monomial en  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ . Un conjunto ordenado  $G = \{f_1, \dots, f_n\}$  de generadores de  $I$  se denomina una *base de Gröbner* si  $\text{tl}(I)$  es igual al ideal generado por  $\text{tl}(f_1), \dots, \text{tl}(f_n)$ . Es decir,  $\text{tl}(I) = (\text{tl}(f_1), \dots, \text{tl}(f_n))$ . Dicho de manera equivalente,  $G$  es una base de Groebner para  $I$  si dado cualquier polinomio  $f \in I$  se cumple que su término líder es divisible por algún  $\text{tl}(f_i)$ . (Esta equivalencia se sigue inmediatamente del ejercicio 7 de la sección anterior).

El siguiente teorema nos muestra una de las propiedades que hace útiles las bases de Gröbner.

**Teorema 1.5.4.** Sea  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  una base de Gröbner para un ideal  $I \subset R = k[x_1, \dots, x_n]$ . Sea  $f$  un polinomio en  $R$ . Entonces  $f \in I$  si y sólo si el residuo de la división de  $f$  por  $G$  es igual a cero.

*Demuestra*ción. Si el residuo de la división es igual a cero es claro entonces que  $f$  se puede expresar como una combinación lineal de los  $f_i$ , con coeficientes polinómicos. Esto implica que  $f \in I$ . Supongamos ahora que  $f \in I$ . Usando el algoritmo de la división podemos escribir  $f$  en la forma

$$f = a_1f_1 + \dots + a_nf_n + h,$$

donde  $h = 0$  o ningún monomio de  $h$  es divisible por el término líder de  $f_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Ahora, es claro que  $h$  también pertenece a  $I$ ; luego, su término líder está en el ideal  $\text{tl}(I)$ . Esto obliga a que  $h$  tenga que ser cero, pues de otra manera  $\text{tl}(h)$  sería divisible por alguno de los  $\text{tl}(f_i)$ , en contradicción con el hecho de que  $h$  sea un residuo.  $\square$

Si disponemos de una base de Gröbner  $G$  para un ideal  $I$  en un anillo de polinomios  $R$  entonces, para saber si un determinado polinomio  $f$  está contenido en  $I$  basta dividir  $f$  por los elementos de  $G$  y ver si el residuo de la división es igual a cero. Sin embargo, para poder llevar a cabo este procedimiento necesitamos saber como se puede computar de manera efectiva una base de Gröbner para  $I$ . A continuación nos proponemos mostrar como construir un algoritmo que nos permitirá transformar un conjunto de generadores de  $I$  en una base de Gröbner para  $I$ .

## 1.6. S-polinomios y algoritmo de Buchberger

Sean  $f$  y  $g$  polinomios no nulos en  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ , con términos líderes  $ax^\alpha$  y  $bx^\beta$ . Definimos el *mínimo común múltiplo* de los monomios  $x^\alpha$  y  $x^\beta$ , el cual denotaremos por  $\text{mcm}(x^\alpha, x^\beta)$ , como el monomio  $x^\theta$  donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ , con  $\theta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ . El *S-polinomio* de  $f$  y  $g$  se define como

$$S(f, g) = \frac{x^\theta}{\text{tl}(f)}f - \frac{x^\theta}{\text{tl}(g)}g.$$



Bruno Buchberger (nacido el 22 de octubre de 1942 en Innsbruck) es profesor de Matemáticas en la Universidad Johannes Kepler de Linz, Austria. En su tesis doctoral de 1965, creó la teoría de las bases de Gröbner y ha desarrollado esta teoría a lo largo de su carrera. A estos objetos les puso el nombre de su asesor Wolfgang Gröbner.

Este polinomio está diseñado para producir la cancelación de términos líderes. El siguiente lema nos dice que todo tipo de cancelación de términos del mismo grado debe ocurrir de esta manera.

**Lema 1.6.1.** *Supongamos que en la suma  $U = \sum_{i=1,\dots,t} c_i x^{\alpha_i} g_i$ , donde los  $c_i$  son constantes, y donde  $\text{tl}(g_i)x^{\alpha_i} = x^\delta$ ,  $i = 1, \dots, t$ , ocurre una cancelación de los términos de grado más alto; es decir,  $\text{tl}(\sum c_i x^{\alpha_i} g_i) < x^\delta$ . Entonces  $U$  se puede reescribir como una combinación lineal de  $S$ -polinomios*

$$U = \sum_{j,k} c_{jk} x^{\delta - \theta_{jk}} S(g_j, g_k),$$

donde  $x^{\theta_{jk}} = \text{mcm}(\text{tl}(g_j), \text{tl}(g_k))$ . Más aún, cada  $x^{\delta - \theta_{jk}} S(g_j, g_k)$  tiene término líder  $< x^\delta$ .

*Demostración.* Sea  $d_i x^{\beta_i}$  el término líder de  $g_i$  y definamos  $p_i = x^{\alpha_i} g_i / d_i$ . La suma  $U$  puede escribirse en forma telescopica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U = \sum_{i=1,\dots,t} c_i d_i p_i &= c_1 d_1 (p_1 - p_2) + \cdots + (c_1 d_1 + \cdots + c_{t-1} d_{t-1})(p_{t-1} - p_t) + \\ &\quad + (c_1 d_1 + \cdots + c_{t-1} d_{t-1} + c_t d_t)(p_t). \end{aligned}$$

Ahora, un simple cálculo nos muestra que  $x^{\delta - \theta_{jk}} S(g_j, g_k) = p_j - p_k$ . Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$U = \sum_{j=1}^{t-1} \sum_{i=1}^j c_i d_i x^{\delta - \theta_{j,j+1}} S(g_j, g_{j+1}).$$

Nótese que dado que el término más grande de  $U$  es menor que  $x^\delta$  se debe tener que  $\sum c_i d_i = 0$ , y por lo tanto el término  $t$ -ésimo desaparece de la suma anterior. Finalmente,  $p_j - p_k$  tiene término líder menor que  $x^\delta$  ya que en esta diferencia los términos de grado  $x^\delta$  se cancelan entre sí.  $\square$

El siguiente teorema proporciona un método para construir bases de Gröbner.

**Teorema 1.6.2.** *Sea  $I$  un ideal en un anillo de polinomios  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ . Un conjunto  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  para  $I$  es una base de Gröbner si y sólo si para cada par de elementos  $g_i, g_j$  el residuo de una división de  $S(g_i, g_j)$  por  $G$  es igual a cero.*

*Demostración.* Si  $G$  es una base de Gröbner el resultado se tiene ya que  $S(g_i, g_j)$  es un elemento de  $I$ . Recíprocamente, debemos mostrar que si  $f \in I$  entonces el término líder de  $f$  está contenido en el ideal generado por los términos líderes de los  $g_i$ . Escribamos  $f$  como  $f = \sum h_i g_i$ . Sea  $x^\delta = \max\{m_i : i = 1, \dots, t\}$ , donde  $m_i = \text{tl}(h_i g_i)$ , sea minimal. Claramente, la conclusión del teorema se da si  $\text{tl}(f) = x^\delta$ , ya que en este caso  $\text{tl}(f) = \sum \text{tl}(h_i) \text{tl}(g_i)$ . Veamos entonces que  $f$  no puede tener un término líder de grado menor que  $x^\delta$ . Si esto fuera cierto, podríamos escribir  $f$  en la forma:

$$f = \sum_{m_i=x^\delta} \text{tl}(h_i) g_i + \sum_{m_i=x^\delta} (h_i - \text{tl}(h_i)) g_i + \sum_{m_i < x^\delta} h_i g_i.$$

Como los monomios de la segunda y tercera sumatoria tienen grados menor que  $x^\delta$ , esto también deberá ser cierto para la primera sumatoria. Por el lema anterior podemos reescribir esta sumatoria como una combinación lineal de términos de la forma  $x^{\delta-\theta_{jk}}S(g_j, g_k)$ , donde cada uno de estos términos tiene grado menor que  $x^\delta$ . Por hipótesis, sabemos que al dividir  $S(g_i, g_j)$  por  $G$  se obtiene  $S(g_i, g_j) = \sum a_{ijr}g_r$ , donde cada término de esta suma tiene término líder  $\leq \text{tl}(S(g_i, g_j))$ . Multiplicado por  $x^{\delta-\theta_{jk}}$  se obtiene

$$x^{\delta-\theta_{jk}}S(g_j, g_k) = \sum b_rg_r, \text{ donde } b_r = x^{\delta-\theta_{jk}}a_{ijr}, \text{ y } \text{tl}(b_rg_r) < x^\delta.$$

Esto nos permite reescribir  $\sum_{m_i=x^\delta} \text{tl}(h_i)g_i$  como combinación lineal de términos de la forma  $\sum b_rg_r$ , y por lo tanto expresar  $f$  como una suma  $\sum h'_ig_i$ , donde el máximo de los términos líderes de  $h'_ig_i$  es estrictamente menor que  $x^\delta$ . Esto último contradice la minimalidad de  $x^\delta$ .  $\square$

**Observación 1.6.3.** En el teorema anterior cuando se pide que el residuo de una división de  $S(g_i, g_j)$  entre  $G$  sea igual a cero, nos referimos a que esta condición se cumpla para una cualquiera de las posibles divisiones de  $S(g_i, g_j)$  entre  $G$ . Notemos que una vez esto ocurre para todos los pares  $S(g_i, g_j)$ , entonces, al ser  $G$  una base de Gröbner, el residuo de dividir  $S(g_i, g_j)$  entre  $G$  es único, y entonces será igual a cero, sin importar la manera como se haga la división.

**Teorema 1.6.4.** (*Algoritmo de Buchberger*) Sea  $I$  un ideal de  $k[x_1, \dots, x_n]$  y sea  $G_0$  un conjunto de generadores de  $I$ . Una base de Gröbner para  $I$  puede construirse en un número finito de pasos: comenzando con  $G_0$  se van construyendo de manera inductiva conjuntos de generadores para  $I$ ,  $G_0, G_1, \dots, G_k, \dots$  donde  $G_{k+1}$  se obtiene de  $G_k$  de la siguiente manera: para cada par de elementos  $g_i$  y  $g_j$  en  $G_k$ , sea  $S_{i,j} = \overline{S(g_i, g_j)}^{G_k}$  el residuo de dividir (de cualquier manera)  $S(g_i, g_j)$  entre los elementos de  $G_k$ . Hacemos  $G_{k+1}$  igual a la unión de  $G_k$  con el conjunto de todos los  $S_{ij}$  no nulos.

1. Si  $G_{k+1} = G_k$ , el algoritmo termina, y  $G_k$  es una base de Gröbner para  $I$ .
2. Si  $G_{k+1}$  contiene estrictamente a  $G_k$ , se procede a construir  $G_{k+2}$  a partir de  $G_{k+1}$ , como ya se explicó.
3. Procediendo de la manera anterior se obtiene una secuencia ascendente de conjuntos generadores de  $I$   $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k \subset \dots$  Mediante el teorema de la base de Hilbert puede demostrarse que esta secuencia debe estabilizarse en algún momento, es decir, en algún momento el procedimiento explicado más arriba termina (ver [8]).

El siguiente ejemplo muestra la manera de usar el teorema anterior para construir una base de Gröbner.

**Ejemplo 1.6.5.** (*Algoritmo de Buchberger*) Consideremos en  $k[x, y]$  el orden graduado lexicográfico, y tomemos

$$I = (\underbrace{x^3 - 2xy}_{f_1}, \underbrace{x^2y - 2y^2 + x}_{f_2}).$$

La idea para producir una base de Gröbner para  $I$  consiste en ir aumentando el número de polinomios de la base  $G_0 = \{f_1, f_2\}$ , añadiendo paso a paso los S-polinomios necesarios, hasta lograr que el residuo de cualquier S-polinomio sea cero al dividirlo por la nueva base así obtenida. Utilicemos  $\overline{\dots}_G$  para denotar el residuo de la división por  $G$ . En este ejemplo particular vemos que  $S(f_1, f_2) = -x^2$  no es cero al dividirlo por  $G_0$ . Se ve entonces que  $f_3 = \overline{S(f_1, f_2)}^{G_0} = -x^2$  deberá ser añadido al conjunto  $G_0$ . Sea  $G_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$ . Vemos ahora que  $\overline{S(f_1, f_3)}^{G_1} = -2xy$ , de donde vemos que  $G_1$  debe ampliarse a  $G_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ . Igualmente, debemos también incluir en  $G_1$  al polinomio  $f_5 = \overline{S(f_2, f_3)}^{G_1} = -2y^2 + x$ . El lector puede comprobar fácilmente que  $G = \{f_1, \dots, f_5\}$  satisface la hipótesis del teorema anterior, es decir, que  $\overline{S(\overline{f_i, f_j})}^G = 0, 1 \leq i, j \leq 5$ , y por lo tanto es una base de Gröbner para  $I$ .



**David Hilbert** (23 de enero de 1862 - 14 de febrero de 1943) fue un matemático alemán. Es reconocido como uno de los matemáticos más influyentes y universales del siglo XIX y principios del XX. Hilbert descubrió y desarrolló una amplia gama de ideas fundamentales en muchas áreas, incluyendo la teoría de las invariante y la axiomatización de la geometría. También formuló la teoría de los espacios de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional.

## 1.7. Sistemas de ecuaciones polinómicas

En las secciones anteriores desarrollamos un algoritmo que nos permitió calcular una base de Gröbner para un ideal  $I$  de un anillo de polinomios  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ . Nuestro propósito ahora será utilizar este algoritmo para mostrar cómo puede resolverse un sistema cualquiera de ecuaciones polinómicas.

En primer lugar, cuando  $k = \mathbb{C}$  es el campo de los números complejos, un célebre teorema debido a Hilbert (ver [8]) afirma que todo sistema de ecuaciones polinómicas  $E$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

que sea *consistente*, es decir, un sistema para el cual el polinomio constante 1 no pertenece al ideal generado por los polinomios que conforman el sistema,  $I = (f_1, \dots, f_n)$ , tiene por lo menos una solución. De manera precisa:

**Teorema 1.7.1. (Nullstellensatz)** *El sistema (1.7) en el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  tiene al menos una solución en  $\mathbb{C}^n$  si y solo si el polinomio constante 1 no pertenece al ideal  $I = (f_1, \dots, f_n)$ .*

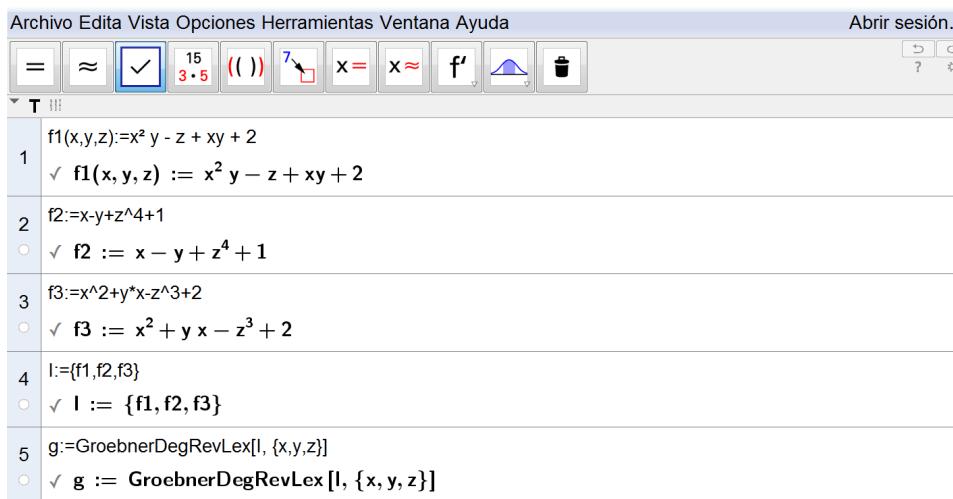
Las *Bases de Gröbner* permiten decidir si 1 está o no contenido en  $I$ : fijamos primero un orden monomial arbitrario. Computamos luego, con respecto a este orden, una base de Gröbner para  $I$   $g_1, \dots, g_s$ . Recordemos que esto significa que el ideal de términos líderes  $\text{tl}(I)$  está generado por  $\text{tl}(g_1), \dots, \text{tl}(g_s)$ . Y esto a su vez es equivalente a decir que si  $f \in I$  entonces  $\text{tl}(f)$  es divisible por algún  $\text{tl}(g_i)$ . Luego, si  $1 \in I$  entonces  $\text{tl}(1) = 1$  deberá ser divisible por algún  $\text{tl}(g_i)$ , lo cual fuerza a que  $g_i = c$ , es una constante no nula. De manera recíproca, si algún  $g_i = c$ , una constante distinta de cero, entonces  $1 = (1/c)g_i \in I$ , pues los  $g_i$  son por definición elementos de  $I$ . En síntesis:

**Teorema 1.7.2.** Para saber si el sistema (1.7) en  $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  tiene al menos una solución basta fijar cualquier orden monomial en  $R$  y calcular una base de Gröbner  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ . Para que el sistema tenga solución se necesita, y es suficiente, que ninguno de los polinomios  $g_i$  sea una constante distinta de cero.

**Ejemplo 1.7.3.** Determinemos si el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}f_1 &= x^2y - z + xy + 2 \\f_2 &= x - y + z^4 + 1 \\f_3 &= x^2 + yx - z^3 + 2\end{aligned}$$

tiene solución en los complejos. Para ello utilizamos GeoGebra para computar una base de Gröbner para el ideal  $I = (f_1, f_2, f_3)$ , como se indica a continuación:



The screenshot shows the GeoGebra interface with the following input history:

```

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
          Abrir sesión..
      = ≈ ✓ 15 3•5 ( ) 7 x = x ≈ f' f
  ✓ f1(x,y,z):=x² y - z + x y + 2
  ✓ f1(x,y,z) := x² y - z + x y + 2
  ✓ f2:=x-y+z^4+1
  ✓ f2 := x - y + z⁴ + 1
  ✓ f3:=x^2+y*x-z^3+2
  ✓ f3 := x² + y x - z³ + 2
  ✓ I:={f1,f2,f3}
  ✓ I := {f1, f2, f3}
  ✓ g:=GroebnerDegRevLex[I, {x,y,z}]
  ✓ g := GroebnerDegRevLex [I, {x, y, z}]

```

Ahora, usamos el comando *Extrae* para listar cada uno de los polinomios de la base  $G$  y visualizarlos de manera cómoda:

5	G:=GroebnerDegRevLex[I, {x,y,z}]
6	✓ G := GroebnerDegRevLex [I, {x, y, z}]
6	Extrae[G, 1, 1]
	→ {y⁴ - 17 y³ + 4 x y z + 24 y² z + 19 x z² + 7 y z² - 19 x² - 45 x y + 38 y² - 18 x z - 61 y z - z² + 6 x - 25 y + 61 z - 71}
7	Extrae[G, 2, 2]
	→ {8 y³ z + 11 y³ - 37 x y z - 51 y² z - 33 x z² - 8 y z² + 28 x² + 34 x y + 51 x z + 69 y z - 26 z² + x - 24 y - 60 z + 129}
8	Extrae[G, 3, 3]
	→ {8 x y z² - y³ - 9 x y z - 7 y² z - 13 x z² + 4 x² + 18 x y + 8 y² + 15 x z + 17 y z - 2 z² - 11 x - 16 y - 20 z + 29}

9	Extrae[G, 4, 4]
	→ {2 y <sup>2</sup> z <sup>2</sup> - y <sup>3</sup> - 11 x y z - y <sup>2</sup> z - 5 x z <sup>2</sup> - 6 y z <sup>2</sup> + 2 x <sup>2</sup> + 2 x y + 10 y <sup>2</sup> + 11 x z - y z - 2 z <sup>2</sup> - x - 18 y - 4 z + 21}
10	Extrae[G, 5, 5]
	→ {4 x <sup>3</sup> + y <sup>3</sup> + 17 x y z + 3 y <sup>2</sup> z + 9 x z <sup>2</sup> + 4 y z <sup>2</sup> - 4 x <sup>2</sup> - 18 x y - 16 y <sup>2</sup> - 23 x z - 5 y z + 10 z <sup>2</sup> + 19 x + 32 y + 16 z - 53}
11	Extrae[G, 6, 6]
	→ {x <sup>2</sup> y + x y - z + 2}

12	Extrae[G, 7, 7]
	→ {x y <sup>2</sup> - 2 x y z - x z <sup>2</sup> - y z <sup>2</sup> - x y + y <sup>2</sup> + 2 x z - y - z + 2}
13	Extrae[G, 8, 8]
	→ {x <sup>2</sup> z + x y z + x - y + 2 z + 1}
14	Extrae[G, 9, 9]
	→ {z <sup>3</sup> - x <sup>2</sup> - x y - 2}
15	Extrae[G, 10, 10]
	→ {}

Vemos entonces que  $G$  consiste de nueve polinomios, ninguno de los cuales es constante. De aquí que  $E$  tenga al menos una solución.

### 1.7.1. Soluciones explícitas

Utilizando las bases de Gröbner se pueden encontrar explícitamente todas las soluciones de un sistema de ecuaciones. La idea es resolver el sistema mediante una inducción sobre el número de variables. Empezamos por ordenar las variables  $x_i$  en *orden lexicográfico* de tal manera que  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ . Usando este orden construimos una base de Gröbner  $G = \{g_1, \dots, g_r\}$  para el ideal  $I$ . Bajo este orden el *ideal de eliminación*  $I_k$ , definido como  $I \cap k[x_{k+1}, \dots, x_n]$  (este conjunto es un ideal de  $k[x_{k+1}, \dots, x_n]$ , pero no del anillo original  $k[x_1, \dots, x_n]$ ), resulta generado por aquellos elementos de  $G$  en los que no aparecen las primeras  $k$  variables  $x_1, \dots, x_k$ . Más aún, demostraremos que estos elementos forman a su vez una base de Gröbner para  $I_k$ . Ahora, como  $I$  también está generado por  $g_1, \dots, g_r$ , el conjunto de soluciones del sistema (1.1) coincide con el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

y podemos entonces restringirnos al caso en el que el sistema original está conformado por elementos de una base de Gröbner. Denotemos por  $G_1$  al conjunto de todos aquellos  $g_i$  que no contienen la variable  $x_1$  (este conjunto podría ser vacío). Si suponemos

por inducción que sabemos encontrar las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} g_{l_1}(x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_{l_s}(x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

formado por los elementos de  $G_1$ , entonces basta saber como “completar” estas soluciones a soluciones del sistema original. Para resolver (1.2). Este procedimiento se puede continuar, reduciendo en cada paso el número de variables. Comencemos por demostrar la siguiente proposición.

**Proposition 1.7.4.** *Sea  $G$  una base de Gröbner para un ideal  $I \subset R = k[x_1, \dots, x_n]$ , con el orden lexicográfico obtenido después de ordenar las variables  $x_i$  en la forma siguiente:  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ . Sea  $I_k$  el  $k$ -ésimo ideal de eliminación (definido en el párrafo anterior). Entonces una base de Gröbner para  $I_k$  está dada por aquellos polinomios de  $G$  donde no aparecen las variables  $x_1, \dots, x_k$ .*

*Demuestração.* Sea  $G = \{g_1, \dots, g_r, g_{r+1}, \dots, g_n\}$  una base de Gröbner para  $I$ , donde, cambiando la numeración de los  $g_i$ , en caso de ser necesario, podemos suponer que  $g_1, \dots, g_r$  son aquellos polinomios de  $G$  donde no aparecen ninguna de las variables  $x_1, \dots, x_k$ . Tomemos un elemento  $f \in I_k$ . Debemos probar que el término líder de  $f$  es divisible por alguno de los términos líderes de  $g_1, \dots, g_r$ . Como  $G$  es una base de Gröbner para  $I$ , existe un  $g_j$  con la propiedad de que su término líder divide a  $\text{tl}(f)$ . Como todos los términos de  $f$  solo involucran variables  $x_{k+1}, \dots, x_n$ , y como  $\text{tl}(g_j)$  divide a uno de ellos (a  $\text{tl}(f)$ ), entonces el término líder de  $g_j$  también deberá involucrar solo estas mismas variables. Pero de ser así, ningún otro término *cu* de  $g_j$  podrá involucrar ninguna de las primeras  $k$ -variables  $x_1, \dots, x_k$ , pues en el orden *lex* con  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  el término *cu* sería necesariamente mayor que  $\text{tl}(g_j)$ . Luego  $g_j \in I_{k+1} = I \cap k[x_{k+1}, \dots, x_n]$ .  $\square$

En resumen, el procedimiento práctico para resolver un sistema  $E$  dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde  $f_1, \dots, f_m$  son polinomios en  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ , sería el siguiente: empezamos por ordenar las variables  $x_i$  de  $R$  en *orden lexicográfico* de tal manera que  $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$ . Usando este orden construimos una base de Gröbner  $G = \{g_1, \dots, g_r\}$  para el ideal  $I$  generado por  $f_1, \dots, f_m$ . Como ciertamente  $I = (g_1, \dots, g_r)$ , entonces  $V(f_1, \dots, f_m) = V(g_1, \dots, g_r) = V(I)$ . Es decir, el sistema de ecuaciones (1.3) tiene las mismas soluciones que el sistema (1.1), pues definen la misma variedad. Basta entonces resolver (1.1). La ventaja es que (1.1) es un *sistema triangular*. Los siguientes ejemplos servirán para aclarar esta noción.

**Ejemplo 1.7.5.** Consideremos en  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$  el siguiente sistema de ecuaciones (lineales)  $f_1 = x + z + 1$ ,  $f_2 = 2x - 5y - 6z - 1$ ,  $f_3 = x - z - 2$ . El comando GroebnerLex[ {f1,f2,f3},{x,y,z} ] de GeoGebra permite computar un base de Gröbner para  $I = (f_1, f_2, f_3)$

1	$f1:=x+z+1$
	✓ $f1 := x + z + 1$
2	$f2:=2*x-5*y-6*z-1$
	✓ $f2 := 2 x - 5 y - 6 z - 1$
3	$f3:=x-z-2$
	✓ $f3 := x - z - 2$
4	$\text{GroebnerLex}[\{f1,f2,f3\}, \{x,y,z\}]$
	→ $\{-2 x + 1, -5 y + 9, -2 z - 3\}$

Ventana CAS

Notemos que la base de Gröbner presenta una forma *triangular*, como en la definición clásica del álgebra lineal.

**Ejemplo 1.7.6.** Consideremos en  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$  el siguiente sistema de ecuaciones (no lineales):

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 - 2z^2 + y^2 \\ f_2 &= y^2 - z^2 - 4y \\ f_3 &= -4zx + y^2 + 1 \end{aligned}$$

Escojamos el orden lex en  $R$ , ordenando las variables de tal modo que  $x > y > z$ . El comando  $\text{GroebnerLex}[\{f1,f2,f3\}, \{x,y,z\}]$  de GeoGebra permite computar un base de Gröbner para  $I = (f_1, f_2, f_3)$ :

GeoGebra	
Archivo	Edita
Vista	Opciones
Herramientas	Ventana
Ayuda	Abrir sesión
	?
T	
1	$f1:=x^2+y^2-2z^2$
	✓ $f1 := x^2 + y^2 - 2 z^2$
2	$f2:=y^2-z^2-4y$
	✓ $f2 := y^2 - z^2 - 4 y$
3	$f3:=-4zx+y^2+1$
	✓ $f3 := -4 z x + y^2 + 1$
4	$G:=\text{GroebnerLex}[\{f1,f2,f3\}, \{x,y,z\}]$
	✓ $G := \text{GroebnerLex}[\{f1, f2, f3\}, \{x, y, z\}]$

La base de Groebner está dada por  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ , donde

5	Extrae[G,1,1]
	→ {225 z <sup>8</sup> – 10044 z <sup>6</sup> – 9210 z <sup>4</sup> + 324 z <sup>2</sup> + 289}
6	Extrae[G,2,2]
	→ {768 y + 75 z <sup>6</sup> – 3423 z <sup>4</sup> + 193 z <sup>2</sup> + 107}

8	g1(z):=225z <sup>8</sup> -10044z <sup>6</sup> -9210z <sup>4</sup> +324z <sup>2</sup> +289
	✓ g1(z) := 225 z <sup>8</sup> – 10044 z <sup>6</sup> – 9210 z <sup>4</sup> + 324 z <sup>2</sup> + 289
9	g2(y,z):=768y+75z^6-3423z^4+193z^2+107
	✓ g2(y, z) := 768 y + 75 z <sup>6</sup> – 3423 z <sup>4</sup> + 193 z <sup>2</sup> + 107
10	g3(x,y,z):=13056x+1125z^7-48945z^5-104241z^3+1637z
	✓ g3(x, y, z) := 13056 x + 1125 z <sup>7</sup> – 48945 z <sup>5</sup> – 104241 z <sup>3</sup> + 1637 z

$$g_1(z) = 225z^8 - 10044z^6 - 9210z^4 + 324z^2 + 289$$

$$g_2(y, z) = 768y + 75z^6 - 3423z^4 + 193z^2 + 107$$

$$g_3(x, y, z) = 13056x + 1125z^7 - 48945z^5 - 104241z^3 + 1637z$$

El sistema puede resolverse hallando primero las ocho raíces de  $g_1(z) = 0$ , de las cuales solo cuatro son reales, y reemplazando cada una de ellas en las ecuaciones  $g_2$  y  $g_3$ . A continuación se resuelve para  $y$  y  $x$ , de manera sucesiva.

Utilizamos GeoGebra para hallar las raíces (reales) de  $g_1$  mediante el comando ResoluciónN[g1] (resolución numérica)

11	ResoluciónN[g1(z),z]
	→ {z = -6.75, z = -0.42, z = 0.42, z = 6.75}

Vemos entonces que  $g_3$  posee cuatro raíces reales y cuatro complejas. Substituyendo la raíz  $z = -6,75$  en  $g_2$  y  $g_3$  obtenemos

$$g_2(y, -6,75) = 0 \implies y = 9,04$$

$$g_3(x, 9,04, -6,75) = 0 \implies x = -3,06$$

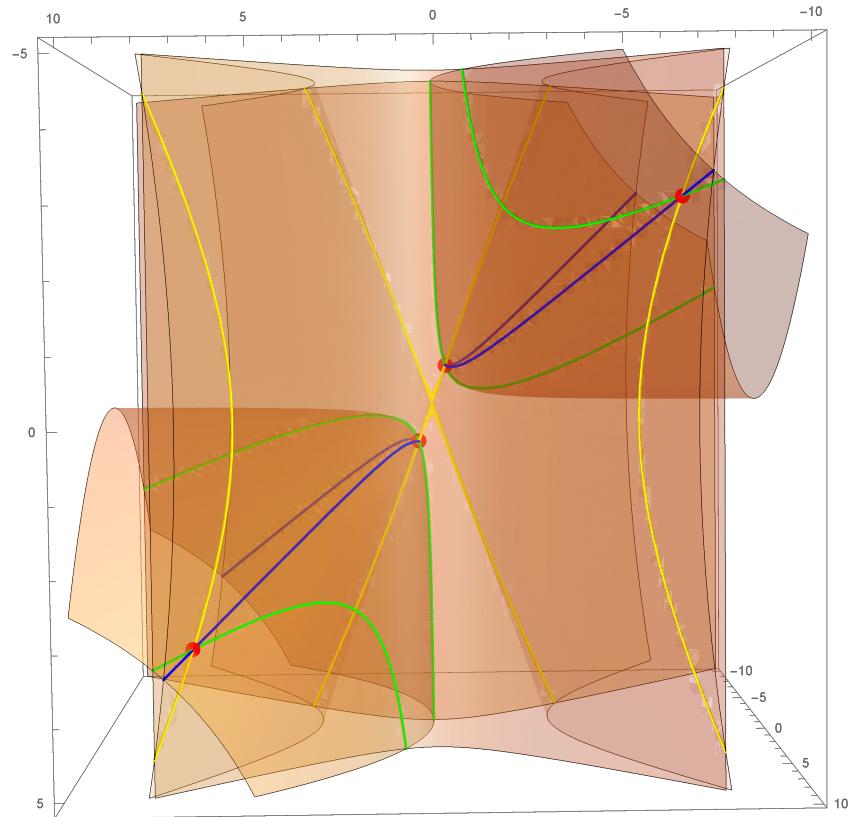
De aquí que el punto  $(-3,06, 9,04, -6,75)$  esté en la variedad cortada por  $f_1, f_2, f_3$ . De manera similar se obtienen los puntos:

$$\{x = 3,06, y = 9,04, z = 6,75\}$$

$$\{x = 0,59, y = -0,04, z = 0,42\}$$

$$\{x = -0,59, y = -0,04, z = -0,42\}$$

En la siguiente figura podemos ver los cuatro puntos que conforman la solución del sistema de ecuaciones. Las curvas amarillas corresponden a la solución del sistema  $\{f_1 = 0, f_2 = 0\}$ , las curvas azules al sistema  $\{f_1 = 0, f_3 = 0\}$ , las curvas verdes al sistema  $\{f_2 = 0, f_3 = 0\}$  y finalmente los cuatro puntos rojos corresponden a la solución de  $\{f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0\}$ .



## Ejercicios

- Organice los términos de  $f = 1 + z^2 + z + yz + y + y^2 + x + xz + y^2z$  de mayor a menor, y de acuerdo con cada orden indicado:
  - (Orden lex). Respuesta:  $f = xz + x + y^2z + y^2 + yz + y + z^2 + z + 1$
  - (Orden glex). Respuesta:  $f = y^2z + xz + y^2 + yz + z^2 + x + y + z + 1$ .
  - (Orden grevlex). Respuesta:  $f = y^2z + y^2 + xz + yz + z^2 + x + y + z + 1$ .

2. Utilizando el orden lex en  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ ,  $x > y > z$ , encuentre un residuo para  $f = x^3y - x^2y^2 + 3xz - zy^2 + 1$  al dividirlo entre  $g_1 = x^2 - 1$ ,  $g_2 = xy + 1$ ,  $g_3 = zy - 1$ . Una posible respuesta sería

$$f = \underbrace{(xy - y^2)}_{a_1} g_1 + \underbrace{(1)}_{a_2} g_2 + \underbrace{(-y)}_{a_3} g_3 + \underbrace{(-y - y^2 + 3xz)}_{\text{residuo}}.$$

3. (Computacional) Utilice el programa Singular o Mathematica para resolver el problema anterior.
4. Sean  $f = y^2x - x$  y  $g_1 = yx - y$  y  $g_2 = y^2 - x$  en  $\mathbb{Q}[x, y]$ , con orden  $>_{grlex}$ , graduado lexicográfico. Muestre que distintas maneras de dividir  $f$  entre  $\{g_1, g_2\}$  pueden producir residuos diferentes.
5. Sea  $R = k[x_1, \dots, x_m]$ , con un cierto orden monomial fijo  $>$ , y sea  $I \subset R$  un ideal. Explique por qué si  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  es una base de Gröbner para  $I$ , el residuo de dividir a  $f$  entre  $G$  no depende de la manera como hagamos la división.
6. Sea  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ , con orden  $>_{lex}$ . Calcule los siguientes  $S$ -polinomios  $S(f_1, f_2)$ :  $f_1 = x - 13y^2 - 12z^3$ ,  $f_2 = x^2 - xy + 92z$ ,  $f_1 = xz - y^2 - xz^3$ ,  $f_2 = x^2yz^2 - xy + z$ .
7. En orden reverso lexicográfico  $>_{revlex}$ , con  $f_1 = x - z + x^2$ ,  $f_2 = -1 + z + y + x$ .
8. Sea  $g_1 = 2xy - 1$  y  $g_2 = 3y^2 + x$  en  $\mathbb{Q}[x, y]$ , con orden  $>_{grlex}$ , graduado lexicográfico. Entonces explique por qué es falaz el siguiente razonamiento: de acuerdo con el criterio de Buchberger, para que  $G = \{g_1, g_2\}$  sea una base de Gröbner para  $J = (g_1, g_2)$  es suficiente que  $S(g_1, g_2) \rightarrow_G 0$ . Es decir, es suficiente que una división cualquiera de  $S(g_1, g_2)$  entre los elementos de  $G$  produzca residuo cero. Pero la expresión anterior,
- $$S(g_1, g_2) = \underbrace{(1/2x)}_{a_1} g_1 + \underbrace{(-1/3y)}_{a_2} g_2 + \underbrace{0}_{\text{residuo}} \tag{1.4}$$
- sería una división con residuo cero. Luego  $G$  sería una base de Gröbner. De otro lado,  $S(g_1, g_2) = 1/2yg_1 - 1/3xg_2 = -y/2 - x^2/3$  es un elemento del ideal  $J$  cuyo término líder,  $-x^2/3$ , no es divisible, ni por  $\text{tl}(g_1) = 2xy$  ni por  $\text{tl}(g_2) = 3y^2$ . ¡Luego  $G$  no puede ser una base de Gröbner!
9. Utilizando el algoritmo de Buchberger encuentre una base de Gröbner para  $I = (x^2y + z, xz + y)$  en  $\mathbb{Q}[x, y, z]$ , con orden  $lex$ .
10. Encuentre una solución en los números reales para el siguiente sistema de ecua-

ciones:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= 0 \\y^4 - 4 &= 0 \\wx + w &= 0 \\wy + 2w &= 0 \\xy + 2x - y - 2 &= 0 \\xy + y - 2x - 2 &= 0 \\xz + z - 3x - 3 &= 0 \\yz + 2z - 3y - 6 &= 0\end{aligned}$$

12. Muestre que el sistema siguiente no tiene ninguna solución

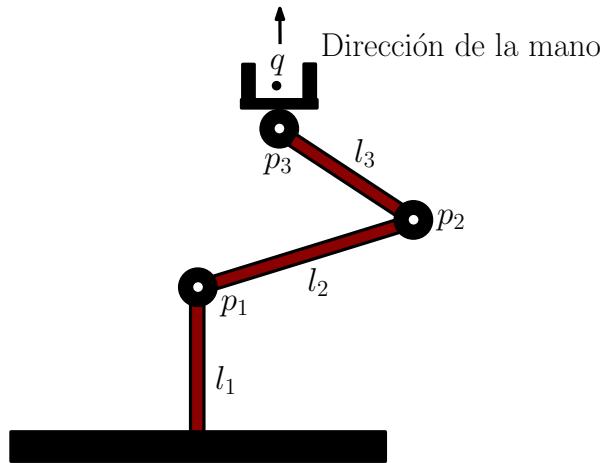
$$\begin{aligned}x^2 + y^3 &= 0 \\z^4 - wxy &= 0 \\x^2z^4 - x^3wy + y^3z^4 - y^4wx + 2 &= 0\end{aligned}$$

## CAPÍTULO 2

### Control cinemático de brazos mecánicos

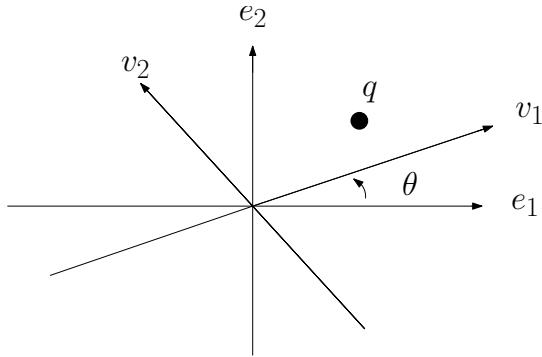
En esta sección mostraremos una aplicación de la teoría desarrollada hasta el momento al denominado *problema inverso cinemático para el control de un brazo robotizado*.

Comencemos por discutir un brazo robótico planar sencillo, como se muestra a continuación: tres segmentos de longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  se articulan en junturas  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ , con posibilidad de rotar una vuelta completa alrededor de cada una de ellas. En la juntura  $p_3$  se articula la mano del brazo mecánico. Fijados un punto  $q$  en el plano y una determinada dirección  $v$  para la mano, el problema consiste en calcular cuáles deben ser los posibles ángulos de rotación  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , en cada una de las junturas (medidos en sistemas de coordenadas apropiados, como se explicará a continuación) que permitan situar la mano robótica en  $q$ , orientada en la dirección del vector  $v$ .



Comencemos discutiendo cómo pasar de un sistema de coordenadas a otro sistema trasladado y rotado con respecto al primero.

Fijemos un sistema de coordenadas  $E = \{e_1, e_2\}$ . Sea  $V = \{v_1, v_2\}$  otro sistema de coordenadas rotado un ángulo  $\theta$  (medido en el sentido positivo, es decir, contrario a las manecillas del reloj) con respecto a  $E$ :



En los cursos de álgebra lineal se demuestra que si  $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$  son las coordenadas de  $q$  medidas en el sistema  $V$  entonces las coordenadas en el sistema  $E$  pueden obtenerse multiplicando este vector por la *matriz de rotación*

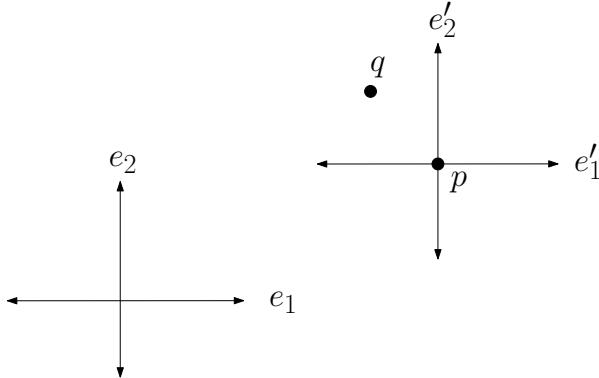
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

son las coordenadas de  $q$  referidas al sistema  $E$ .

De otro lado, si  $E' = \{e'_1, e'_2\}$  es un sistema coordenado cuyo origen está localizado en el punto  $p$ , con ejes paralelos a los de  $E$ ,



entonces, si las coordenadas de  $q$  en  $E'$  son  $\begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix}$ , las coordenadas en  $E$  serían

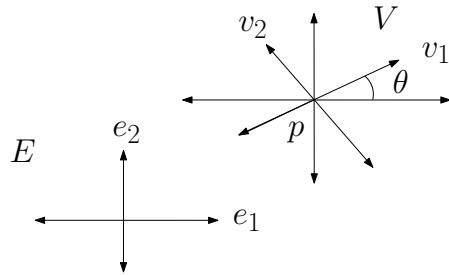
$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

donde  $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$  son las coordenadas de  $p$  referidas a  $E$ .

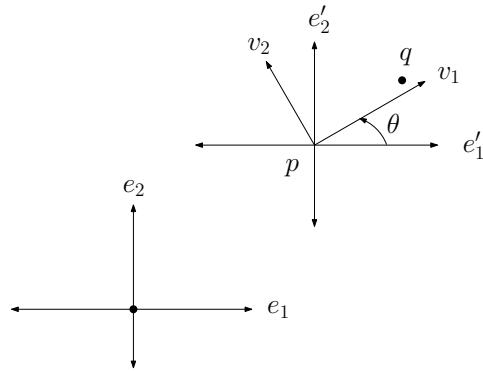
Finalmente, si  $V = \{v_1, v_2\}$  es un sistema coordenado cuyo origen está situado en  $p$ , y cuyos ejes se han rotado un angulo  $\theta$  con respecto a los ejes de  $E$ , entonces si  $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$  son las coordenadas de  $q$  con respecto a  $V$ , las coordenadas de  $q$  con respecto a

$E$  serían  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , donde

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$



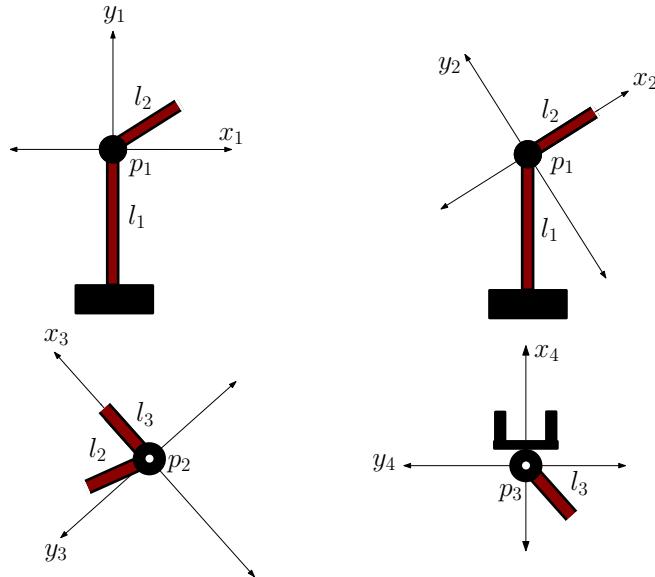
La razón es simple: para hallar las coordenadas de  $q$  en el sistema  $E'$ , multiplicamos el vector  $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$  por la matriz de rotación. Luego, a este nuevo vector, le sumamos  $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$  para computar así sus coordenadas con respecto a  $E$ , como observamos en el párrafo anterior.



Empecemos por fijar en la juntura  $p_1$  un sistema *absoluto*  $E_1$  con el eje  $x_1$  paralelo al piso y eje  $y_1$  en dirección vertical. Con respecto a este sistema haremos las mediciones de las posiciones de cualquier punto en el plano que la mano deseé alcanzar, así como la orientación de la misma.

De otro lado, en cada juntura  $p_i$  (incluyendo  $p_1$ ) definimos sistemas  $E_{i+1}$ , de tal manera que el eje positivo  $x_{i+1}$  vaya en la dirección del segmento  $l_{i+1}$ , y el eje  $y_{i+1}$  sea perpendicular a  $x_{i+1}$ , y de tal forma que al ir de  $x_{i+1}$  a  $y_{i+1}$  se respete la *condición de giro de la mano derecha*: al mover los dedos de dicha mano, de  $x_{i+1}$  a  $y_{i+1}$ , el pulgar

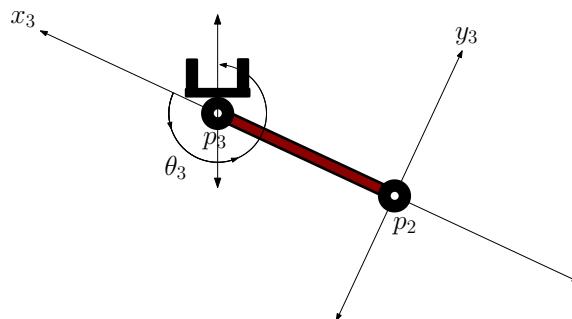
debe apuntar hacia afuera del papel. En la última juntura, donde se articula la mano, el eje  $x_{n+1}$  se tomará en la dirección de la misma dirección de la mano.



Supongamos, en nuestro brazo de ejemplo, que  $\begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix}$  son las coordenadas de un punto  $q$  en el sistema  $E_4$ . Entonces, referido al sistema  $E_3$  sus coordenadas serían

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $\theta_3$  es el ángulo (medido en dirección positiva) que forma la mano con respecto al sistema  $E_3$



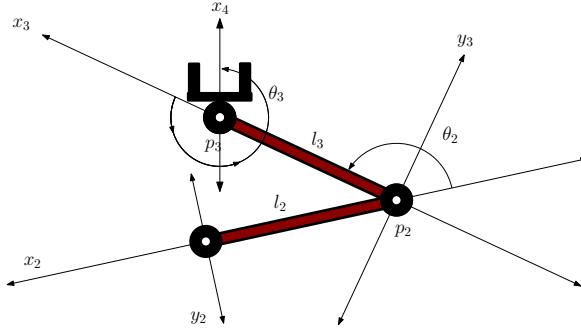
La ecuación 2.1 puede escribirse en forma compacta como

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & l_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_3} \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Razonando de manera similar, con respecto al sistema  $E_2$ , las coordenadas de  $q$  se pueden computar entonces como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & l_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde  $\theta_2$  es el ángulo que forma el segmento  $l_3$  con respecto al eje  $x_2$ :



Finalmente, si  $\theta_1$  es el ángulo que forma  $l_2$  con respecto al eje  $x_1$ , con respecto a  $E_1$ , las coordenadas de  $q$  estarían dadas por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notemos que la entrada superior derecha de la matriz anterior es un cero, en lugar

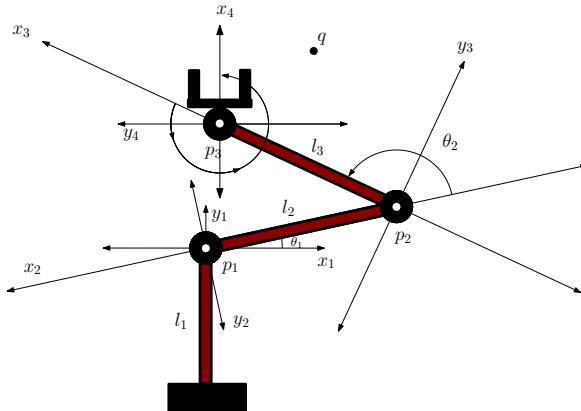


Figura 2.1: Sistemas coordinados.

de  $l_1$ , puesto que los sistemas  $E_2$  y  $E_1$  tienen el mismo punto origen (la articulación  $p_1$ , ver figura 2.1).

**Observación 2.0.1.** En resumen, el punto  $q$ , de coordenadas  $\begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix}$ , en las coordenadas absolutas  $E_1$ , se expresaría como  $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , donde

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 A_2 A_3 \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Un cómputo directo (y utilizando las identidades trigonométricas para el coseno y el seno de la suma de ángulos) muestra que  $A_1 A_2 A_3$  es igual a la matriz

$$A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así, para un punto  $q$  que esté situado en la mano del robot, es decir cuyas coordenadas con respecto a  $E_4$  sean  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , referido a  $E_1$  sus coordenadas serían

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que es igual al vector

$$\begin{bmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, notemos que la mano forma un ángulo igual a  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  con respecto al eje  $x_1$ . Así, para posicionar la mano en el punto  $q$ , con dirección (con respecto a  $x_1, y_1$ ), digamos  $\alpha$ , debemos escoger  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \alpha$ , y

$$\begin{bmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

donde  $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$  son las coordenadas de  $q$  referidas al sistema  $E_1$ . Una vez determinados  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , basta tomar  $\theta_3 = \alpha - (\theta_1 + \theta_2)$  para fijar la orientación de la mano. Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) &= c \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) &= d \end{aligned}$$

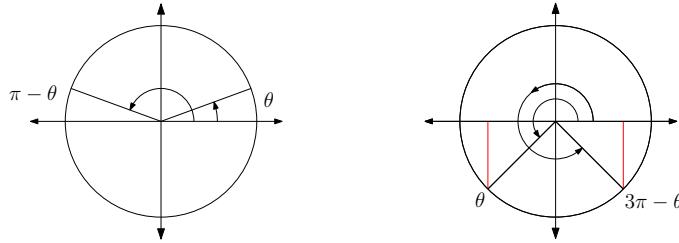
O, de manera equivalente, el sistema

$$\begin{aligned} l_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) &= c \\ l_3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) &= d \end{aligned}$$

Este último sistema puede cambiarse por un problema de ecuaciones polinómicas, haciendo  $x = \cos(\theta_1)$ ,  $y = \sin(\theta_1)$ ,  $z = \cos(\theta_2)$ ,  $w = \sin(\theta_2)$ :

$$\begin{aligned} l_3xz - l_3yw + l_2x - c &= 0 \\ l_3yz + l_3xw + l_2y - d &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \\ z^2 + w^2 &= 1 \end{aligned}$$

**Observación 2.0.2.** Notemos que un ángulo  $0 \leq \theta < 2\pi$  queda únicamente determinado si conocemos su seno y coseno. Para un valor de  $y$ , hay dos posibles ángulos tales que su seno es  $y$ . Estos son:  $\theta$  o  $\pi - \theta$ , si  $0 \leq \theta \leq \pi$ . O bien  $\theta$  o  $3\pi - \theta$ , si  $\pi < \theta < 2\pi$ . En cada caso, el coseno quedará determinado, excepto el signo. Luego, conocido  $x$ , es decir, el coseno del ángulo, existirá un único ángulo  $\theta$  con  $y = \sin(\theta)$  y  $x = \cos(\theta)$ .



Hasta ahora hemos planteado un sistema de ecuaciones con funciones trigonométricas para hallar las coordenadas de un punto  $q$  en un sistema coordinado trasladado con  $E_4$  con respecto a un primer sistema de coordenado  $E_1$ . En la siguiente sección cambiaremos el sistema que tenemos a un sistema de ecuaciones polinómicas en donde usaremos los conceptos que desarrollamos en el capítulo anterior para resolverlo.

## 2.1. Análisis del caso $l_2 = l_3$

Comencemos por resolver el sistema para  $l_2 = l_3 = 1$ . Para ello computamos una base de Gröbner con el orden *lex*, tomando, por ejemplo,  $z > w > x > y$ . Utilizando *GeoGebra* obtenemos una base con los siguientes seis elementos:

$$\begin{aligned} f_1 &= c^4 + d^4 + 2c^2d^2 + 4c^2y^2 + 4d^2y^2 - 4d^3y - 4c^2dy - 4c^2 \\ f_2 &= c^2 + d^2 - 2cx - 2dy \\ f_3 &= -c^3 - cd^2 - 4cy^2 - 2d^2x + 2cdy + 4dxy + 4c \\ f_4 &= x^2 + y^2 - 1 \\ f_5 &= cy - dx + w \\ f_6 &= -c^2 - d^2 + 2z + 2 \end{aligned}$$

**CASO DEGENERADO:**  $c = d = 0$ .

Esta condición implica que el punto  $q$  se encuentra en el punto origen del sistema de coordenadas absoluto,  $E_1$ . En este caso, la base anterior se reduce a las ecuaciones siguientes:

$$f_4 = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$f_5 = w = 0$$

$$f_6 = 2z + 2 = 0$$

De aquí se sigue inmediatamente que  $\theta_1$  puede escogerse de manera arbitraria (*hay infinitas soluciones*) y  $z = \cos(\theta_2) = -1$ , de donde se desprende una única solución  $\theta_2 = \pi$ , lo cual se puede visualizar en la situación geométrica siguiente, donde el brazo  $l_3$  se dobla sobre el brazo  $l_2$ .

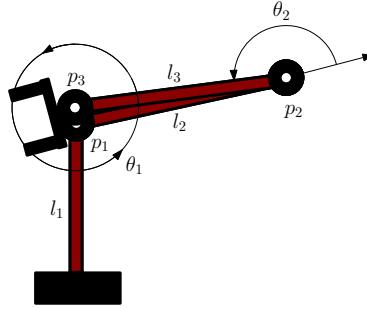


Figura 2.2:  $c = 0$  y  $d = 0$

#### NO HAY DEGENERACIÓN: $c \neq 0$ o $d \neq 0$ .

La primera ecuación  $f_1$  puede escribirse en la forma

$$4(c^2 + d^2)y^2 - 4d(c^2 + d^2)y + (c^2 + d^2)^2 - 4c^2 = 0.$$

O de manera equivalente, como

$$y^2 - dy + \frac{(c^2 + d^2)^2 - 4c^2}{4(c^2 + d^2)} = 0.$$

(El denominador está bien definido, pues suponemos  $c \neq 0$  o  $d \neq 0$ ). Sus soluciones pueden hallarse con la fórmula para resolver la ecuación cuadrática (o pueden encontrarse utilizando *Geogebra* o *Mathematica*). Así obtenemos que:

$$y = \frac{d}{2} \pm |c| \frac{\sqrt{4 - (c^2 + d^2)}}{2\sqrt{c^2 + d^2}} \quad (2.2)$$

(los comandos utilizados para resolver y simplificar estas soluciones se muestran a continuación:

**WOLFRAM Mathematica**

```
In[7]:= g=4(c^2+d^2)y^2-4d(c^2+d^2)y+(c^2+d^2)^2-4c^2
Solve[g==0, y]

Out[7]= {{y→c^2d+d^3-√(4c^4-c^6+4c^2d^2-2c^4d^2-c^2d^4)over2(c^2+d^2)}, {y→c^2d+d^3+√(4c^4-c^6+4c^2d^2-2c^4d^2-c^2d^4)over2(c^2+d^2)}}

In[8]:= (* Factorizamos el radicando: *)
Factor[4c^4-c^6+4c^2d^2-2c^4d^2-c^2d^4]

Out[8]= c^2(4-(c^2+d^2))(c^2+d^2)
```

Finalmente podemos simplificar las raíces y obtener la expresión que buscamos.

Dividamos la situación no degenerada en dos subcasos:

**Caso I:**  $c = 0$ .

Ello ocurre cuando la mano esté situada precisamente sobre el eje  $y_1$ . En este caso, la ecuación 2.2 produce  $y = d/2$ . Las ecuaciones  $f_2$  y  $f_3$  no aportan nada, y de  $f_4$  se deduce  $x = \pm 1/2\sqrt{4 - d^2}$ . Los valores de  $z$  y  $w$  quedan determinados, una vez conocemos  $y$  y  $x$ . En efecto:  $z = (d^2 - 2)/2$ ,  $w = dx$ .

Vemos entonces que si  $|d| < 2$  (y por tanto  $4 - d^2 > 0$ ) existen dos soluciones para  $x = \cos(\theta_1)$ , y por tanto, dos soluciones para  $\theta_1$ . Y existe una única solución, si  $|d| = 2$ , como se muestra a continuación:

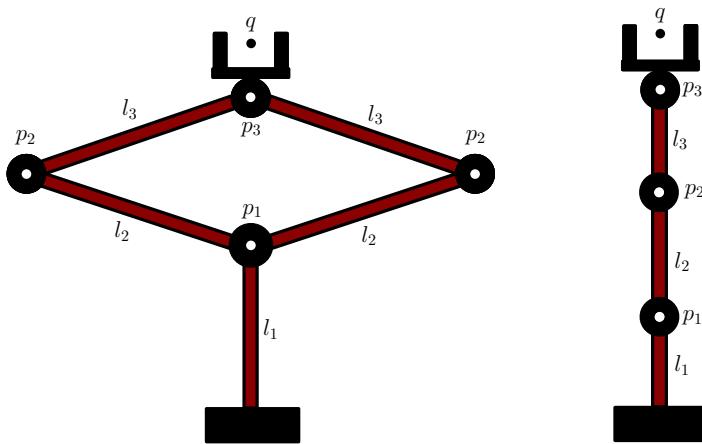


Figura 2.3:  $c \neq 0$

Si  $|d| > 2$ , no existe ninguna solución, lo cual es explicable pues en este caso el punto  $q$  se encuentra a una distancia mayor que 2, por fuera del máximo alcance de los

brazos, que ocurre precisamente cuando  $l_2$  y  $l_3$  son colineales.

**CASO II:**  $c \neq 0$

De la ecuación  $f_2 = c^2 + d^2 - 2cx - 2dy = 0$  se obtiene:

$$x = \frac{c^2 + d^2 - 2dy}{2c}, \quad (2.3)$$

$$\text{donde, recordemos, } y = \frac{d}{2} \pm |c| \frac{\sqrt{4 - (c^2 + d^2)}}{2\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Una vez fijados valores para  $x$  y  $y$ , (y por tanto determinado  $\theta_1$ ), de la ecuación quinta se obtiene un único valor para  $w$ , dado por

$$w = dx - cy \quad (2.4)$$

La sexta ecuación siempre nos da una única para  $z$ , dada por:

$$z = \frac{(c^2 + d^2) - 2}{2}. \quad (2.5)$$

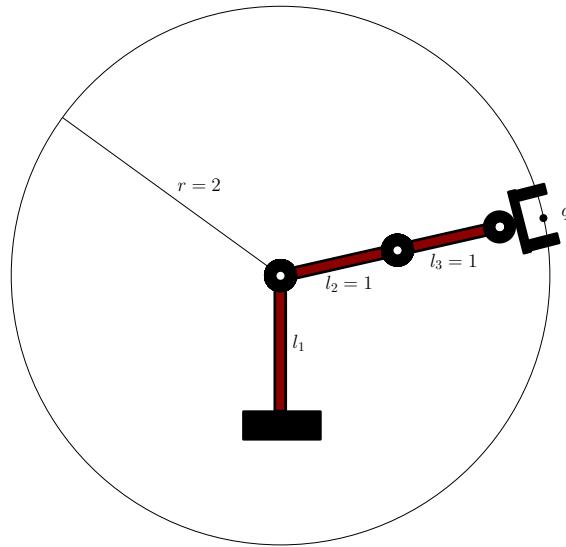
Esta información, claramente, determina  $\theta_2$ . Dividamos el análisis en tres subcasos, dependiendo del hecho de que el valor dentro del radical,  $4 - (c^2 + d^2)$ , sea positivo, cero o negativo.

1.  $c^2 + d^2 > 4$ . En este caso, *no existe solución* para 2.2, y por tanto no hay solución para el sistema 2.2. Y es explicable, pues la distancia del punto  $q$  al origen del sistema  $E_1$ , dada por  $\sqrt{c^2 + d^2}$ , sería mayor que 2. Pero la distancia máxima que pueden alcanzar los tres brazos (cuando  $l_2$  y  $l_3$  se encuentran colineales). Claramente, los puntos alcanzables se encuentran todos dentro de un disco de radio 2 (incluyendo su frontera).
2.  $c^2 + d^2 = 4$ : en este caso las ecuaciones 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 se convierten en

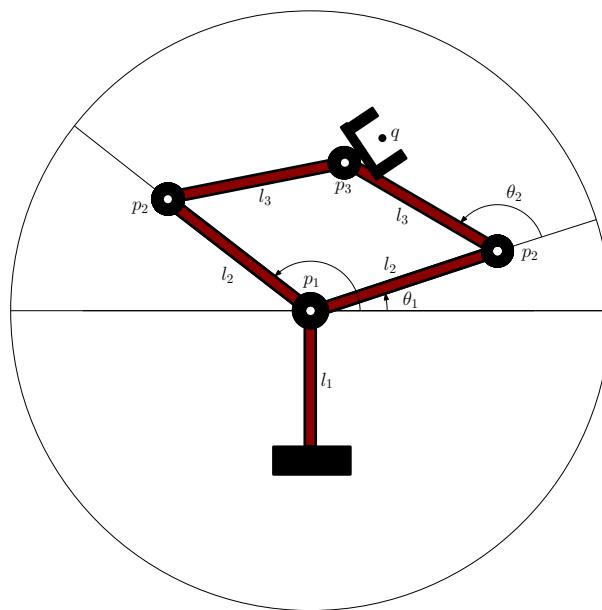
$$\begin{aligned} y &= \frac{d}{2}, \quad x = \frac{4 - 2y}{2c} = \frac{4 - 2dy}{2c} = \frac{2 - dy}{c} \\ z &= 1, \quad w = 0. \end{aligned}$$

En esta situación existe una única solución, aquella donde los dos brazos son colineales ( $\theta_2 = 0$ ), y el punto  $q$  se encuentra en la periferia del disco de radio dos de puntos alcanzables por el robot.

3.  $c^2 + d^2 < 4$ . En esta situación, la ecuación 2.2 produce dos valores para  $y_1$  y  $y_2$ . Una vez fijado uno de estos dos valores, las ecuaciones 2.3, 2.4 y 2.5 determinan valores únicos para  $x, z, w$ . Esta información determina dos soluciones para  $\theta_1$ .

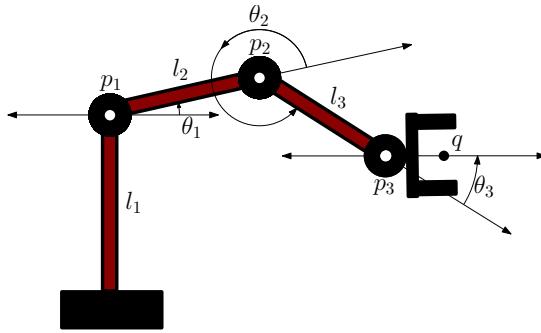
Figura 2.4: Caso  $c^2 + d^2 = 4$ 

No obstante, una vez fijado  $\theta_1$ , el ángulo  $\theta_2$  quedará únicamente determinado:



## 2.2. Análisis de un robot con $l_2 \neq l_3$

Cuando las longitudes de los segmentos  $l_2$  y  $l_3$  no son la misma, la situación es un poco más compleja. Por ejemplo, discutamos el caso  $l_2 = 1$  y  $l_3 = 2$ .



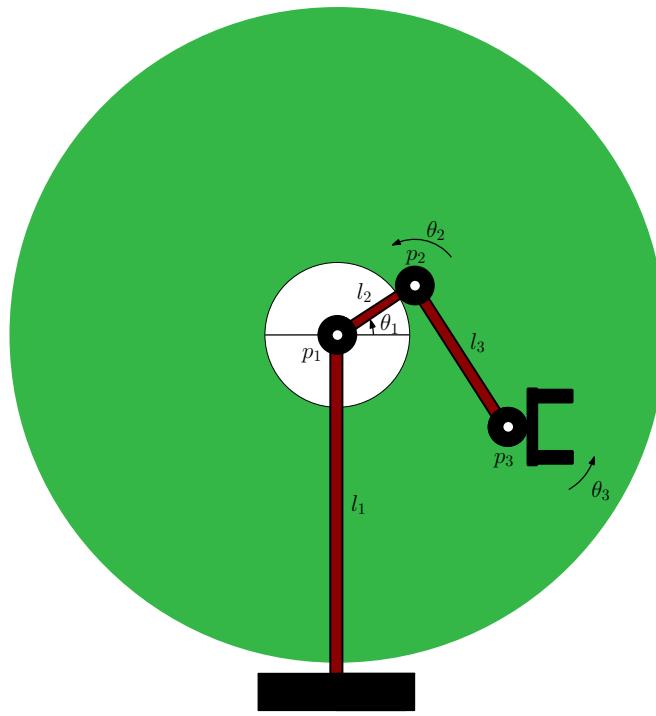
Una base de Gröbner está dada por

$$\begin{aligned} g_1 &= (4c^2 + 4d^2)y^2 + (-4dc^2 + 12d - 4d^3)y - 10c^2 - 6d^2 + 2c^2d^2 + d^4 + 9 + c^4 \\ g_2 &= 2xc + 3 + 2yd - c^2 - d^2 \\ g_3 &= -dc^2 + 3d - d^3 + 4wc + (2d^2 + 2c^2)y \\ g_4 &= 5 - d^2 - c^2 + 4z \end{aligned}$$

CASO I. Si  $c \neq 0$ , las ecuaciones tienen como soluciones las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} y &= \frac{d(c^2 - 3 + d^2) \pm |c| \sqrt{(9 - (c^2 + d^2))((c^2 + d^2) - 1)}}{2(c^2 + d^2)}, \quad x = \frac{c^2 + d^2 - 2dy - 3}{2c} \\ z &= \frac{d^2 + c^2 - 5}{4}, \quad w = \frac{dc^2 - 3d + d^3 - (2d^2 + 2c^2)y}{4c} \end{aligned}$$

La expresión dentro del radical es no negativa si y solo si  $1 \leq c^2 + d^2 \leq 9$ ; es decir, cuando la mano se encuentra dentro del ángulo determinado por dos círculos centrados en  $p_1$  de radios 1 y 3, respectivamente. En esta situación, el problema se analiza de manera similar al caso  $l_2 = l_3 = 1$ .



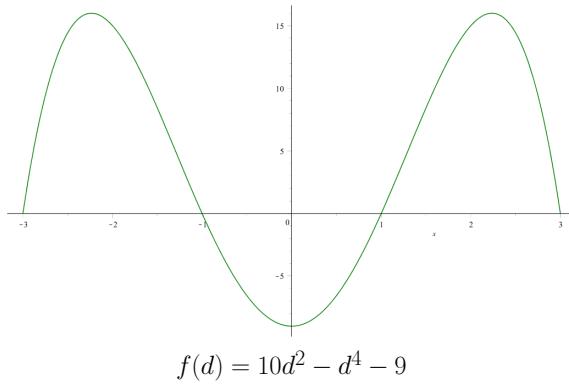
De otro lado, si  $c = 0$ , entonces una base de Gröbner está dada por

$$\begin{aligned} h_1 &= 3 + 2yd - d^2 \\ h_2 &= 9 - 10d^2 + d^4 + 4d^2x^2 \\ h_3 &= 2w - xd \\ h_4 &= -d^2 + 5 + 4z \end{aligned}$$

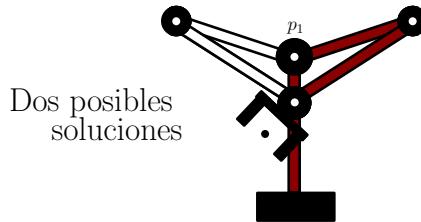
Si suponemos además  $d \neq 0$ , estas ecuaciones tienen como solución:

$$\begin{aligned} y &= \frac{d^2 - 3}{2d}, \quad x = \frac{\sqrt{10d^2 - d^4 - 9}}{2|d|} \\ z &= \frac{d^2 - 5}{4}, \quad w = \frac{dx}{2} \end{aligned}$$

La expresión dentro del radical es no negativa si  $d \in (-3, -1) \cup (1, 3)$



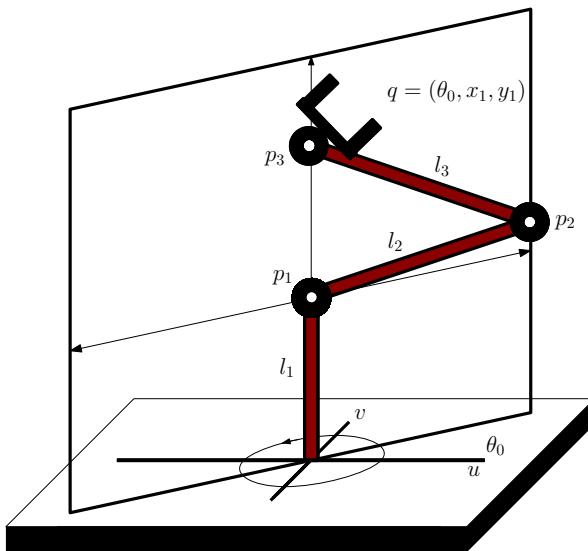
es decir, los puntos alcanzables por la mano sobre el eje  $y_1$  están situados en  $(-3, -1)$  y  $(1, 3)$ , y son alcanzables con dos posibles valores de  $\theta_1$  y un único valor de  $\theta_2$ .



De otro lado, si  $c = d = 0$ , entonces una base de Gröbner viene dada por  $G = \{1\}$ , y en consecuencia el sistema no tiene solución, lo cual resulta claro de la situación geométrica, pues es mecánicamente imposible llevar la mano a la posición  $p_1$ .

### 2.3. Brazos en tres dimensiones

Discutamos un brazo mecánico como el anterior, pero para el cual su base no esté anclada al piso, sino que es libre de rotar en el plano:



Cada punto en el espacio puede situarse mediante coordenadas (cilíndricas)  $q = (\theta_0, x_1, y_1)$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo que forma el plano  $(x_1, y_1)$  con respecto a un sistema coordenado  $(u, v)$ , anclado en el piso. En este sistema coordenado, el problema cinemático inverso se reduce de manera inmediata al problema discutido en la sección anterior, pues de las coordenadas de  $q$  podemos leer inmediatamente el ángulo  $\theta_0$ , y proceder, como ya se explicó, para calcular los ángulos  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  que sitúan la mano en  $q$ .

## 2.4. Simulación en Mathematica

En el siguiente programa, `robotarm[Theta1_,Theta2_,Theta3_]` simula un brazo robotizado de tres segmentos de longitudes  $l_1, l_2, l_3$ , el cual trata de alcanzar un punto  $q = (c, d)$ , cuando ello es posible.

 WOLFRAM Mathematica

```
In[9]:= (*Este es el input del codigo en el orden:
(brazo1, brazo2, brazo3, coordenada x del punto a alcanzar,
coordenada y del punto a alcanzar) *)
{11, 12, 13, c, d} = {2, 1, 1, 1.5, 2.5};

(*Se resuelve el sistema que se ha determinado en el capitulo:*)
f=13*Cos[theta1+theta2]+12*Cos[theta1]-c;
g=13*Sin[theta1+theta2]+12*Sin[theta1]+11-d;
S=Solve[{f==0,g==0},{theta1,theta2}];
a1=S[[2]][[1]][[2]];

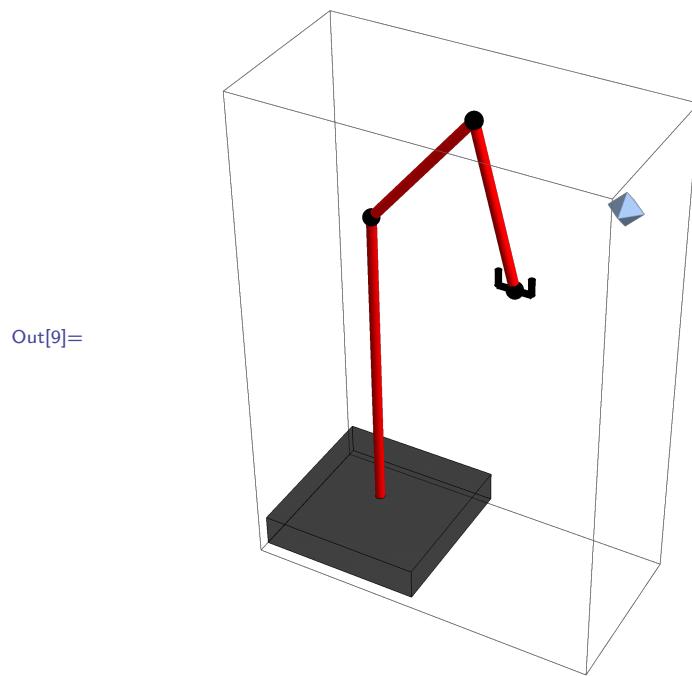
```

```

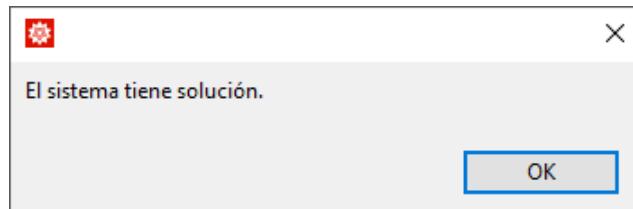
a2=S[[2]][[2]][[2]];
a1=a1/.C[1]->0//Chop;
a2=a2/.C[2]->0//Chop;
Ftheta1=a1-Floor[a1/(2*Pi)]*2*Pi;
Ftheta2=a2-Floor[a2/(2*Pi)]*2*Pi;
Ftheta3=Pi/2;


```

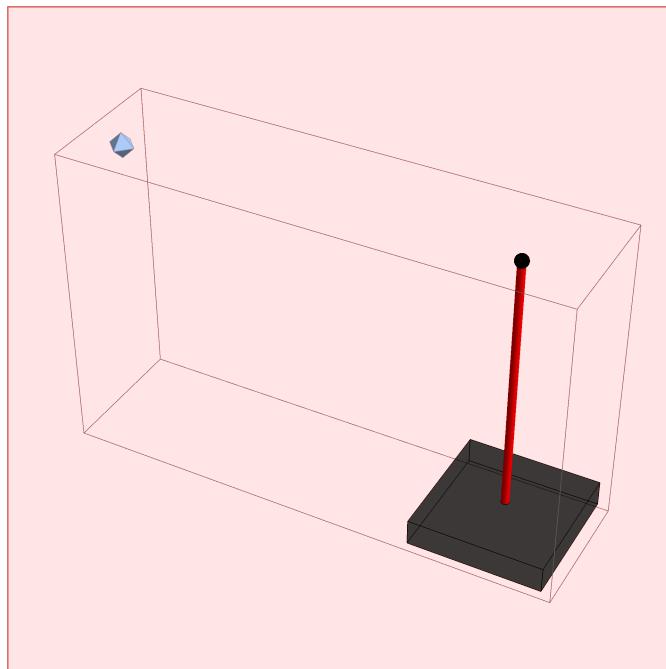
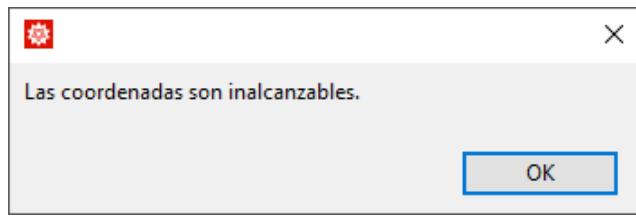
```
(*Ahora se crea una animacion en donde se muestra el
brazo alcanzando el punto, siempre que el sistema
tenga solucion.*)
peli=Animate[robotarm[Theta1,Theta2,Theta3],
{Theta1,0,Ftheta1},{Theta2,0,Ftheta2},
{Theta3,0,Ftheta3},AnimationRepetitions->1,
AnimationRate->.5]
```



Si el sistema tiene solución entonces se mostrará el siguiente mensaje antes de mostrarse la animación:



De lo contrario, se mostrará el siguiente mensaje y la animación mostrara la típica pantalla rosa al producirse un error en *Mathematica*:



# CAPÍTULO 3

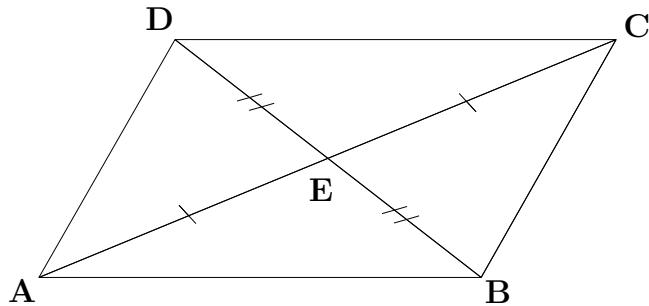
## \*Demostración mecánica de teoremas en geometría

En este apéndice mostraremos la manera de usar las ideas discutidas en las clases anteriores para desarrollar un método que nos permitirá demostrar, de manera puramente mecánica, un gran número de teoremas de la geometría euclídea elemental. Esta sección exige una preparación matemática más avanzada.

Comenzaremos por discutir un ejemplo concreto que servirá de modelo para el método general. Supongamos que deseamos demostrar el siguiente teorema.

*Q: Las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.*

Sea  $E$  el punto de corte de las diagonales  $AC$  y  $BD$  de un paralelogramo  $ABCD$ . Entonces  $E$  biseca a  $AC$  y a  $BD$ .



Introduzcamos coordenadas cartesianas en las cuales hacemos que  $A$  sea el punto origen. Denotemos por  $u_1, u_2, u_3$  valores reales arbitrarios, y dispongamos el paralelogramo  $ABCD$  de tal manera que a los puntos  $B$  y  $D$  les correspondan las coordenadas  $(u_1, 0)$  y  $(u_2, u_3)$ , respectivamente. Fijando estos parámetros, las coordenadas de  $C$  quedan determinadas en función de las variables  $u_j$ . Si  $(x_1, x_2)$  son las coordenadas de  $C$ , el hecho de que  $ABCD$  sea un paralelogramo se traduce en las dos ecuaciones siguientes

$$h_1 : x_2 - u_3 = 0, \quad h_2 : u_2 x_2 - u_3 (x_1 - u_1) = 0.$$

La primera ecuación expresa la condición de paralelismo entre los lados  $DC$  y  $AB$  y la segunda el paralelismo entre  $AD$  y  $BC$ . Ahora, denotemos las coordenadas de  $E$  por

#### 44 CAPÍTULO 3. \*DEMOSTRACIÓN MECÁNICA DE TEOREMAS EN GEOMETRÍA

$(x_3, x_4)$  (las cuales también vendrán determinadas por los valores de  $u_j$  escogidos). Por estar  $E$  en la intersección de  $AC$  y  $BD$  se deben cumplir las siguientes dos ecuaciones:

$$h_3 : x_1x_4 - x_2x_3 = 0, \quad h_4 : x_4(u_2 - u_1) - u_3(x_3 - u_1) = 0,$$

donde  $h_3$  expresa el hecho de  $E$  estar sobre  $AC$  y  $h_4$  el hecho de estar sobre  $BD$ . Finalmente, la conclusión del teorema se expresa en la forma

$$g_1 : x_4^2 + x_3^2 - ((x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2) = 0$$

$$g_2 : x_4^2 + (x_3 - u_1)^2 - ((x_4 - u_3)^2 + (x_3 - u_2)^2) = 0,$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  expresan el hecho de ser  $E$  el punto medio de  $AC$  y  $BD$  respectivamente.

Denotemos por  $X$  la variedad en  $\mathbb{R}^7$  definida por los polinomios que son traducción de las hipótesis, es decir, por  $h_1, h_2, h_3$  y  $h_4$ . La validez del teorema puede entonces interpretarse como el hecho de que las ecuaciones  $g_1$  y  $g_2$  se anulen idénticamente sobre el conjunto de todos los puntos  $(\underline{u}, \underline{x}) = (u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, x_4)$  de la variedad definida por las ecuaciones  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Sin embargo, queda todavía un problema con este análisis: es posible que las ecuaciones  $h_i$  se anulen sobre algunos valores  $(\underline{u}, \underline{x})$  correspondientes a *situaciones degeneradas* del problema original. Por ejemplo, si  $u_1 = 0$ , o  $u_3 = 0$  el paralelogramo se degenera en una recta y la conclusión, tal como la hemos traducido, no se satisface. De manera más general, si las variables  $u_j$  denotan parámetros completamente *arbitrarios*, es razonable imponer la condición de que *no exista ninguna relación funcional entre ellos*, es decir, que ninguna ecuación de la forma  $l(u_1, u_2, u_3) = 0$  se anule idénticamente sobre la variedad  $X$ . Luego la validez del teorema geométrico original debe interpretarse como el hecho de que  $g_1$  y  $g_2$  se anulen sobre un abierto  $X_0$  de  $X$  (abierto en la topología de Zariski) donde *ninguna* ecuación funcional  $l(u_1, u_2, u_3)$  sea idénticamente nula. Sean  $\{l_k(u_1, u_2, u_3) = 0\}_{k \in \mathcal{K}}$  las ecuaciones que definen el locus de puntos de  $X$  correspondientes a situaciones *degeneradas* de  $X$ . Entonces  $X_0$  es el conjunto  $X - V(l_k(u_1, u_2, u_3)_{k \in \mathcal{K}})$  y la condición de que  $g_1$  y  $g_2$  se anulen sobre  $X_0$  es equivalente a la conclusión del teorema geométrico que nos proponíamos demostrar originalmente. La siguiente proposición nos proporciona un criterio computacional que nos permite demostrar esta última condición en algunas situaciones.

**Proposition 3.0.1.** *Sea  $X$  la variedad definida por el conjunto de ecuaciones  $h_i(\underline{u}, \underline{x}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  correspondientes a las hipótesis de un cierto enunciado geométrico  $\mathcal{T}$ , donde las variables  $u_j$  denotan ciertos parámetros libres que se corresponden con las posibles configuraciones geométricas que satisfacen las hipótesis del teorema. Si  $g_k(\underline{u}, \underline{x}) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$  son las ecuaciones que corresponden a su conclusión, se tiene entonces que  $\mathcal{T}$  es cierto si cada  $g_k$  se anula sobre el abierto  $X_0 = X - V(l_r(u_1, u_2, u_3)_{r \in \mathcal{R}})$ , donde  $\{l_r(u_1, u_2, u_3) = 0\}_{r \in \mathcal{R}}$  son las ecuaciones que definen el locus de puntos de  $X$  correspondientes a situaciones degeneradas de  $\mathcal{T}$ .*

*La condición anterior se satisface si para cada  $g_k(\underline{u}, \underline{x})$*

$$1 \in I(X_0) = (h_i(\underline{u}, \underline{x}), 1 - g_k(\underline{u}, \underline{x})y) \subset \mathbb{R}(\underline{u})[x, y],$$

*Aquí  $I(X_0)$  denota el ideal generado por todos los polinomios  $h_i(\underline{u}, \underline{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$  y por el polinomio  $1 - g_k(\underline{u}, \underline{x})y$ , en el anillo de polinomios en las variables  $\underline{x}$  y en*

la variable  $y$ , con coeficientes en el campo de fracciones del anillo  $\mathbb{R}[\underline{u}]$ . Esto último puede verificarse computando una base de Gröbner reducida y minimal para  $I(X_0)$  y viendo que esta contiene sólamente al elemento identidad.

En el ejemplo anterior, y usando el programa *Mathematica* o *Maple*, se puede ver que una base de Gröbner reducida y minimal (usando el orden lexicográfico inverso) para el ideal

$$(h_1, h_2, h_3, h_4, 1 - g_i y) \subset \mathbb{R}(u_1, u_2, u_3)[x_1, x_2, x_3, x_4],$$

consiste exclusivamente del elemento 1, para cada  $g_i$ ,  $i = 1, 2$ . De aquí se sigue la validez de la proposición  $\mathcal{Q}$ .

*Demostración.* (de la proposición anterior) Procedemos de la misma manera que en la prueba del Nullstellensatz: la hipótesis de la proposición implica que cada polinomio  $g_k$  puede usarse para escribir a 1 en la forma

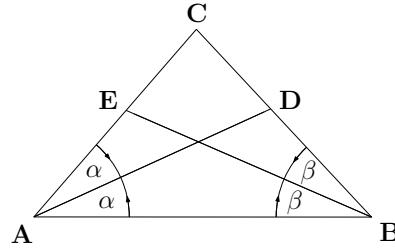
$$1 = \sum_{j=1}^q a_j(\underline{u})(\underline{x}, y) h_j(\underline{u}, \underline{x}) + a_{q+1}(\underline{u})(\underline{x}, y)(1 - g_k(\underline{u}, \underline{x})y),$$

donde cada  $a_j(\underline{u})(\underline{x}, y)$  es un polinomio con coeficientes en  $\mathbb{R}(\underline{u})$ , en las variables  $x$  y  $y$ . Reemplazamos cada aparición de la variable  $y$  en la expresión anterior por  $1/g_k$ . De igual manera que en la prueba del Nullstellensatz, al hacer esta sustitución, el último término de la suma anterior desaparece, y si multiplicamos por una potencia suficientemente grande de  $g_k$ , digamos  $g_k^N$ , se obtiene una ecuación de la forma  $g_k^N = \sum_{j=1}^q a_j^*(\underline{u})(\underline{x}) h_j(\underline{u}, \underline{x})$ , para ciertos polinomios  $a_j^*(\underline{u})(\underline{x})$ ,  $j = 1, \dots, q$  con coeficientes que son fracciones de la forma  $p_j(\underline{u})/q_j(\underline{u})$ . Por lo tanto, al multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por un denominador común,  $B(\underline{u})$ , se obtiene una ecuación de la forma  $B(\underline{u})g_k^N(\underline{u}, \underline{x}) = \sum_{j=1}^q A_j(\underline{u}, \underline{x}) h_j(\underline{u}, \underline{x})$ , donde los  $A_j$  son polinomios en las variables  $\underline{u}$  y  $\underline{x}$  con coeficientes reales. Sobre cada punto  $(\underline{u}, \underline{x})$  de  $X_0$  se tiene que  $h_j(\underline{u}, \underline{x}) = 0$  y  $B(\underline{u}) \neq 0$ , y por lo tanto, de la ecuación anterior, se deduce que  $g_k^N(\underline{u}, \underline{x}) = 0$  sobre la variedad  $X_0$ . Esto implica que  $g_k(\underline{u}, \underline{x}) = 0$  para todos los puntos  $(\underline{u}, \underline{x}) \in X_0$ , como se quería demostrar.  $\square$

La proposición anterior permite demostrar de manera puramente mecánica algunos teoremas de la geometría euclídea plana cuyas pruebas pueden resultar, en algunos casos, supremamente difíciles si se trataran de hacer usando sólamente métodos de la geometría euclídea. Un ejemplo de ello es el siguiente teorema (su recíproco es fácil de demostrar).

$\mathcal{P}$ : Si en el triángulo  $ABC$  las bisectrices  $AD$  y  $BE$  tienen la misma longitud, entonces el triángulo  $ABC$  es isósceles, es decir  $AC = BC$ .

46 CAPÍTULO 3. \*DEMOSTRACIÓN MECÁNICA DE TEOREMAS EN GEOMETRÍA



El lector puede convencerse a si mismo de la dificultad de esta proposición si intentara dar una prueba de la misma. Sobre este problema, M. Gardner afirma: “pocos problemas de la geometría euclídea son más difíciles e insidiosos... ” [9].

Fijemos el punto  $A$  en el origen de un sistema de coordenadas. Supongamos que  $B$  tiene coordenadas  $(u_1, 0)$ , y denotemos por  $u_2 = \tan(\theta_2)$  y  $u_3 = \tan(\theta_3)$ , las pendientes de las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , definidas por las ecuaciones  $y = u_2x$  y  $y = u_3(x - u_1)$ . Denotemos por  $(x_1, x_2)$  las ecuaciones del punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$  y por  $(x_5, x_6)$  y  $(x_3, x_4)$  las coordenadas de los puntos  $E$  y  $D$  respectivamente. El punto  $C$ , por estar en las rectas  $l_2$  y  $l_1$ , satisface las ecuaciones

$$h_1 : x_2 - u_2x_1 = 0, \quad h_2 : x_2 - u_3(x_1 - u_1) = 0.$$

Sean  $v_1 = \tan(\theta_2/2)$  y  $v_2 = \tan((\theta_3 + \pi)/2)$  las pendientes de las rectas  $l_3$  y  $l_4$ , respectivamente (estas variables dependen de las  $u_j$ ). Usando la fórmula

$$\tan(\theta) = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)},$$

y usando el hecho de que  $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$ , obtenemos las dos relaciones siguientes

$$u_2 = \tan(\theta_2) = \frac{2 \tan(\theta_2/2)}{1 - \tan^2(\theta_2/2)} = \frac{2v_1}{1 - v_1^2},$$

$$\begin{aligned} u_3 &= \tan(\theta_3 + \pi) = \tan(\theta_3) = \tan(2(\theta_3 + \pi)/2) = \\ &= \frac{2 \tan((\theta_3 + \pi)/2)}{1 - \tan^2((\theta_3 + \pi)/2)} = \frac{2v_2}{1 - v_2^2}. \end{aligned}$$

De aquí se deducen las relaciones

$$h_3 : u_2(1 - v_1^2) - 2v_1 = 0, \quad h_4 : u_3(1 - v_2^2) - 2v_2 = 0.$$

Las ecuaciones de  $l_3$  y  $l_4$  vienen dadas por

$$y = v_1x, \quad y = v_2(x - u_1).$$

La condición de que el punto  $D$  esté sobre las rectas  $l_3$  y  $l_2$ , y el punto  $E$  sobre las rectas  $l_4$  y  $l_1$ , se traduce en las ecuaciones

$$\begin{aligned} h_5 : x_4 - v_1x_3 &= 0 & h_6 : x_4 - u_3(x_3 - u_1) &= 0 \\ h_7 : x_6 - v_2(x_5 - u_1) &= 0 & h_8 : x_6 - u_2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, por tener las bisectrices  $AD$  y  $BE$  la misma longitud se debe tener que

$$h_9 : x_3^2 + x_4^2 - ((x_5 - u_1)^2 + x_6^2) = 0.$$

La conclusión  $AC = BC$  se traduce en la ecuación

$$g_1 : (x_1 - u_1)^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Para ver que la proposición  $\mathcal{P}$  es cierta, basta ver, usando la Proposición 1.2, que

$$1 \in I(X_0) = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, 1 - g_1y).$$

$I(X_0)$  denota el ideal del anillo  $\mathbb{R}(u_1, u_2, u_3)[v_1, v_2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ , asociado a  $X_0$ , el abierto de la variedad  $X = V(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7)$ , correspondiente a las configuraciones no degeneradas que satisfacen las hipótesis de  $\mathcal{P}$ . Usando el programa *Mathematica* o *Maple* puede verse que una base de Gröbner *reducida y minimal* para  $I(X_0)$  es trivial.

48 CAPÍTULO 3. \*DEMOSTRACIÓN MECÁNICA DE TEOREMAS EN GEOMETRÍA

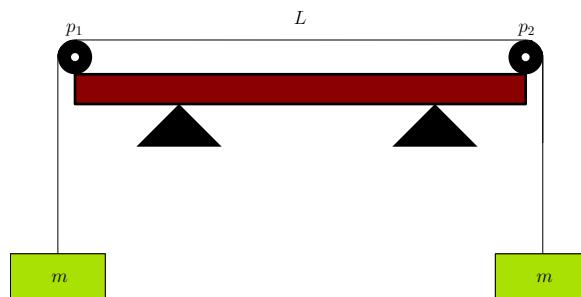
# CAPÍTULO 4

## Ecuación de una cuerda vibrando

### 4.1. Introducción

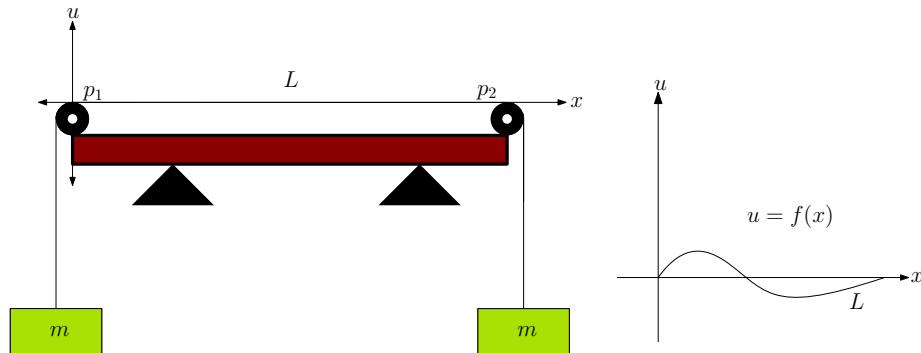
En este capítulo derivaremos la ecuación de onda para la cuerda vibrante, bajo ciertos supuestos, y discutiremos su relevancia en el diseño de los instrumentos de cuerda, así como de las escalas pitagórica y temparada. Con algunas variaciones menores, la deducción y solución de la ecuación de onda sigue lo expuesto en cualquiera de los textos [11],[13],[2]. Para una discusión sobre las escalas musicales y su construcción matemática, el lector puede consultar [5].

Una cuerda de longitud  $L$  y densidad constante  $\rho$  (que mediremos en kg/m) permanece atada a dos pesos que cuelgan de sus extremos, cada uno de masa  $m$  kg.



Situemos un sistema de coordenadas  $(x, u)$  con origen en  $p_1$ , orientado positivamente, donde el eje  $x$  está supuestamente a la cuerda y apunta hacia la derecha. Tomamos la cuerda y la deformamos ligeramente de tal manera que en el instante  $t = 0$ , y referida

a nuestro sistema de coordenadas, esta adquiere la forma de una cierta función  $f(x)$



Luego soltamos la cuerda, y observamos que esta comienza a vibrar. Denotemos por  $u(x, t)$  la función que representa la forma que asume la cuerda en el instante  $t$  (puede pensarse que el grafo de  $u(x, t)$  representa una foto de la cuerda en el instante  $t$ ). Nuestro propósito es encontrar la ecuación diferencial parcial que rige su movimiento. Para ello haremos dos hipótesis fundamentales:

1. Cada punto sobre la cuerda vibra en dirección vertical exclusivamente.
2. Las deformaciones a las cuales se ve sometida la cuerda son siempre muy pequeñas. De manera precisa, en cada instante  $t$  el ángulo  $\theta(x, t)$  que forma la tangente a la cuerda en el punto  $u(x, t)$  es muy pequeño. De aquí que  $\cos \theta(x, t) \simeq 1$ .

En cada instante  $t$ , denotemos por  $T(x, t)$ ,  $T(x + h, t)$  la magnitud de la tensión de la cuerda en el punto  $u(x, t)$ , respectivamente  $u(x + h, t)$ , y denotemos por  $\theta(x, t)$ ,  $\theta(x + h, t)$  los ángulos que forma la tangente a la cuerda en los puntos  $u(x, t)$  y  $u(x + h, t)$ , respectivamente. La tensión horizontal en cada uno de estos puntos será

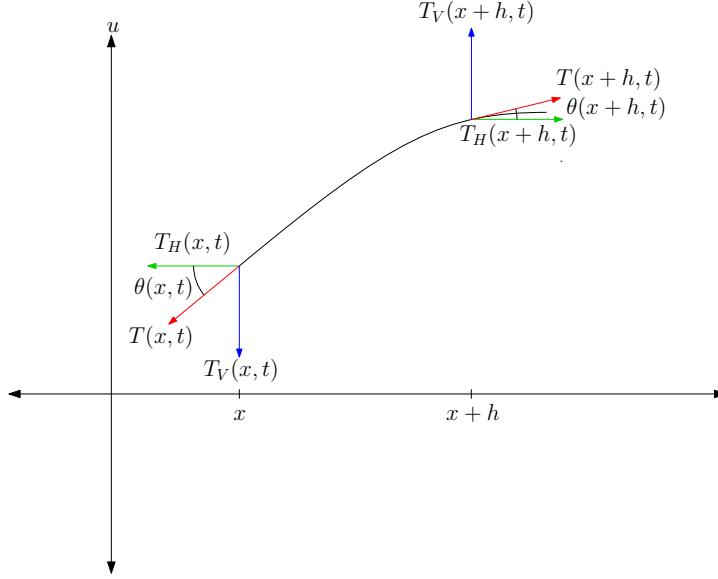
$$\begin{aligned} T_H(x, t) &= T(x, t) \cos \theta(x, t) \\ T_H(x + h, t) &= T(x + h, t) \cos \theta(x + h, t). \end{aligned}$$

Respectivamente, la tensión vertical será:

$$\begin{aligned} T_V(x, t) &= T(x, t) \sin \theta(x, t) \\ T_V(x + h, t) &= T(x + h, t) \sin \theta(x + h, t). \end{aligned}$$

En el instante  $t$ , consideremos un pequeño trozo de cuerda comprendido entre  $x$  y

$x + h$ , como se muestra en la siguiente figura:



El primer supuesto nos dice que en el instante  $t$  las tensiones horizontales en  $x$  y  $x+h$  deberán ser iguales, puesto que no hay desplazamiento horizontal de la cuerda, ya que todo punto de esta solo se desplaza en dirección vertical. En consecuencia la tensión horizontal  $T_H(x, t)$  es una función que no depende de la variable  $x$ . Es decir,  $T_H(x, t) = \tau(t)$ , para una cierta función  $\tau(t)$  que depende exclusivamente del tiempo.

De otro lado, el segundo supuesto nos dice que  $\theta(x, t)$  se mantiene siempre muy cercano a cero y en consecuencia  $\cos \theta(x, t)$  se mantiene muy cercano a 1. De aquí que podemos aproximar  $T_H$  y  $T$ :

$$T_H(x, t) = T(x, t) \cos \theta(x, t) \simeq T(x, t).$$

En consecuencia, la tensión de la cuerda es aproximadamente la misma en cada punto y solo dependerá del tiempo.

De otro lado, se observa experimentalmente que las dos masas que penden a ambos lados permanecen inmóviles. Esto nos dice que  $\tau(0) = \tau(t)$ , para todo momento  $t$ . Esto es, la tensión de la cuerda en cada extremo (que es igual a la tensión en cualquier otro punto) permanece constante a lo largo del tiempo, y entonces para todo tiempo  $t$ ,  $T = \tau(t) = m \times 9,8$  Newtons. En resumen:

$$T_H(x, t) = T(x, t) = T, \text{ para todo } x \in [0, L] \text{ y todo } t \geq 0.$$

De manera similar, como  $\theta(x, t) \simeq 0$ , entonces la longitud  $l(x, h)$  del pedazo de cuerda comprendido entre  $x$  y  $x+h$  es aproximadamente  $h$ , pues recordemos que su longitud puede calcularse mediante la fórmula

$$l(x, t) = \int_x^{x+h} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(s, t)\right)^2} ds$$

Pero  $\partial u / \partial x(s, t) = \tan \theta(x, t)$ , que elevado al cuadrado es un término muy cercano a cero. Por tanto  $\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x}(s, t))^2} \simeq 1$ . Luego

$$\int_x^{x+h} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(s, t)\right)^2} ds \simeq \int_x^{x+h} 1 ds \simeq h.$$

Finalmente, la diferencia entre las tensiones verticales en  $x$  y  $x + h$  es la única fuerza responsable del movimiento vertical del trozo de cuerda. La segunda ley de Newton nos dice entonces que

$$T_V(x + h, t) - T_V(x, t) = (\rho h) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t)$$

donde  $x \leq x' \leq x + h$ . Luego

$$T \sin \theta(x + h, t) - T \sin \theta(x, t) = (\rho h) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t).$$

Dividiendo a ambos lados por  $T \simeq T(x + h, t) \cos \theta(x + h, t) \simeq T(x, t) \cos \theta(x, t)$  se obtiene:

$$\frac{T \sin \theta(x + h, t)}{T \cos \theta(x, t)} - \frac{T \sin \theta(x, t)}{T \cos \theta(x, t)} = \frac{1}{T} (\rho h) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t).$$

Pero  $\sin \theta(x + h, t) / \cos \theta(x, t)$  es igual a  $\tan \theta(x + h, t) = \partial u / \partial x(x + h, t)$  y  $\sin \theta(x, t) / \cos \theta(x, t)$ , es igual a  $\tan \theta(x, t) = \partial u / \partial x(x, t)$ , de donde se sigue que

$$\frac{1}{h} (\partial u / \partial x(x + h, t) - \partial u / \partial x(x, t)) = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t).$$

Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Si  $c = \sqrt{T/\rho}$ , la ecuación toma la forma definitiva:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Como la cuerda se mantiene atada a los extremos se sigue entonces que  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Además, en el instante  $t = 0$  la función  $u$  toma la forma de una cierta función  $f(x)$ ; así que  $u(x, 0) = f(x)$ . Supusimos además que la cuerda, comenzando en esa posición, se suelta sin ninguna velocidad inicial y comienza a vibrar. Esto proporciona una condición inicial adicional  $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$ . En resumen el problema que se debe resolver es el siguiente (c.f. = condición de frontera, c.i. = condición inicial):

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \text{c.f. } u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ \text{c.i.1 } u(x, 0) &= f(x) \\ \text{c.i.2 } \partial u / \partial t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

## 4.2. Solución de la ecuación de onda de una cuerda

Una manera de resolver la ecuación anterior es suponer que existen soluciones de la forma  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . A este método se le conoce como *separación de variables*. Para una función  $u$  cuyas variables estén *separadas*, la ecuación 4.1 toma la forma

$$c^2 F''(x)G(t) = F(x)G''(t)$$

En aquellos valores de  $x$  y  $t$  en los cuales  $F(x)$  y  $G(t)$  no se anulan la ecuación anterior puede escribirse como

$$F''(x)/F(x) = G''(t)/c^2G(t).$$

Como la función de la izquierda depende solo de la variable  $x$  mientras que la función de la derecha depende solo de la variable  $t$ , ambas funciones deberán ser iguales a una cierta constante  $k$ . Se obtienen entonces dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} F''(x) - kF(x) &= 0 \\ G''(t) - kc^2G(t) &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Veamos que la función  $u$  es no trivial (no es idénticamente nula) si y solo si  $k < 0$ .

1. Si  $k = 0$ ,  $F(x)$  sería una función lineal de la forma  $F(x) = ax + b$ . La condición inicial C.I.1 obligaría a que  $F(0) = b = 0$  y  $F(L) = aL = 0$ , y en consecuencia  $F$  sería idénticamente cero forzando a  $u = FG$  a ser trivial.
2. Si  $k > 0$ , entonces  $F(x) = Ae^{k_1 x} + Be^{-k_1 x}$ , con  $A, B$  constantes y  $k_1 = +\sqrt{k}$ . Nuevamente, la condición  $F(0) = F(L) = 0$  fuerza a que  $A = B = 0$ , y  $u$  sería así mismo una función trivial en este caso.
3. Luego la única posibilidad interesante ocurre cuando  $k$  es una constante negativa. Escribamos  $k = -p^2$ , con  $p > 0$ . En este caso la solución general de 4.2 sería  $F(x) = A \cos(px) + B \sin(px)$ , con  $A$  y  $B$  constantes. De la ecuación  $F(0) = 0$  deducimos  $A = 0$ . De la ecuación  $F(L) = 0$  deducimos que  $pL = n\pi$ , y en consecuencia  $p = n\pi/L$ . Para  $n = 1, 2, \dots$ , denotemos por  $F_n(x)$  la función  $F_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ .

Ahora, para cada  $n > 0$  fijo, la ecuación  $G''(t) - kc^2G(t) = 0$  puede reescribirse como

$$G''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0,$$

cuya solución general es  $G(t) = B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)$ , con  $\lambda_n = cn\pi/L$ . Derivando con respecto a  $t$  se observa que la condición inicial C.I.3 obliga a que  $B_n^* = 0$ , de tal suerte que cada función  $u_n(x, t) = B_n \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t)$  es solución de 4.1, y satisface C.I.1 y C.I.3. De la forma de la ecuación, puede verificarse que si  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  son soluciones, y si  $A$  y  $B$  son constantes, entonces  $Au(x, t) + Bv(x, t)$  también es solución. De aquí que cualquier combinación lineal de soluciones sea solución. No obstante, como se verá más adelante, la condición inicial CI.2 solo podrá lograrse

mediante una combinación lineal infinita (una serie) de las funciones  $u_n(x, t)$ , una que tendrá la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t), \quad (4.3)$$

$$\lambda_n = cn\pi/L$$

de tal manera que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L).$$

corresponde al *desarrollo en series de Fourier de la función  $f(x)$* , asunto que estudiaremos en detalle en el próximo capítulo. Allí mostraremos que suponiendo ciertas propiedades de la función  $f(x)$ , una expresión de  $f(x)$  como suma infinita

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L)$$

siempre es posible, tomando coeficientes  $B_n = 2/L \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx$ .

### 4.3. Modo fundamental y armónicos

Notemos que cada término de la solución de la ecuación de onda 4.3,  $u_n(x, t) = \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t)$  es una función periódica de  $t$ , con período  $2\pi/\lambda_n$ , pues

$$\cos(\lambda_n(t + 2\pi/\lambda_n)) = \cos(\lambda_n t + 2\pi) = \cos(\lambda_n t).$$

De aquí se sigue entonces que transcurridos  $p = 2\pi/\lambda_n$  segundos la cuerda retorna a su misma posición. Luego la onda descrita por  $u_n(x, t)$  tiene una frecuencia  $f_n = 1/p = / \lambda_n / 2\pi = cn / 2L$  ciclos por segundo Hz, (Hertz). Es decir, en un segundo cada punto de la cuerda completa un total de  $f_n$  ciclos. La suma en 4.3, al ser convergente, obliga a que los coeficientes  $B_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . De hecho, el coeficiente  $B_1$  tiende a ser mucho mayor que los restantes  $B_n$ ,  $n \geq 2$ , y ello hace que la amplitud de  $B_1 u_1(x, t)$ , llamado el *modo fundamental*, sea mayor que la amplitud de los *sobretonos o armónicos*,  $B_n u_n(x, t)$ . Es por esta razón que nuestro oído detecta la frecuencia del modo fundamental,  $f_1 = c/(2L)$  como la *frecuencia dominante*, aunque los demás armónicos, cada uno de frecuencia  $cn/2L$ , son percibidos de manera indirecta, haciendo el sonido *más placentero* de lo que sería el sonido de una onda *pura*. Una demostración del llamado canto polifónico, en el que una persona es capaz de cantar una nota y destacar a gusto los distintos modos fundamentales, o *sobretonos*, puede verse en la dirección siguiente: <https://www.youtube.com/watch?v=UHTF1-IhuC0>.

Notemos que si la posición inicial de la cuerda viene dada por  $u_n(x, 0) = B_n \sin(n\pi x/L)$ , entonces todos los coeficientes  $B_m$  de 4.3 son cero, excepto  $B_n$ . En este caso la solución de la ecuación de onda estará dada precisamente por el modo fundamental  $u_n(x, t) = \sin(n\pi x/L) \cos(\lambda_n t)$ . Para  $n = 1$ ,  $u_1(x, 0) = \sin(\pi x/L)$ , tiene la forma que se muestra a continuación

Los modos segundo tercero y cuarto, se muestran a continuación

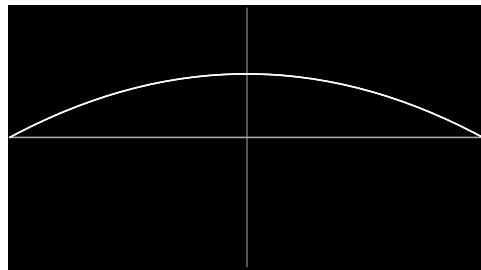


Figura 4.1: Primer modo fundamental:  $u_1(x, t) = \sin(\pi x/L) \cos(c\pi x/L)$

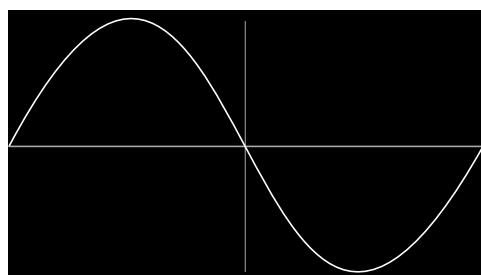


Figura 4.2: Segundo modo fundamental:  $u_2(x, t) = \sin(2x/L) \cos(2c\pi x/L)$

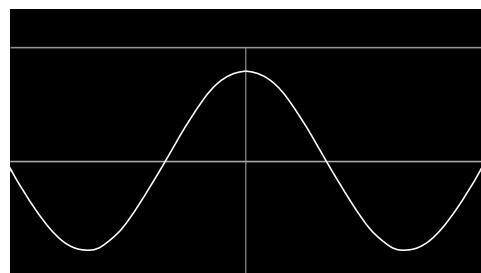


Figura 4.3: Tercer modo fundamental:  $u_3(x, t) = \sin(3x/L) \cos(3c\pi x/L)$

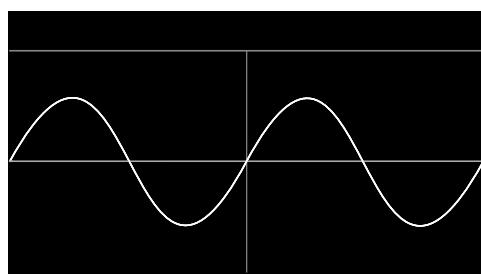
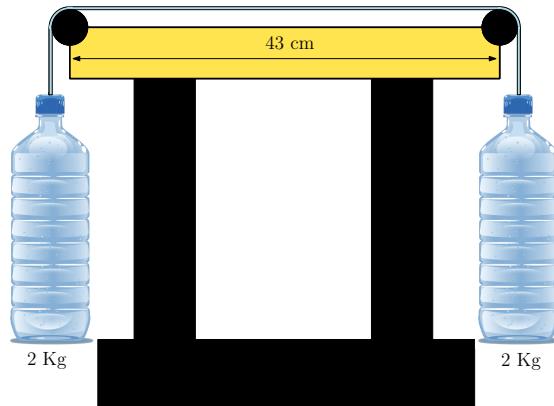


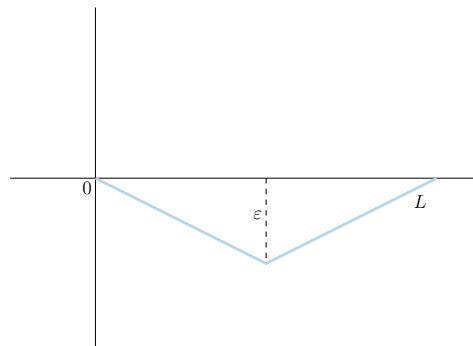
Figura 4.4: Cuarto modo fundamental:  $u_4(x, t) = \sin(4x/L) \cos(4c\pi x/L)$

**Ejemplo 4.3.1.** La tercera cuerda de una guitarra tiene una longitud 1,16 m y pesa 1,0645 gramos. Un tramo de esta cuerda de 43 cm de longitud se pone a vibrar, sujeto a una tensión de 2 kg. Calculemos la frecuencia dominante.

En primer lugar, la densidad de la cuerda es  $\rho = 1,0645 \times 10^{-3} / 1,16 = 9,176 \times 10^{-4}$  kg/m. La tensión, medida en Newtons, sería  $T = 2 \times 9,8 = 19,6$  N. De aquí que  $c = \sqrt{T/\rho} = \sqrt{19,6/9,176 \times 10^{-4}} = 146,19$  m/s. Así, la frecuencia fundamental sería  $f = c/2L = 146,15/0,86 \simeq 170$  Hertz (vibraciones por segundo). Al realizar el experimento se obtiene un valor de 173 Hz, con un error de apenas 3 unidades en 170, es decir, un error apenas del 1,7%.



**Ejemplo 4.3.2.** Sea  $f(x) = \begin{cases} -\frac{2\varepsilon}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2\varepsilon}{L}(x-L), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$ , la función que describe la forma inicial de una cuerda, la cual se pulsa en su punto medio, y hacia abajo, una pequeña cantidad  $\varepsilon > 0$  antes de soltarla.



Según vimos, la solución de la ecuación de onda tiene la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right),$$

con  $c = \sqrt{T/\rho}$ , y donde se debe cumplir la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Los coeficientes de Fourier  $b_n$  como veremos en la próxima sección, se calculan mediante la fórmula:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left( \int_0^{L/2} \left(-\frac{2\varepsilon}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L \frac{2\varepsilon}{L}(x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \end{aligned}$$

Utilizando de Nuevo GeoGebra (en su defecto, la integración se hace fácilmente por partes) vemos que:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(-\frac{2\varepsilon}{L}\right) \int_0^{L/2} (x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{\varepsilon L(n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(\frac{n\pi}{2}))}{n^2 \pi^2} \\ I_2 &= \frac{2\varepsilon}{L} \int_{L/2}^L (x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{-\varepsilon L(2 \sin(\frac{n\pi}{2}) + n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(n\pi))}{n^2 \pi^2} \end{aligned}$$

Sumando ambos integrales, y notando que  $\sin(n\pi) = 0$ , obtenemos:

$$I_1 + I_2 = \frac{-4\varepsilon L}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \frac{4\varepsilon L}{\pi^2 n^2} (-1)^{k+1}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

y por consiguiente:

$$b_n = \frac{2}{L} (I_1 + I_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \frac{8\varepsilon}{\pi^2 n^2} (-1)^{k+1}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Luego

$$f(x) = \frac{8\varepsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right).$$

De aquí entonces se sigue que

$$u(x, t) = \frac{8\varepsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{c\pi(2k+1)t}{L}\right).$$

En el Ejemplo 4.3.1, se tenía una cuerda de guitarra con  $c = 146,19$  m/s. Si su posición inicial está dada por una deflección hacia abajo en su punto medio, con  $\varepsilon = 0,005$  m, la vibración de la cuerda estará dada por la ecuación anterior.

## 4.4. Escalas musicales

### 4.4.1. Escala pitagórica

Recordemos que la frecuencia del tono fundamental (*llamdo frecuencia de la cuerda*) de una cuerda vibrando viene dado por  $f_L = c/(2L)$ , donde  $c = \sqrt{T/\rho}$  es una

constante que depende de la tensión y de la densidad de la cuerda. Así, al cambiar la longitud de  $L$  a  $L'$  la frecuencia de la cuerda cambiará en proporción al cociente de las longitudes. Es decir,  $f_{L'} = c/(2L') = (L/L')f_L$ .

Es conocido por todo aficionado a la música que una nota cuya frecuencia sea el doble de otra (una octava más alta, en lenguaje musical) conserva todas sus características esenciales. Lo mismo ocurrirá entre dos notas cuyas frecuencias  $f$  y  $f'$  sean tales que  $f/f'$  es un potencia de dos. En este caso el oído humano las percibirá como si fuesen *el mismo* tono, solo que la nota de mayor frecuencia se escuchará más aguda. Por ejemplo, la primera y la sexta cuerda de una guitarra, cuando se tocan al aire, producen una nota *equivalente* (mi), solo que la primera cuerda tendrá una frecuencia igual a cuatro veces la producida por la sexta cuerda, y esta última se oirá entonces como una nota igual a la producida por la primera cuerda, aunque más grave.

Ese hecho experimental fue reconocido por Pitágoras (569 a. C. – 475 a. C.), quien al poner a vibrar cuerdas de longitudes  $L$  y  $L'$  se dio cuenta de que cuando el cociente  $L/L'$  era igual a una potencia de dos, las notas musicales producidas por ambas cuerdas al vibrar parecían coincidir, excepto por lo agudo o grave del sonido. Pitágoras también descubrió de manera empírica que cuando hacía sonar simultáneamente dos cuerdas cuyas longitudes estaban en proporción dada por una fracción igual al cociente de dos enteros pequeños, como por ejemplo  $L/L' = 3/2, 4/3, 5/4, 9/8, \dots$  se obtenía un efecto placentero, armónico. Así, por ejemplo, cuando una cuerda de longitud  $L$  se acorta a dos tercios de su longitud su frecuencia al vibrar se multiplica por  $3/2$ ; esto es,  $f_{L'} = (3/2)f_L$ . En esta situación el sonido de ambas cuerdas vibrando de manera simultánea se escucha consonante y muy armónico. Igualmente, la frecuencia de una cuerda de longitud igual a cuatro quintos de la original es igual a  $f_{L'} = (5/4)f_L$ . De nuevo, las dos cuerdas suenan armónicas cuando se escuchan simultáneamente.

Ese efecto de armonía o consonancia aumenta cuando tres cuerdas, de longitudes  $L, (4/5)L$  y  $(2/3)L$  vibran simultáneamente. Notemos que en este caso sus frecuencias,  $f_L, (5/4)f_L$  y  $(3/2)f_L$  están en proporciones  $5/4$  y  $6/5$ . Un conjunto de tres notas cuyas frecuencias se encuentren en esa proporción se denomina una *triada mayor justa*. De otro lado, cuando la proporción ocurre en el orden contrario,  $6/5$  y  $5/4$ , el sonido de las tres cuerdas al vibrar también resulta muy agradable, aunque carga un inconfundible tinte de nostalgia. Una de estas triadas se denomina *triada menor justa*. Estas dos clases de combinaciones de notas, que en la escala temperada (definida más abajo) reciben el nombre de *acordes mayores* y *acordes menores* son la base de toda la armonía de la música occidental, donde, por supuesto, la armonía aparece enriquecida con muchos otros acordes, como aquel que se obtiene de combinar notas en proporciones  $5/4, 6/5, 7/6$  (una séptima), y otras combinaciones más complejas, como los denominados acordes *disminuidos, aumentados, con segundas, cuartas...*

Volviendo a nuestra discusión sobre la escala pitagórica, la idea de Pitágoras consistió en tomar potencias (positivas y negativas) de la fracción  $3/2$  para construir así una escala musical cuyas frecuencias estuvieran comprendidas entre una cierta frecuencia fundamental  $f_0$  y su octava más próxima  $2f_0$ . Ilustremos la idea de Pitágoras tomando como referencia la frecuencia del do central del piano  $f_0 = 261,626$  Hz. Supongamos que a pulsar una determinada cuerda de longitud  $L$  se obtiene esta frecuencia, llamada en terminología musical, la *tónica*. Entonces, al pulsar esa misma cuerda acortada a  $2/3$  de su longitud se obtendría una nota cuya frecuencia sería

$(3/2)f_0 = 392,439$ , muy cercana, aunque no igual (como explicaré más adelante) al sol central del piano. Si, por otro lado, la cuerda se alargase a una vez y media su longitud,  $(3/2)L$ , su frecuencia entonces disminuirá a  $(3/2)^{-1}f_0 = 2/3f_0 = 174,417$ , nota muy cercana al primer fa a la izquierda del do central. El doble de dicha frecuencia,  $4/3f_0$ , corresponde entonces al primer fa a la derecha del do central. De manera similar, una frecuencia de  $(3/2)^2f_0 = 9/4f_0$ , al bajarla una octava (dividirla entre 2) nos da una frecuencia de  $9/8f_0 = 294,329$  Hz, que corresponde aproximadamente al re que sigue inmediatamente a la derecha del do central.

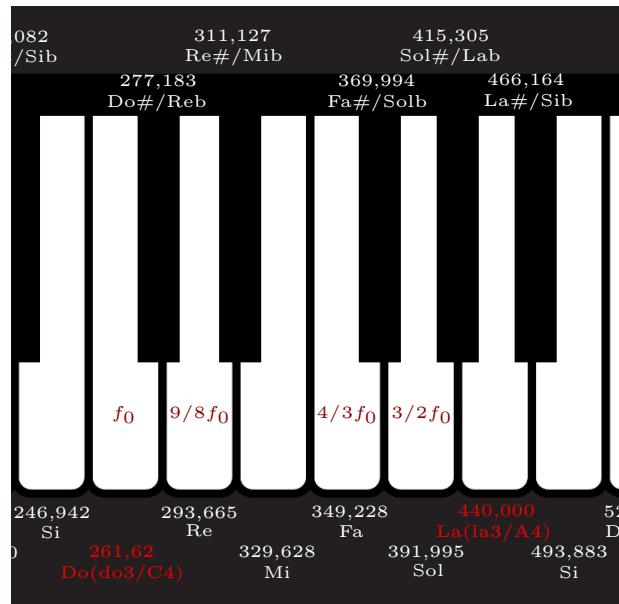


Figura 4.5: Escala temperada

De manera general, para obtener una nota en la escala pitagórica basta tomar una determinada potencia de  $3/2$  y dividirla (o multiplicarla) por una potencia apropiada de 2 para que la fracción obtenida esté comprendida entre 1 y 2. Esto siempre es posible, pues fijado un entero  $n$  existirá una potencia  $2^k$  para la cual  $2^k < (3/2)^n < 2^{k+1}$ , ya que basta tomar  $k$  de tal manera que  $k < n \log_2(3/2) < k + 1$ . Es decir,  $k$  resulta ser precisamente la parte entera de  $n \log_2(3/2)$ , denotada por  $k = \lfloor n \log_2(3/2) \rfloor$ . Para este valor de  $k$  se obtiene entonces que:  $f_0 < (3^n/2^{n+k})f_0 < 2f_0$ . Es decir, salvo octavas, la nota cuya frecuencia es  $(3/2)^n f_0$  es la misma que aquella cuya frecuencia es  $(3^n/2^{n+k})f_0$ .

Al seguir este procedimiento, y dándole valores a  $n$  iguales a  $1, \dots, 11$  obtenemos la siguiente secuencia de frecuencias:

$$f_0, \frac{3}{2}f_0, \frac{3^2}{2^3}f_0, \frac{3^3}{2^4}f_0, \frac{3^4}{2^6}f_0, \frac{3^5}{2^7}f_0, \frac{3^6}{2^9}f_0, \frac{3^7}{2^{11}}f_0, \frac{3^8}{2^{12}}f_0, \frac{3^9}{2^{14}}f_0, \frac{3^{10}}{2^{15}}f_0, \frac{3^{11}}{2^{16}}f_0, \dots$$

En orden ascendente, estas frecuencias son:

$$f_0, \frac{2187}{2048}f_0, \frac{9}{8}f_0, \frac{19683}{16384}f_0, \frac{81}{64}f_0, \frac{177147}{131072}f_0, \frac{729}{512}f_0, \frac{3}{2}f_0, \frac{6561}{4096}f_0, \frac{27}{16}f_0,$$

$$\frac{59049}{32768}f_0, \frac{243}{128}f_0$$

Sustituyendo  $f_0 = 261,626$  Hz en la tabla anterior se obtiene:

$$261,626 \text{ Hz}, 279,382 \text{ Hz}, 294,329 \text{ Hz}, 314,305 \text{ Hz}, 331,120 \text{ Hz}, \quad (4.4)$$

$$353,593 \text{ Hz}, 372,510 \text{ Hz}, 392,439 \text{ Hz}, 419,074 \text{ Hz}, 441,4938 \text{ Hz}, \quad (4.5)$$

$$471,4585 \text{ Hz}, 496,6806 \text{ Hz}, \dots$$

frecuencias muy cercanas, pero de ninguna manera idénticas, a las frecuencias correspondientes a la escala del piano moderno, llamada *escala temperada*.

Nota	Frecuencia
DO	261,6256
DO#	279,3824
RE	294,3288
RE#	314,3052
MI	331,1199
FA	353,5934
FA#	372,5099
SOL	392,4384
SOL#	419,0736
LA	441,4932
LA#	471,4578
SI	496,6799

Figura 4.6: Pitagórica

La escala cuyas frecuencias aparece en 4.4 se conoce con el nombre de *escala pitagórica*, durante milenios, referencia obligada en toda la música europea. Esta escala, sin embargo, comprende muchas más notas que las doce notas de la escala cromática usual. Tomemos, por ejemplo, la nota que correspondería a la potencia decimosegunda:  $(3/2)^{12}$ . En este caso debemos reducir la fracción, dividéndola por la potencia  $2^{19}$ , para obtener la frecuencia de la correspondiente nota dentro de la tónica y su octava superior. Esta operación nos da:  $(3^{12}/2^{19})f_0 = 1,01364f_0 = 265,19$ . La nota así obtenida tiene una frecuencia muy cercana, pero no igual, a la frecuencia del do central. El cociente entre estas dos frecuencias se denomina *coma pitagórica*. Una coma es entonces igual a 1,01364.

**Observación 4.4.1.** \* En términos matemáticos, la construcción de la escala pitagórica corresponde a tomar las clases de equivalencia de las fracciones  $(3/2)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  en el grupo  $G = \mathbb{R}^+ / \langle 2^k : k \in \mathbb{Z} \rangle$ , donde  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  denota el grupo multiplicativo de los reales positivos y  $\langle 2^k : k \in \mathbb{Z} \rangle$  el subgrupo cíclico generado por el elemento 2. Esto, ya que las posibles frecuencias así obtenidas, salvo octavas, están en correspondencia con los elementos de  $G$ .

## 4.5. Escala Temperada

El cociente (intervalo, en lenguaje musical) entre una nota y la siguiente de una escala se llama *semitono*. Observemos que en la escala pitagórica hay dos clases de semitonos, dependiendo de cuál sea el par de notas consecutivas elegidas. Estos semitonos son:  $3^7/2^{11} = 1,0679$  y  $2^8/3^5 = 1,0534$ . Sus frecuencias son muy cercanas, aunque no iguales, lo cual es indeseable pues cuando se *transporta* una melodía subiendo todas sus notas un semitono (por ejemplo, comenzando en do# o en re, y no en la tónica) ésta dejará de sonar igual, se escuchará extraña y diferente. Este problema motivó la construcción de la escala conocida con la *escala temperada*, la cual fue llevada a su máxima expresión por el genio incomparable de Johann Sebastian Bach (1685-1750). La idea para construir esta escala es sencilla: se siguen utilizando doce notas pero cuyas frecuencias sean escogidas de tal manera que el cociente entre dos notas sucesivas sea constante, lo cual significa que todos los semitonos resultan iguales. Para lograrlo, basta hacer que el cociente entre las frecuencias de dos notas consecutivas sea igual a  $\alpha = 2^{1/12}$ . Así, si partimos del do central del piano,  $f_0 = 261,626$  Hz, las notas de esta nueva escala tendrían frecuencias:  $\alpha f_0, \alpha^2 f_0, \dots, \alpha^{12} f_0 = 2f_0$ :

Nota	Frecuencia
DO	261,6256
DO#	277,1826
RE	293,6648
RE#	311,127
MI	329,6276
FA	349,2282
FA#	369,9944
SOL	391,9954
SOL#	415,3047
LA	440
LA#	466,1638
SI	493,8833

Se obtiene así la llamada escala musical *temperada*, utilizada en toda la música occidental desde el siglo XVII.

La guitarra, el piano, el oboe, la flauta, y en general todos los instrumentos de la orquesta están construidos para reproducir las notas de la escala temperada. En la guitarra, por ejemplo, el diapasón está dividido de tal manera que al pisar una misma cuerda en los distintos trastes su frecuencia aumenta proporcional a  $\alpha$  (un semitono).

Sabemos que la frecuencia de una determinada cuerda dependerá de  $c = \sqrt{T/\rho}$ , y su frecuencia estará dada por  $f_L = c/(2L)$ , donde  $L = 65$  cm en el caso de la guitarra española. El acto de pulsar la cuerda cuando la mantenemos presionada en el alguno de los trastes equivale a acortar la cuerda en cierta magnitud. Denotemos por  $L'$  la longitud de la cuerda acortada, igual en este caso a la distancia entre el traste presionado y el puente. Vimos más arriba que la cuerda vibrará entonces con una frecuencia igual a  $f_{L'} = (L/L')f_L$ . Si queremos, por ejemplo, que  $f_{L'} = \alpha f_L$  debemos hacer que  $L' = L/\alpha = 61,35$  cm. Así, el primer traste deberá estar situado a 61,35 cm del puente. Dividiendo por las potencias sucesivas  $\alpha^2, \alpha^3, \dots$ , etc, se obtienen

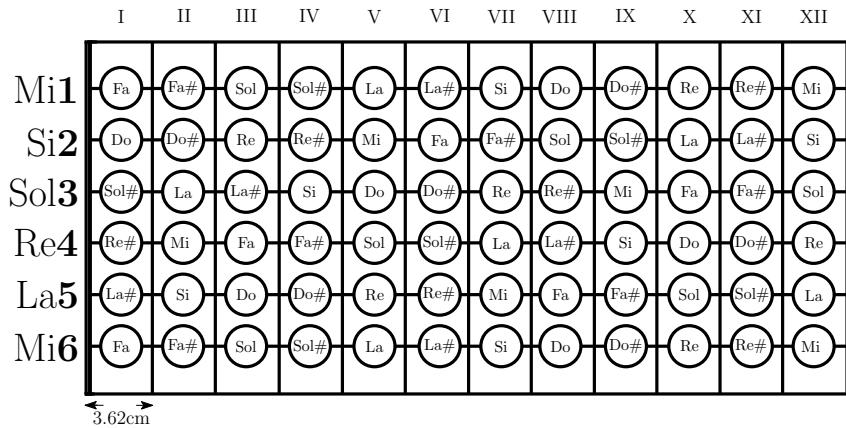


Figura 4.7: Gráfico completo de sostenidos del diapasón.

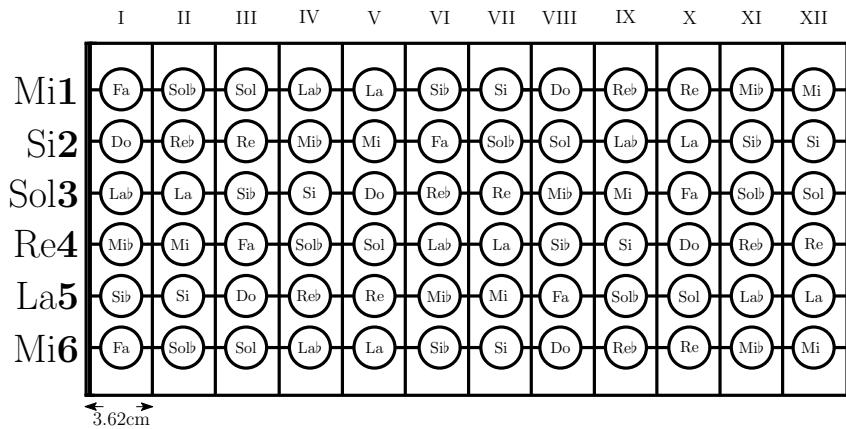
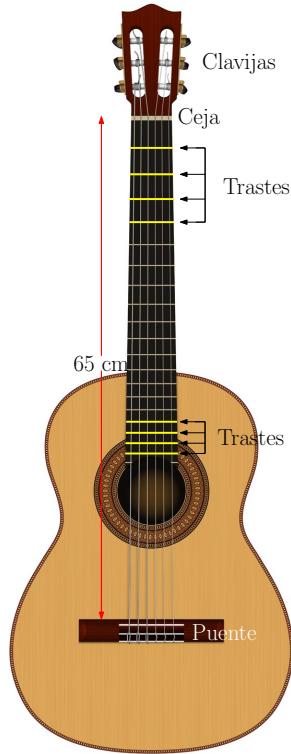


Figura 4.8: Gráfico completo de bemoles del diapasón.

las posiciones de los siguientes trastes, como se muestra en la tabla siguiente:

No. Traste	Distancia del traste al puente (cm)
Primer traste	61,35
Segundo traste	57,90
Tercero traste	54,66
Cuarto traste	51,59
Quinto traste	48,69
Sexto traste	45,96
Séptimo traste	43,38
Octavo traste	40,94
Noveno traste	38,64
Décimo traste	36,48
Traste once	34,43
Traste doce	32,50

Es un ejercicio elemental determinar cuál deberá ser la tensión de cada cuerda, conocida su densidad, para que al vibrar al aire cada una de las seis cuerdas produzcan las frecuencias que se muestran en la siguiente tabla:



1ra (E):	329,63 Hz
2da (B):	246,94 Hz
3ra (G):	196,00 Hz
4ta (D):	146,83 Hz
5ta (A):	110,00 Hz
6ta (E):	82,41 Hz

### Acordes mayores y menores en la escala temperada

Detengámosnos a analizar de nuevo las triadas mayores y menores que discutimos más arriba, vistas ahora desde la perspectiva de la escala temperada. Recordemos que una triada mayor consiste de tres notas en proporciones 4 : 5 y 5 : 6, lo cual significa que si  $f_1, f_2, f_3$  son las frecuencias de las tres notas correspondientes, entonces  $f_2/f_1 = 5/4$  y  $f_3/f_2 = 6/5$ . Si computamos estos dos cocientes para las notas do, mi, sol del registro central del piano:

Nota	Frecuencia
do	261,6256
mi	329,6276
sol	391,9954

con frecuencias respectivas de  $f_1 = 261,625$ ,  $f_2 = 329,62$  y  $f_3 = 399,99$ , vemos que  $f_2/f_1 = 1,2599$  y  $f_3/f_2 = 1,189$ . Notemos que  $5/4 = 1,25$  y  $6/5 = 1,2$  son valores muy cercanos a estos cocientes. Luego las notas {do, mi, sol} aproximan muy de cerca una triada mayor justa.

De otro lado, las notas do, mib = re#, sol forman aproximadamente una triada menor:

Nota	Frecuencia
do	261,6256
re#	311,127
sol	391,995

pues sus cocientes son  $311,127/261,625 = 1,189 \simeq 6/5$  y  $391,995/311,127 = 1,2599 \simeq 5/4$ .

**Ejercicio 4.5.1.** 1. La segunda cuerda de la guitarra española está hecha de nilon, de densidad  $\rho = 0,57 \times 10^{-3}$ . La distancia entre la ceja y el puente de la guitarra (igual a la longitud  $L$  de la cuerda) es igual a 65 cm. Calcule la tensión de la cuerda para que al vibrar produzca la nota si que se encuentra inmediatamente a la izquierda del do central del piano (frecuencia = 246,94 Hz).

Solución: la frecuencia del modo fundamental está dada por  $f = c/2L$ . Luego  $c = 2Lf = \sqrt{T/\rho}$ . Elevando al cuadrado se obtiene  $c^2 = T/\rho = 4L^2f^2$ , y por tanto

$$T = 4L^2 f^2 \rho = 4 \times (0,65)^2 \times (246,94)^2 \times 0,57 \times 10^{-3} = 58,74 \text{ Newtons.}$$

2. ¿Cómo convertiría su celular en una balanza para pesar objetos?

Solución: la cuerda del problema anterior se ata de un extremo a un punto fijo, mientras que el otro extremo se amarra al objeto que se desea pesar. Se pulsa la cuerda y se mide con el celular (utilizando, por ejemplo, el programa pitchlab) la frecuencia del sonido. En este caso  $T = 4\rho L^2 f^2$ . La masa en kilogramos del objeto será entonces  $m = T/g$  (donde  $g$  es la aceleración de la gravedad):

$$m = \frac{4\rho L^2}{g} f^2 \simeq 10^{-4} f^2.$$

3. Una cuerda de longitud  $L = 0,5$  m y constante  $c = 440$  m/s vibra de tal suerte que la frecuencia de su modo fundamental es  $f = 440$  Hz. ¿A cuáles notas del piano, aproximadamente, corresponden las frecuencias de su tercero y quinto modo fundamentales?

Solución: estas frecuencias son  $3c/2L$  y  $5c/2L$ , respectivamente, iguales a  $440 \times 3 = 1320$  Hz y  $440 \times 5 = 2200$  Hz, que corresponden, aproximadamente, a las notas mi (1318,51 Hz) y do# (do sostenido, 2217,4 Hz)

4. En el problema anterior, ¿cómo se explica que estas dos frecuencias no coincidan con el valor exacto del mi y el do# del piano? ¿Están acaso los pianos desafinados?

Solución: en la escala cromática o temperada la relación entre las frecuencias de una nota y su quinta, en este caso, entre el la y mi que se encuentran en la misma octava, es igual a  $f_{mi} = \alpha^7 f_{la}$ , con  $\alpha = 2^{1/12}$ , que corresponde a  $440 \times 2^{7/12} = 659,255$  Hz. De aquí que el mi que se encuentra una octava más

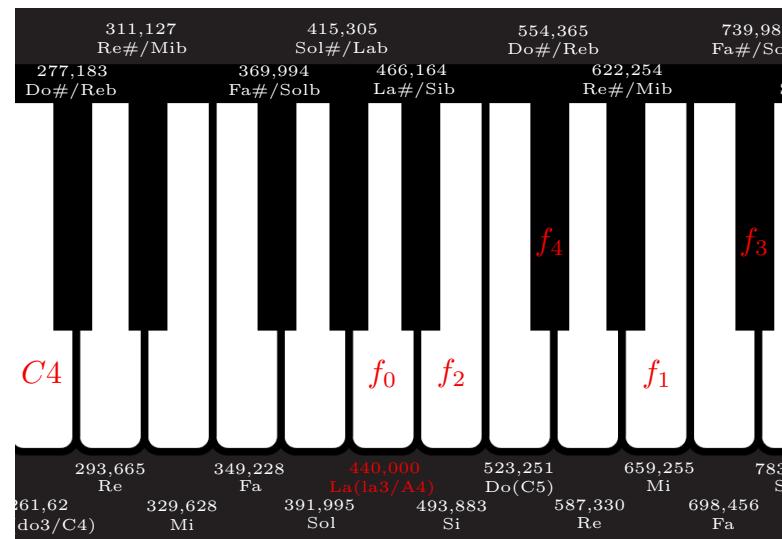
arriba tenga el doble de la frecuencia: 1318,51 Hz. De manera similar, la relación entre una nota y su tercera, en este caso entre la y do# es  $f_{do\#} = \alpha^4 f_{la} = 554,36$ . Así, el do# que se encuentra dos octavas más arriba tendrá una frecuencia igual a  $554,36 \times 4 = 2217,4$  Hz.

- Calcule las frecuencias  $f_n$  de las notas de la escala pitagórica que corresponden a las potencias  $(3/2)^n$ ,  $n = 0,..,4$ , comenzando en una determinada nota de frecuencia  $f_0$ , y de tal manera que no se extiendan más allá de una octava: es decir, de tal manera que  $f_0 \leq f_n \leq 2f_0$ .

Solución: La nota  $f_n$  tendrá frecuencia igual a  $p(n)f_0$ , donde  $p(n)$  es la fracción que se obtiene a partir de  $(3/2)^n$  dividiendo por una potencia adecuada  $2^k$  de tal manera que  $1/2^k(3/2)^n$  sea un número comprendido entre 1 y 2. Para  $n = 1$ ,  $(3/2)^1$  cumple esta condición, así que  $f_1 = 1,5f_0$ . Para  $n = 2$ ,  $(3/2)^2f = 9/4$  deberá dividirse por  $2^1$ , de tal manera que  $f_2 = 9/8f_0$ . De manera análoga, para  $n = 3$ ,  $(3/2)^3 = 27/8$  y por tanto  $f_3 = 1/2 \times (3/2)^3 = (27/16)f_0$ ; Para  $n = 4$ ,  $(3/2)^4 = 81/16$  deberá dividirse por  $2^2$ :  $f_4 = 81/64f_0$

- Si en el problema anterior  $f_0 = 440$  es la frecuencia que corresponde al la central del piano, ¿cuáles serían, de manera aproximada, las notas del piano que corresponden a  $f_n$ ?

Solución:  $f_0 = 440$  Hz;  $f_1 = 660$  Hz;  $f_2 = 9/8 \times 440 = 495$  Hz;  $f_3 = 27/16 \times 440 = 742,5$  Hz;  $f_4 = 81/64 \times 440 = 556,87$  Hz.

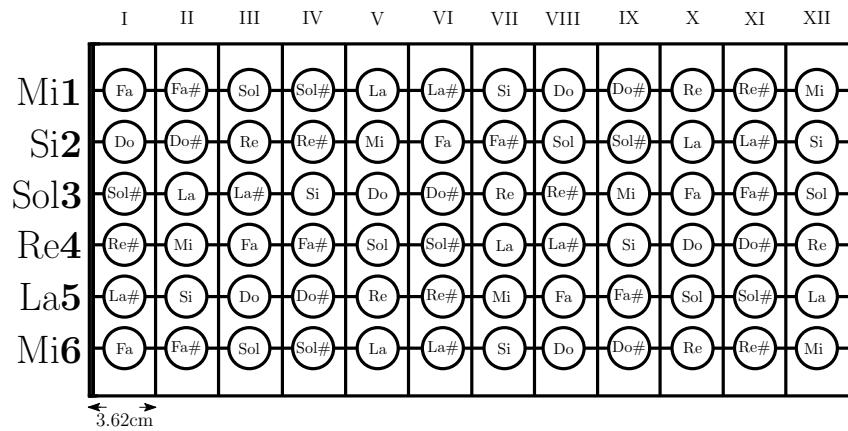
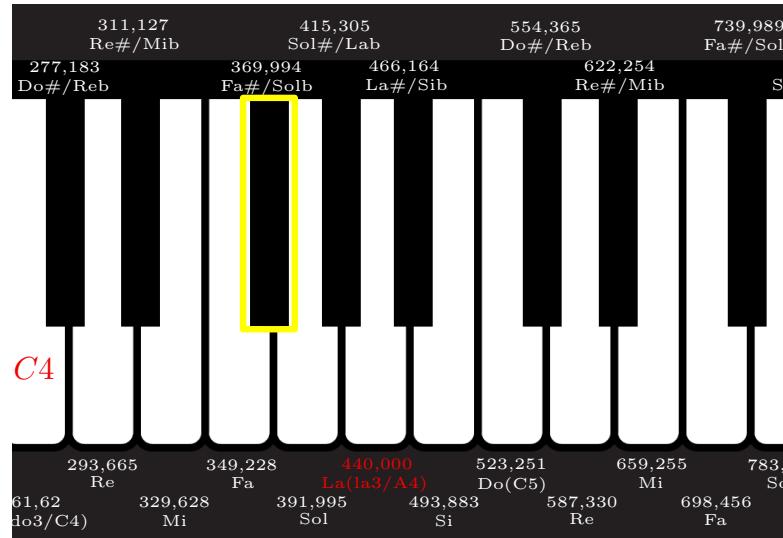


De manera aproximada, estas notas están muy cerca de la, mi, si, fa#, do#.

- La primera cuerda de una guitarra, cuando se encuentra afinada y se toca al aire (es decir, sin presionarse) produce la nota fundamental mi, cuya frecuencia es  $f_1 = 329,63$  Hz. La segunda cuerda produce la nota si, cuya frecuencia es

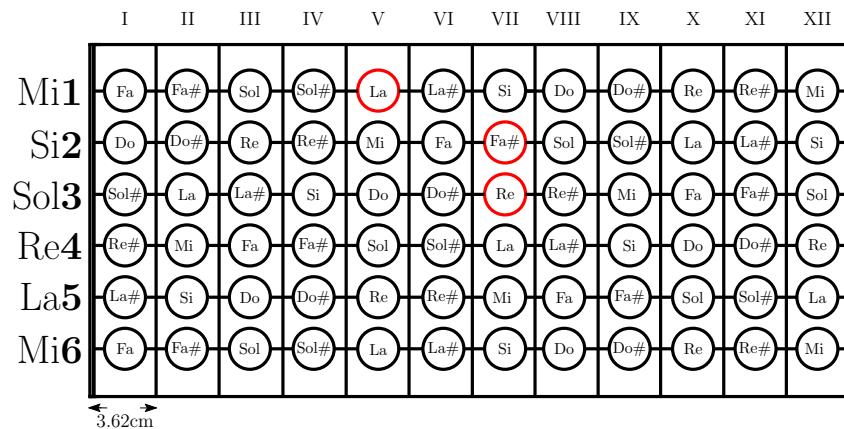
$f_2 = 246,94$  Hz, y la tercera, la nota sol, cuya frecuencia es  $f_3 = 196$  Hz. ¿En cuáles trastes pueden presionarse estas tres cuerdas para producir un acorde de re mayor, donde la nota tónica, re, tenga frecuencia igual a la frecuencia que corresponde al re central del piano, 293,6 Hz.

Sugerencia: utilice la información de las siguientes gráficas:



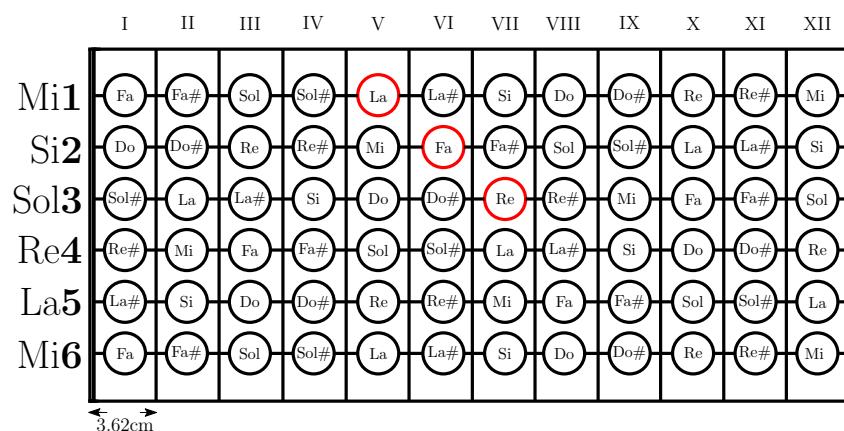
Solución: un acorde mayor está formado por tres notas cuyas frecuencias  $F_1, F_2, F_3$  están en relación  $F_2/F_1 = 5/4$  y  $F_3/F_2 = 6/5$ . Para producir el acorde de re mayor, si queremos  $F_1 = 293,6$  Hz, entonces  $F_2 = 5/4F_1 = 367$  Hz y  $F_3 = 6/5F_2 \simeq 440$  Hz, que corresponden aproximadamente al fa# y al la central del piano (Figura 1). Como puede verse en la Figura 2, estas notas se pueden

lograr presionando la tercera y la segunda cuerda en el séptimo traste, y la primera, en el quinto: la-fa#-re



8. Resuelva el mismo problema anterior, esta vez para producir el acorde de re menor.

Solución: el acorde menor se obtiene disminuyendo medio tono la tercera nota, en este caso el fa#: la-fa-re



#### 4.5.1. Interludio: lectura de un artículo de Klaus Ziegler

De Pitágoras a Hasler: en busca de la escala perfecta

El escritor romano Ancio Boecio atribuye a Pitágoras la división de la escala musical en doce intervalos, invento que hoy sabemos data de épocas anteriores a las leyes matemáticas descubiertas por el gran filósofo de Samos en su mítico monocordio. Según narra la leyenda, Pitágoras se habría inspirado en el repicar armónico de los

martillos de cierta herrería. La razón para la armoniosa combinación de sonidos, cuenta Boecio, se hizo evidente una vez este comparó sus pesos y los halló en proporciones justas de 12 : 8 : 9 : 6.

Sea cual fuere la verdad, los antiguos griegos no desconocían el principio de la octava musical: el carácter del sonido de dos cuerdas al vibrar, cuando sus longitudes se encuentran en relación 2 : 1, es esencialmente *el mismo*, excepto por ser el tono más agudo en el caso de la cuerda más corta. Así, por ejemplo, dos voces separadas una octava se oyen al unísono (igual tono) cuando cantan una misma melodía. Y no es casual que las notas del piano reciban el mismo nombre si el cociente de sus frecuencias es igual a una potencia de dos. Curiosamente, a diferencia del oído, el rango de frecuencias lumínicas visibles para el ojo humano se limita a una *octava*, entre el rojo ( $4 \times 10^{14}$  Hz) y el violeta ( $8 \times 10^{14}$  Hz), un hecho en verdad intrigante.

También conocían los antiguos griegos el llamado intervalo justo de quinta: dos cuerdas cuyas longitudes están en proporciones 2:3 generan un sonido armonioso al vibrar simultáneamente. El mismo fenómeno se observa si las longitudes de ambas cuerdas están en proporciones determinadas por enteros pequeños. Esta observación constituye el punto de partida en la construcción de la escala musical pitagórica: la idea consiste en generar a partir de una determinada nota una sucesión de quintas (notas cuyas frecuencias son potencias enteras de  $3/2$ ) que deberá ser luego reorganizada en orden ascendente entre dicha nota y su octava. Si tomamos como referente el do central del piano, cuya frecuencia es  $f = 261,626$  Hz, la recursión pitagórica iría generando notas cuyas frecuencias serían:  $f, 5/4f, 9/8f, 4/3f, 3/2f \dots$ , que corresponden (solo de manera aproximada) a las notas *do, re, mi, fa, sol\dots* de un instrumento moderno de teclado.

La construcción, no obstante su simpleza, adolece de problemas insuperables. En primer lugar, el ciclo de quintas jamás se cierra: la potencia decimosegunda de  $3/2$  ya produce una nota ligeramente por encima de la tónica, separada una pequeña distancia conocida como coma pitagórica, poco menor que la cuarta parte del intervalo comprendido entre dos teclas consecutivas del piano. La secuencia no conforma entonces un sistema circular, sino una espiral infinita: *do, sol, re, la, mi, si, fa#, do#, \dots, si#\dots*. Notas como *si#* (si sostenido) o *la(bb)* (doble bemol) sonarían extrañas, irreconocibles para un oído contemporáneo.

Y aún si nos limitásemos a doce notas fundamentales subsistirían dos inconvenientes. De un lado, los semitonos (distancia entre una nota y la siguiente) de la escala pitagórica no se encuentran igualmente espaciados, y este desperfecto hace imposible llevar una misma melodía a tonalidades diferentes (transportarla) sin alterarla. De otro lado, la construcción de Pitágoras ofrece solo una aproximación al ideal griego de preservar solo aquellos intervalos representables como cocientes entre enteros pequeños. El llamado intervalo de tercera mayor (entre do y mi), para dar un ejemplo, corresponde en la escala pitagórica a una relación de frecuencias igual a  $81/64$ , cercano, aunque no igual, al *intervalo justo de tercera mayor*, conformado por dos notas cuyas frecuencias se encuentran en relación simple 5 : 4.

Durante siglos, los músicos se valieron de infinidad de recursos para construir instrumentos capaces de reproducir el mayor número de intervalos perfectos, al costo, muchas veces, de hacerlos increíblemente complejos. En su obra *Harmonie universelle*, Marin Mersenne (también famoso por sus estudios sobre los números primos de la

forma  $2^p - 1$ ) concibió un instrumento de teclas con ¡no menos de cuatro llaves entre fa y sol! Y en Holanda aún perduran órganos con más de treinta llaves por octava, uno de ellos favorito de Handel.

Sin embargo, con el paso del tiempo, la construcción de una escala “cerrada” simple, una que permitiera simplificar los instrumentos de teclado y transportar a gusto las melodías se convirtió en una necesidad apremiante. Las primeras iniciativas parecen provenir de Gioseffo Zarlino, músico y compositor italiano, y de un matemático de los Países Bajos, Simon Stevin. La idea original, no obstante, se debe a Vincenzo Galilei, padre del famoso físico. En su obra *Dialogo della musica antica et della moderna* se describe la construcción de una escala casi cerrada donde la octava se divide en intervalos iguales a 18/17. Para “cerrarla”, Stevin se atrevió a dar el paso “irracional” definitivo y propuso dividirla en intervalos iguales a la raíz doce de dos. Semejante magnitud, además de ser un número irracional, no puede construirse con regla y compás, pero proporciona la solución matemática exacta al problema.

La escala equitemperada de Stevin posee todos sus semitonos distribuidos de manera uniforme. Así todas las tonalidades quedan en pie de igualdad, y se resuelve, de una vez por todas, uno de los mayores inconvenientes de la escala pitagórica. Y en cuanto a los intervalos justos, la construcción ofrece una aproximación que, aunque bondadosa, implica un compromiso que no todo músico está dispuesto a aceptar.

El gran Bach no parece haberse resignado a componer dentro de parámetros tan fijos. Los 48 preludios y fugas para el Clave Bien Temperado fueron realmente escritos para ser ejecutados en escalas más ricas, conocidas como escalas temperadas irregulares, como comenta el matemático y musicólogo David Benson [1]. La resistencia de Bach a componer dentro de los límites de un solo esquema musical se hace evidente en su Tocata en Fa# menor (BWV 910). Allí, una misma frase se repite cerca de veinte veces en distintas escalas temperadas irregulares, como si el compositor quisiera mostrarnos la pérdida irreparable de matices cuando la composición se ciñe a moldes uniformes.

A pesar de las muchas ventajas de la escala temperada, los constructores de instrumentos no cedieron en su intención de aproximarse al ideal griego y siguieron fabricando artefactos descomunales para acomodar tantas notas en una misma octava como fuera posible. Entre los más extravagantes se cuentan el Harmonium enarmónico de Robert Bosanquet, construido en 1853, capaz de albergar 87 teclas en 7 niveles y 53 notas por octava. No obstante su complejidad, el invento de Bosanquet fue ampliamente superado por el monstruoso orthotonophonium, inspirado en teorías del astrónomo y físico Arthur von Oettingen, en el cual se acomodan 72 notas en cada octava.

No todos los compositores modernos han renunciado a la antigua quimera griega de los intervalos perfectos. Instrumentos de viento, como la gaita o el corno, son bastante flexibles a la hora de interpretar escalas justas, debido a su capacidad natural para producir armónicos. En su Serenata para tenor, corno y cuerdas, por ejemplo, Benjamin Britten aprovecha de manera extraordinaria el potencial armónico del corno francés en un preludio escrito para ser interpretado sin utilizar ninguna de las válvulas del instrumento.

Así mismo, el compositor norteamericano Walter Carlos (hoy Wendy Carlos) ha explotado esquemas musicales “justos” de naturaleza exótica donde la octava deja de

ser la partición fundamental. Músicos como John Chalmers o Michael Harrison han construido escalas experimentales hasta de 24 tonos (en el piano armónico de Harrison, el do sostenido y el re bemol van asignados a teclas diferentes). Este último compositor fue el primero en crear un piano afinado en entonación justa, con flexibilidad para modular distintos sistemas de teclados con solo pisar un pedal.

Como ejemplo notable de la incesante búsqueda de nuevos horizontes musicales se destaca la obra del compositor colombiano Johann Hasler, ganador en 1995 del premio de composición del Ministerio Colombiano de Cultura. Más allá de la música algorítmica o de aquella música compuesta con ayuda de computadores, sus propuestas incluyen la conversión de series numéricas en distintas “alturas en la partitura”, las cuales pueden ejecutarse en un sistema musical de base diatónica, cromática o microcromática [2].

Desde que Helmholtz inició sus estudios sobre la percepción musical, interrogantes fundamentales, como la misteriosa identidad de las octavas o la naturaleza de la consonancia y la disonancia musical, comienzan apenas a dilucidarse. Es un misterio, sin embargo, que casi todos los humanos encontremos nostálgico el sonido simultáneo de tres notas cuyas frecuencias están en relación de 6/5 y 5/4 (tono menor) y jubilosa una tercera cuyas proporciones se encuentran en el orden contrario. No menos misterioso resulta el hecho de que una sucesión rítmica de frecuencias y armónicos pueda despertar en todos los humanos las emociones más sublimes y los más profundos sentimientos de tristeza y alegría.

Tomado de el periódico *El Espectador*: <http://www.elespectador.com/opinion/de-pitagoras-hasler-busca-de-escala-perfecta>

# CAPÍTULO 5

---

## Series de Fourier

---

Este capítulo pretende resumir los teoremas y fórmulas básicas de la teoría de series de Fourier (véase por ejemplo [11]) con el ánimo de que pueda ser utilizadas para solucionar la ecuación de onda desarrollada más arriba, así como otras ecuaciones diferenciales que estudiaremos más adelante. El enfasis se centrará en ejemplos y en los usos de esta herramienta, más que en los desarrollos teóricos. No obstante, daremos referencias apropiadas para el estudiante interesado que desee profundizar en el estudio del análisis armónico, una extensa rama de las matemáticas.

### 5.1. Desarrollo en serie de una función periódica

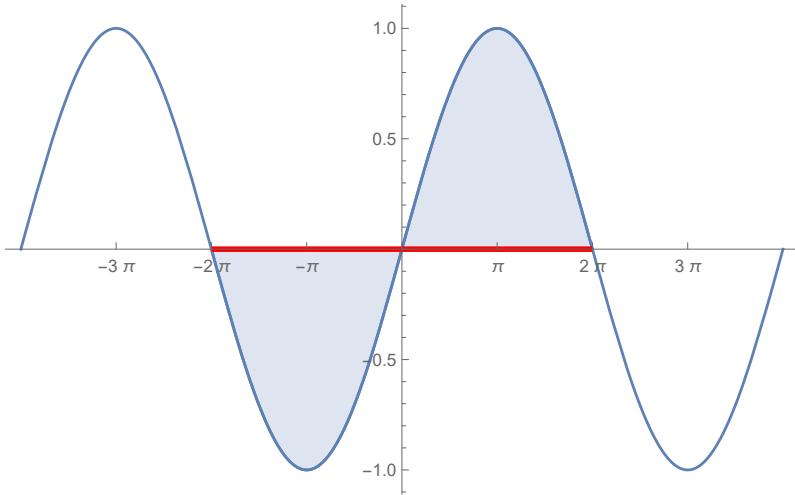
La teoría de Fourier estudia la manera de aproximar funciones periódicas mediante series infinitas en senos y cosenos. De manera más precisa:

**Definición 5.1.1.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *periódica con período p* si  $f(x + p) = f(x)$ .

Claramente, si  $f$  tiene período  $p$ , entonces  $f(x + mp) = f(x)$ , para cualquier entero  $m$ . Por ejemplo, las funciones trigonométricas  $\cos(x)$  y  $\sin(x)$  tienen período  $2\pi$ , pues  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ , y  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ . De otro lado, la función  $f(x) = \sin(2x/3)$  tiene período  $3\pi$ , pues

$$\begin{aligned}f(x + 3\pi) &= \sin(2/3(x + 3\pi)) = \\&= \sin(2/3x + 2\pi) = \sin(2/3x) = f(x).\end{aligned}$$

Si el período de una función es  $p$ , entonces, si hacemos  $L = p/2$ , los valores de la función en el intervalo  $[-L, L]$  determinan los valores de  $f$  en todo el eje real. Por ejemplo,  $f(x) = \sin(x/2)$  tiene período  $P = 4\pi$ . Si conocemos la gráfica de  $f(x)$  entre  $[-2\pi, 2\pi]$ , el resto de la misma puede obtenerse trasladando la gráfica sobre este intervalo a la derecha y a la izquierda un número infinito de veces:



Nos restringiremos a funciones periódicas, de período  $2L$  que sean *suaves a tramos*, una clase suficientemente amplia para casi todos los propósitos de las aplicaciones de las series de Fourier a la ingeniería, y para las cuales son válidos los teoremas fundamentales de la teoría.

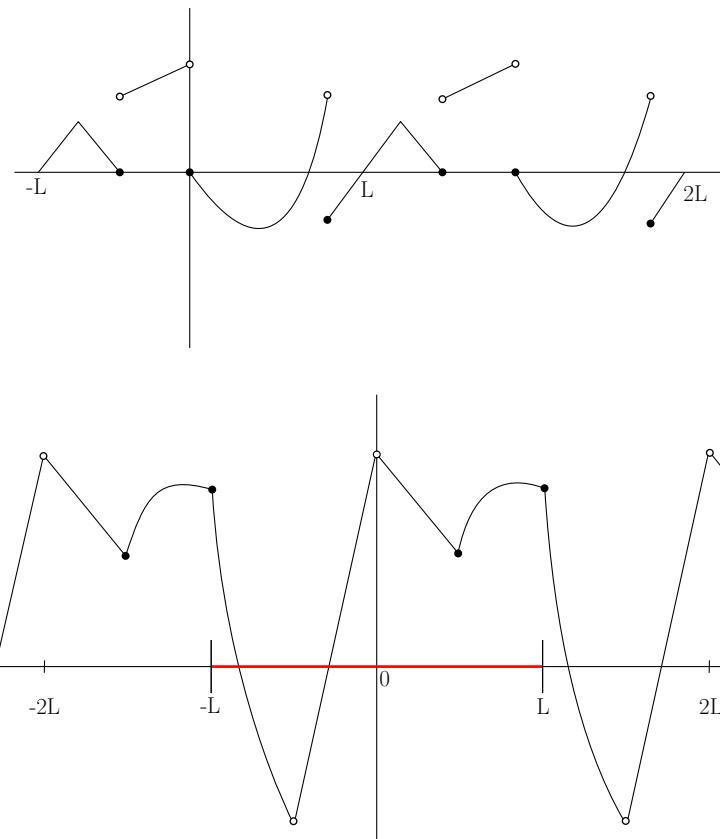
Recordemos que si  $f$  es una función definida para todos los puntos de un intervalo  $(a, a + \varepsilon)$ , ( $\varepsilon$  es un número positivo pequeño, y no se exige que  $f$  esté definida en  $a$ ) el **límite por a derecha** de  $f$  en el punto  $a$  se define como  $f(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ , tomando valores  $\varepsilon > h > 0$ . De manera similar, si  $f$  está definida en todos los puntos de un intervalo  $(a - \varepsilon, a)$ , el **límite por la izquierda** de  $f$  en el punto  $a$  está definido como  $f(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a - h)$ .

**Definición 5.1.2.** Una función periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con período  $2L$  se llama *continua a tramos* si se cumplen las siguientes condiciones:

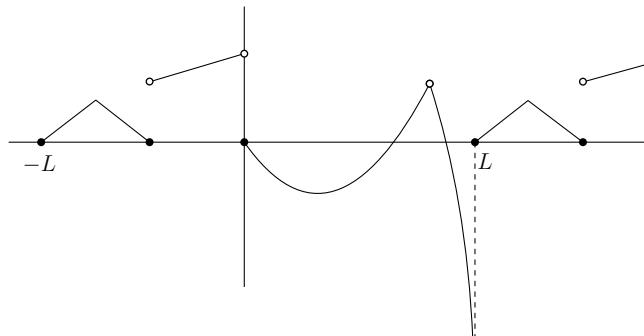
1. La función es continua en todo punto en el *interior* del intervalo  $[-L, L]$ , excepto posiblemente en un conjunto finito de puntos  $A$ .
2. En cada punto  $a \in A$  los límites  $f(a^+)$  y  $f(a^-)$  existen.
3. En los extremos del intervalo  $[-L, L]$  los límites  $f((-L)^+)$  y  $f(L^-)$  existen.

La función  $f$  se denomina *suave a tramos* si  $f$  y su derivada  $f'$  son continuas a tramos.

**Ejemplo 5.1.3.** Las funciones que se muestran en las siguientes gráficas son suaves a tramos.

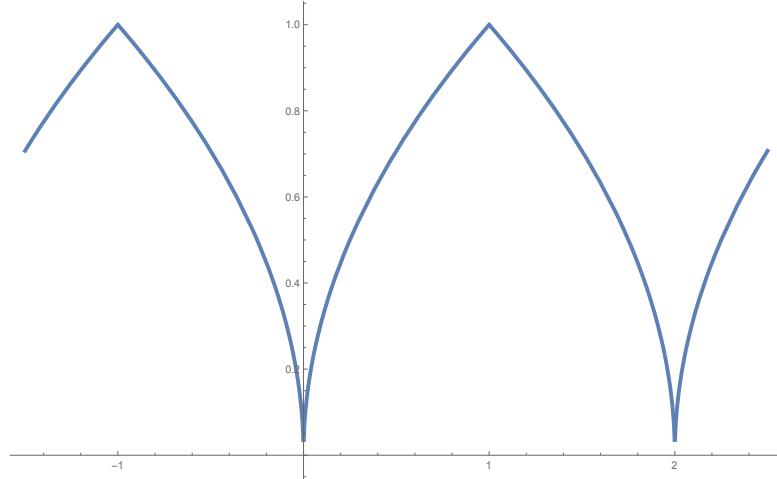


**Ejemplo 5.1.4.** La función mostrada en la gráfica siguiente no es suave a tramos, pues  $f(L^-)$  no existe



**Ejemplo 5.1.5.** La función  $f(x) = \sqrt{x}$ , definida en  $[0, 1]$ , puede extenderse de manera periódica a toda la recta real con período igual a 2 si definimos

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{-x}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



Esta función no es suave a tramos pues ninguno de los dos límites  $f'(0^+)$  y  $f'(0^-)$  existen.

El teorema fundamental para funciones suaves a tramos es el siguiente (ver [2], pag 77).

**Teorema 5.1.6.** *Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función periódica con período  $2L$  y suave a tramos. Entonces existe una serie de Fourier*

$$s(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

la cual satisface:

1. En cada punto  $x$  se cumple que:

$$(f(x^+) + f(x^-))/2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

2. En aquellos puntos donde  $f$  es continua, el término izquierdo de la igualdad es igual a  $f(x)$  y se tiene en este caso que:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

3. Si además,  $f$  es continua y  $f'$  es suave a tramos, entonces en cada punto  $x$  donde  $f'$  sea continua se tiene que

$$f'(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + nb_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Es decir, en estos puntos la serie se puede derivar término a término.

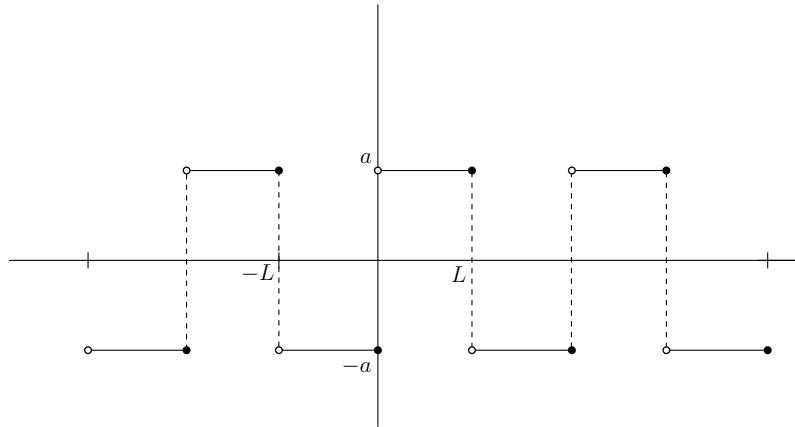
4. Los coeficientes de la serie anterior pueden hallarse mediante las llamadas **fórmulas de Euler**

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (\text{Euler})$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1$$

**Ejemplo 5.1.7.** Sea  $f(x)$  la función definida como la extensión periódica, con período  $2L$ , de la función definida como  $f(x) = a$ , si  $0 < x \leq L$ , y  $f(x) = -a$ , si  $-L < x \leq 0$ :



Esta función es claramente suave a tramos. Hallemos su expansión en serie de Fourier. Las fórmulas de Euler nos dicen que

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2L \int_{-L}^L f(x) dx = 1/2L \left( \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \right) \\ &= 1/2L(-aL + aL) = 0. \end{aligned}$$

De manera similar, si  $n \geq 1$  sabemos que  $a_n = 1/L \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx$ , y esta integral puede calcularse como suma de integrales

$$I_1 = 1/L \int_{-L}^0 f(x) \cos(nx/L) dx \quad e \quad I_2 = 1/L \int_0^L f(x) \cos(nx/L) dx,$$



**Leonhard Euler** (15 de abril de 1707 - 18 de septiembre de 1783) fue un matemático, físico, astrónomo, lógico e ingeniero suizo, que hizo importantes e influyentes descubrimientos en muchas ramas de las matemáticas, como el cálculo infinitesimal y la teoría de grafos, a la vez que hizo contribuciones pioneras a varias ramas como la topología y la teoría analítica de números. También introdujo gran parte de la terminología y la notación matemática moderna, en particular para el análisis matemático, como la noción de una función matemática. También es conocido por su trabajo en mecánica, dinámica de fluidos, óptica, astronomía y teoría musical.

con valores de signo contrario. Luego,  $a_n = 0$ .

Finalmente,  $b_n = 1/L \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx$  puede calcularse como la suma de las integrales  $J_1$  y  $J_2$ :

$$\begin{aligned} J_1 &= 1/L \int_{-L}^0 f(x) \sin(n\pi x/L) dx = -a/L \int_{-L}^0 \sin(n\pi x/L) dx \\ &= a/L \int_0^L \sin(n\pi x/L) dx, \end{aligned}$$

y

$$J_2 = 1/L \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx = a/L \int_0^L \sin(n\pi x/L) dx.$$

Por tanto  $J_1 = J_2$  de donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2a}{L} \left( -\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi x/L) \Big|_0^L \right) = -\frac{2a}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \\ &= \frac{2a}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4a}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

De aquí que la serie para  $f(x)$  sea

$$s(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.1)$$

En  $x = 0$  vemos que  $f(0^+) = a$  y  $f(0^-) = -a$ . Luego  $(f(0^+)a + f(0^-))/2 = s(0) = 0$ , como afirma el Teorema 5.1.6.

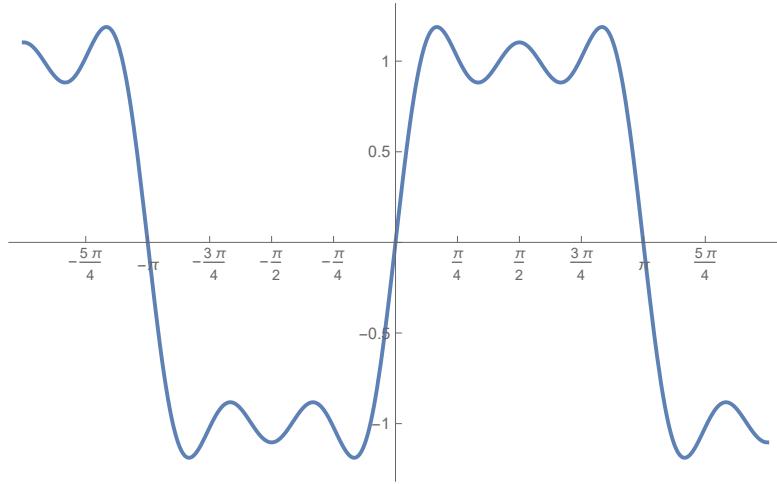
En  $x = L/2$ ,  $f$  es continua y  $f(L/2) = s(L/2) = a$

$$a = s(L/2) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4a}{\pi} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad (5.2)$$

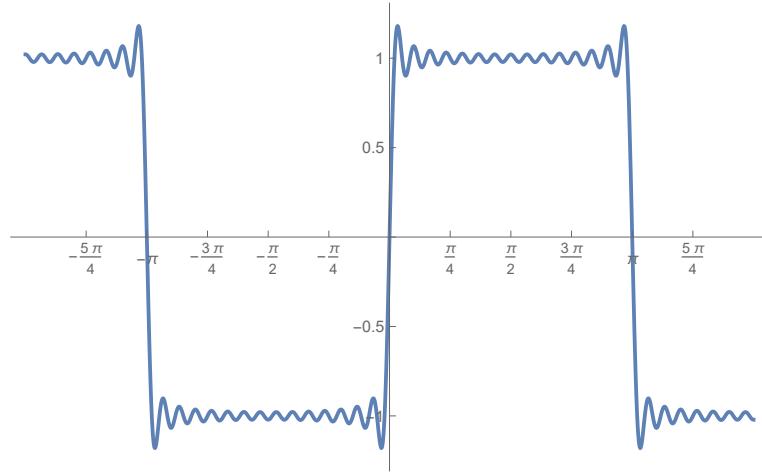
De aquí obtenemos la maravillosa fórmula (debida a Leibniz)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Si hacemos  $a = 1$ ,  $L = \pi$ , la suma de los primeros cinco términos de la series 5.1 nos dan el siguiente gráfico:



y los primeros treinta, el gráfico siguiente:



### 5.1.1. Funciones pares e impares

Como en el ejemplo anterior, en muchas situaciones el computo de los coeficientes de la serie de Fourier puede simplificarse si sabemos que  $f$  es una función *par* o una función *impar*. Recordemos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *par* si  $f(-x) = f(x)$ , e *impar*, si  $f(-x) = -f(x)$ . Ejemplos fundamentales son las funciones  $\cos(n\pi x/L)$ , la cual es par, y  $\sin(n\pi x/L)$ , la cual es impar. Es claro que la paridad de una función sigue las siguientes reglas: *par*  $\times$  *par* = *par*, *impar*  $\times$  *par* = *impar* e *impar*  $\times$  *impar* = *par*.

Supongamos que  $f$  es una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos, y *par*. Entonces,  $f(x) \sin(n\pi x/L)$  será una función *impar* y por consiguiente cada  $b_n =$

$\int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx$  es igual a 0, pues el área comprendida entre  $-L$  y 0 es igual al área comprendida entre 0 y  $L$  pero con signo opuesto.

De otro lado, como  $f(x) \cos(n\pi x/L)$  es en este caso *par*, vemos que:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx = 2 \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx,$$

para todo  $n \geq 0$ . Por consiguiente:

**Observación 5.1.8.** Si  $f$  una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos y *par*, los coeficientes de su serie de Fourier están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

De otro lado, si  $f$  es una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos, e *impar*, entonces  $f(x) \cos(n\pi x/L)$  será una función impar y por consiguiente cada  $a_n = \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx$  es igual a 0. En este caso, como  $f(x) \sin(n\pi x/L)$  es par, vemos que:

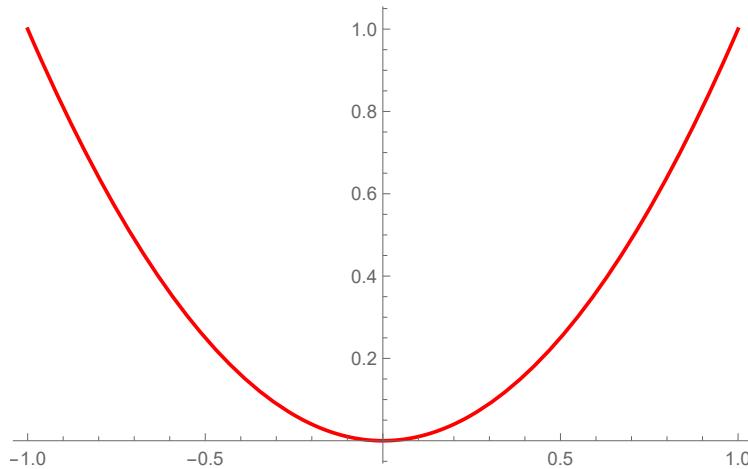
**Observación 5.1.9.** Si  $f$  una función periódica con período  $2L$ , suave a tramos e *impar*, entonces los coeficientes de su serie de Fourier están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos nos servirán para ilustrar las fórmulas anteriores.

**Ejemplo 5.1.10.** Sea  $f(x) = x^2$ , definida entre  $[-1, 1]$  y donde esta función se extiende periódicamente (con período igual a 2) a toda la recta real (figura 5.1). Calculemos su serie de Fourier, utilizando para ello las capacidad de integración simbólica de *Mathematica*.

Como la función es par vemos que  $b_n = 0$ . De otro lado,  $a_0 = 1/2 \int_{-1}^1 x^2 dx = x^3/6|_{-1}^1 = 1/6 + 1/6 = 1/3$ . Además,  $a_n = 2/1 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx$ . La integral puede computarse como se muestra a continuación:

Figura 5.1:  $f(x) = x^2$ 

**WOLFRAM Mathematica**

```
In[153]:= Integrate[x^2 * Cos[n * Pi * x], {x, 0, 1}]
Out[153]= 
$$\frac{2 n \pi \cos[n \pi] + (-2 + n^2 \pi^2) \sin[n \pi]}{n^3 \pi^3}$$

```

Ahora,  $\sin(n\pi) = 0$ , para todo  $n$  mientras que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ . Luego la integral anterior es igual a  $a_n = (-1)^n 4 / \pi^2 n^2$ . De aquí que la serie de Fourier sea:

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

Como  $f(x)$  satisface las condiciones del Teorema 5.1.6, y es continua, vemos que

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

Si evaluamos ambos lados en  $x = 0$ , respectivamente en  $x = 1$ , obtenemos tres extraordinarias fórmulas debidas a Euler:

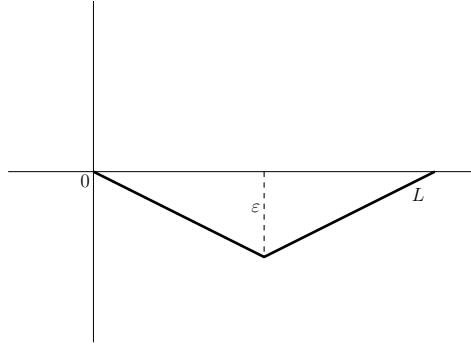
$$\frac{\pi^2}{12} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

La última fórmula se obtiene sumando las anteriores.

**Ejemplo 5.1.11.** Sea  $f(x) = \begin{cases} -\frac{2\varepsilon}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2\varepsilon}{L}(x-L), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$ , la función que describe las condiciones iniciales de una cuerda que se desplaza hacia abajo una pequeña cantidad  $\varepsilon > 0$  antes de soltarla y ponerla a vibrar.



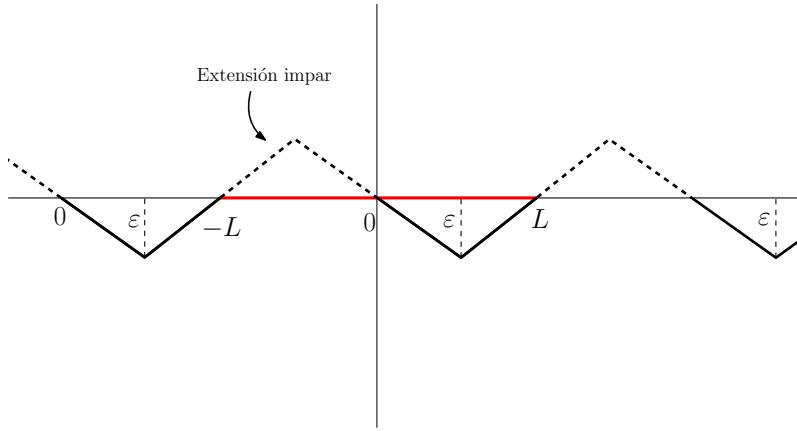
Según lo visto en la Sección 4.2, la solución de la ecuación de onda tiene la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right),$$

donde  $c = \sqrt{T/\rho}$ , y donde se debe cumplir la condición inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Resolvamos entonces el problema de encontrar un desarrollo en serie de Fourier para  $f(x)$  para el cual se cumpla  $a_0 = a_n = 0$ , para todo  $n \geq 1$ . Para ello basta extender la función  $f(x)$  a una función impar, definida en  $[-L, L]$ , y luego extenderla a toda la recta real de manera periódica, como se muestra a continuación:



Los coeficientes de Fourier  $b_n$  se pueden calcular como

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left( \int_0^{L/2} \left(-\frac{2\varepsilon}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L \frac{2\varepsilon}{L}(x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

Utilizando de Nuevo GeoGebra (en su defecto la integración se hace fácilmente por partes) vemos que:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2\varepsilon}{L}\right) \int_0^{L/2} (x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{\varepsilon L(n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(\frac{n\pi}{2}))}{n^2 \pi^2} \\ \frac{2\varepsilon}{L} \int_{L/2}^L (x - L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{-\varepsilon L(2 \sin(\frac{n\pi}{2}) + n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(n\pi))}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Sumando ambos lados, y notando que  $\sin(n\pi) = 0$ , se obtiene:

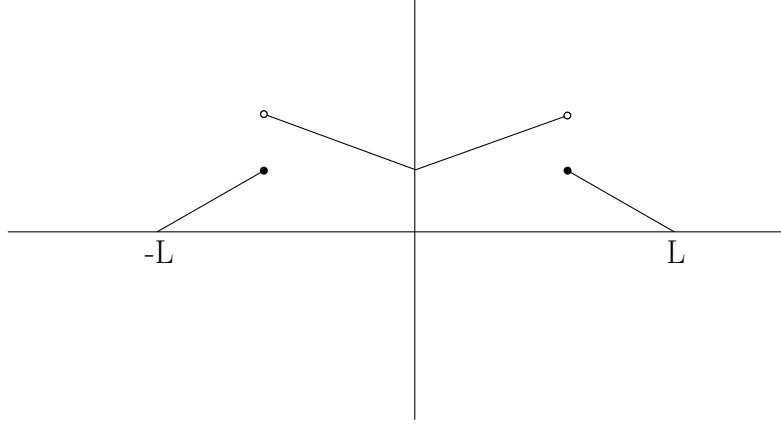
$$b_n = \frac{-8\varepsilon}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \frac{-8\varepsilon}{\pi^2 n^2} (-1)^k \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

Luego

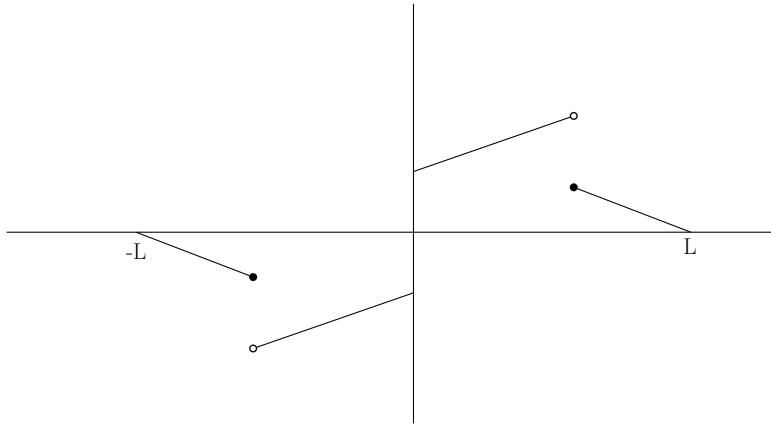
$$f(x) = \frac{8\varepsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right).$$

**Observación 5.1.12.** El método del ejemplo anterior puede seguirse para aproximar cualquier función  $f$  definida en un intervalo  $[0, L]$ , bien sea con una serie de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  o de la forma  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

1. Para el primer caso, extendemos  $f$  haciéndola par en el intervalo  $[-L, L]$ : para ello, solo basta definir  $f(-x) = f(x)$ , si  $-L \leq x \leq 0$ . Después se extiende de manera periódica a toda la recta real.

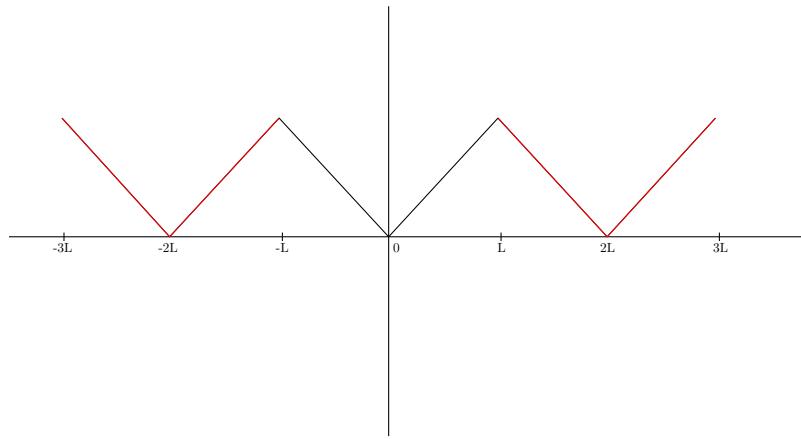


2. En el segundo caso, extendemos  $f$  de manera impar a  $[-L, L]$  si definimos  $f(-L) = f(L)$  y  $f(-x) = -f(x)$ , para  $-L < x \leq 0$ , y a continuación extendemos esta función a una función periódica en toda la recta real.



En cada caso los respectivos coeficientes se computan mediante las fórmulas 5.1.8 o 5.1.9.

**Ejemplo 5.1.13.** Hallemos la serie de Fourier de la función  $f(x) = x$ , definida en  $[0, L]$ . Esta función puede extenderse a  $[-L, L]$  de manera par o impar. Por ejemplo, su extensión *par*, con período  $2L$ , corresponde a la función  $f(x) = |x|$ ,  $-L \leq x \leq L$ , la cual se extiende luego de manera periódica a toda la recta real



Las fórmulas de Euler nos dicen que

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |x| dx = \frac{1}{2L} (2 \int_0^L x dx) = \frac{L}{2}.$$

Para computar  $a_n$  podemos usar el hecho de que la función  $|x| \cos(n\pi x/L)$  es el

producto de dos funciones pares y por consiguiente es par. Luego

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x| \cos(n\pi x/L) dx = \frac{2}{L} \int_0^L |x| \cos(n\pi x/L) dx \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L x \cos(n\pi x/L) dx = \frac{-2L}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \\
 &= \frac{-2L}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^n) \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ es par} \\ \frac{-4L}{n^2\pi^2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases},
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ . Haciendo  $n = 2k$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , vemos que

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-4L}{(2k+1)^2\pi^2}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

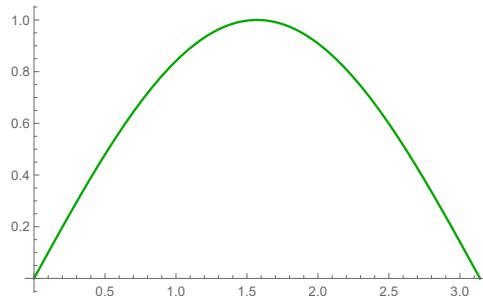
De otro lado,  $|x| \sin(n\pi x/L)$  es una función impar y por consiguiente

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x| \sin(n\pi x/L) dx = 0.$$

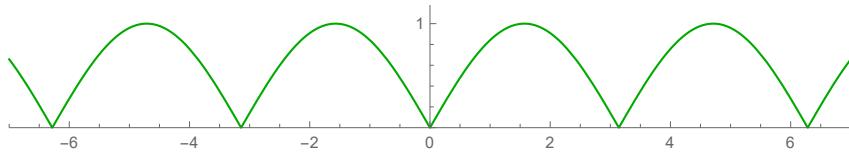
De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{L}{2} + \frac{(-4L)}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) = \\
 &= \frac{L}{2} + \frac{(-4L)}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.1.14.** Consideremos la función  $f(x) = \sin(x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ :



Extendamos de manera *par* esta función al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , lo cual corresponde a la función  $g(x) = |\sin(x)|$ .



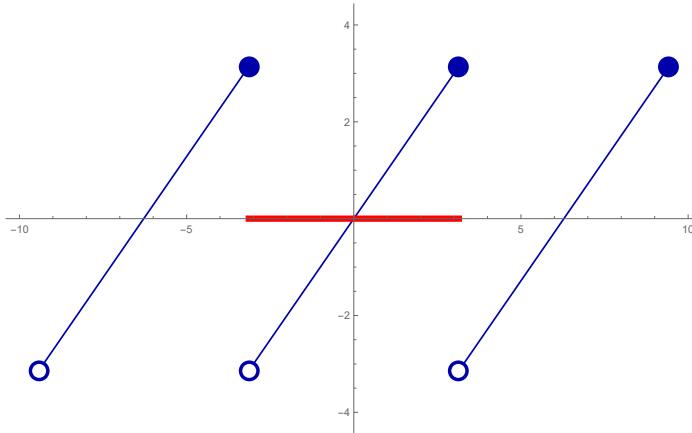
Notemos que esta última función es periódica con período  $2\pi$ . Hallemos su serie de Fourier, usando las fórmulas de Euler y el hecho de que  $\int_0^\pi \cos(\frac{n\pi x}{\pi}) \sin(x) dx = (1 + \cos(n\pi))/(1 - n^2)$  y que  $\int_{-\pi}^\pi \sin(\frac{n\pi x}{\pi}) |\sin(x)| dx = 0$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{1}{2\pi} (2 \int_0^{\pi} \sin(x) dx) = \frac{2}{\pi}. \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(\frac{n\pi x}{\pi}) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) \sin(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos(n\pi)}{(1 - n^2)} = \frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{(1 - n^2)} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \sin(nx) dx = 0. \end{aligned}$$

De aquí que

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k)^2 - 1} \cos(2kx).$$

**Ejemplo 5.1.15.** Hallemos la serie de Fourier de la extensión *ímpar* periódica, con período  $2\pi$ , de la función  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . Esta función es la extensión periódica de  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -\pi < x \leq \pi \\ \pi, & \text{si } x = -\pi \end{cases}$



En este caso la función es impar, y por consiguiente  $a_n = 0$ , para todo  $n \geq 0$  y

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} (2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx) \\ &= \frac{-2}{n} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

✖ **WOLFRAM Mathematica**

```

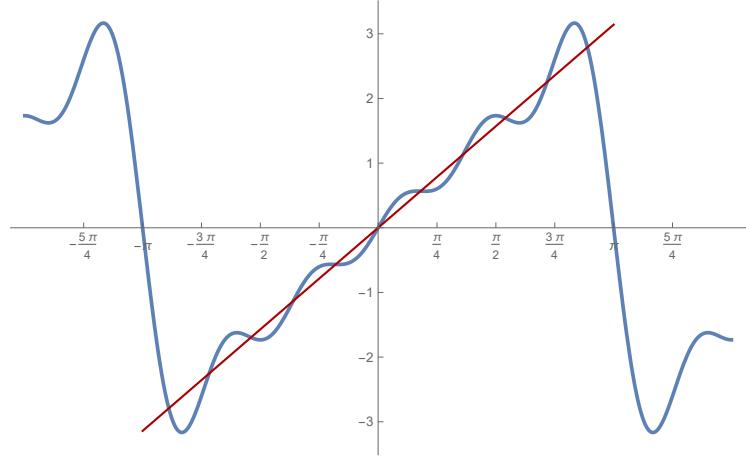
In[153]:= Integrate[x^2 * Cos[n * Pi * x], {x, 0, 1}]
Out[153]= 
$$\frac{2 n \pi \cos[n \pi] + (-2 + n^2 \pi^2) \sin[n \pi]}{n^3 \pi^3}$$


```

De aquí que

$$s(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

La gráfica correspondiente a la suma de los primeros cinco términos de  $s(x)$  se muestra a continuación:



**Ejemplo 5.1.16.** La derivada de la función anterior es suave a tramos, pues es la función constante  $f'(x) = 1$ , excepto cuando  $x = (2k + 1)\pi$ , donde no está definida. No obstante, la serie no puede derivarse término a término, pues  $f$  no es continua. En efecto, al sumar los términos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right) = (-1)^{n+1} \cos(nx)$$

se obtiene la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nx)$  la cual no es convergente, pues el límite del término  $n$ -ésimo no tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Ejemplo 5.1.17.** En el Ejemplo 5.1.13,  $f$  es continua y tanto  $f$  como  $f'$  son suaves a tramos. En este caso  $f'(x)$  es continua, excepto cuando  $x$  es un múltiplo entero de  $L$  ( $x = kL$ ). Al derivar cada término  $\frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right)$  se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) \right) = \frac{\pi}{(2k+1)L} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right).$$

De aquí que

$$f'(x) = \frac{(-4)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right),$$

que coincide con el valor de la serie 5.2 para valores  $x \neq kL$ .

**Observación 5.1.18.** Una función definida en  $[0, L]$  puede extenderse de manera periódica de diferentes maneras, y estas distintas extensiones darán lugar a distintas series de Fourier que, no obstante, deberán coincidir para los valores en  $[0, L]$ .

A manera de ejemplo, la función  $f(x) = x$ , definida inicialmente en el intervalo  $[0, \pi]$  puede extenderse de manera par a todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , como en el Ejemplo

5.1.13; o de manera impar, como en el Ejemplo 5.1.15. En cada caso aparecerán dos aproximaciones diferentes:

$$s_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{(-4)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x), \text{ Ejemplo 5.1.13.}$$

$$s_2(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \text{ Ejemplo 5.1.15.}$$

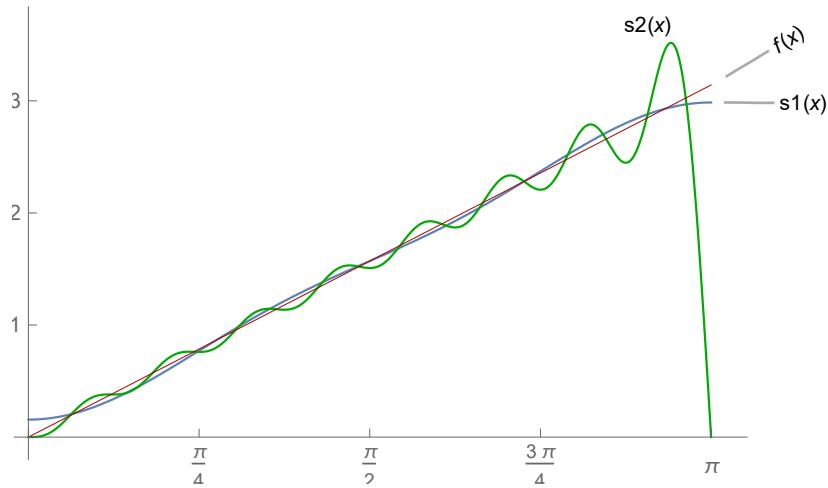


Figura 5.2: Dos aproximaciones de  $f(x) = x$  en  $[0, \pi]$



# CAPÍTULO 6

---

## Ecuación del calor

---

En este capítulo derivaremos la ecuación del calor, bajo ciertos supuestos y discutiremos su solución en algunos ejemplos particulares. Con algunas variaciones, la deducción y solución de la ecuación del calor sigue lo expuesto en cualquiera de los textos referenciados en la bibliografía al comienzo del curso [11], [13], [2].

### 6.1. Calor y temperatura

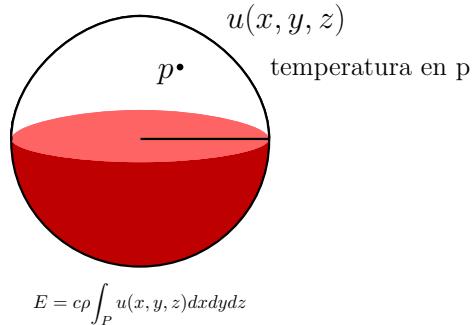
El calor se define como *transferencia de energía térmica* entre dos cuerpos que se encuentran a distintas temperaturas. Este flujo de energía siempre ocurre desde el cuerpo de mayor temperatura hacia el cuerpo de menor temperatura. *La temperatura de un cuerpo  $P$ , de otro lado, puede definirse como la densidad de energía térmica contenida en  $P$ .*

De manera precisa, supongamos un cuerpo  $P$ , uniformemente denso, hecho de un material determinado cuya densidad (que supondremos constante) denotaremos por  $\rho$ , y cuyo volumen se denotará por  $\text{Vol}(P)$ .

**Definición 6.1.1.** La *temperatura* en  $P$ , en un instante de tiempo  $t$  determinado, es una función  $u(x, y, z)$  definida en cada punto  $p$  con coordenadas  $(x, y, z)$ , la cual satisface la siguiente propiedad: la cantidad de *energía calórica* contenida en  $P$ , en el instante  $t$ , es igual a  $E = cp\int u(x, y, z)dx dy dz$  (integral de volumen), donde  $\rho$  denota la densidad de  $P$  y  $c$  es una constante que depende del material del cual está constituido. A la constante  $c$  se le llama el *calor específico* del material, cuyas unidades son energía/(masa  $\times$  temperatura).

Si la temperatura en el instante  $t$  es uniforme en todo los puntos de  $P$  ( $u(x, y, z) = T$ ) entonces la cantidad de energía calórica contenida en  $P$  sería igual a  $E = c\rho T \text{Vol}(P)$ . Si la temperatura fuese una unidad más alta, la energía contenida en  $P$  sería ahora  $E' = c\rho(T + 1)\text{Vol}(P)$  que es igual a  $E + c\rho\text{Vol}(P)$  e igual por tanto a  $E + cm$ , pues  $\rho\text{Vol}(P) = m$ , donde  $m$  denota la masa de  $P$ . De aquí que *la cantidad de energía para subir la temperatura una unidad* sea igual a  $\Delta E = E' - E = cm$ . Esto nos proporciona

una interpretación de la constante  $c$ : es la *cantidad de energía calórica necesaria para subir la temperatura de una unidad de masa una unidad de temperatura*.



Si  $P$  esta hecho de agua, y utilizamos unidades en el SI, kg, m, seg, °C, respectivamente, y si medimos la energía en joules =  $\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$  (que denotaremos con la letra J), entonces la cantidad de energía necesaria para elevar un litro de agua (masa = 1kg) un grado centígrado será 4186,8 J, aproximadamente (esta energía depende de otras variables, como la temperatura inicial del agua y la presión atmosférica, que en esta discusión dejaremos de lado). Esta medida de energía calórica es precisamente la definición de *kilo caloría*, Kcal; si se quiere, 1 Kcal = 4186,8 J. Así, entonces, para el agua, su calor específico  $c$  es igual a 4186,8 J/kg × °C. Esta constante, medida en Kcal, es obviamente igual a 1 Kcal/kg × °C. La siguiente tabla muestra algunos valores de  $c$  para ciertos materiales:

Material	Calor Específico Kcal/kg × °C
Aceite de Oliva	0.400
Acero	0.110
Agua	1.000
Alcohol	0.600
Alpaca	0.095
Aluminio	0.217
Antimonio	0.050
Azufre	0.179
Bronce	0.086
Cadmio	0.056
Carbón Mineral	0.310
Carbón Vegetal	0.201
Cinc	0.093
Cobalto	0.104
Cobre	0.093
Cromo	0.108

Cuadro 6.1

## 6.2. Ley de Fourier

La transferencia de calor obedece una ley simple descubierta por Jean-Baptiste Joseph Fourier. Supongamos que en una cierta región del espacio (por ejemplo, en el interior de un cuerpo  $P$ ) y en determinado instante  $t = t_0$  la temperatura viene dada por una función  $u(x, y, z)$ . Fijémonos en una pequeña sección  $\Delta A$  de superficie. Fourier descubrió que el *fujo de calor a través de  $\Delta A$*  ocurre en la dirección del vector  $-\text{grad}(u) = -(\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z)$ , y viene dado aproximadamente por  $\kappa \langle \mathbf{n}, -\text{grad}(u) \rangle \Delta A$ , donde el símbolo  $\langle -, - \rangle$  denota el *producto punto o producto interno* en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{n}$  denota el *vector normal unitario exterior*. La letra  $\kappa$  denota una constante que depende del material, llamada *constante de conductividad térmica*. Esto quiere decir que en un intervalo pequeño de tiempo  $\Delta t$  la cantidad de energía calorífica que atraviesa la región diferencial  $\Delta A$  sería aproximadamente  $\kappa \langle \mathbf{n}, -\text{grad}(u) \rangle \Delta A \Delta t$ .



**Jean-Baptiste Joseph Fourier** (21 de marzo de 1768 - 16 de mayo de 1830) fue un matemático y físico francés nacido en Auxerre y más conocido por iniciar la investigación de las series de Fourier y sus aplicaciones a problemas de transferencia de calor y vibraciones. La transformada de Fourier y la ley de Fourier también se nombran en su honor.

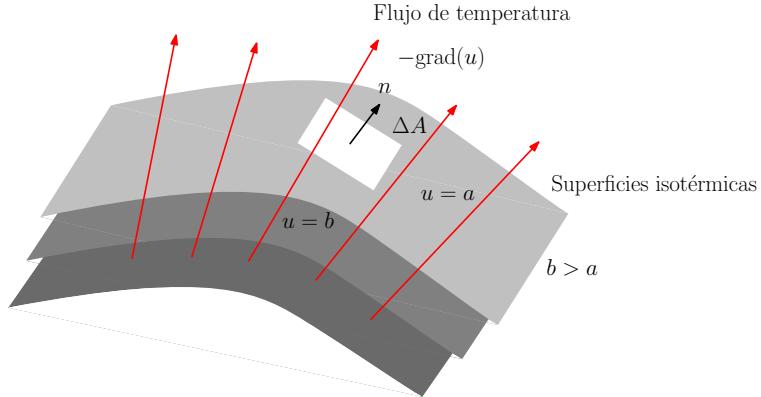


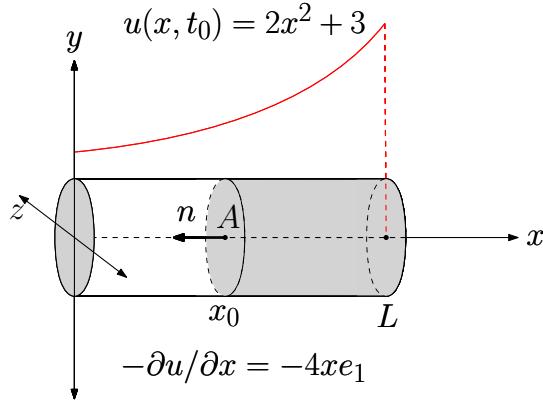
Figura 6.1: Ley de Fourier

La ley de Fourier puede explicarse de la siguiente manera: como  $\text{grad}(u)$  es un vector que apunta en la dirección de mayor crecimiento de la función  $u(x, y, z)$ , y es perpendicular a cada superficie isotérmica (superficie a lo largo de la cual la temperatura es constante), entonces  $-\text{grad}(u)$  es un vector que en cada punto apuntará en la dirección de menor crecimiento de  $u$ : es decir, *el calor fluye de una superficie de mayor temperatura a una superficie de menor temperatura*.

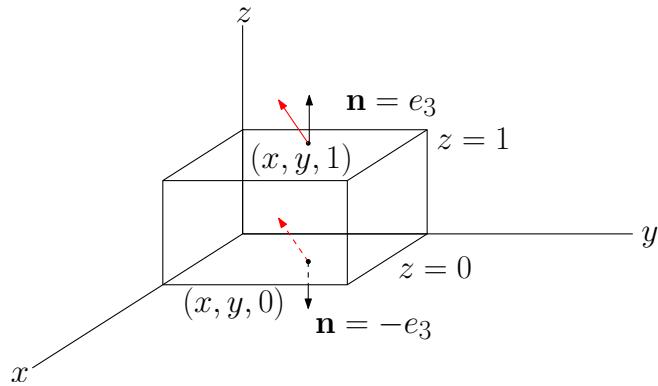
Entonces, en un determinado momento  $t = t_0$  la cantidad de calor que fluye a lo largo de una porción pequeña de superficie  $\Delta A$ , en la dirección de  $\mathbf{n}$ , sería  $\kappa \langle \mathbf{n}, -\text{grad}(u) \rangle \Delta A$ .

**Ejemplo 6.2.1.** Consideremos un cilindro de longitud  $L$  dispuesto a lo largo del eje  $x$ . Supongamos que  $\kappa = 1$  y que la temperatura en un instante  $t_0$  es la misma para todos los puntos del cilindro para la sección vertical  $A$  con coordenadas  $x$ , e igual a  $u(x, t_0) = 2x^2 + 3$  unidades de temperatura. Entonces el fujo de calor que atraviesa la sección  $A_{x_0}$  tendría la dirección de  $-\text{grad}(u) = -\partial u / \partial x = -4xe_1|_{x=x_0}$ , donde  $e_1$  denota el vector unitario en dirección positiva. Como  $\mathbf{n} = -e_1$ , entonces la cantidad de calor que atraviesa  $A_{x_0}$  en el instante  $t_0$  en la dirección de  $\mathbf{n}$  será igual a  $\langle -4x_0 e_1, -e_1 \rangle A_{x_0}$ .

$= 4Ax_0$  (El calor escapa del cilindro en la dirección del normal exterior).



**Ejemplo 6.2.2.** Supongamos que un cubo unitario  $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ , con constante  $\kappa = 0,1$ , se encuentra aislado lateralmente, pero que hay transferencia de calor entre sus caras superior e inferior y el medio circundante. Supongamos que la temperatura en toda una región que contiene a  $C$  está dada por  $u(x, x, y, t) = t/2(x^2 + y^2 - xy(z+1)^2)$ . Calcule, según la ley de Fourier, la transferencia de calor en cada una de las tapas superior e inferior del cubo, en el instante  $t = 1$ .



Sabemos que

$$\begin{aligned} -\text{grad}(u(x, y, z, 1)) &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &= -xe_1 - ye_2 + xy(z+1)e_3. \end{aligned}$$

Luego, en cada punto  $(x, y, 1)$  de la tapa superior ( $z = 1$ ) vemos que  $\langle -\text{grad}(u(x, y, 1, 1), e_3) \rangle = 2xy$ . Luego el flujo de calor estará dado por

$$\begin{aligned} \text{Transferencia en la tapa superior} &= 0,1 \int_0^1 \int_0^1 2xy dx dy = \\ &= 0,2 \times 1/4x^2y^2 \Big|_{[0,1] \times [0,1]} = 0,2 \times 1/4 = 0,05 \text{ joules/s}. \end{aligned}$$

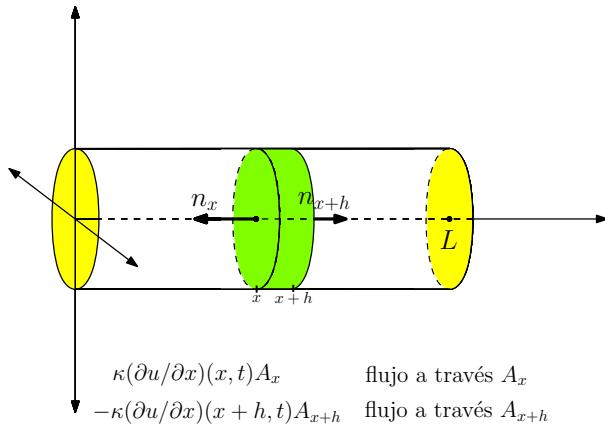
Y en cada punto con coordenadas  $(x, y, 0)$  de la tapa inferior,  $z = 0$ , vemos que  $\langle -\text{grad}(u(x, y, 0, 1)), -e_3 \rangle = -xy$ . Luego

$$\text{Transferencia en la tapa inferior} = -0,1 \iint_{0,0}^{1,1} xy dxdy = -0,1 \times 1/4 = -0,025 \text{ joules/s.}$$

De acuerdo con los signos, vemos que el calor entra por la tapa inferior y sale por la superior.

### 6.3. Ecuación del calor en un cilindro de densidad uniforme

Retomenos el ejemplo anterior: sea  $P$  un cilindro de longitud  $L$ , densidad constante  $\rho$ , fabricado con un material cuyo calor específico es  $c$  y cuya constante de difusión térmica es  $\kappa$ . Supongamos que la temperatura es constante en cada sección vertical y está dada en cada instante  $t$  por una cierta función  $u(x, t)$ ,  $0 < x < L$ . Analicemos el flujo de calor a través de una rodaja de espesor  $h$ , situada entre  $x$  y  $x + h$ :



1. En la sección  $A_x$  el vector normal  $\mathbf{n}_x$  apunta en la dirección negativa. Luego  $\mathbf{n}_x = -e_1$ . Según la ley de Fourier, el flujo de calor en el instante  $t$ , a través de  $A_x$ , es igual a

$$\begin{aligned} \kappa \langle -\partial u / \partial x(x, t) e_1, \mathbf{n}_x \rangle A_x &= \kappa \langle -\partial u / \partial x(x, t) e_1, -e_1 \rangle A_x \\ &= \kappa (\partial u / \partial x)(x, t) A_x. \end{aligned}$$

2. En la sección  $A_{x+h}$ , el vector normal  $\mathbf{n}_{x+h}$  apunta en la dirección positiva. Luego  $\mathbf{n}_{x+h} = e_1$ . Según la ley de Fourier, el flujo de calor en el instante  $t$ , a través de  $A_{x+h}$ , es igual a

$$\begin{aligned} \kappa \langle -\partial u / \partial x(x + h, t) e_1, e_1 \rangle A_{x+h} &= \kappa \langle -\partial u / \partial x(x + h, t) e_1, e_1 \rangle A_{x+h} \\ &= -\kappa (\partial u / \partial x)(x + h, t) A_{x+h}. \end{aligned}$$

3. Entre los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  la cantidad de calor que fluye a través de a frontera de la rodaja sería entonces, aproximadamente,

$$\Delta H = -\kappa A [\partial u / \partial x(x + h, t) - \partial u / \partial x(x, t)] \Delta t. \quad (6.1)$$

donde  $A$  es el área de la sección vertical del cilindro. Esta es la cantidad de calor que *escapa* de la rodaja.

4. De otro lado, por el principio de la conservación de la energía, si  $E(t)$  denota la energía calórica contenida en la rodaja en el instante  $t$ , la diferencia  $E(t + \Delta t) - E(t)$  deberá ser igual entonces a  $-\Delta H$ . El signo menos se debe a que la *energía disminuye* en la rodaja, pues la diferencia (6.1) proporciona una medida del calor que *escapa* de la rodaja. Pero

$$\begin{aligned} E(t) &= Ac\rho \int_x^{x+h} u(x, t) dx \simeq Ahc\rho u(x, t) \text{ y} \\ E(t + \Delta t) &= Ac\rho \int_x^{x+h} u(x, t + \Delta t) dx \simeq Ahc\rho u(x, t + \Delta t). \end{aligned}$$

Luego

$$c\rho u(x, t + \Delta t)h - c\rho u(x, t)h = \kappa \Delta t (\partial u / \partial x(x + h, t) - \partial u / \partial x(x, t)),$$

que es equivalente a

$$c\rho \frac{u(x, t + \Delta t) - c\rho u(x, t)}{\Delta t} = \kappa \frac{\partial u / \partial x(x + h, t) - \partial u / \partial x(x, t)}{h}$$

5. Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que muchas veces suele escribirse como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ donde } \delta = \frac{\kappa}{c\rho} \text{ es la llamada } \textit{constante de difusión térmica}.$$

La siguiente tabla muestra algunos valores de  $c, \rho, \kappa$  para algunos materiales:

#### 6.4. (Opcional) Ecuación del calor en un cuerpo $P$

La ecuación del calor se deduce del principio de conservación de la energía. Nuevamente, consideremos un cuerpo  $P$  de densidad uniforme  $\rho$  y hecho de un sustancia cuyo calor específico es  $c$ . Tomemos un punto interior  $q$ , y denotemos por  $B$  un pequeño entorno alrededor de  $q$ . Supongamos que la temperatura en  $P$  está dada en cada

Material	Calor Específico Kcal/kg × °C	Conductividad Térmica Kcal/s × m × °C	Difusión Térmica $m^2/s$
Aluminio	0.21	$0.48 \times 10^{-1}$	$0.83 \times 10^{-4}$
Cobre	0.094	$0.92 \times 10^{-1}$	$1.1 \times 10^{-4}$
Concreto	0.16	$0.0041 \times 10^{-1}$	$0.011 \times 10^{-4}$

Cuadro 6.2

punto por una función  $u(x, y, z, t)$  que depende del tiempo. Tomemos un  $\Delta t$  pequeño y hagamos en balance de la energía total en una región  $B$  alrededor de  $q$  contenida en  $P$ , entre los tiempos  $t$  y  $t + \Delta t$ . La energía en cada uno de estos momentos es entonces  $E(t) = c\rho \int_B u(x, y, z, t) dx dy dz$  y  $E(t + \Delta t) = c\rho \int_B u(x, y, z, t + \Delta t) dx dy dz$ . Luego

$$\begin{aligned} \frac{E(t + \Delta t) - E(t)}{\Delta t} &= \frac{c\rho \left( \int_B u(x, y, z, t + \Delta t) dx dy dz - \int_B u(x, y, z, t) dx dy dz \right)}{\Delta t} \\ &= c\rho \left( \int_B \frac{u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene que el *cambio instantáneo de la energía en el momento  $t$*  es igual a

$$dE/dt = c\rho \int_B \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz. \quad (6.2)$$

De acuerdo con la ley de Fourier, el flujo de calor en el instante  $t$  a través de la frontera de  $B$ , en la dirección del normal exterior, está dado por la integral  $\kappa \int_{\partial B} \langle \mathbf{n}, -\operatorname{grad} u(x, y, z, t) \rangle dA$ . Por el principio de la conservación de la energía, el cambio instantáneo de energía  $dE/dt$  deberá ser igual a este flujo con signo contrario.

Por tanto:

$$c\rho \int_B \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz = \kappa \int_{\partial B} \langle \mathbf{n}, \operatorname{grad} u(x, y, z, t) \rangle dA. \quad (6.3)$$

Por el Teorema de la divergencia de Gauss sabemos que

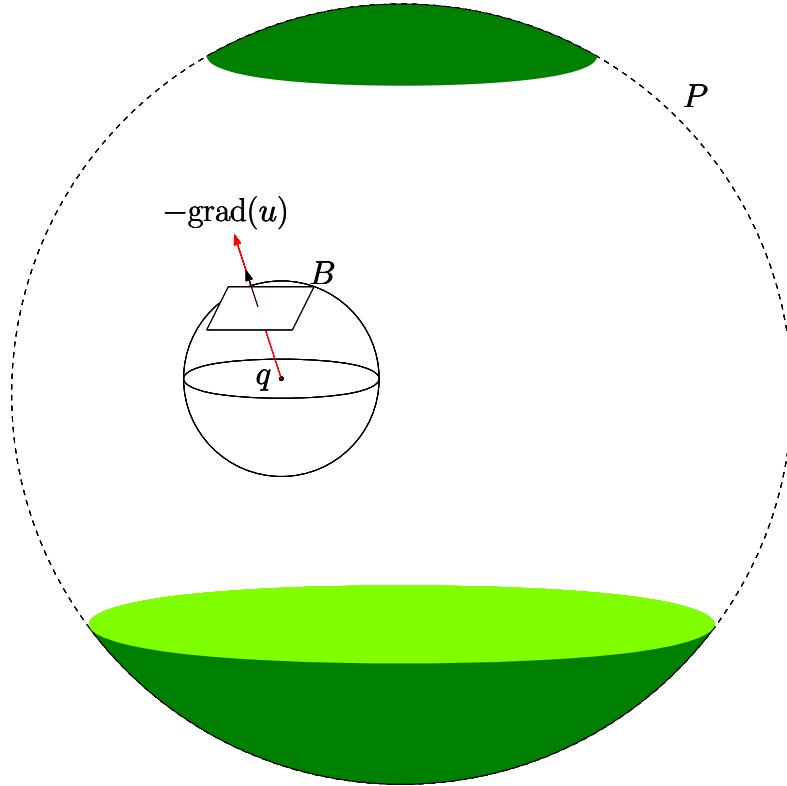
$$\int_{\partial B} \langle \mathbf{n}, \operatorname{grad}(u(x, y, z, t)) \rangle dA = \int_B \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) dx dy dz.$$

Luego, igualando las ecuaciones (6.2) y (6.3) se obtiene:

$$c\rho \int_B \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz = \kappa \int_B \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) dx dy dz, \quad (6.4)$$

donde

$$\operatorname{div}(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}$$



es la divergencia de la función vectorial  $g = (g_1, g_2, g_3)$ . Tomando  $g = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$  se obtiene

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

que se denomina el *Laplaciano de u*, el cual se denotará por  $\Delta u$ .

Ahora, la ecuación 6.4 puede escribirse en la forma:

$$\int_B (c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u) dx dy dz = 0.$$

Como esta ecuación es cierta para cualquier región  $B$  en  $P$ , la función dentro de la integral está forzada a ser igual a cero, de donde se obtiene la *ecuación del calor* para  $P$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{c\rho}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{Ecuacion del Calor})$$

Discutamos de nuevo el ejemplo de la Sección 6.3. Si suponemos que la temperatura solo depende de  $x$  y  $t$ , entonces  $\partial u / \partial y = \partial u / \partial z = 0$  y la ecuación se convierte en:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (6.5)$$

ecuación que, según vimos, se suele escribir en la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t},$$

con  $\delta = \kappa/(c\rho)$ .

## 6.5. Ecuación del calor en un cilindro.

### 6.5.1. Extremos a temperatura cero

Existen distintos tipos de condiciones iniciales para la ecuación del calor. Comencemos por discutir las condiciones iniciales más secillas: para  $t = 0$  se fija  $u(x, 0) = f(x)$ , una cierta distribución de temperatura. Los extremos de la barra  $u(0, t)$  y  $u(L, t)$  se mantienen a temperatura constante, e igual a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ \delta &= \kappa/c\rho. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Como en el ejemplo de la cuerda vibrante, el método de separación de variables proporciona una manera de hallar la solución. Suponemos  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . La ecuación  $\partial^2 u / \partial x^2 = (1/\delta) \partial u / \partial t$  obliga entonces a que  $F''(x)G(t) = 1/\delta F(x)G'(t)$ , y por tanto  $F''/F = \mu$  y  $G'/\delta G = \mu$ , para una cierta constante  $\mu$ . Ahora, las condiciones iniciales fuerzan a que  $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$ , para todo  $t$  y  $u(L, t) = F(L)G(t) = 0$ . De aquí que  $F(0) = F(L) = 0$ , pues buscamos una solución no trivial. Luego  $F$  debe satisfacer la misma ecuación y las mismas condiciones que en el caso de la cuerda vibrante,  $F'' - \mu F = 0$ , con  $F(0) = F(L) = 0$ . En el Capítulo II vimos que la única solución no trivial ocurre cuando  $\mu < 0$ , digamos  $\mu = -\lambda^2$ , en cuyo caso para cada valor de  $n = 1, 2, \dots$  y  $\lambda_n = n\pi/L$  existen soluciones  $F_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ .

La otra ecuación,  $G' - \delta\mu G = 0$  se convierte entonces en  $G' + \delta\lambda_n^2 G = 0$ , cuya solución general es  $G(t) = b_n e^{-\delta\lambda_n^2 t}$ . Cada  $u_n(x, t) = b_n \sin(n\pi x/L) e^{-\delta\lambda_n^2 t}$  es entonces una solución.

Utilizamos de nuevo el principio de superposición para hallar una solución general de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L) e^{-\delta\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = n\pi/L, \quad (\text{Soluc. a la ec. del calor})$$

donde para lograr que se satisfaga la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  es necesario que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$$

sea el desarrollo en serie de Fourier de una extensión impar de  $f(x)$  al intervalo  $[-L, L]$ . De aquí que

$$b_n = 2/L \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx.$$

**Ejemplo 6.5.1.** Una barra de cobre de un metro de longitud se calienta a  $100 C^\circ$ , mientras su extremos se mantienen aislados en hielo seco a una temperatura constante de  $0 C^\circ$ . Calculemos la evolución de la temperatura en la barra dada por la función  $u(x, t)$ .

De acuerdo con la Tabla 2, la constante de difusión del cobre es  $\delta = 1,1 \times 10^{-4} m^2/s$ , y nos dicen que la longitud de la barra es 1 metro. La condición inicial de temperatura está dada por la función constante  $f(x) = 100$ ,  $0 < x < 100$ . Luego cada coeficiente  $b_n$  se computa como

$$\begin{aligned} b_n &= 2/1 \int_0^1 100 \sin(n\pi x) dx \\ &= 200 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{-200}{n\pi} \cos(n\pi x)|_0^1 \\ &= \frac{-200}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} \frac{-200}{n\pi}(-2), & n \text{ es impar} \\ 0, & n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} b_n &= \begin{cases} 400/(n\pi), & \text{si } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{si } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} . \delta = 1,1 \times 10^{-4}, \lambda_n = \frac{n\pi}{1} \\ u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{400}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x) e^{-1,1 \times 10^{-4} ((2k+1)\pi)^2 t} \end{aligned}$$

### 6.5.2. Solución con temperatura constante arbitraria en los extremos

En la ecuación del calor en un cilindro de densidad uniforme, longitud  $L$  y constante de difusión  $\delta$ , supongamos ahora que la temperatura en los extremos se mantiene fija, e igual a  $u(0, t) = T_1$  y  $u(L, t) = T_2$ . La idea para resolver este problema es reducirlo al caso anterior (ecuación 6.6), buscando una solución de la forma  $u(x, t) = u_1(x, t) + v(x)$ , donde  $v(x)$  es una función lineal. Claramente  $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 u_1 / \partial x^2$  y  $\partial u / \partial t = \partial u_1 / \partial t$ , y por consiguiente si  $u_1(x, t)$  satisface la ecuación  $\partial^2 u_1 / \partial x^2 = 1/\delta \partial u_1 / \partial t$ , entonces la función  $u(x, t)$  también la satisfaría. Si además  $u_1(x, t)$  satisface las condiciones iniciales  $u_1(x, t) = u_1(L, t) = 0$ , entonces para que  $u(x, t)$  satisfaga  $u(0, t) = T_1$  y  $u(L, t) = T_2$  se necesita que

$$\begin{aligned} T_1 &= u(0, t) = u_1(0, t) + v(0) = v(0) \\ T_2 &= u(L, t) = u_1(L, t) + v(0) = v(L) \end{aligned} \quad (6.7)$$

En este caso, si  $v(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + T_1$  es la ecuación de la recta cuyos valores en 0 y  $L$  son,  $v(0) = T_1$  y  $v(L) = T_2$ , entonces es claro que las ecuaciones (6.7) se satisfacen si  $u_1(x, t)$  es solución de la ecuación del calor, con  $u_1(0, t) = u_1(L, t) = 0$ . Finalmente, queremos también que  $f(x) = u(x, 0) = u_1(x, 0) + v(x)$ . Luego basta que  $u_1(x, t)$  satisfaga además la condición  $u_1(x, 0) = f(x) - v(x)$ . En conclusión:

La solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= T_1, \quad u(L, t) = T_2 \\ \delta &= \kappa/c\rho. \end{aligned} \quad (6.8)$$

puede obtenerse haciendo  $u(x, t) = u_1(x, t) + v(x)$ , donde  $v(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + T_1$ , y  $u_1(x, t)$  es solución del problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \\ u_1(x, 0) &= f(x) - v(x), \\ u_1(0, t) &= 0, \quad u_1(L, t) = 0 \\ \delta &= \kappa/c\rho. \end{aligned} \quad (6.9)$$

que ya resolvimos en la sección anterior.

**Ejemplo 6.5.2.** la temperatura en una barra cilíndrica de aluminio de longitud 1 m está dada inicialmente por  $f(x) = 10x^2$ ,  $0 < x < 1$ . Los extremos se mantienen a temperatura fija  $T_1 = 0$   $C^\circ$  en el extremo izquierdo y  $T_2 = 10$   $C^\circ$  en el extremo derecho. Hallemos la función de temperatura en cualquier instante  $u(x, t)$ .

En este caso  $v(x) = 10x$ ,  $\delta = 0.83 \times 10^{-4}$  m/s y debemos resolver el problema (6.9), cuya solución se obtiene computando los coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} b_n &= 2/1 \int_0^1 (10x^2 - 10x) \sin(n\pi x) dx = 20 \int_0^1 (x^2 - x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 20 \left( \frac{-2 + 2 \cos(n\pi)}{\pi^3 n^3} \right) = \begin{cases} \frac{-80}{\pi^3 n^3}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego la solución sería

$$u(x, t) = 10x + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{-80}{\pi^3 n^3} \sin(n\pi x) e^{-0.83 \times 10^{-4} (n\pi)^2 t}$$

El siguiente programa en *Mathematica* genera una simulación de la ecuación del calor en una barra de longitud  $L$ , cuyo coeficiente de difusión es *delta*, con condiciones iniciales  $u(x, 0) = f(x)$  y  $u(0, t) = T_1$  y  $u(L, t) = T_2$ . El entero  $n$  es el número de términos de la correspondiente serie de Fourier que se desean calcular.

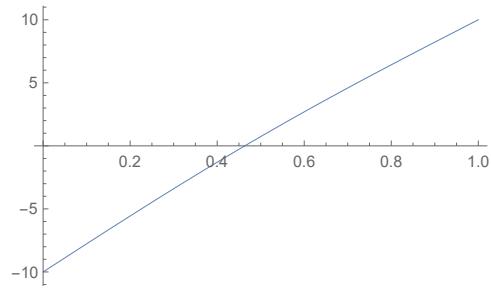
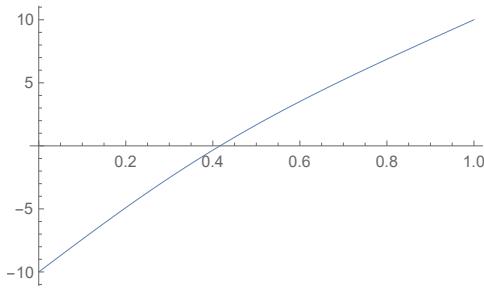
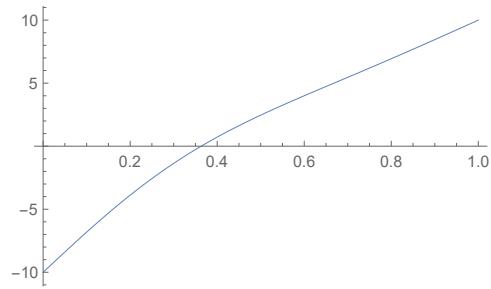
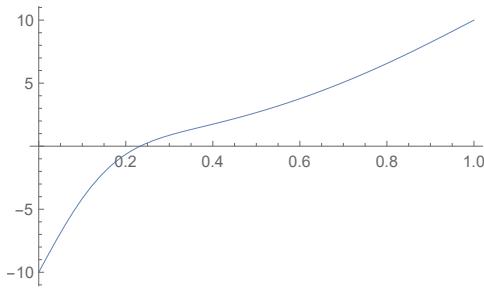
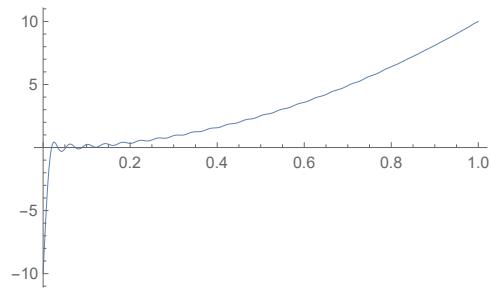
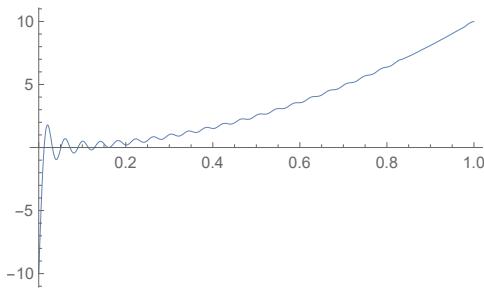
 WOLFRAM Mathematica

```

In[1]:= L := 1;
δ := 0.83 * 10^-4;
T1 = -10;
T2 = 10;
v := (T2 - T1) / L * x + T1;
f := 10 * x^2;
n := 50;
For[i = 1;
  u = 0, i < n, i++,
  u = u + 2 / L * Integrate[{(f - v) * Sin[i * Pi * x / L]}, {x, 0, L}] *
    Sin[i * Pi * x / L] * Exp[-δ * (Pi * i / L)^2 * t]];
calor1 = (u + v)[[1]];
m[x_, t_] := Evaluate[calor1];
maxi = MaxValue[{m[x, 0], 0 <= x <= L}, x];
mini = MinValue[{m[x, 0], 0 <= x <= L}, x];
peli = Animate[
  Plot[m[x, t], {x, 0, L}, PlotRange -> {{0, 1}, {Min[T1, T2, mini], Max[T1, T2, maxi]}},
  PlotStyle -> {Red, Thickness[0.001]}], {t, 0, 5000, Appearance -> "Labeled"},
  AnimationRepetitions -> 1, AnimationRunning -> True]

```

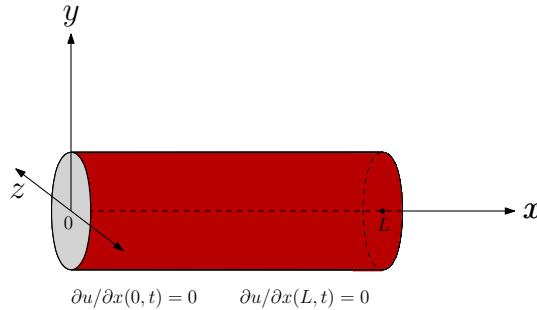
Las siguientes imágenes corresponden a una simulación del problema en el Ejemplo 6.5.2, con temperaturas en cada extremo iguales a  $T_1 = -10$  y  $T_2 = 10$ , y tiempos 0, 0.5, 100, 500, 1000, 2000 segundos respectivamente.



Notamos que cuando  $t \rightarrow \infty$  la solución  $u(x, t)$  tiende a la función  $v(x)$ , que es la línea recta entre los puntos  $(0, T_1)$  y  $(L, T_2)$ .

### 6.5.3. Otras condiciones de frontera

El método de separación de variables nos permite resolver otros problemas de conducción de calor bajo condiciones iniciales diferentes. Por ejemplo, supongamos que la distribución de temperatura en  $t = 0$  está dada por una función  $f(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ , y que *en los extremos de la barra no hay flujo de calor*. En otras palabras, supongamos que en todo instante  $t$ , en  $x = 0$  y en  $x = L$ , el flujo de calor  $\kappa \langle -\operatorname{grad}(u), n \rangle$  es cero. Esto equivale a decir que  $\partial u / \partial x(0, t) = \partial u / \partial x(L, t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ .



Como en la sección anterior, suponemos una solución de la forma  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . La ecuación del calor (6.8) nos dice que  $F''(x)G(t) = 1/\delta F(x)G'(t)$ , y por tanto  $F''(x) - \mu F(x) = 0$  y  $G'(t) - \delta \mu G(t) = 0$ , para una cierta constante  $\mu$ . Distingamos tres casos:

- Si  $\mu > 0$ , la única solución para  $u(x, t)$  es la trivial, pues en este caso  $F(x) = Ae^{+\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$ . Pero la condición inicial  $\partial u / \partial x(0, t) = \partial u / \partial x(L, t) = 0$  fuerza a que

$$\begin{aligned}\partial u / \partial x(0, t) &= \sqrt{\mu}(A - B)G(t) = 0 \\ \partial u / \partial x(L, t) &= \sqrt{\mu}(Ae^{+\sqrt{\mu}L} - Be^{-\sqrt{\mu}L})G(t) = 0.\end{aligned}$$

De la primera ecuación vemos que  $A = B$ . De la segunda se sigue que  $A(e^{+\sqrt{\mu}L} - e^{-\sqrt{\mu}L}) = 0$ . De aquí que  $A = 0$ .

- Si  $\mu = 0$ , entonces  $F(x) = cx + d$ . En este caso,  $\partial u / \partial x(0, t) = \partial u / \partial x(L, t) = c = 0$ . Como  $\mu = 0$ , se sigue que  $G'(t) = 0$ . Luego  $F(x)$  y  $G(t)$  son constantes y en consecuencia  $u_0(x, t) = a_0$  es una solución no trivial de la ecuación del calor.
- Si  $\mu < 0$ , escribimos, como antes,  $\mu = -\lambda^2$ . La ecuación  $F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0$  tiene solución general  $F(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$ . Derivando con respecto a  $x$  se obtienen las siguientes dos ecuaciones, en  $x = 0$  y  $x = L$ :

$$\begin{aligned}-pA \sin(0) + pB \cos(0) &= 0, \text{ y en consecuencia } B = 0 \\ -pA \sin(\lambda L) &= 0,\end{aligned}$$

de donde vemos que  $\lambda$  debe tomar valores  $\lambda_n = n\pi/L$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Ahora, la solución general de la ecuación  $G'(t) + \delta\lambda_n^2 G(t) = 0$  es  $G(t) = De^{-\delta\lambda_n^2 t}$ . Luego, para cada entero  $n > 0$ ,  $u_n(x, t) = a_n \cos(\lambda_n x)e^{-\delta\lambda_n^2 t}$  es una solución de (6.8). Sumando (suma infinita) obtenemos una solución en serie de Fourier:

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x)e^{-\delta\lambda_n^2 t}$$

Si hacemos  $x = 0$ , vemos que la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  se puede satisfacer si

$$f(x) = u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x),$$

que es precisamente el desarrollo en serie de Fourier de la *extensión par* de  $f(x)$  al intervalo  $[-L, L]$ . En este caso, según ya vimos, los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/L \int_0^L f(x) dx \\ a_n &= 2/L \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

El siguiente recuadro resume la discusión anterior:

La solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad t > 0, \delta = \kappa/c\rho. \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0, L) = 0, \end{aligned} \tag{6.10}$$

viene dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\delta\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \\ a_0 &= 1/L \int_0^L f(x) dx \\ a_n &= 2/L \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.5.3.** Supongamos que una barra de concreto de 5 metros de longitud posee una distribución de temperatura inicial dada por la función  $f(x) = -2x + 5$ . Supongamos que no hay transferencia de calor en los extremos. Hallemos la función de temperatura en cada instante  $t$ .

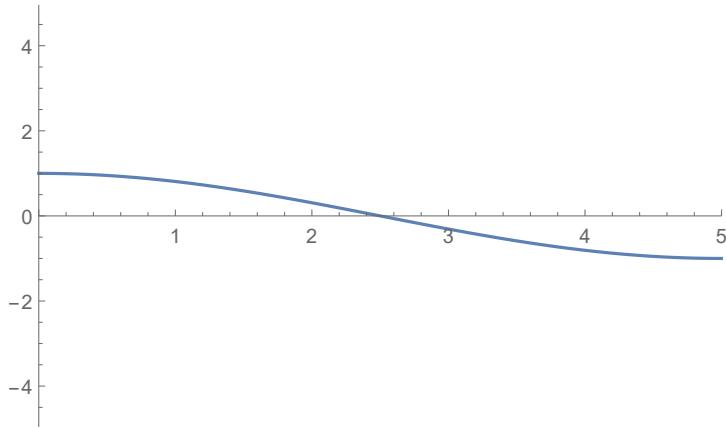
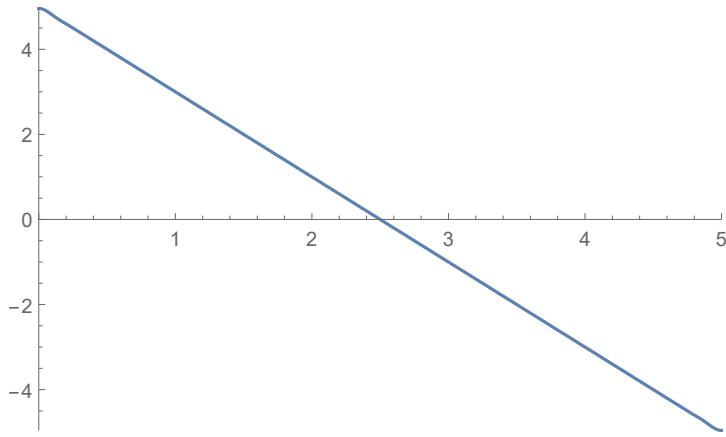
Según la Tabla 2,  $\delta = 1,1 \times 10^{-6}$ . Calculamos:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/5 \int_0^5 (-2x + 5) dx = -(1/5)x^2 + x \Big|_0^5 = 0. \\ a_n &= 2/5 \int_0^5 (-2x + 5) \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx = \frac{-10(n\pi \sin(n\pi) + 2\cos(n\pi) - 2)}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{-10}{n^2\pi^2}(2(-1)^n - 2) = \begin{cases} \frac{40}{\pi^2 n^2}, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \\ 0, & \text{si } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Luego la solución  $u(x, t)$  es igual a

$$u(x, t) = \frac{40}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) e^{-1,1 \times 10^{-6} (n\pi/5)^2 t}.$$

Calculemos, mediante una simulación del proceso, cuánto tiempo tendría que transcurrir para que la temperatura del extremo izquierdo bajara a un grado centígrado. La siguiente simulación en Mathematica nos muestra que aproximadamente en  $t = 3,2 \times 10^6 \simeq 37,03$  días se alcanza esta temperatura.



# CAPÍTULO 7

---

## La membrana vibrante

---

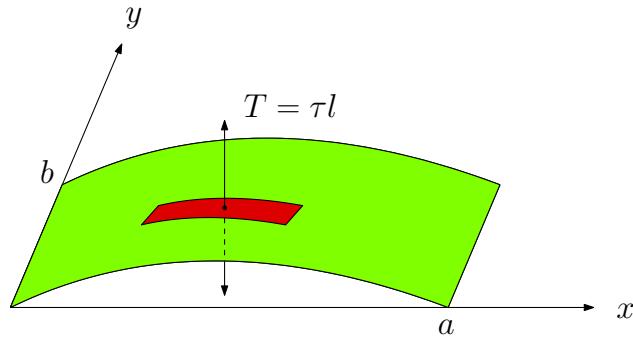
En este capítulo estudiaremos los problemas de la membrana vibrante rectangular y de la membrana vibrante de borde circular, extensiones a dos dimensiones de los problemas estudiados en los capítulos anteriores. Mostraremos cómo resolverlos bajo ciertos supuestos, y discutiremos soluciones particulares en algunas situaciones. Con algunas variaciones, seguiremos los expuesto en cualquiera de los textos referenciados en la bibliografía al comienzo del curso [11], [13], [2].

### 7.1. Ecuación de una membrana vibrante rectangular

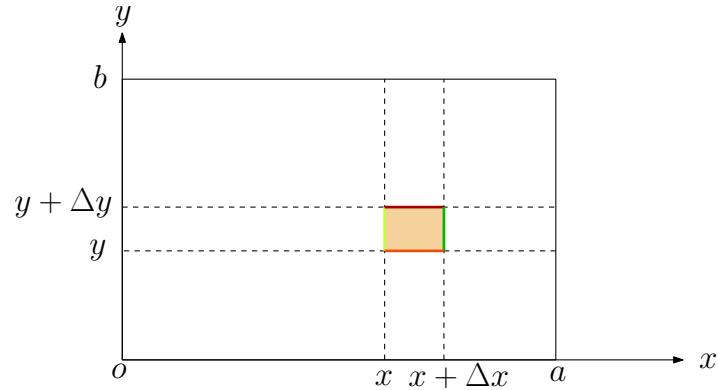
Supongamos una membrana elástica  $M$  de forma rectangular cuyos bordes se encuentran confinados a los lados del cuadrado  $[0, a] \times [0, b]$ . De manera similar a como analizamos la cuerda vibrante, denotemos por  $z = u(x, y, t)$  la función que describe la posición en el instante  $t$  de un punto en  $M$  cuya proyección en el plano tiene coordenadas  $(x, y)$ . Asumiremos que:

#### Supuestos físicos

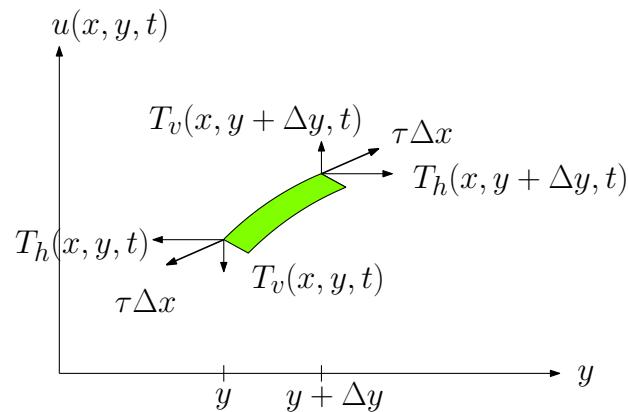
1.  $M$  es homogénea de densidad constante  $\rho$ , que mediremos en  $\text{kg/m}^2$ .
2. Cada punto vibra en dirección exclusivamente vertical en la dirección del eje  $z$
3. El desplazamiento de cada punto en la dirección vertical es pequeño.
4. La tensión en la membrana es *uniforme en todas las direcciones*: si hicieramos un pequeño corte de longitud  $l$  en cualquier lugar de  $M$ , y en cualquier instante  $t$ , la fuerza ejercida a ambos lado de  $l$  sería la misma, y sería proporcional a  $l$ : es la decir, la fuerza resultante  $T$  en cualquiera de los dos lados está dada por  $T = \tau l$ , donde  $\tau$  (densidad de fuerza) tiene unidades Newton/m:



Analicemos la dinámica de una pequeña porción de membrana comprendida entre  $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]$



Miremos dos cortes: el primero, manteniendo  $x$  fijo y variando  $y$ , y hagamos un análisis de fuerzas:



Del supuesto (4) se sigue que las fuerzas en las direcciones horizontales son:

$$\begin{aligned} T_h(x, y, t) &= \tau \Delta x \cos \theta(x, y, t) \\ T_h(x, y + \Delta y, t) &= \tau \Delta x \cos \theta(x, y + \Delta y, t), \end{aligned}$$

donde  $\theta(x, y, t)$  denota el ángulo que forma la tangente (en el respectivo punto) con respecto a la horizontal. Como no hay movimiento en la dirección horizontal se deberá cumplir que  $T_h(x, y, t) = T_h(x, y + \Delta y, t)$ , y por consiguiente:

$$\tau \Delta x \cos \theta(x, y + \Delta y, t) - \tau \Delta x \cos \theta(x, y, t) = 0.$$

Como estamos suponiendo que las vibraciones son pequeñas (tercer supuesto) podemos deducir entonces que los ángulos  $\theta(x, y, t)$  también son muy pequeños, y por consiguiente:

$$\cos \theta(x, y, t) \simeq \cos \theta(x, y + \Delta y, t) \simeq 1.$$

De aquí que

$$\tau \Delta x \cos \theta(x, y + \Delta y, t) = \tau \Delta x \cos \theta(x, y, t) \simeq \tau \Delta x. \quad (7.1)$$

De otro lado, las fuerzas en las direcciones verticales son:

$$\begin{aligned} T_v(x, y, t) &= -T(x, y, t) \sin \theta(x, y, t) \\ &= \tau \Delta x \sin \theta(x, y, t) \end{aligned}$$

y

$$T_v(x, y + \Delta y, t) = T(x, y + \Delta y, t) \sin \theta(x, y + \Delta y, t) \quad (7.2)$$

$$= \tau \Delta x \sin \theta(x, y + \Delta y, t). \quad (7.3)$$

La fuerza total resultante en dirección vertical es entonces igual a la diferencia:

$$\tau \Delta x \sin \theta(x, y + \Delta y, t) - \tau \Delta x \sin \theta(x, y, t). \quad (7.4)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\tau \Delta x$ , y teniendo en cuenta las igualdades (7.1), podemos reescribir la ecuación anterior en la forma:

$$\begin{aligned} \tau \Delta x &\left( \frac{\tau \Delta x \sin \theta(x, y + \Delta y, t)}{\tau \Delta x \cos \theta(x, y + \Delta y, t)} - \frac{\tau \Delta x \sin \theta(x, y, t)}{\tau \Delta x \cos \theta(x, y, t)} \right) \\ &= \tau \Delta x (\tan \theta(x, y + \Delta y, t) - \tan \theta(x, y, t)). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \tan \theta(x, y + \Delta y, t) &= \partial u / \partial y(x, y + \Delta y, t), \\ \tan \theta(x, y, t) &= \partial u / \partial y(x, y, t), \end{aligned}$$

entonces esta última ecuación puede reescribirse como:

$$\tau \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \Delta y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) \right). \quad (7.5)$$

De otro lado, mirando ahora el corte que resulta de mantener  $y$  fijo y variar  $x$ , podemos obtener de manera completamente similar las siguientes conclusiones:

Del análisis de fuerzas horizontales se sigue la igualdad:

$$\tau\Delta y \cos \theta(x + \Delta x, y, t) = \tau\Delta y \cos \theta(x, y, t) \simeq \tau\Delta y. \quad (7.6)$$

Del análisis de fuerzas verticales se ve que la fuerza total resultante sobre el pedazo de membrana, en la dirección considerada, sería:

$$\tau\Delta y \sin \theta(x + \Delta x, y, t) - \tau\Delta y \sin \theta(x, y, t), \quad (7.7)$$

ecuación que puede escribirse (después de multiplicar por  $\tau\Delta y$  y utilizar (7.6) en la forma:

$$\tau\Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y + \Delta y, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) \right). \quad (7.8)$$

Luego la fuerza resultante total en la dirección vertical es igual a la suma de (7.5) y (7.8). La segunda ley de Newton implica entonces que:

$$\begin{aligned} & \tau\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \Delta y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) \right) + \tau\Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y + \Delta y, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) \right) \\ &= m(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

donde

$$m(x, y) = \rho \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2} dx dy$$

es la masa del elemento de membrana determinado por  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . Nuevamente, del supuesto (3) se sigue que  $\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2} \simeq 1$ , y por tanto  $m(x, y) \simeq \rho\Delta x\Delta y$ . Dividiendo 7.9 a ambos lados por  $\Delta x\Delta y$  obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta y} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \Delta y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) \right) + \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y + \Delta y, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{donde } c = \sqrt{\tau/\rho}. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta y \rightarrow 0$  se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{ec. membrana})$$

la cual es la ecuación diferencial que rige el movimiento de una membrana bajo los supuestos 1-4. Las condiciones de frontera (c.f.) sería entonces:  $u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$ ,  $0 \leq y \leq b$  y  $u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ . Si suponemos que la membrana comienza a vibrar desde el reposo, y que su forma en  $t = 0$  está dada por una cierta ecuación  $z = f(x, y)$ , entonces habría dos condiciones inciales (c.i.):  $u(x, y, 0) = f(x, y)$  y

$\partial u / \partial t(x, y, 0) = 0$ . En síntesis, la ecuación diferencial, junto con sus condiciones de frontera y condiciones iniciales serían:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\tau/\rho}$$

$$\text{c.f.1: } u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$\text{c.f.2: } u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\text{c.i.1: } u(x, y, 0) = f(x, y),$$

$$\text{c.i.2: } \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0.$$

## 7.2. Solución de la ecuación de la membrana rectangular

Busquemos una solución del problema (??) de la forma  $u(x, y, t) = \phi(x, y)G(t)$ . La ecuación diferencial ec. membrana obliga a que

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{\Delta \phi(x, y)}{\phi(x, y)}$$

donde  $\Delta$  denota el *operador laplaciano*  $\Delta \phi(x, y) = \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial x^2$ . Como las variables aparecen separadas a la izquierda y derecha, ambos cocientes deben ser iguales a una constante  $p$

$$\begin{aligned} \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} &= p \\ \frac{\Delta \phi(x, y)}{\phi(x, y)} &= p. \end{aligned}$$

Veamos, como en el caso de la cuerda vibrante, que los supuestos físicos fuerzan la escogencia  $p < 0$ .

1. Si  $p > 0$ , digamos  $p = \mu^2$ , entonces la solución general de  $G(t)$  sería de la forma  $G(t) = Ae^{-kt} + Be^{kt}$ , donde  $k = c\mu$ . De la condición inicial  $\partial u / \partial t(x, y, 0) = 0$  se sigue que, para que exista una solución no trivial, debe darse  $G'(0) = k(B - A) = 0$ . Es decir,  $A = B$ . Ahora, si  $A = B$  son constantes no nulas se tendría que  $G(t) \rightarrow \infty$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , y por tanto  $u(x, y, t) \rightarrow \infty$ , lo cual viola el supuesto físico (3).
2. Si  $p = 0$ , entonces se deduce que  $G(t) = At + B$ , y la condición  $G'(0) = 0$  fuerza a que  $A = 0$ . De aquí que  $u(x, y, t) = B\phi(x, y)$ , para todo  $t$ , y por tanto cada punto permanecería sin moverse en todo instante, lo cual es imposible, a no ser que la forma inicial de la membrana fuese  $f(x, y) = 0$ , pues como muestra el análisis de fuerzas, si  $f(x, y) \neq 0$  en el instante  $t = 0$  habría pequeñas porciones de membrana sometidas a una fuerza vertical resultante no nula.

3. Supongamos entonces que  $p < 0$ , digamos  $p = -\lambda^2$ . De aquí resultan dos ecuaciones diferenciales:

$$G'' + (c\lambda)^2 G = 0 \text{ y } \Delta\phi = -\lambda^2\phi.$$

La segunda ecuación puede interpretarse de la siguiente manera: si pensamos que las funciones  $\phi$  forman en algún sentido un espacio vectorial (a la idea puede dársele rigor) entonces la soluciones de esta ecuación diferencial serían precisamente los autovectores del *operador lineal* laplaciano  $\Delta\phi = -\lambda^2\phi$ , con valor propio  $-\lambda^2$ . Una colección de vectores propios (los cuales pueden hallarse mediante el método de separación de variables), cada uno con valor propio  $\lambda_{m,n} = \pi\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}$ , está dada por:

$$\phi_{m,n}(x, y) = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b),$$

para cada pareja de enteros  $m, n \geq 1$ . En efecto:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\pi^2[(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2]\phi_{m,n}(x, y).$$

De otro lado, para cada pareja de enteros positivos  $(m, n)$  las soluciones de  $G'' + (c\lambda_{m,n})^2 G = 0$  vienen dadas por

$$G_{m,n}(t) = b_{m,n} \cos(c\lambda_{m,n} t) + b_{m,n}^* \sin(c\lambda_{m,n} t),$$

para coeficientes arbitrarios  $b_{m,n}$  y  $b_{m,n}^*$ . Buscamos una solución de la forma

$$u_{m,n}(x, y, t) = \phi_{m,n}(x, y)G_{m,n}(t).$$

La condición inicial  $\partial u_{m,n}/\partial t(x, y, 0) = 0$  fuerza la ecuación

$$\phi_{m,n}(x, y)G'_{m,n}(t) = 0,$$

lo que a su vez (si buscamos soluciones no triviales) obliga a que  $G'_{m,n}(0) = c\lambda_{m,n}b_{m,n}^* = 0$ , y en consecuencia  $b_{m,n}^* = 0$ . Luego

$$u_{m,n}(x, y, t) = b_{m,n} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \cos(c\lambda_{m,n} t).$$

Al igual que en el caso de la cuerda vibrante, para satisfacer la condición inicial  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , buscamos una solución en forma de suma infinita (serie):  $u(x, y, t) = \sum_{m,n} u_{m,n}(x, y, t)$ . Haciendo  $t = 0$  se ve entonces que se debe cumplir:

$$f(x, y) = \sum_{m,n} b_{m,n} \phi_{m,n}(x, y). \quad (7.10)$$

Esta suma correspondería al *desarrollo de Fourier doble de la función*  $f(x, y)$ . Los coeficientes  $b_{m,n}$  pueden determinarse con el mismo método utilizado en el caso de la cuerda, esto es, notando que existen de manera análoga las siguientes

relaciones de ortogonalidad (que se pueden comprobar, por ejemplo, utilizando *GeoGebra*, o por integración directa):

$$\int_0^b \int_0^a \phi_{m,n}(x, y) \phi_{m',n'}(x, y) dx dy = 0, \text{ si } (m, n) \neq (m', n'), m, n, m', n' \geq 1.$$

$$\int_0^b \int_0^a \phi_{m,n}(x, y) \phi_{m',n'}(x, y) dx dy = \frac{ab}{4}, \text{ si } (m, n) = (m', n'), m, n, m', n' \geq 1.$$

Por consiguiente, al multiplicar ambos lados de 7.10 por  $\phi_{m,n}$ , para un par fijo  $(m, n)$ , y después integrar, se obtiene:

$$\int_0^b \int_0^a f(x, y) \phi_{m,n}(x, y) dx dy = b_{m,n} \frac{ab}{4},$$

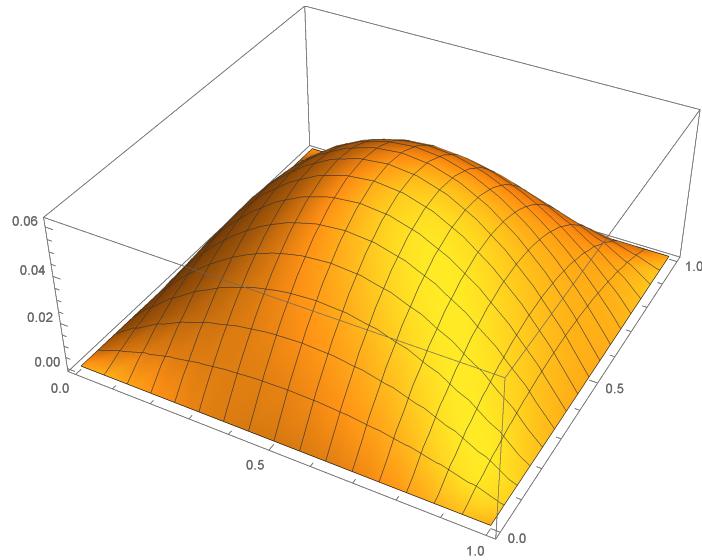
de donde se deduce:

$$b_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy.$$

En resumen, la solución del problema ?? sería:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m,n} b_{m,n} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \cos(c\lambda_{m,n}t) \\ b_{m,n} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy. \\ \lambda_{m,n} &= \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.2.1.** Consideremos la siguiente membrana cuadrada determinada por  $a = b = 1$  y  $c = 1/\pi$ . Supongamos que  $f(x, y) = xy(x - 1)(y - 1)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ , y que la membrana comienza a vibrar sin velocidad inicial:



Entonces

$$b_{m,n} = 4 \int_0^1 \int_0^1 xy(x-1)(y-1) \sin\left(\frac{m\pi x}{1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dx dy.$$

Integrando por partes (o usando *Mathematica*)

 **WOLFRAM Mathematica**

```
In[1]:= Integrate[x * (x - 1) * Sin[m * Pi * x], {x, 0, 1}]
Out[1]= -2 + 2 Cos[m \[Pi]] + m \[Pi] Sin[m \[Pi]]
          m^3 \[Pi]^3
```

Como  $m, n \geq 1$ , se obtiene:

$$\int_0^1 x(x-1) \sin\left(\frac{m\pi x}{1}\right) dx = \frac{2((-1)^m - 1)}{\pi^3 m^3}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
 b_{m,n} &= 4 \int_0^1 \left[ (y-1) \sin\left(\frac{n\pi y}{1}\right) \int_0^1 x(x-1) \sin\left(\frac{m\pi x}{1}\right) dx \right] dy \\
 &= 4 \frac{2((-1)^m - 1)}{\pi^3 m^3} \int_0^1 (y-1) \sin\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dy \\
 &= 4 \frac{2((-1)^m - 1)}{\pi^3 m^3} \times \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{Si } m \text{ o } n \text{ es par} \\ \frac{64}{\pi^6 m^3 n^3}, & \text{Si } m \text{ y } n \text{ son impares} \end{cases}
 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$u(x, y, t) = \frac{64}{\pi^6} \sum_{\substack{m, n \\ \text{impares}}} \frac{1}{m^3 n^3} \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) \cos\left(\pi\sqrt{m^2 + n^2}t\right).$$

El siguiente programa en *Mathematica* nos permite ver una animación de este ejemplo.

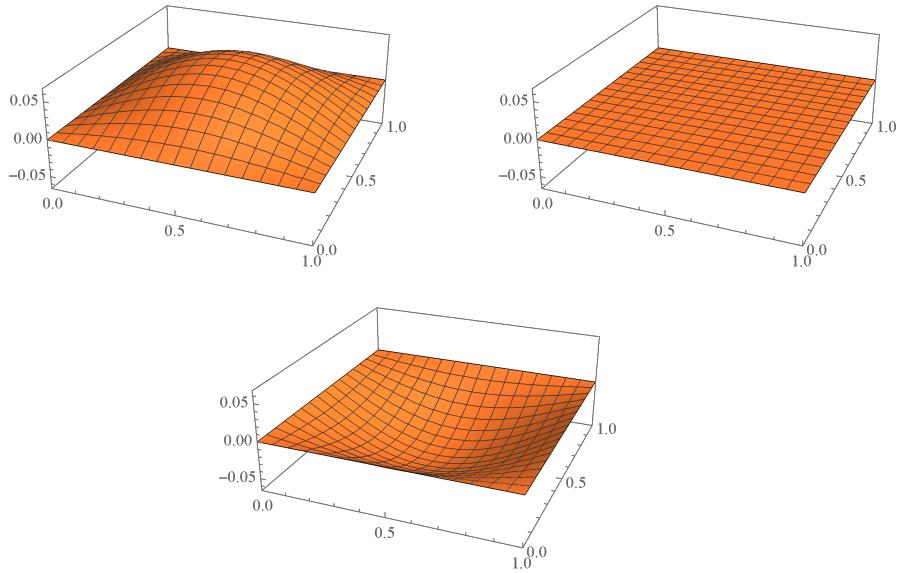
 WOLFRAM Mathematica

```

In[22]:= a = 1; b = 1; c = 1/Pi;
m := 10;
n := 10;
u = 0;
For[i = 0, i < m, i++,
  For[j = 0, j < n, j++,
    u = u + 64 / (Pi^6 * (2 * i + 1)^3 * (2 * j + 1)^3) * Sin[(2 * i + 1) * Pi * x] *
      Sin[(2 * j + 1) * Pi * y] * Cos[c * Sqrt[(2 * i + 1)^2 + (2 * j + 1)^2] * t];
  ];
];
membrana1 = u[[1]];
membrana[x_, y_, t_] := Evaluate[membrana1];
maxi = MaxValue[{membrana[x, y, 0], 0 ≤ x ≤ a, 0 ≤ y ≤ b}, {x, y}];
mini = MinValue[{membrana[x, y, 0], 0 ≤ x ≤ a, 0 ≤ y ≤ b}, {x, y}];
Animate[Plot3D[membrana[x, y, t], {x, 0, a}, {y, 0, b},
  PlotRange → {{0, a}, {0, b}, {-0.07, 0.07}}},
  Mesh → 15, PlotTheme → "Scientific"], {t, 0, 10, Appearance → "Labeled"}, AnimationRepetitions → 1, AnimationRunning → False]

```

En  $t = 0, 3,49$  y  $6,98$ :



**Ejemplo 7.2.2.** Supongamos que  $f(x, y) = \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2$ ,  $0 < x < a = 1$ ,  $0 < y < b = 1$ ,  $c = 1$ , y la membrana, como en el ejemplo anterior, parte del reposo. Calculemos la función deflección  $u(x, y, t)$ .

Para ello debemos hallar  $b_{m,n} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) dx dy$ . La primera integral que se debe computar es

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) dx \\ &= \sin(\pi y)^2 \sin(n\pi y) \int_0^1 \sin(\pi x)^2 \sin(m\pi x) dx. \end{aligned}$$

Utilizando *Mathematica*

 WOLFRAM Mathematica

```

In[1]:= Integrate[Sin[Pi*x]^2 * Sin[m*Pi*x], {x, 0, 1}]
Out[1]= 
$$\frac{2(-1 + \cos[m\pi])}{(-4m + m^3)\pi}$$


In[2]:= Integrate[Sin[Pi*x]^2 * Sin[Pi*x], {x, 0, 1}]
Out[2]= 
$$\frac{4}{3\pi}$$


```

vemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(\pi x)^2 \sin(m\pi x) dx &= \begin{cases} \frac{4}{3\pi}, & \text{si } m = 1 \\ \frac{2\cos((m-2)\pi)-2}{\pi(m^3-4m)}, & \text{si } m > 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{3\pi}, & \text{si } m = 1 \\ \frac{-4}{\pi(m^3-4m)}, & \text{si } m \text{ es impar.} \\ 0, & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusión

$$\int_0^1 \sin(\pi x)^2 \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ es par} \\ \frac{-4}{\pi(m^3-4m)}, & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

De aquí entonces que:

$$\begin{aligned} b_{m,n} &= 4 \times \frac{-4}{\pi(m^3-4m)} \int_0^1 \sin(\pi y)^2 \sin(n\pi y) dy \\ &= \frac{-16}{\pi(m^3-4m)} \times \frac{-4}{\pi(n^3-4n)} = \frac{64}{\pi^2(m^3-4m)(n^3-4n)}, \end{aligned}$$

cuando  $m, n$  son ambos impares, y en caso contrario  $b_{m,n} = 0$ . Ahora,  $\lambda_{m,n} = \sqrt{m^2 + n^2}$

Luego

$$u(x, y, t) = \frac{64}{\pi^2} \sum_{m,n \text{ impares}} \frac{1}{mn(m^2-4)(n^2-4n)} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \cos(\pi\sqrt{m^2+n^2}t)$$

### 7.2.1. Frecuencias de los modos fundamentales y líneas nodales

Cada función  $u_{m,n}(x, y, t) = \phi_{m,n}(x, y) \cos(c\lambda_{m,n}t)$  se denomina un *modo fundamental*. Como función de  $t$ ,  $u_{m,n}(x, y, t)$  es periódica, con período  $2\pi/c\lambda_{m,n}$ . De aquí se sigue entonces que la solución a la ecuación de la membrana vibrante con condición inicial  $f(x, y) = \phi_{m,n}(x, y)$ , que es precisamente la función:

$$\begin{aligned} u_{m,n}(x, y, t) &= \phi_{m,n}(x, y) \cos(c\lambda_{m,n}t) \\ &= \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \cos(c\lambda_{m,n}t), \end{aligned}$$

tiene una frecuencia igual a

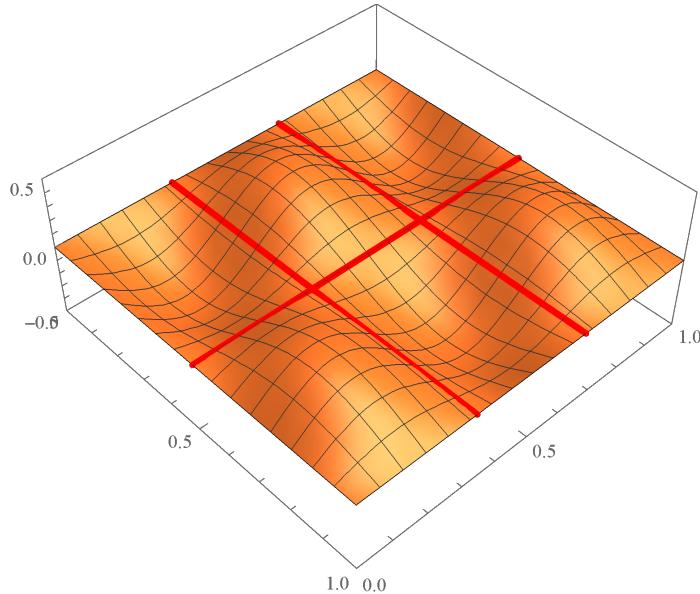
$$f_{m,n} = c\lambda_{m,n}/2\pi = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

ciclos por segundo (Hz).

A diferencia de la cuerda vibrante, estas frecuencias fundamentales no son múltiplos de una frecuencia básica (no hay armónicos). Una característica relevante, no obstante, es que todos los puntos situados sobre las rectas  $x = \frac{k_1}{m}a$  y  $y = \frac{k_2}{n}b$ , con  $0 < k_1 < m$  y  $0 < k_2 < n$  permanecen quietos en todo momento. Esto se deduce del hecho de que  $\sin(z) = 0$  si  $z = k\pi$ ,  $k$  un entero. Luego  $\sin(m\pi x/a) = 0$  si  $m\pi x/a = k\pi$  y por tanto  $x = ka/m$ . Como  $0 < x < a$ , se debe cumplir entonces que  $0 < ka/m < a$  y por tanto  $0 < k < m$ . De manera similar, se deduce que  $\sin(n\pi y/b) = 0$  si  $y = kb/n$ , con  $0 < k < n$ . A estas líneas se les llama *líneas nodales*. Por ejemplo, si  $a = b = c = 1$ , para

$$u_{2,3}(x, y, t) = \sin(2\pi x)\sin(3\pi y)\cos(\sqrt{13}t),$$

las líneas nodales serían los ceros de la ecuación  $\sin(2\pi x)\sin(3\pi y) = 0$ , que son precisamente las líneas  $x = 1/2$ ,  $y = 1/3$ ,  $y = 2/3$ :



### 7.2.2. Curvas nodales

Supondremos ahora, en aras de simplificar la discusión, que  $a = b = 1$ . Fijemos  $N$ , un entero positivo, y sea  $f(x, y) = \sum_{m^2+n^2=N^2} b_{m,n}\phi_{m,n}(x, y)$ , donde la suma corre sobre todos los pares de enteros positivos  $(m, n)$  que satisfacen  $m^2 + n^2 = N$ , y  $b_{m,n}$  son coeficientes escogidos de manera arbitraria (notemos que esta suma es finita).

La solución de la ecuación ec. membrana estará dada entonces por

$$u(x, y) = \sum_{m^2+n^2=N^2} b_{m,n} \phi_{m,n}(x, y) \cos(c\lambda_{m,n}t).$$

En analogía con el concepto de línea nodal, definimos las *curvas nodales como el locus de puntos que permanecen estacionarios en todo instante*. Es decir, el conjunto  $\mathcal{C} = \{(x, y) : u(x, y, t) = 0, \text{ para todo } t \geq 0\}$ . Como  $m^2 + n^2 = N$ , entonces  $\lambda_{m,n}$  es igual a  $\pi\sqrt{m^2 + n^2} = \pi\sqrt{N}$ , para todo par  $(m, n)$ . Luego  $\mathcal{C}$  está determinado por las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} & \sum_{m^2+n^2=N^2} b_{m,n} \phi_{m,n}(x, y) \cos(c\pi\sqrt{N}t) \\ &= \cos(c\pi\sqrt{N}t) \left( \sum_{m^2+n^2=N^2} b_{m,n} \phi_{m,n}(x, y) \right) = 0, \text{ para todo } t \geq 0. \end{aligned}$$

Esto fuerza a que las curvas nodales están definidas por la ecuación implícita:

$$\sum_{m^2+n^2=N^2} b_{m,n} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) = 0.$$

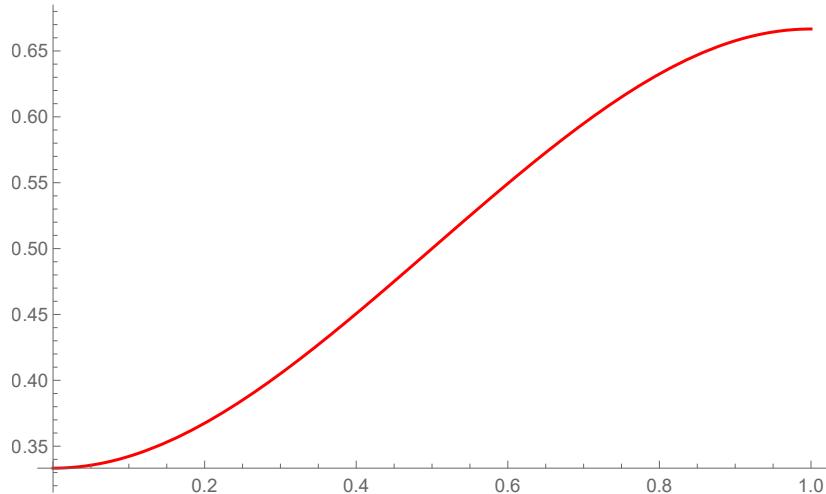
**Ejemplo 7.2.3.** Determinemos las curvas nodales si la condición inicial es igual a:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \phi_{1,2}(x, y) - \frac{1}{2}\phi_{2,1}(x, y) \\ &= \sin(\pi x) \sin(2\pi y) - \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \sin(\pi y), \end{aligned}$$

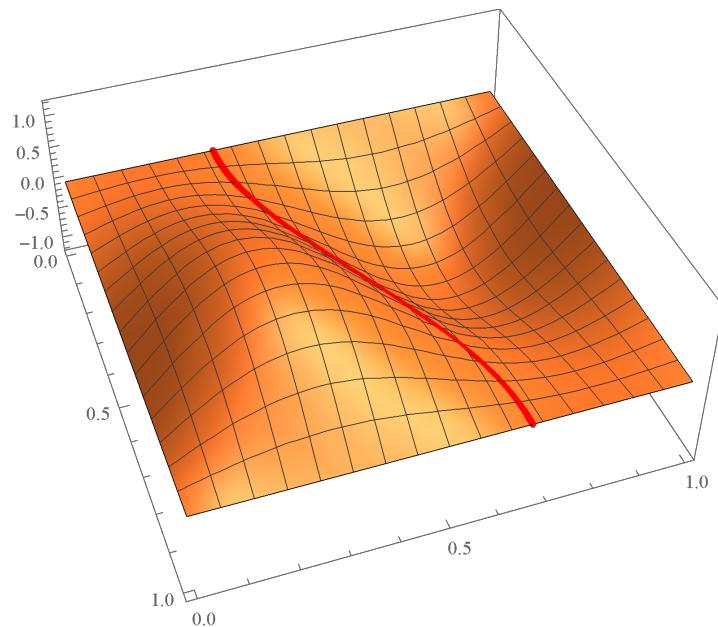
las curvas nodales son las soluciones para  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  de la ecuación

$$\begin{aligned} & \sin(\pi x) \sin(2\pi y) - \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \sin(\pi y) \\ &= 2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi y) - \sin(\pi x) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ &= \sin(\pi x) \sin(\pi y) (2 \cos(\pi y) - \cos(\pi x)) = 0. \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación en  $[0, 1] \times [0, 1]$  están determinadas por las soluciones de  $2 \cos(\pi y) - \cos(\pi x) = 0$ ; O lo que es equivalente, por las soluciones de  $y = \frac{1}{\pi} \arccos(\frac{1}{2} \cos(\pi x))$ .



para  $0 < x < 1$ .



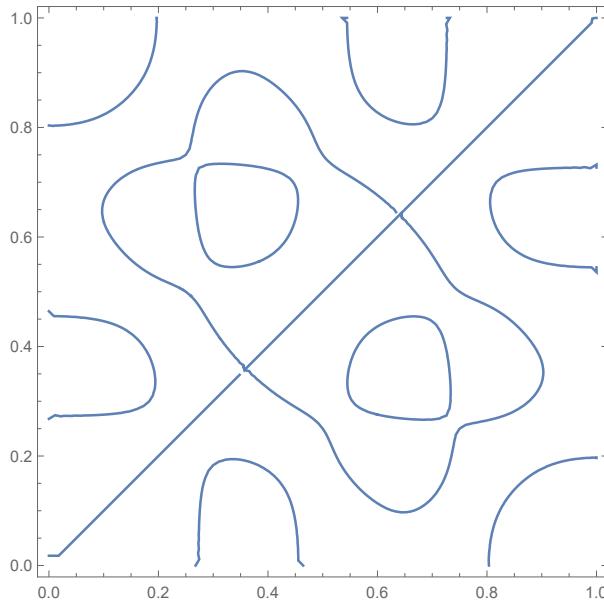
**Ejemplo 7.2.4.** Tomemos  $N = 65$ . Este entero puede descomponerse como suma de dos cuadrados de dos maneras diferentes:  $65 = 1^1 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ . De aquí que la membrana al vibrar con condición inicial, dada, por ejemplo, por a función

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\phi_{1,8}(x, y) + \frac{-1}{2}\phi_{8,1}(x, y) + 3\phi(x, y) + -3\phi(x, y)$$

tenga curvas nodales determinadas por las soluciones de la ecuación (en  $x, y$ )

$$\frac{1}{2} \sin \pi x \sin 8\pi y - \frac{1}{2} \sin 8\pi x \sin \pi y + 3 \sin 4\pi x \sin 7\pi y - \sin 7\pi x \sin 4\pi y = 0$$

Los ceros de esta función se muestran a continuación:



### 7.3. \*Curvas nodales en la vibración de una placa rectangular: figuras de Chladni

La ecuación diferencial que rige el movimiento de una placa rígida cuyos extremos están libres, y la cual se apoya solo en su centro, el cual vibra verticalmente con frecuencia  $\omega$ , resulta ser una ecuación diferencial de grado cuarto  $(\Delta^2 - \lambda)u = 0$ , donde  $\Delta^2$  denota el *cuadrado del operador laplaciano*:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

sujeta a las condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2 - v_p) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + (2 - v_p) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0. \end{aligned}$$

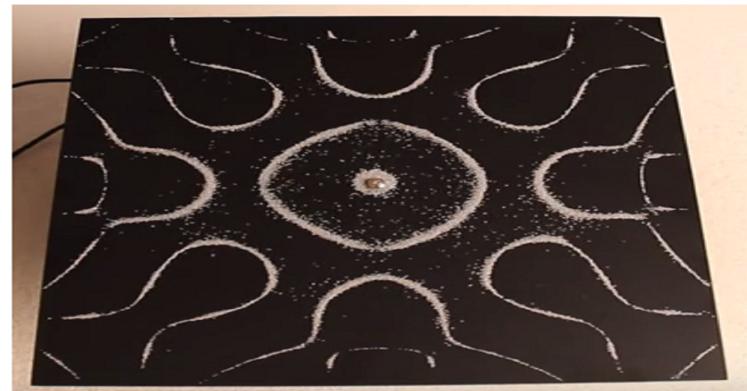
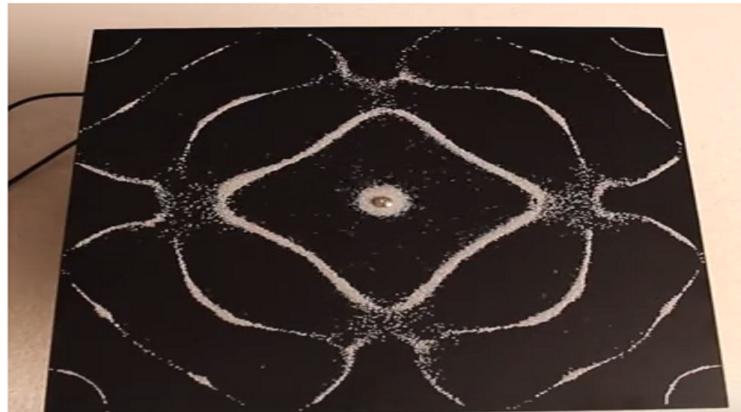
La constante  $\lambda$  está definida como  $\lambda = m\omega^2/D$ , donde  $D$  es otra constante, llamada la *rigidez cilíndrica de la placa*, que depende del material del cual esté constituida,  $m$  es la masa total de la placa,  $\omega$  es la frecuencia de vibración del punto central de la placa y  $v_p$  es otra constante conocida como el *radio de Poisson* del material.

En este caso (que no discutiremos en estas notas, pero que el lector puede consultar en el texto clásico [14]) las líneas nodales suelen ser complejas, y forman curiosos arreglos y sorprendentes patrones, descubiertos por primera vez por el físico alemán Hernst Chladni. Un video donde se aprecian estas curvas nodales puede verse en <https://www.youtube.com/watch?v=1yaqUI4b974>



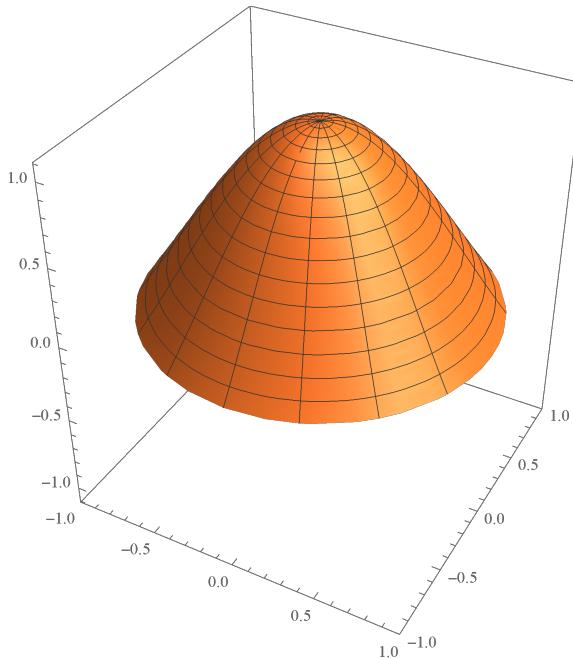
**Ernst Florens Friedrich Chladni**  
(30 de noviembre de 1756 - 3 de abril de 1827) fue un físico y músico alemán. Su trabajo más importante, por el que a veces se le califica de padre de la acústica, incluyó la investigación sobre placas vibratorias y el cálculo de la velocidad del sonido para diferentes gases. También emprendió un trabajo pionero en el estudio de los meteoritos y es considerado por algunos como el padre de la meteorología.

Figuras de Chladni (tomado de  
<https://www.youtube.com/watch?v=1yaqUI4b974>)



## 7.4. Membranas circulares

En este sección analizaremos el movimiento de una membrana en forma de disco, de radio  $a > 0$ , centrado en el origen del plano  $(x, y)$ , la cual parte del reposo y tiene una forma inicial dada por una función *radialmente simétrica*, es decir, una función que en coordenadas polares tiene la forma  $u(r, \theta, 0) = f(r)$  (no depende del ángulo  $\theta$ ). Buscaremos soluciones de la ecuación diferencial que rige el movimiento de la membrana, que también tengan esta propiedad.



Establezcamos coordenadas polares en el plano  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Si la solución buscada posee simetría radial, en el instante  $t$  cada punto de la membrana estará determinado por su altura sobre el pano  $(r, \theta)$ , dada por una cierta función  $z = u(r, \theta, t)$  que *no depende de  $\theta$* , y por consiguiente se podrá escribir como  $z = u(r, t)$ .

Sabemos que la ecuación diferencial que rige el movimiento de la membrana viene dada por  $\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , donde  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  denota el Laplaciano de  $u$ . Es un ejercicio elemental (ver apéndice al final de esta sección) en el uso de la regla de la cadena demostrar que el laplaciano, computado en coordenadas polares, está dada por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Si  $u$  no involucra  $\theta$  el último término a la derecha de la ecuación anterior es cero. Como el borde del disco se mantiene fijo en todo instante, la función  $u$  deberá satisfacer la condición de frontera  $u(a, t) = 0$ , para todo tiempo  $t$ . Como parte del reposo, se cumple además que  $\partial u(r, t)/\partial t|_{t=0} = 0$ , y el problema que debemos resolver se reduce

a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.11)$$

$$u(a, t) = 0 \quad (7.12)$$

$$\partial u(r, t)/\partial t|_{t=0} = 0. \quad (7.13)$$

De nuevo, utilizamos el método de separación de variables: suponemos  $u(r, t) = \phi(r)G(t)$ . La ecuación 7.11 nos dice que:

$$\phi'' G + \frac{1}{r} \phi' G = \frac{1}{c^2} \phi G''$$

donde las primas indican derivadas con respecto a  $r$ , en el caso de  $\phi$ , y con respecto a  $t$ , en el caso de  $G$ . Esta última ecuación es equivalente a

$$\frac{r\phi'' + \phi'}{r\phi} = \frac{G''}{c^2 G} = p, \quad (7.14)$$

donde  $p$  es una constante que, como en las ecuaciones diferenciales antes discutidas, deberá ser negativa  $p = -\lambda^2$ . Luego de 7.14 se desprenden dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} G''(t) + (\lambda c)^2 G(t) &= 0, \quad t \geq 0. \\ r\phi''(r) + \phi'(r) + \lambda^2 r\phi(r) &= 0, \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (7.15)$$

La primera ecuación tiene como solución general  $G(t) = A \cos(\lambda ct) + B \sin(\lambda ct)$ . De nuevo, como en las ecuaciones anteriores, la condición inicial 7.13 fuerza  $B = 0$ . La ecuación 7.15 puede resolverse si conocemos la solución de la llamada *ecuación de Bessel*:

$$xb''(x) + b'(x) + xb(x) = 0, \quad x > 0, \quad (7.16)$$

pues bastaría hacer el cambio de variables  $x = \lambda r$  y luego  $\phi(r) = b(\lambda r)$ :

$$\begin{aligned} r\phi''(r) + \phi'(r) + \lambda^2 r\phi(r) \\ = \frac{x}{\lambda} \lambda^2 b''(x) + \lambda b'(x) + \lambda^2 \frac{x}{\lambda} b(x) \\ = \lambda(xb''(x) + b'(x) + xb(x)) = 0. \end{aligned}$$

La solución de la ecuación de Bessel no puede expresarse en términos de funciones conocidas. Para ello hay que introducir las llamadas *funciones de Bessel de orden cero, y orden uno, de primera y segunda clase*, que se definen a continuación (ver, por ejemplo, [11], páginas 191-200):

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2!(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots$$

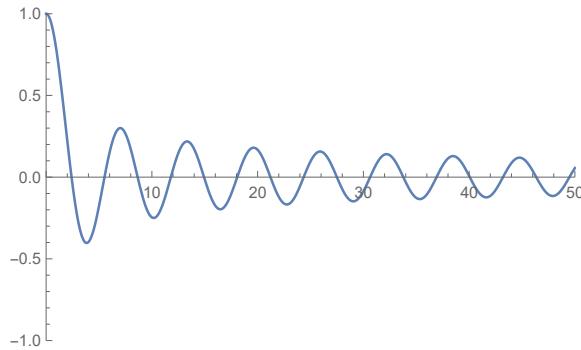
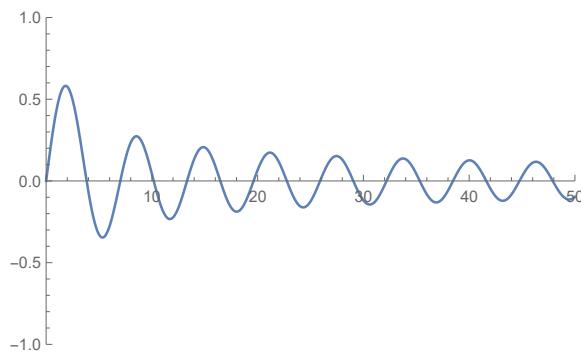
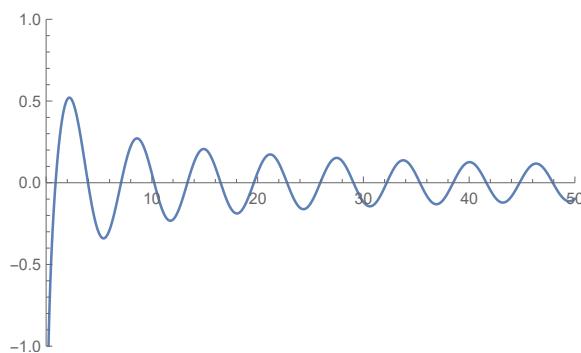
$$J_1(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+1} (m!) (m+1)!}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ J_0(x) \left( \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} s_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right],$$

$$s_m = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{m}, \quad \gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_m - \ln m), \quad (\text{constante de Euler}).$$



Friedrich Wilhelm Bessel (22 de julio de 1784 - 17 de marzo de 1846) fue un astrónomo, matemático y físico alemán. Fue el primer astrónomo que determinó valores confiables para la distancia del sol a otra estrella por el método de paralaje. Un tipo especial de funciones matemáticas se denominaron funciones de Bessel después de su muerte, aunque fueron descubiertas originalmente por Daniel Bernoulli y luego generalizadas por Bessel.

Figura 7.1: Función de Bessel de primera clase de orden cero:  $J_0(x)$ Figura 7.2: Función de Bessel de primera clase de orden uno:  $J_1(x)$ Figura 7.3: Función de Bessel de segunda clase de orden cero:  $Y_0(x)$ 

La solución general de 7.16 viene dada entonces por

$$b(x) = CJ_0(x) + DY_0(x).$$

Los programas *Maple* y *Mathematica* permiten manipular funciones de Bessel, no así,

infotunadamente, el *GeoGebra*.

La solución buscada es entonces  $\phi(r) = CJ_0(\lambda r) + DY_0(\lambda r)$ .

Ahora,  $u(r, t) = \phi(r)G(t)$  debe ser acotada. Pero  $\lim_{x \rightarrow 0} Y_0(x) = -\infty$ , y por tanto  $\lim_{r \rightarrow 0} Y_0(\lambda r) = -\infty$ . De aquí que debamos tomar  $D = 0$ .

Finalmente, la condición  $\phi(a) = CJ_0(\lambda a) = 0$  fuerza a que  $\lambda$  deba escogerse como  $\alpha_n/a$ , donde  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$  son los ceros de  $J_0(x)$ . En conclusión, para cada  $n \geq 1$ , si  $\lambda_n = \alpha_n/a$ , entonces

$$\begin{aligned} u_n(r, t) &= J_0(\lambda_n r) \cos(c\lambda_n t), \\ \lambda_n &= \alpha_n/a, \end{aligned}$$

es solución de 7.11 y 7.13.

Para satisfacer la condición inicial 7.12, utilizamos de nuevo el principio de superposición o suma infinita de las soluciones  $u_n(r, t)$ . Para ello es necesario que se satisfagan las *relaciones de ortogonalidad*, que en este caso serían (ver [2], página 252):

$$\begin{aligned} \int_0^a J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) r dr &= 0, \text{ si } m \neq n \\ \int_0^a J_0(\lambda_n r)^2 r dr &= \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n). \end{aligned}$$

Se busca entonces una solución de la forma  $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\lambda_n r) \cos(c\lambda_n t)$ . Haciendo  $t = 0$  se debe satisfacer que

$$f(r) = u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\lambda_n r).$$

Multiplicando ambos lados por  $J_0(\lambda_m r)r$ , con  $m \geq 1$  fijo, y luego integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^a r J_0(\lambda_m r) f(r) dr &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^a r J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_n r) dr \\ &= b_m \frac{a^2}{2} J_1(\alpha_m)^2. \end{aligned}$$

De aquí que

$$b_m = \frac{2}{a^2 J_1(\alpha_m)^2} \int_0^a r J_0(\lambda_m r) f(r) dr.$$

En resumen, la solución del problema 7.11, 7.12, 7.13 está dada por

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\lambda_n r) \cos(c\lambda_n t) \\ b_n &= \frac{2}{a^2 J_1(\alpha_n)^2} \int_0^a r J_0(\lambda_n r) f(r) dr \\ \lambda_n &= \frac{\alpha_n}{a}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$  son los ceros positivos de  $J_0(x)$ .

**Ejemplo 7.4.1.** Por ejemplo, si  $a = c = 1$ ,  $f(r) = 1 - r^2$ , entonces, utilizando *Mathematica* se puede ver que

$$u(r, t) = 1,1J_0(\alpha_1 r) \cos(\alpha_1 t) - 0,14J_0(\alpha_2 r) \cos(\alpha_2 t) + 0,04J_0(\alpha_3 r) \cos(\alpha_3 t) \\ - 0,02J_0(\alpha_4 r) \cos(\alpha_4 t) + 0,01J_0(\alpha_5 r) \cos(\alpha_5 t) - \dots$$

donde  $\alpha_1 \simeq 2,4$ ,  $\alpha_2 \simeq 5,5$ ,  $\alpha_3 \simeq 8,65$ ,  $\alpha_4 = 11,79$ ,  $\alpha_5 \simeq 14,93, \dots$

El siguiente programa en *Mathematica* nos permite ver una animación de este ejemplo.

**WOLFRAM Mathematica**

```

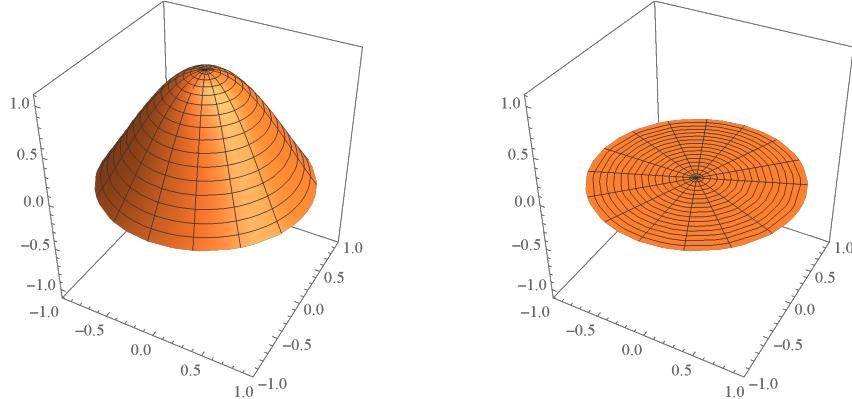
In[1]:= a = 1; b = 1; c = 1;
n := 1;
u := 0;
f[r_] := 1 - r^2;

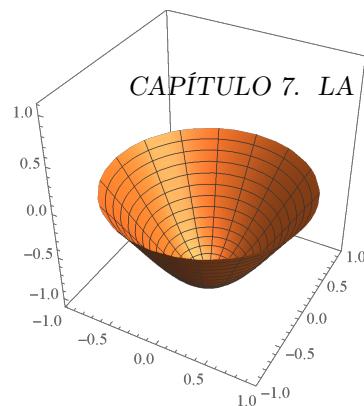
For[i = 1, i <= n, i++,
  u = u + (2 / (a * N[BesselJ[1, N[BesselJZero[0, i]]]])^2 *
    Integrate[f[r] * r * N[BesselJ[0, r * N[BesselJZero[0, i] / a]]], {r, 0, a}] * 
    N[BesselJ[0, r * N[BesselJZero[0, i] / a]]] * Cos[c * N[BesselJZero[0, i] / a] * t]
  ];
membrana = u;
memcirc[r_, theta_, t_] := Evaluate[membrana]
z[r_, theta_] := memcirc[r, theta, 0]
maxi = MaxValue[{memcirc[r, theta, 0], 0 <= r <= a, 0 <= theta <= 2 Pi}, {r, theta}];
mini = MinValue[{memcirc[r, theta, 0], 0 <= r <= a, 0 <= theta <= 2 Pi}, {r, theta}];

Animate[ParametricPlot3D[{r * Cos[theta], r * Sin[theta], memcirc[r, theta, t]}, 
  {r, 0, 1}, {theta, 0, 2 Pi}, PlotRange -> {{-a, a}, {-b, b}, 
  {Min[-Abs[mini], -Abs[maxi]], Max[Abs[mini], Abs[maxi]]}}, 
  Mesh -> 15, PlotTheme -> "Scientific"], 
  {t, 0, Pi, Appearance -> "Labeled"}, 
  AnimationRepetitions -> 1, AnimationRunning -> False]

```

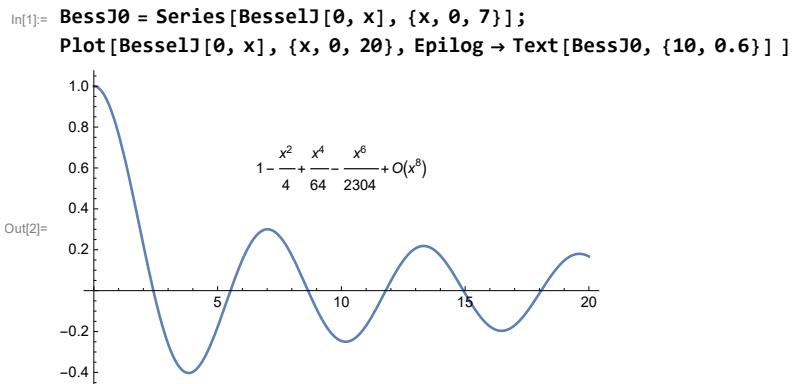
En  $t = 0, 0,65$  y  $1,31$ :



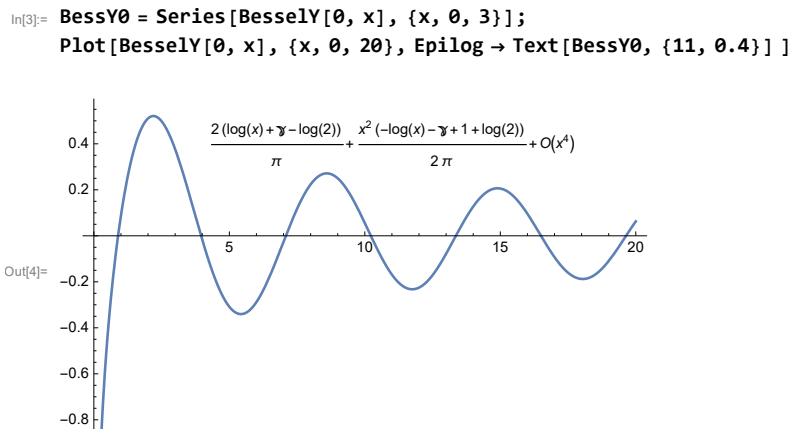


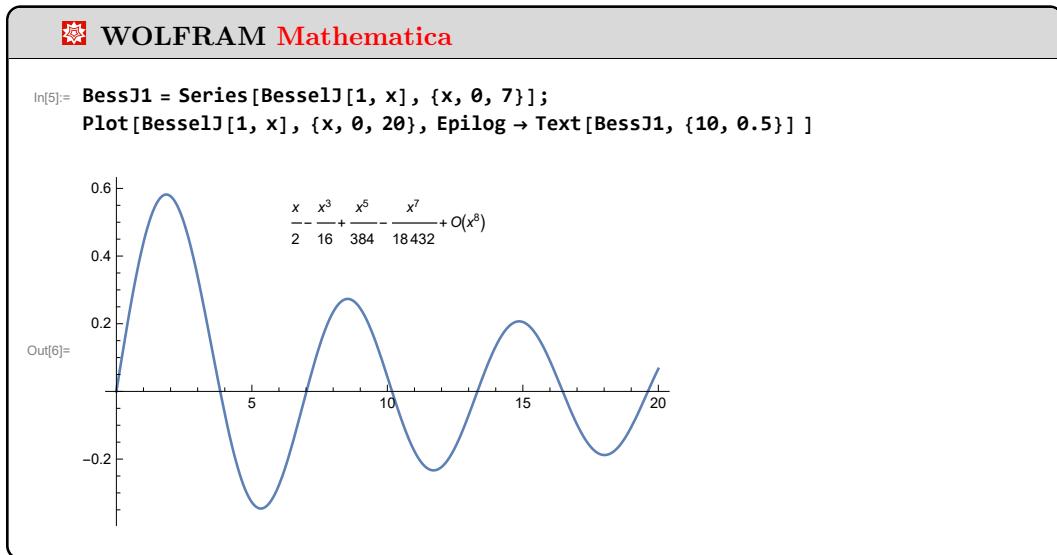
Para aquellos lectores familiarizados con *Mathematica*, se incluyen a continuación los comandos para operar con funciones de Bessel:

### WOLFRAM Mathematica



### WOLFRAM Mathematica





**WOLFRAM Mathematica**

```
In[7]:= For[i = 1, i <= 5, i++, Print[N[BesselJZero[0, i]]]]
```

2.40483  
5.52008  
8.65373  
11.7915  
14.9309

Donde  $\gamma$  es la constante de Euler, con valor numérico  $\approx 0,577216$ .

## 7.5. Apéndice: cálculo del laplaciano en coordenadas polares

Sean  $(r, \theta)$  coordenadas polares definidas en el plano  $xy$ . Entonces  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin(\theta)$ . Veamos que en efecto

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta.\end{aligned}$$

De aquí se sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \theta \\ &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \sin \theta \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \theta \right) \sin \theta \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

De otro lado

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos \theta).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} (-\sin \theta) \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta \right) \\ &= r \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (-\sin \theta) + (-\cos \theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} (-\sin \theta) \right) \\ &= r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &\quad - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

De aquí vemos entonces que

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r} (\cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.\end{aligned}$$

Sumando a ambos lados en estas tres ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

# CAPÍTULO 8

---

## Números complejos

---

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades básicas de los números complejos. En el capítulo siguiente mostraremos algunas aplicaciones de esta teoría a la Mecánica Cuántica, en particular, discutiremos el problema de polarización de la luz, el experimento EPR, y la desigualdad de Bell. Referencias para esta última parte son: [4], [3], [10].

### 8.1. Nociones básicas

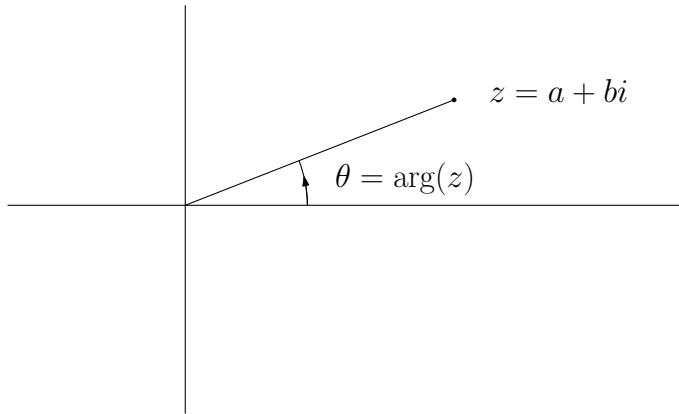
Supondremos que el estudiante está familiarizado con las nociones más básicas del sistema numérico de los números complejos.

Recordemos que un número complejo es un número de la forma  $a + bi$ , con  $a, b$  números reales, donde  $i^2$  se define como  $-1$  ( $i$  es la raíz cuadrada de  $-1$ ). Este conjunto se denota por  $\mathbb{C}$ , y viene dotado de dos operaciones, suma y producto, bajo las cuales  $\mathbb{C}$  es un *campo*:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\(a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Los números complejos aparecen de manera natural en álgebra, pues como demostraremos más adelante, todo polinomio con coeficientes complejos admite siempre una raíz en  $\mathbb{C}$  (Teorema de Gauss). Encuentran así mismo aplicaciones en la teoría de ecuaciones diferenciales, aerodinámica y electromagnetismo, y son indispensables en Mecánica Cuántica, pues la ecuación de Schrödinger es, de hecho, un ecuación que no puede formularse en el campo de las funciones reales. Así mismo, sus aplicaciones en ingeniería, electrónica y telecomunicaciones son numerosas.

El número complejo  $z = a + bi$  puede representarse en el plano  $x, iy$  como el punto de coordenadas  $(a, b)$ . El número  $a$  se llama la *parte real* de  $z$ ,  $a = \operatorname{Re}(z)$ ; y  $b$ , la *parte imaginaria*:  $\operatorname{Im}(z) = b$ . El punto simétrico de  $z$  con respecto al eje  $x$ ,  $a - bi$  se denomina el *conjugado de  $z$* , y se denota por  $\bar{z}$ . La distancia al origen  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , o magnitud del vector  $(a, b)$ , se denomina *norma del número complejo* y se denota usualmente por  $|z|$ . El ángulo  $\theta$  determinado por el vector (medido en sentido contrario al reloj) se denomina *argumento de  $z$* :

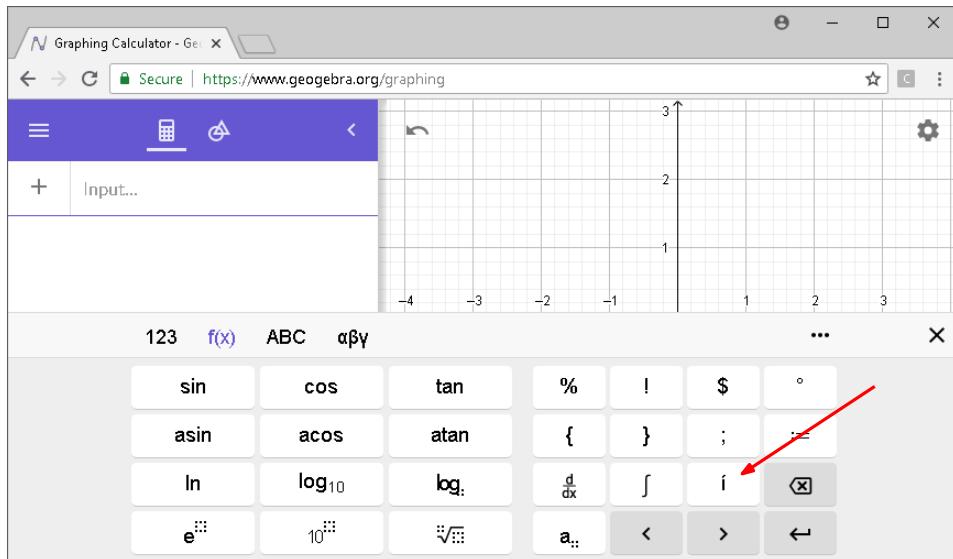
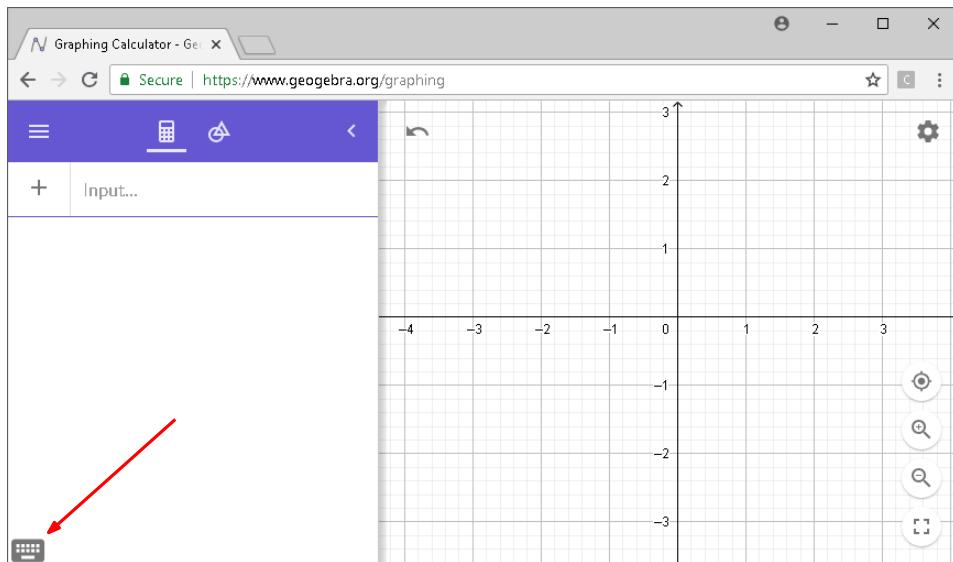


El argumento de  $z$  está bien definido, excepto por múltiplos enteros de  $2\pi$ . Se acostumbra llamar *argumento principal* de  $z$  al ángulo entre  $-\pi < \theta \leq \pi$ , el cual se denota por  $\arg(z)$ .

Es un ejercicio elemental comprobar que se satisfacen las siguientes propiedades:

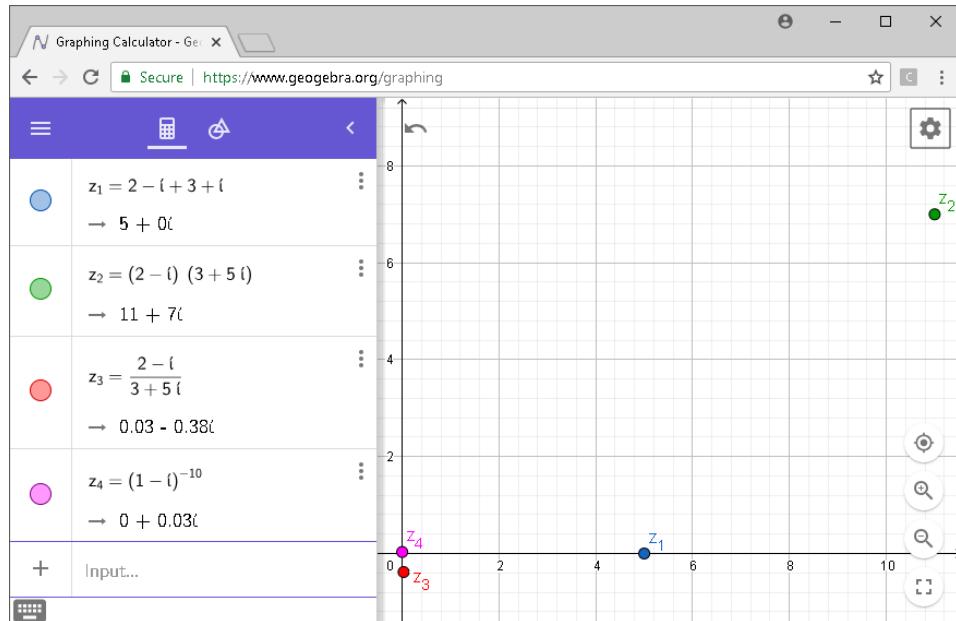
1.  $z\bar{z} = |z|^2$ .
2.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ .
3.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .
4.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .
5.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
6.  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ .

En *Geogebra*, la manipulación de números complejos puede hacerse en la ventana CAS, seleccionando el teclado virtual en la opción *vista*, y allí seleccionando *calculadora*:

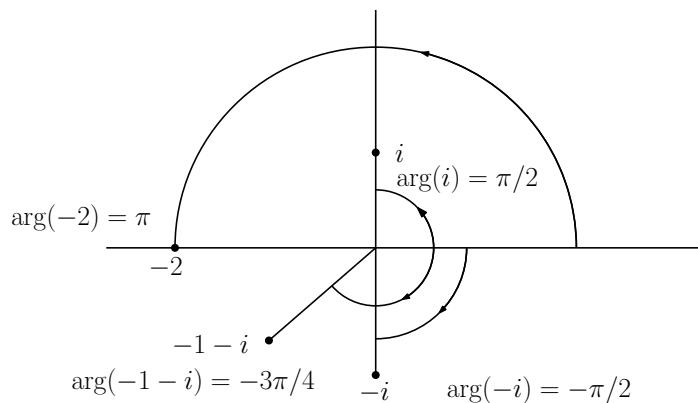


En el teclado de la calculadora virtual aparece la letra  $i$  tildada, que se utiliza para representar este número complejo.

Las aritmética de números complejos puede realizarse en *GeoGebra*, como se ilustra a continuación:



- Ejemplo 8.1.1.**
1. El complejo  $z = i$  tiene como argumento todo los ángulos  $\pi/2 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Su argumento principal es igual a  $\pi/2$ .
  2.  $z = -2$  tiene como argumento todo los ángulos  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Y,  $\arg(-2) = \pi$
  3.  $z = -1 - i$  tiene como argumento todos los ángulos  $-3\pi/4 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Y,  $\arg(-1 - i) = -3\pi/4$ .
  4. Si  $z = -i$ , entonces  $\arg(-i) = -\pi/2$ .



La forma polar de un número complejo  $z = a + bi$  es su escritura en la forma  $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)i$ ,  $r = |z|$ ,  $\theta = \arg(z)$ .

## 8.2. Función exponencial

La función exponencial  $e^z$  se introduce en Cálculo como la función dada por la serie convergente (en todos los reales)  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ . Es natural entonces definir para un número complejo cualquiera  $z$ , la función exponencial como  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ . Si tomamos  $z = bi$ , y luego separamos las partes reales e imaginarias de  $e^z$ , obtenemos (notemos que las potencias de  $i$  se repiten de manera cíclica:  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ ,  $i^6 = -1$ , ...)

$$\begin{aligned} e^{bi} &= \frac{1}{1} + \frac{bi}{1!} + \frac{-b^2}{2!} + \frac{-bi}{3!} + \\ &\quad \frac{b^4}{4!} + \frac{b^5i}{5!} + \frac{-b^6}{6!} + \frac{-b^7i}{7!} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots\right) + \left(\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots\right)i \\ &= \cos(b) + \sin(b)i. \end{aligned}$$

De aquí entonces que

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a \cos(b) + e^a \sin(b)i.$$

Esta ecuación puede aprovecharse para reescribir la forma polar de un número complejo,  $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)i$ , como

$$z = r e^{\theta i}, \text{ donde } \theta = \arg(z) \text{ y } r = |z|.$$

Esta escritura es particularmente útil para computar potencias de  $z$ .

**Ejemplo 8.2.1.** 1. Hallemos la forma polar de  $z = 1 + i$ . Claramente,  $|z| = \sqrt{2}$  y  $\arg(z) = \pi/4$ . Luego  $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ .

2. Hallar  $(1 + i)^8$ . Solución:

$$\begin{aligned} (1 + i)^8 &= (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^8 = 2^4 e^{8\frac{\pi}{4}i} = \\ &= 16e^{2\pi i} = 16 \cos(2\pi) + 16 \sin(2\pi)i = 16. \end{aligned}$$

3. Si  $z = a + bi$ , halle una fórmula para computar  $z^n$ .

Solución: escribamos  $z = r e^{\theta i}$ , donde  $\theta = \arg(z)$  y  $r = |z|$ . Luego

$$\begin{aligned} z^n &= (a + bi)^n \\ &= r^n (e^{\theta i})^n = r^n e^{n\theta i} \\ &= r^n \cos(n\theta) + r^n \sin(n\theta). \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula anterior, conocida como *Formula de De Moivre*, podemos calcular las raíces  $n$ -ésimas de cualquier número complejo: dado  $z = a + bi$ , queremos hallar  $w$  tal que  $w^n = z$ . Si escribimos  $z$  y  $w$  en la forma  $z = |z| e^{\theta i}$  y  $w = ce^{\alpha i}$ , buscamos que se cumpla  $w^n = c^n e^{n\alpha i} = |z| e^{\theta i}$ . Podemos tomar entonces  $c = \sqrt[n]{|z|}$  y  $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ . Claramente, con estas escogencias de  $c$  y  $\alpha$  se obtiene:

$$\begin{aligned} w^n &= \left(\sqrt[n]{|z|}\right)^n e^{n\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)i} = |z| e^{\theta i + 2k\pi i} \\ &= |z| e^{\theta i} e^{2\pi k i} = |z| e^{\theta i}, \end{aligned}$$

pues  $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + \sin(2k\pi) = 1$ . Cada uno de los  $n$  números complejos

$$w = \sqrt[n]{|z|} e^{\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)i}, \quad (8.1)$$

$k = 0, \dots, n - 1$  satisface la ecuación polinómica  $x^n - z = 0$ . Como una ecuación de grado  $n$  no puede tener más de  $n$  raíces, entonces estos  $n$  números deberán ser todas las posibles raíces  $n$ -ésimas de  $z$ .

**Ejemplo 8.2.2.** 1. Calculemos las raíces séptimas ( $n = 7$ ) de  $i$ .

Solución:  $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ , pues  $|i| = 1$  y  $\arg(i) = \pi/2$ . Luego  $w = e^{(\frac{1}{14} + \frac{2k\pi}{7})i} = e^{(\frac{1+4k\pi}{14})i}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ :

Estas siete raíces serían:

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{\frac{\pi}{14}i} \\ w_1 &= e^{\left(\frac{1+4\pi}{14}\right)i} \\ w_2 &= e^{\left(\frac{1+8\pi}{14}\right)i} \\ w_3 &= e^{\left(\frac{1+12\pi}{14}\right)i} \\ w_4 &= e^{\left(\frac{1+16\pi}{14}\right)i} \\ w_5 &= e^{\left(\frac{1+20\pi}{14}\right)i} \\ w_6 &= e^{\left(\frac{1+24\pi}{14}\right)i} \end{aligned}$$

Con el programa *Mathematica*, estos valores pueden hallarse de la siguiente manera:

 **WOLFRAM Mathematica**

```
In[1]:= Table[Exp[(1 + 4 * Pi * k) / 14 * I], {k, 0, 6}]
```

```
Out[1]= {E^(I/14), E^(1/14 I (1+4 \[Pi])), E^(1/14 I (1+8 \[Pi])), 
E^(1/14 I (1+12 \[Pi])), E^(1/14 I (1+16 \[Pi])), E^(1/14 I (1+20 \[Pi])), 
E^(1/14 I (1+24 \[Pi]))}
```

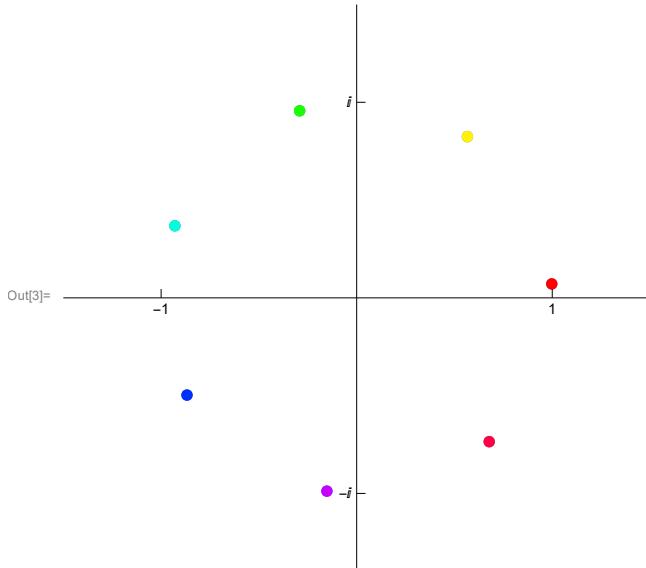
 WOLFRAM Mathematica

```
In[2]:= Table[N[Re[Exp[(1 + 4 * Pi * k) / 14 * I]]] +
  I * N[Im[Exp[(1 + 4 * Pi * k) / 14 * I]]], {k, 0, 6}]
Out[2]= {0.99745 + 0.0713678 i, 0.566102 + 0.824335 i, -0.291532 + 0.956561 i,
-0.929637 + 0.368477 i, -0.867706 - 0.497078 i,
-0.152375 - 0.988323 i, 0.677698 - 0.735341 i}
```

y se pueden ver gráficamente de la siguiente manera:

 WOLFRAM Mathematica

```
In[3]:= ListPlot[
  Table[Style[{Re[Exp[(1 + 4 * Pi * k) / 14 * I]],
    Im[Exp[(1 + 4 * Pi * k) / 14 * I]]}, Hue[k / (2 Pi)]], {k, 0, 6}], PlotStyle -> PointSize[Large],
  PlotRange -> {{-3/2, 3/2}, {-3/2, 3/2}}, AspectRatio -> 1,
  Ticks -> {{1, -1}, {{-1, -I}, {1, I}}}, GridLines -> Automatic
]
```



Se obtienen así los vértices de un polígono regular de siete lados.

2. Calculemos las raíces  $n$  ésimas de 1. Utilizando de nuevo la fórmula 8.1, vemos que las  $n$  raíces de la unidad están dadas por  $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + \sin(\frac{2k\pi}{n})i$ , con  $k = 0, \dots, n - 1$ . Gráficamente, *estas raíces son los vértices de un polígono*

regular de  $n$  lados. Notemos además que  $\omega_k = \omega^k$ , donde

$$\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)i.$$

Es decir, las raíces  $n$ ésimas de la unidad se pueden obtener como las potencias de  $\omega$   $\omega, \omega^2, \dots, \omega^n = 1$ .

3. Notemos que dado cualquier  $z \in \mathbb{C}$ , las raíces  $n$ -ésimas de  $z$  también se pueden obtener de la siguiente manera: si  $u$  es una raíz de  $z$ , es decir, si  $u^n = z$ , entonces los  $n$ -números  $\omega^k u$  satisfacen que  $(\omega^k u)^n = \omega^{kn} u^n = (\omega^n)^k u^n = u^n = z$ , y por consiguiente son todas las raíces  $n$ -ésimas de  $z$ .

Por ejemplo, hallemos las raíces quintas de  $3 - 4i$ . En este caso,  $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ . Además,  $\theta = \arg(3 - 4i) = -\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \simeq -0,93 \simeq -53,13^\circ$ . Luego una raíz quinta está dada por

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[5]{5}e^{\frac{\theta}{5}i} = \sqrt[5]{5} \cos(-0,93/5) + \sqrt[5]{5} \sin(-0,93/5)i \\ &\simeq 1,35 - 0,25i. \end{aligned}$$

De otro lado, cuando  $n = 5$ ,

$$\omega = \cos(2\pi/5) + \sin(2\pi/5)i \simeq 0,3 + 0,95i.$$

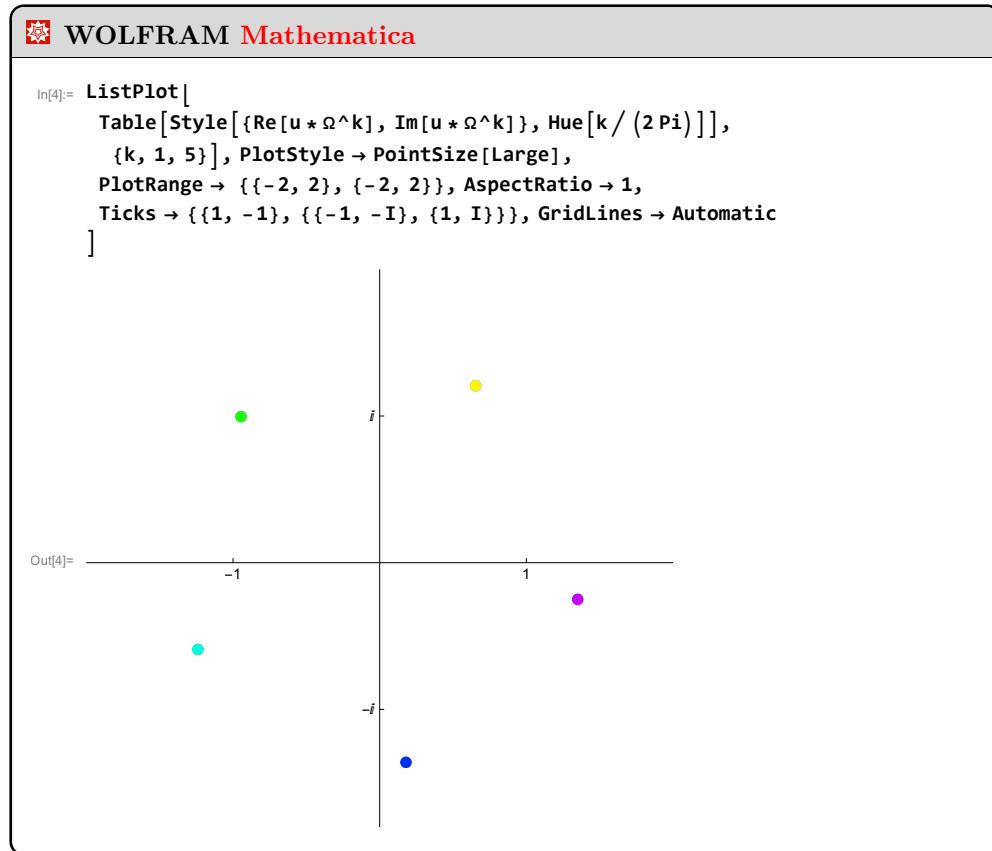
Utilizando el *Mathematica* podemos calcular los números  $\omega u, \omega^2 u, \omega^3 u, \omega^4 u, \omega^5 u = u$ .

### WOLFRAM Mathematica

```
In[1]:= u := 1.35 - 0.25*I
Ω := Cos[2 Pi / 5] + I * Sin[2 Pi / 5]
Table[u * Ω^k, {k, 1, 5}]

Out[3]= {0.654937 + 1.20667 I, -0.945227 + 0.995764 I,
-1.23912 - 0.591256 I, 0.179409 - 1.36118 I, 1.35 - 0.25 I}
```

Utilizando de nuevo la vista gráfica podemos visualizarlas de la siguiente manera:



### 8.3. Teorema de Gauss

La enorme ventaja de los números complejos sobre los números reales reside en el llamado *Teorema de Gauss o Teorema Fundamental del Álgebra*. Este teorema afirma que *toda ecuación polinómica de grado  $n > 0$  sobre los complejos tiene  $n$  raíces complejas (no necesariamente distintas)*. En el campo de los números reales ya se encuentran ecuaciones, incluso cuadráticas, que no poseen ninguna raíz real, como, por ejemplo,  $x^2 + 1 = 0$  o, por ejemplo,  $x^2 + x + 1 = 0$ . Sin embargo, sobre los complejos estas ecuaciones tiene como raíces los números complejos  $\pm i$ , en el primer caso, y  $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ , en el segundo. Lo sorprendente es que bastó haber ampliado el campo de los números reales introduciendo solamente la raíz cuadrada de  $-1$  para obtener un nuevo sistema numérico donde *todas las ecuaciones polinómicas tiene solución*.

En lo que sigue nos limitaremos a dar una razón heurística para justificar este teorema. Una prueba rigurosa de este hecho se reseña para el apéndice a este capítulo,



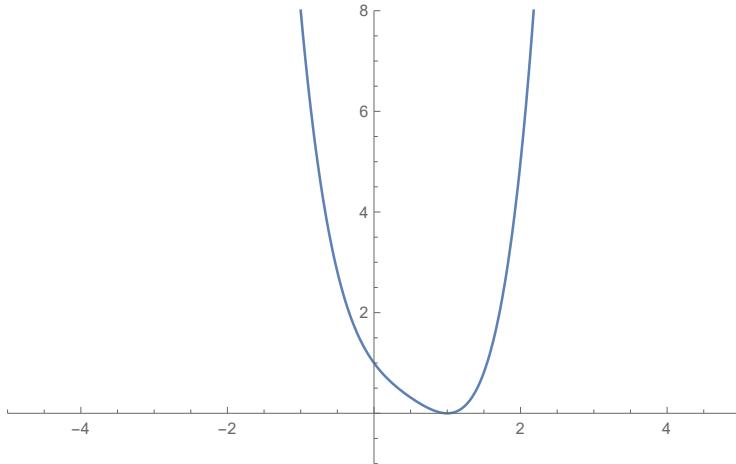
Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777 - 23 de febrero de 1855) fue un matemático y físico alemán que hizo contribuciones significativas a muchos campos, incluyendo álgebra, análisis, astronomía, geometría diferencial, electrostática, geodesia, geofísica, campos magnéticos, teoría de matrices, mecánica, teoría de números, óptica y estadística.

o también puede consultarse, por ejemplo, en [12].

Un polinomio de grado  $n$  es una expresión de la forma  $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ . Una raíz de  $p(x)$  es entonces un número  $z_1$  que satisface  $p(z_1) = a_0z_1^n + a_1z_1^{n-1} + \dots + a_n = 0$ . Por el algoritmo de la división (Capítulo I), si  $z_1$  es una raíz de  $p(x)$ , al dividir por  $x - z_1$  se obtiene una expresión  $p(x) = q(x)(x - z_1) + r(x)$ , donde  $q(x)$  es el cociente de la división y  $r(x)$  es el residuo, el cual satisface  $r(x) = 0$  o  $\text{grad } r(x) < \text{grad}(x - z_1) = 1$ . De aquí entonces que  $r(x) = 0$  o  $r(x) = c$  sea una constante (polinomio de grado cero). Al evaluar en  $z_1$  se obtiene:  $0 = p(z_1) = q(z_1)(z_1 - z_1) + c$  y por consiguiente  $c = 0$ . En cualquier caso se obtiene  $p(x) = q(x)(x - z_1)$ .

Si  $z_2$  fuese una raíz de  $q(x)$ , repitiendo el mismo argumento nos damos cuenta de que  $q(x) = (x - z_2)l(x)$ , para cierto polinomio  $l(x)$ , y, por consiguiente,  $p(x) = (x - z_1)(x - z_2)l(x)$ . Repitiendo este procedimiento  $n$  veces se obtiene una factorización de  $p(x)$  en la forma  $p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$ , donde  $\{z_1, \dots, z_n\}$  son las  $n$  raíces de  $p(x)$ .

**Ejemplo 8.3.1.** Factoricemos en factores lineales el polinomio  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ . El comando *Raíz* nos permite hallar una primera raíz de  $p(x)$



Esta raíz es  $z_1 = 1$ . El GeoGebra también nos permite dividir  $p(x)$  entre  $(x - 1)$ :  $p(x) = (x - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$ . Otra vez, usando el comando *Raíz* podemos hallar una raíz de  $x^3 - x^2 + x - 1$ . Vemos que, nuevamente,  $z_2 = 1$  es una raíz de  $x^3 - x^2 + x - 1$ ; este polinomio, a su vez, puede escribirse como  $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$ .

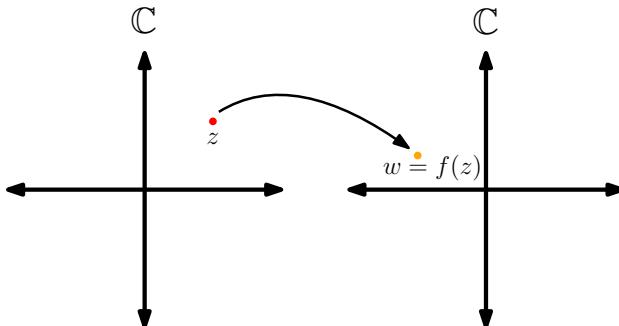
Ya sabemos que  $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ . Luego  $p(x) = (x - 1)(x - 1)(x + i)(x - i)$  es la factorización buscada.

The screenshot shows the Geogebra Graphing Calculator window. The URL in the address bar is <https://www.geogebra.org/graphing>. The main area displays a list of calculations:

- $L_1 = \text{Division}(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1, x - 1)$   
→  $\{x^3 - x^2 + x - 1, 0\}$
- $A = \text{Root}(x^3 - x^2 + x - 1)$   
→  $\{1, 0\}$
- $L_2 = \text{Division}(x^3 - x^2 + x - 1, x - 1)$   
→  $\{x^2 + 1, 0\}$
- + Input...

Vemos entonces que el problema fundamental de factorizar un polinomio en factores lineales se reduce a hallar una primera raíz de  $p(x)$ .

Para ello, consideremos  $p(x)$  como una función de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ , que envía cada complejo  $z$  en el número  $w = f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Podemos visualizar  $f(z)$  como un *mapeo* o *mapa* del plano en el plano que envía cada punto del plano complejo  $z$  en otro punto  $w = f(z)$ .



Este mapeo puede entenderse mucho mejor si miramos como actúa sobre círculos o rectas en el dominio de la función.

**Ejemplo 8.3.2.** 1. Veamos, por ejemplo, como visualizar la función  $f(z) = z^2$ .

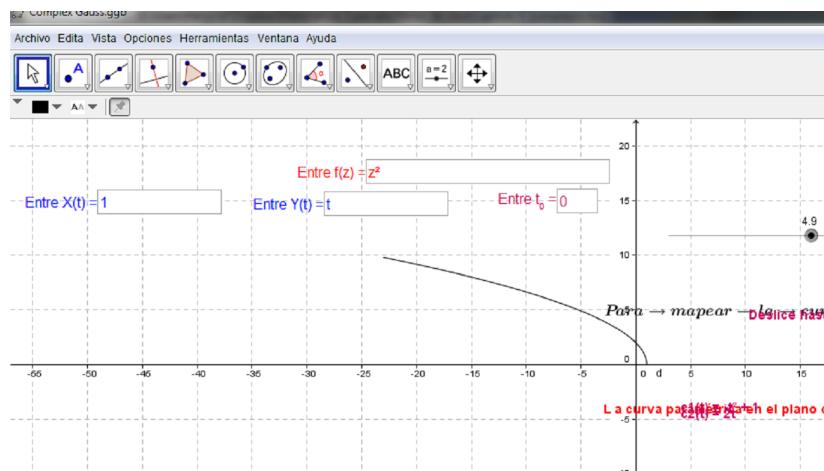
Podemos comenzar por ver la imagen bajo  $f$  de un círculo de radio unitario  $C = (x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$ . Si escribimos  $z = x + yi$ , vemos que  $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$ . Luego, bajo este mapeo, cada punto

$z = x(t) + y(t)i$  de  $C$  es enviado en

$$w(t) = (\cos^2(t) - \sin^2(t)) + 2\cos(t)\sin(t)i.$$

Esta última expresión puede simplificarse como  $w(t) = \cos(2t) + \cos(2t)i$ . Mientras  $t$  varía entre 0 y  $\pi$ ,  $w(t)$  describe un círculo de radio 1. Ahora, para valores de  $t$  entre  $\pi$  y  $2\pi$ , la curva  $w(t)$  vuelve a ser un círculo unitario. Luego la imagen del círculo  $C$  es el círculo unitario, pero recorrido dos veces.

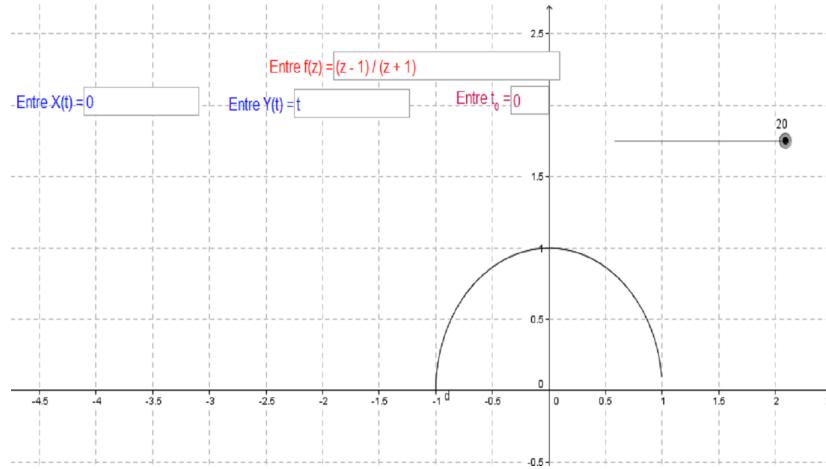
- Visualicemos ahora la imagen de la recta  $L$  dada en forma paramétrica como  $x = 1$ ,  $y(t) = t$ , bajo el mismo mapeo del ejemplo anterior. En este caso  $w(t) = (1 - t^2) + 2ti$ . Utilizando GeoGebra (programa *Complex Gauss.ggb*, cortesía del profesor Julio Morales) podemos ver de manera animada la imagen de la recta  $L$  cuando esta se mapea bajo  $f(z) = z^2$ :



De manera analítica, podemos ver que la curva paramétrica  $w(t) = (1 - t^2) + 2ti$  corresponde a una parábola: en efecto, si hacemos  $v = 2t$ ,  $u = 1 - t^2$ , vemos que  $t = v/2$  y por tanto  $u = 1 - v^2/4$ , ecuación de una parábola en el plano  $(u, v)$ .

- Veamos ahora cuál es la imagen del círculo unitario  $C(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , cuando este se mapea bajo la función  $w = z^n$ , para una potencia cualquiera  $n > 0$ . En este caso es conveniente escribir la ecuación de  $C(t)$  como  $z(t) = e^{\theta i}$ , con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Luego  $w(t) = z(t)^n = e^{n\theta i} = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)i$ . Al variar  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$ , el ángulo  $n\theta$  varía entre 0 y  $2n\pi$ . Luego la imagen de  $C(t)$  es el mismo círculo  $C(t)$ , pero recorrido  $n$  veces.
- Visualicemos la función  $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$ . La recta  $x = 0$ ,  $y(t) = t$  se mapea en  $(-1 + ti)/(1 + ti)$ . Multiplicando arriba y abajo por el conjugado del denominador,  $1 - ti$ , se obtiene:

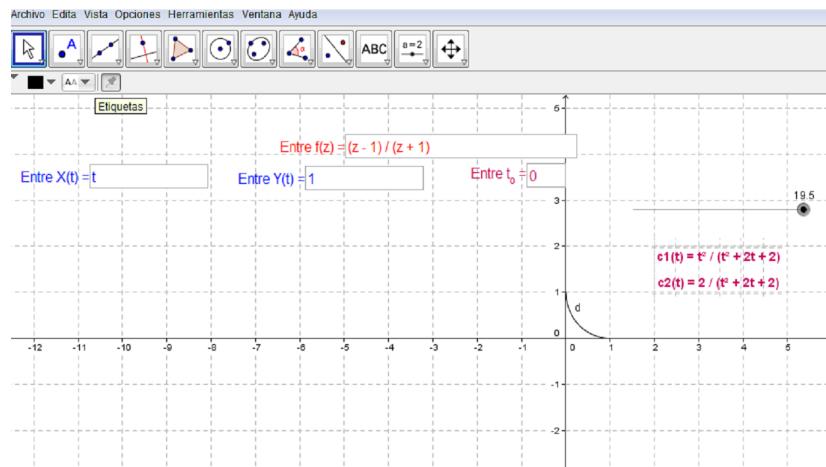
$$\frac{(-1 + ti)(1 - ti)}{(1 + ti)(1 - ti)} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + \frac{2t}{1 + t^2}i$$



A medida que la recta  $t i$  se aleja del origen hacia infinito ( $t \rightarrow \infty$ ), su imagen describe un semicírculo de radio 1 que nunca llegará a tocar el punto  $z = 1$ .

De otro lado, si miramos la imagen del semicírculo superior del círculo unitario  $C$  vemos que  $w(t)$  describe una línea recta que se aleja sobre el eje  $y$  en dirección positiva. En  $z = -1$  el mapeo no está definido. Ahora, para valores de  $z(t) = \cos(t) + \sin(t)i$ , (semicírculo inferior) con  $\pi < t \leq 2\pi$ , la función paramétrica  $w(t)$  recorre una recta que viene desde  $-\infty$  y llega al origen, moviéndose sobre el eje  $y$ .

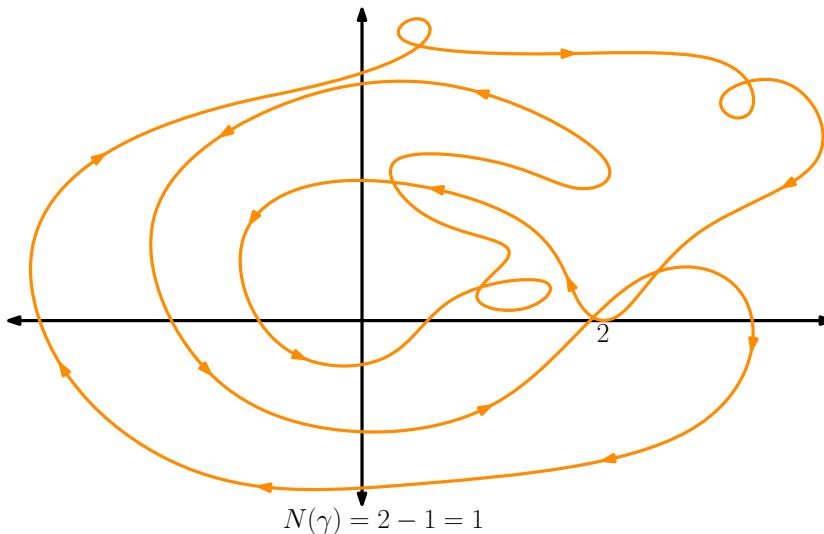
El lector puede experimentar mapeando, por ejemplo, una recta paralela al eje  $x$ , digamos  $x = t$ ,  $y = 1$ :



Su imagen es una hipérbola que se acerca al punto 1, sin nunca alcanzarlo.

La demostración del Teorema de Gauss se fundamenta en el siguiente razonamiento (que los matemáticos llaman *método de reducción al absurdo*): supongamos que un determinado polinomio  $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  de grado positivo no tuviera ninguna raíz. Es decir, supongamos que al mapear bajo  $p(z)$  cualquier curva  $z(t)$  en el dominio la curva imagen  $w(t) = p(z(t))$  nunca pasaría por el punto cero. Es decir, nunca cruzaría el origen. Veamos que ello lleva necesariamente a una contradicción. Los hechos fundamentales son los siguientes:

1. El número de giros de una determinada curva cerrada  $\gamma$  alrededor del origen, que denotaremos por  $N(\gamma)$ , se define como *el número de vueltas que la curva da en sentido positivo (contrario al reloj) menos el número de giros que esta da en sentido negativo (en dirección del reloj)*. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una curva  $\gamma$  que comienza en el punto 2, da primero dos giros alrededor del origen en dirección positiva, y luego uno en dirección negativa. Por tanto  $N(\gamma) = 2 - 1 = 1$ :



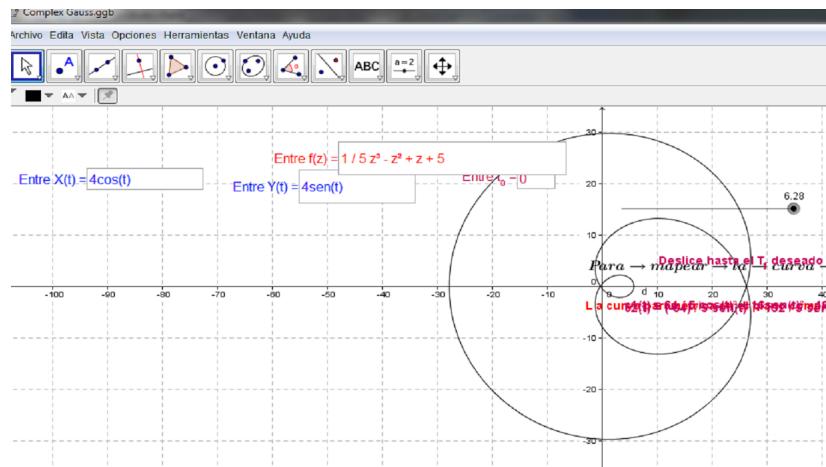
Este concepto puede definirse de manera rigurosa mediante una integral: Si  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , entonces si  $\gamma$  no pasa a través del origen, el entero  $N(\gamma(t))$  se puede definir como

$$N(\gamma(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{-y(t)x'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} + \frac{x(t)y'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt.$$

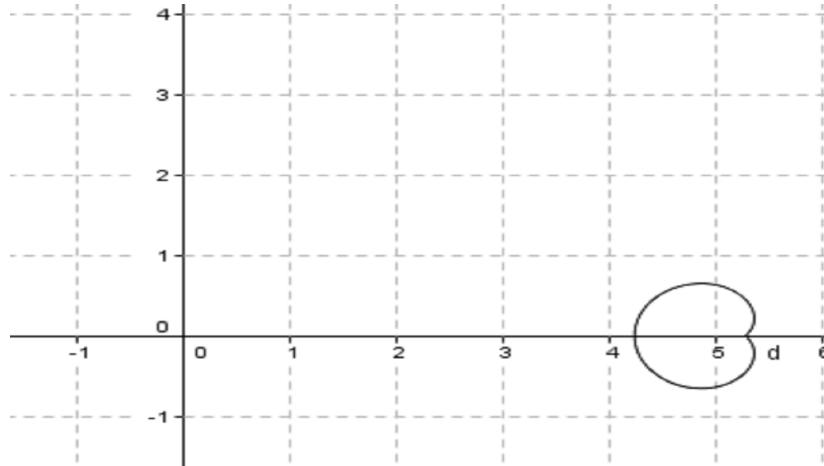
Por ejemplo, si  $\gamma(t) = (\cos(nt), \sin(nt))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , el número de giros (que debe ser igual a  $n$ ) sería, según la fórmula anterior:

$$N(\gamma(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n \sin^2(nt)}{1} + \frac{n \cos^2(nt)}{1} dt = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi n}{2\pi} = n.$$

2. La imagen de un círculo centrado en el origen, y de radio  $r > 0$ ,  $C_r(t) = r \cos(t) + r \sin(t)i$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , bajo  $p(z)$ , sería entonces una curva cerrada en el plano imagen, dada por  $p(C_r(t))$ , y que no cruza el origen. Por tanto dará un cierto número de giros (positivo o negativo) alrededor de él. Si  $p(z) = z^n$ , por ejemplo, este número de giros es precisamente  $n$ , según vimos en el numeral anterior.
3. Como  $p(z)$  es una función continua, y estamos suponiendo que  $p(C_r(t))$  nunca cruza el origen, el número de giros  $N(p(C_r(t)))$  tendrá que mantenerse constante, y no dependerá entonces de  $r$ . Pero como  $a_0z^n$  es el término dominante del polinomio  $p(z)$  se sigue que cuando  $r$  es suficientemente grande  $N(p(C_r(t)))$  tendrá que ser igual a  $n$ , el grado del polinomio. Por ejemplo, grafiquemos en GeoGebra la imagen bajo el polinomio  $p(z) = 1/5z^3 - z^2 + z + 5$  del círculo centrado en el origen y radio  $r = 4$ . En este caso,  $N(p(C_4(t))) = 3 = \text{grado}(p(z))$ .



4. De otro lado, cuando  $r$  es muy pequeño la curva imagen  $p(C_r(t))$  permanecerá muy cerca al valor de  $p(0)$  y por tanto no dará ninguna vuelta alrededor del origen. En nuestro ejemplo anterior, si hacemos  $r = 0,5$ , la curva imagen luce como:



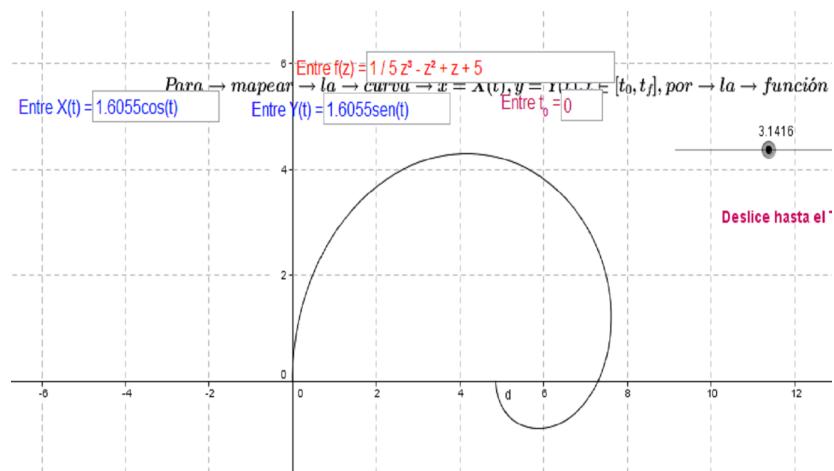
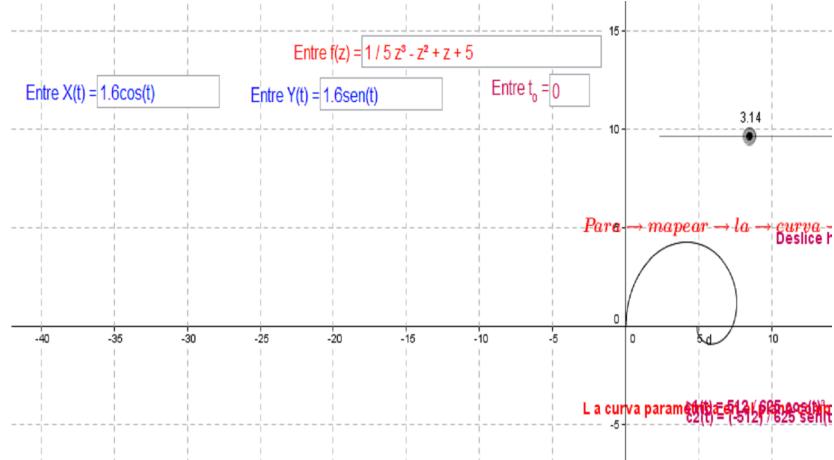
5. Luego, si ningún valor de  $p(z)$  atravesara por el origen, el número de giros  $N(p(C_r(t)))$  sería igual al grado del polinomio  $n$ , para la imagen de un círculo de radio muy grande, y cero, para círculos muy pequeños. Pero según vimos en el numeral 3, este número entero es constante. *Esta imposibilidad muestra que  $p(z)$  ha de cortar el origen para la imagen de algún círculo  $C_r(t) = r \cos(t) + r \sin(t)i$ .*

*GeoGebra* nos permite hallar de manera aproximada el valor de  $r$  y el valor de  $t$  para los cuales  $z_r(t) = r \cos(t) + r \sin(t)i$  cumple que  $p(z(t)) = 0$ .

**Ejemplo 8.3.3.** Hallemos un cero para el polinomio  $p(z) = 1/5z^3 - z^2 + z + 5$ . Cuando  $r = 0,5$ , el número de giros  $N(p(C_{0,5}(t)))$  es cero. Para  $r = 1,7$ ,  $N(p(C_{1,7}(t)))$  es igual a 1 (esto último se ve gráficamente). Ahora disminuimos gradualmente el valor de  $r$  hasta que veamos la curva imagen pasar por el origen. Cuando  $r = 1,6$ , ésta lo hace de manera aproximada para el valor  $t = 3,14$  (se lee en el deslizador). Luego

$$z = 1,6 \cos(3,14) + 1,6 \sin(3,14) \simeq -1,6$$

es una raíz aproximada. En efecto,  $p(-1,6) = 0,02$  nos da un error de dos centésimas. Una mejor aproximación se logra con  $r = 1,6055$  y  $t = 3,1416$ , con un error de solo una centésima en este caso.



- Ejercicio 8.3.4.**
- Explique por qué si  $p(x) = a_0x^n + \dots + a_n$  es un polinomio cuyos coeficientes son números reales, entonces, si  $z$  es una raíz compleja, también lo es su conjugado  $\bar{z}$ .
  - Encuentre las  $n$  raíces de la ecuación  $x^n + 1 = 0$ .
  - Factorice la ecuación anterior en factores lineales.
  - Utilizando el programa Complex Gauss.ggb encuentre una raíz compleja aproximada para el polinomio  $p(x) = x^5 - 10x^3 + 2$ .
  - Encuentre la imagen bajo la función  $f(z) = 1/z$  de la recta dada en forma paramétrica como  $x = 1/10$ ,  $y = t$



El Barón **Augustin-Louis Cauchy** (21 de agosto de 1789 - 23 de mayo de 1857) fue un matemático, ingeniero y físico francés que hizo contribuciones pioneras a varias ramas de las matemáticas, entre ellas: el análisis matemático y la mecánica del continuo. Fue uno de los primeros en afirmar y probar rigurosamente los teoremas del cálculo, rechazando el principio heurístico de la generalidad del álgebra de los autores anteriores. Fundó casi sin ayuda el análisis complejo y el estudio de grupos de permutación en álgebra abstracta.

6. Encuentre las imágenes de rectas paralelas a los ejes  $x$  y  $y$  bajo la función  $f(z) = e^z$ .
7. Encuentre, utilizando GeoGebra y el programa Complex Gauss.ggb, la imagen del círculo centrado en el punto  $(1, 0)$  y radio unitario bajo la función exponencial  $f(z) = e^z$ .

## 8.4. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Estudiaremos en esta sección la derivada de una función de variable compleja. Primero introduzcamos la noción de *dominio*.

**Definición 8.4.1.** Un *dominio*  $U \subset \mathbb{C}$  es un subconjunto no vacío de los números complejos que satisface dos condiciones:

1.  $U$  es *conexo*: esto significa que dados dos puntos  $p$  y  $q$  en  $U$  existe una curva continua contenida en  $U$  que une  $p$  con  $q$ .
2.  $U$  es *abierto*: esto significa que para cualquier punto  $p \in U$  se puede escoger un pequeño disco  $D_r(p)$  de centro  $p$  y radio  $r$  enteramente contenido en  $U$ .

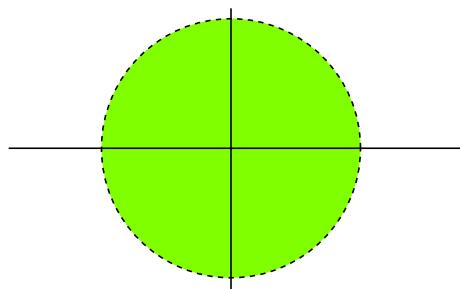


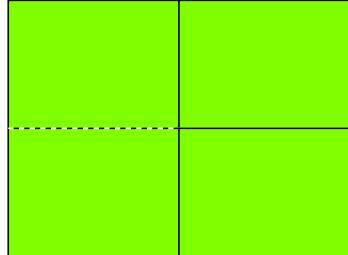
**Ejemplo 8.4.2.** 1.  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  (el interior del disco de radio 1) es un dominio.

2.  $U = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ no pertenece al eje real negativo } (-\infty, 0]\}$  es un dominio.
3.  $U = \mathbb{R}$  no es un dominio.
4.  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  (el interior del disco de radio 1 junto con su circunferencia frontera) no es un dominio, pues para ningún punto  $p$  en la frontera de  $U$  (círculo unitario) se satisface la condición 2 de la definición anterior.

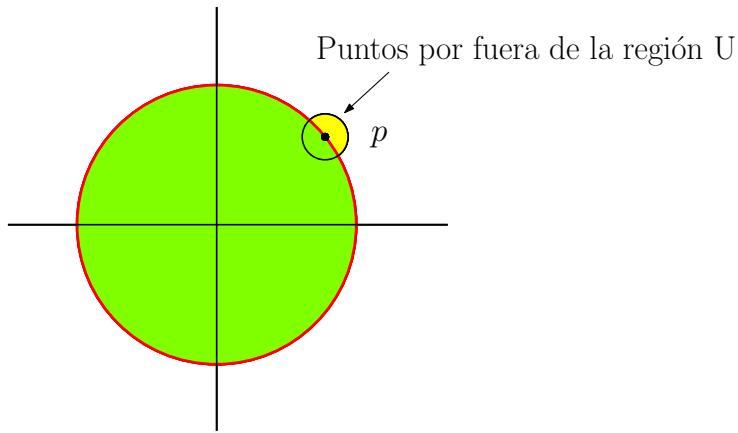
**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (17 de septiembre de 1826 - 20 de julio de 1866) fue un matemático alemán que hizo contribuciones al análisis, la teoría de números y la geometría diferencial. En el campo del análisis real, se le conoce sobre todo por la primera formulación rigurosa de la integral, la integral de Riemann, y su trabajo sobre las series de Fourier. Sus contribuciones al análisis complejo incluyen, en particular, la introducción de las superficies de Riemann, abriendo nuevos caminos en el tratamiento natural y geométrico del análisis complejo.

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$





$$U = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ no pertenece a } (-\infty, 0]\}$$



Intuitivamente, un dominio  $U$  es una región *conexa y rellena*.

**Definición 8.4.3.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función definida en un dominio  $U$ . Si  $z \in U$ ,  $f$  se llama *diferenciable* en  $U$  si el límite  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (f(z + \Delta z) - f(z))/\Delta z$  existe para todos los puntos  $z \in U$ . Cuando este límite existe se denota por  $f'(z)$  o por  $df/dz$ .

Si  $z = x + yi$ , entonces  $f(z)$  siempre puede escribirse en la forma  $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ , para dos funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ , las partes reales e imaginarias del número complejo  $w = f(z + iy)$ . Por ejemplo, si  $f(z) = 1/z$ , entonces

$$f(x + yi) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i,$$

y en este caso

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

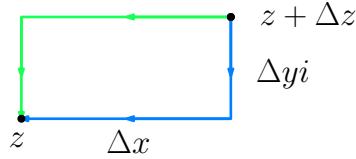
Si  $f(z) = z^2$  entonces

$$f(x + yi) = (x^2 - y^2) + (2xy)i,$$

y por tanto

$$u(x, y) = (x^2 - y^2), \quad v(x, y) = 2xy.$$

Con esta notación podemos computar la derivada  $f'(z)$  cuando ésta existe, en términos de las derivadas parciales de  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ . Para ello tomemos el límite cuando  $\Delta z \rightarrow 0$  por dos caminos diferentes, que aparecen en colores verde y azul en la figura siguiente:



Si hacemos  $z = x + yi$ ,  $\Delta z = \Delta x + \Delta yi$ , entonces, cuando nos acercamos a  $z$  por el camino azul ello equivale a tomar el límite, primero cuando  $\Delta y \rightarrow 0$ , y luego cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . En este caso el computo del límite produce:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x + yi + \Delta x + \Delta yi) - f(x + yi)}{\Delta x + \Delta yi} \\ &= \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta x + \Delta yi} + \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta x + \Delta yi} i. \end{aligned}$$

Cuando  $\Delta y \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} i.$$

Al hacer  $\Delta x \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} i \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i. \end{aligned} \quad (8.2)$$

De otro lado, al seguir el camino verde, lo cual equivale a hacer primero  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta yi} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta yi} i \\ &= \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} - \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} i, \end{aligned}$$

y luego  $\Delta y \rightarrow 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} - \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} i \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} && \text{(Cauchy-Riemann)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones son conocidas como las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

De manera recíproca puede demostrarse:

**Teorema 8.4.4.** Si las derivadas parciales  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial y$ ,  $\partial v / \partial x$ ,  $\partial v / \partial y$  son continuas en  $U$ , y se satisfacen además las ecuaciones de Cauchy-Riemann Cauchy-Riemann, entonces  $f'(z)$  existe en todo punto  $z \in U$  (véase, por ejemplo, [12]).

Una función  $f$  definida en un dominio  $U$  y para la cual  $f'(z)$  existe para todo  $z \in U$  se denomina *analítica u holomorfa en  $U$* .

**Ejemplo 8.4.5.** Sea  $U = \{z \in C: z \neq 0\}$ . Claramente  $U$  es un dominio. Si  $f : U \rightarrow C$  es la función  $f(z) = 1/z$ , entonces  $f'(z)$  existe en  $U$ . Como vimos en este caso  $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ ,  $v(x, y) = y/(x^2 + y^2)$ . Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

y se satisfacen las ecuaciones de C-R. Además, cualquiera de las dos fórmulas 8.2 o 8.3 nos permiten computar  $f'(z)$ :

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}i \\ &= -\frac{\bar{z}^2}{|z|^2} = -\frac{1}{z^2} = -z^{-2}.\end{aligned}$$

No es difícil ver que se satisfacen las mismas reglas usuales de la derivación, como en el caso de las funciones de variable real. En particular, cuando las derivadas de  $f$  y  $g$  existen se tiene que:

1.  $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
2.  $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
3. Si  $f(z) = z^n$ ,  $n \neq 0$ , entonces  $f'(z) = nz^{n-1}$ .
4. Si  $f : U \rightarrow V$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones definidas en dominios  $U$  y  $V$ , respectivamente, entonces  $g(f(z))' = g'(f(z))f'(z)$  (regla de la cadena).

**Ejercicio 8.4.6.** 1. Compute  $dz^n/dz$ , si  $n \neq 0$  y verifique que  $dz^n/dz = nz^{n-1}$ .

2. Verifique que  $de^z/dz = e^z$ .

3. Sea  $U = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ no pertenece al eje real negativo } (-\infty, 0]\}$ , y sea  $\log : U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como  $\log(z) = \ln|z| + \arg(z)i$ , donde  $\arg(z)$  es el argumento principal de  $z$ .

Verifique que  $e^{\log(z)} = z$ .

4. Use la regla de la cadena para comprobar que  $d\log(z)/dz = 1/z$ .

## 8.5. Funciones armónicas

**Definición 8.5.1.** Una función definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , se llama *armónica* en  $D$  si su laplaciano es cero en  $D$ . Es decir, si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } D. \quad (8.4)$$

Ejemplos importantes de funciones armónicas los proporcionan la parte real y compleja de una función holomorfa. De manera precisa: *si  $f(x+yi) = u(x,y)+v(x,y)i$  es holomorfa en  $D$ , entonces  $u$  y  $v$  son funciones armónicas*: esto se debe a que para  $u$  y  $v$  se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Como  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ , al sumar ambos lados en 8.5 se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

El razonamiento para mostrar que  $v(x,y)$  también es armónica es completamente similar.

**Ejemplo 8.5.2.** 1. Sea  $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}$  el semiplano derecho ( $D$  es un dominio). Veamos que  $v(x,y) = \arctan(y/x)$  es armónica. En efecto,  $v(x,y) = \arg(x+iy)$ , que es la parte imaginaria de la función  $\log(z)$ . Directamente podemos comprobar que  $v(x,y)$  es armónica. Recordemos que  $d\arctan(u)/du = u'/(1+u^2)$ . Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

De otro lado,

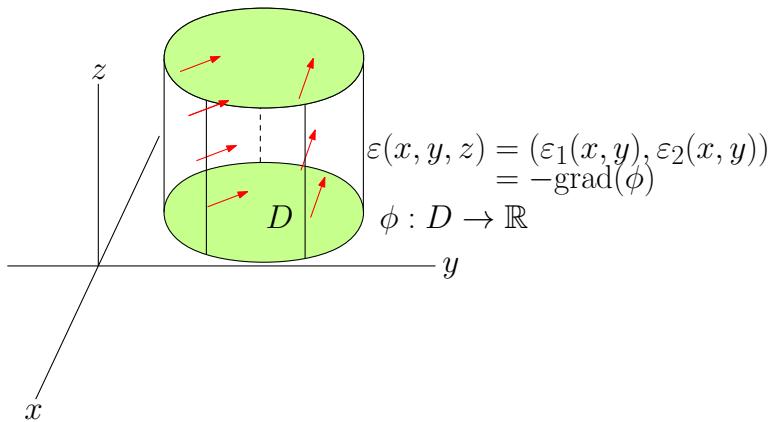
$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Por tanto

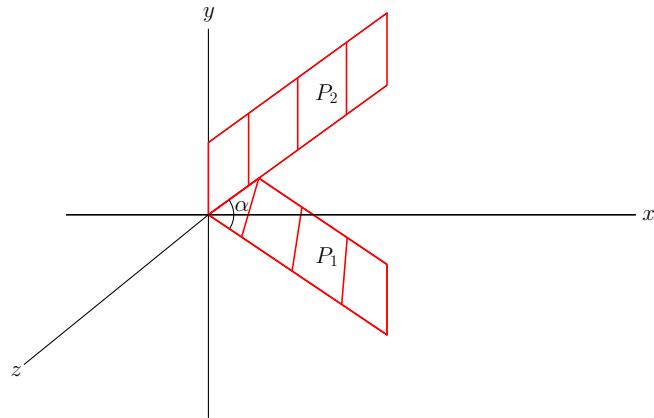
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

2. La función  $u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  es armónica en  $D$  por ser la parte real de  $\log(z)$ .

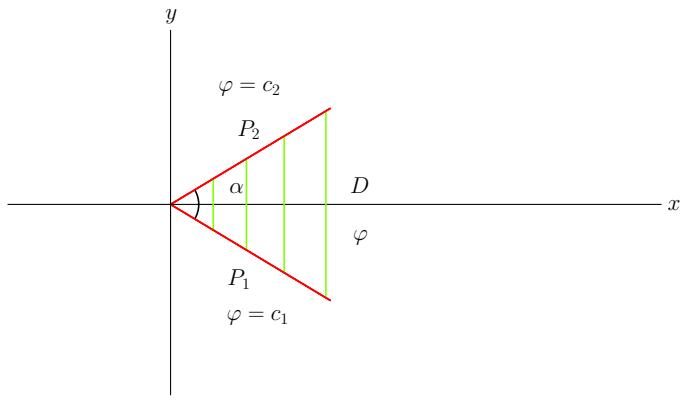
Las funciones armónicas, por satisfacer la ecuación 8.4, *pueden utilizarse para modelar el potencial eléctrico en regiones del espacio que no dependen de una determinada coordenada espacial*. Esto quiere decir que si un campo eléctrico puede describirse en la forma  $\varepsilon(x, y, z) = (\varepsilon_1(x, y), \varepsilon_2(x, y))$  en un cierto dominio  $D$  (independiente de  $z$ ) entonces  $\varepsilon$  puede obtenerse como  $\varepsilon = -\text{grad}(\phi)$ , donde  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica.



**Ejemplo 8.5.3.** Consideremos la región del espacio entre dos placas metálicas  $P_1$  y  $P_2$  que forman un ángulo  $\alpha$  y las cuales se extienden de manera indefinida en dirección  $z$



Si el potencial en  $P_1 = c_1$  (digamos, medido en voltios) y en  $P_2$  es  $c_2$  es constante, calculemos el potencial eléctrico en  $\phi(x, y, z) = \varphi(x, y)$  en la región comprendida entre  $P_1$  y  $P_2$ . En otras palabras, debemos encontrar  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi = c_1$  en  $P_1$  y  $\varphi = c_2$  en  $P_2$ :



El ejercicio anterior nos dice que  $\varphi(x, y) = a + b \arg(x + iy)$  es armónica en  $D$  y por tanto  $\Delta\varphi = 0$  en  $D$ . Sobre  $P_1$  se tiene que  $\varphi(x, y) = a - b\alpha/2 = c_1$  y sobre  $P_2$ , se tiene que  $\varphi(x, y) = a + b\alpha/2 = c_2$ . De aquí que  $a = (c_1 + c_2)/2$ ,  $b = 1/\alpha(c_2 - c_1)$  y por tanto el potencial eléctrico en esta región está dado por la función:

$$\phi(x, y, z) = (c_1 + c_2)/2 + 1/\alpha(c_2 - c_1) \arctan(y/x).$$

# CAPÍTULO 9

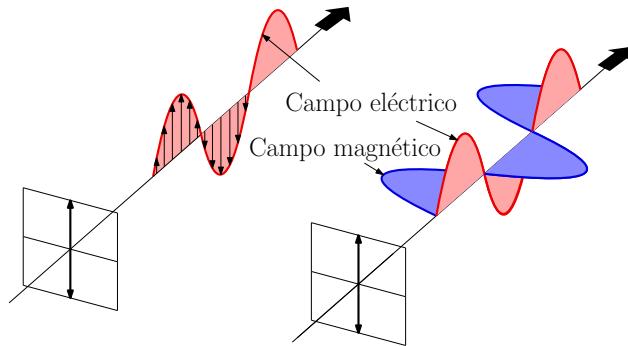
---

## \*Aplicaciones: polarización de un fotón

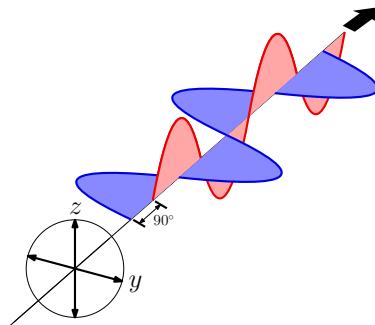
---

### 9.1. Modelo clásico

En el modelo de la física clásica, la luz es una onda electromagnética conformada por dos campos perpendiculares entre sí: uno eléctrico y otro magnético. En una onda de luz *polarizada linealmente*, estos dos campos oscilan cada uno en un mismo plano, perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por convención, el plano de polarización de la luz se refiere a la polarización del campo eléctrico.



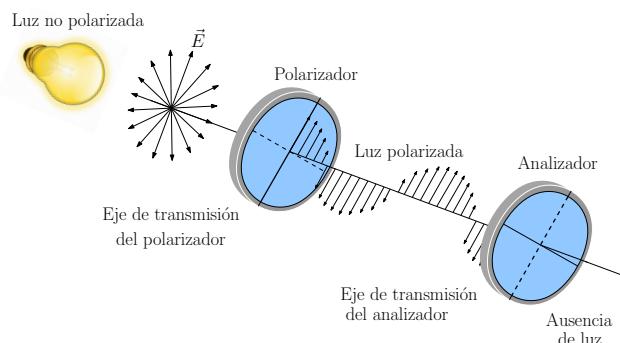
De otro lado, la llamada luz *polarizada circularmente* consta de dos ondas electromagnéticas planas perpendiculares, las cuales se encuentran en diferencia de fase de  $\pi/2$ .



En la luz polarizada circularmente, si se mirase la fuente de luz, el vector del campo eléctrico aparecería moviéndose en un círculo a medida que se acerca. El vector del campo eléctrico dibuja una vuelta completa, cuando la luz avanza una longitud de onda completa. Además, si el dedo pulgar de la mano derecha apuntara en la dirección de propagación de la luz, entonces, si el vector del campo eléctrico se ve girando en la dirección marcada por los demás dedos, la polarización se llama *de giro derecho*. En caso contrario, se llama *polarización de giro izquierdo*.

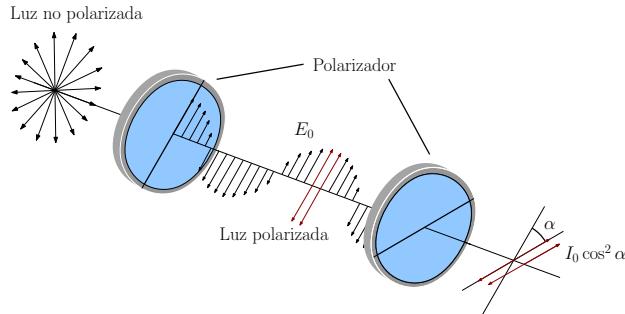
La luz normalmente (no polarizada) vibra en todos los planos. No obstante, existen algunos materiales que solo dejan pasar luz cuyo campo eléctrico vibra en un plano determinado. La luz polarizada circularmente se puede producir haciendo pasar luz polarizada linealmente, a través de una placa de un cuarto de onda con un ángulo incidente de  $45^\circ$  respecto del eje óptico de la placa.

Cuando un haz de luz se hace pasar a través de un polarizador que selecciona aquellas ondas cuyo campo eléctrico está contenido en un plano, y luego este haz se hacen incidir sobre un segundo polarizador cuyo eje es perpendicular al primero, se observa que no se transmite luz alguna.



Sin embargo, si el segundo polarizador está orientado en un ángulo que no sea perpendicular al primero, habrá una componente del campo eléctrico de la luz polarizada por el primer filtro que se oriente en la misma dirección del segundo polarizador, y así algo de luz se transmitirá a través de él. De hecho, experimentalmente se observa (Ley de Malus) que si ambos polarizadores forman un ángulo  $\alpha$ , la intensidad del rayo

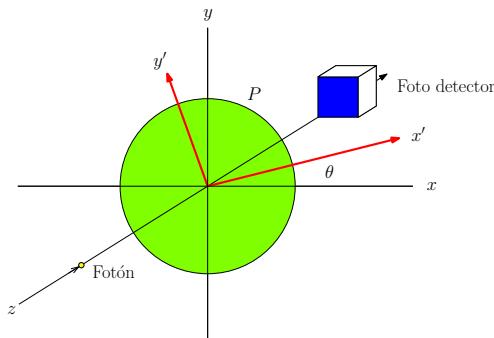
de luz que emerge del segundo polarizador es igual a  $I_\alpha = I_0 \cos^2(\alpha)$ , donde  $I_0$  denota la intensidad de la luz después de haber atravesado el primer polarizador.



## 9.2. Modelo corpuscular

En el modelo corpuscular, la polarización se entiende como un fenómeno cuántico. La polarización de un fotón corresponde en el modelo a un vector *unitario* de  $\mathbb{C}^2$ . Un filtro polarizador, orientado en una determinada posición, se convierte entonces en un instrumento de medición de un determinado *observable*.

Situemos una lama polaroid  $P_\theta$ , la cual, en la teoría clásica, solo permite pasar aquellas ondas cuyos campos eléctricos están en el plano determinado por los ejes  $x'$  y  $z$ , donde el eje  $x'$  forma un ángulo  $\theta$  con respecto a  $x$  (Fig. 5). Pongamos ahora un detector detrás de  $P_\theta$ . Cuando hacemos pasar un fotón a través de  $P_\theta$ ,



puede ocurrir que, éste sea absorbido, o logre pasar el polaroid y activar el detector. Si denotamos por  $\varepsilon_1 = (1, 0)$  y por  $\varepsilon_2 = (0, 1)$  los vectores de la base estándar de  $\mathbb{C}^2$ , y si  $T$  es el operador hermitiano definido por la matriz (con referencia a la base estándar)

$$T = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} e_1(\theta) &= \cos \theta \varepsilon_1 + \sin \theta \varepsilon_2, \\ e_{-1}(\theta) &= -\sin \theta \varepsilon_1 + \cos \theta \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (9.1)$$

son los dos vectores propios de  $T$ , los cuales constituyen una base ortonormal, con valores propios  $+1$  y  $-1$ , respectivamente. La interpretación de *la medición de la polarización en la dirección  $\theta$*  deberá entenderse entonces como el proceso que entraña:

1. Encontrar uno de dos posibles autovalores de  $T$ :  $\lambda_1 = +1$ , si el fotón activa el detector; o  $\lambda_2 = -1$ , cuando no lo activa.
2. Si la polarización del fotón se representa en la base 9.1 como  $v = \alpha e_1(\theta) + \beta e_{-1}(\theta)$ , con  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , entonces el proceso de medición *colapsa el estado de onda  $v$  del fotón* en uno de los dos estados  $v' = e_1(\theta)$  o  $v'' = e_{-1}(\theta)$ . Es decir, al realizar la medición con  $P_\theta$  se produce una transición de estados  $v \mapsto e_i(\theta)$ .
3. Los coeficientes complejos  $\alpha$  y  $\beta$  tiene en el modelo la siguiente interpretación:  $|\alpha|$  es la probabilidad de que ocurra la transición  $v \mapsto e_1(\theta)$ , y  $|\beta|^2$  es la probabilidad de que ocurra la transición  $v \mapsto e_{-1}(\theta)$ . Lo primero ocurre cuando el fotón es detectado por el medidor situado detrás de  $P_\theta$ , mientras que la segunda transición se da cuando no lo es.

**Observación 9.2.1.** Cuando un haz de luz ordinaria se hace incidir sobre  $P_\theta$ , la polarización de los fotones del haz es aleatoria. Podemos pensar que el haz está conformado por fotones  $v = \alpha e_1(\theta) + \beta e_{-1}(\theta)$ , donde  $0 \leq |\alpha| \leq 1$  se distribuye de acuerdo con una distribución uniforme en el disco unitario  $D = \{\alpha \in C : 0 \leq |\alpha| \leq 1\}$  con función constante  $1/\pi$ . De aquí que la cantidad promedio de fotones que atraviesan  $P_\theta$  estaría dada por

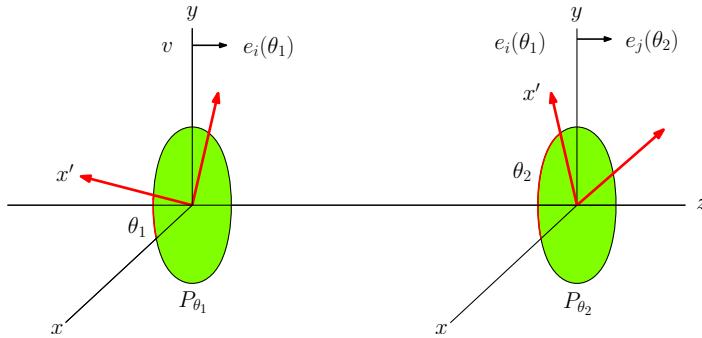
$$\frac{1}{\pi_D} \int |\alpha|^2 dz = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2}.$$

Luego, al mirar a través de una lámina polaroid, la intensidad de la luz disminuye a su mitad, pues la mitad de los fotones logran atravesarla. Estos constituirán un haz de luz polarizada en la dirección de  $\theta$ .

En el modelo cuántico, luz polarizada circularmente corresponde a los estados  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)$ , (polarización circular a derecha) y  $\omega_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2)$  (polarización circular a izquierda). Existen materiales transparentes cristalinos que, aunque homogéneos, son anisótropos, es decir sus propiedades ópticas son diferentes en las distintas direcciones. Una *lámina cuarto de onda* es un cristal anisótropo con la propiedad de que cuando es atravesado por luz linealmente polarizada, la cual incide en una lámina de estas características a  $45^\circ$  con cualquiera de sus ejes principales, *la luz emergente estará polarizada circularmente*.

### 9.2.1. Polarizadores en serie

¿Qué ocurre ahora si ponemos dos polarizadores,  $P_{\theta_1}$  y  $P_{\theta_2}$ , uno a continuación de otro, y hacemos pasar un fotón, primero a través de  $P_{\theta_1}$  y luego a través de  $P_{\theta_2}$ ? Si su polarización viene dada por un cierto vector unitario  $v = \alpha e_1(\theta) + \beta e_{-1}(\theta)$ , al pasar el primer polarizador su estado cambiará de la manera siguiente:  $v \mapsto e_i(\theta_1)$ ,  $i = 1, -1$ . Ahora, si expresamos  $e_i(\theta_1)$  como combinación de  $\{e_1(\theta_2), e_{-1}(\theta_2)\}$ , digamos  $e_i(\theta_1) = \delta e_1(\theta_2) + \gamma e_{-1}(\theta_2)$ , el paso del fotón por el segundo polarizador (segunda medición) hará coplasar  $e_i(\theta_1)$  en uno de los dos vectores  $e_1(\theta_2)$  o  $e_{-1}(\theta_2)$ , con probabilidades  $|\delta|^2$ , y  $|\gamma|^2$ , respectivamente.



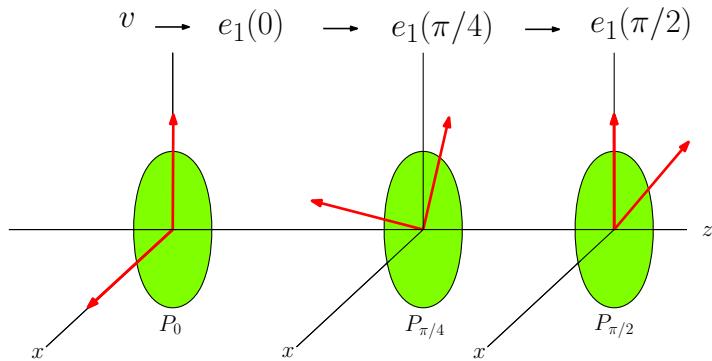
Si, por ejemplo,  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi/2$  (polarizadores con sus ejes perpendiculares), entonces ningún fotón podrá atravesar ambos polarizadores, pues después de atravesar el primero, su estado habrá colapsado necesariamente en  $\varepsilon_1 = e_1(0)$  (de haber pasado al estado  $e_{-1}(0)$  hubiese sido absorbido). Ahora,  $e_1(\pi/2) = \varepsilon_2$  y  $e_{-1}(\pi/2) = -\varepsilon_1$ . Luego, la probabilidad de atravesar el segundo polarizador ( $\varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$ ) es exactamente 0.

En general, la probabilidad de que un fotón en el estado  $v$  sea detectado luego de atravesar  $P_\theta$  es igual a  $|\langle v, e_1(\theta) \rangle|^2$ , donde  $\langle -, - \rangle$  denota el producto interno estándar en  $\mathbb{C}^2$ .

En efecto, como  $\{e_1(\theta), e_{-1}(\theta)\}$  es una base ortonormal,  $v$  puede escribirse de manera única como  $v = \alpha e_1(\theta) + \beta e_{-1}(\theta)$ . Luego  $|\langle v, e_1(\theta) \rangle|^2 = |\bar{\alpha}|^2 = |\alpha|^2$ .

### 9.2.2. Experimento de Paul Dirac

Para vindicar la interpretación del modelo cuántico de la polarización de la luz, Paul Dirac propuso el siguiente experimento: en el arreglo de la figura 6, si hacemos  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ , e intercalamos un tercer polarizador,  $P_{\pi/4}$ , entre  $P_0$  y  $P_{\pi/2}$ , algo extraordinario ocurre: antes, ningún fotón atravesaba  $P_0$  y  $P_{\pi/2}$ . Ahora que se ha situado un "obstáculo" en el medio, comienza, de manera inesperada, a pasar luz a través de las tres láminas polaroid!



Si utilizamos el modelo cuántico, la explicación resulta clara: la mitad de los fotones, en promedio, atraviesan  $P_0$ . Si  $v = \alpha e_1(0) + \beta e_{-1}(0)$  es uno de ellos, la primera medición colapsa su estado en  $e_1(0)$ . Como

$$\begin{aligned} |\langle e_1(0), e_1(\pi/4) \rangle|^2 &= |\langle \varepsilon_1, \cos(\pi/4)\varepsilon_1 + \sin(\pi/4)\varepsilon_2 \rangle|^2 \\ &= \left| \left\langle \varepsilon_1, \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_2 \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

entonces, de todos los fotones que pasan por  $P_0$ , la mitad en promedio pasarán por  $P_{\pi/4}$ , y sus estados pasarán a  $e_1(\pi/4)$ . Ahora,

$$\begin{aligned} |\langle e_1(\pi/4), e_1(\pi/2) \rangle|^2 &= \left| \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_2, \cos(\pi/2)\varepsilon_1 + \sin(\pi/2)\varepsilon_2 \right\rangle \right|^2 \\ &= \left| \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_2, \varepsilon_2 \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego la mitad de aquellos que pasaron  $P_{\pi/4}$  atravesarán  $P_{\pi/2}$ . Así, !una octava parte de ellos pasarán las tres láminas!

### 9.3. Experimento EPR: entrelazamiento cuántico

En el modelo cuántico dos fotones (en general, tres , cuatro, o un número cualquiera de partículas) no constituyen dos entes independientes, sino *una sola entidad matemática*. A Albert Einstein, la idea de *entrelazamiento cuántico* le resultaba perturbadora, pues violaba a su juicio el principio de localidad. En un estado entrelazado, manipulando solo una de las partículas se puede modificar el estado de la otra, !a distancia, y de manera instantánea! En el mundo de las experiencias cotidianas, nada manifiesta una característica similar.

En un experimento mental (luego en efecto realizado por Alain Aspect y varios otros físicos experimentales) imaginado por Einstein, Podolsky y Rosen, dos partículas (en nuestro ejemplo serán dos fotones), después de sufrir cierta transformación, se

separan siguiendo direcciones contrarias en estado *entrelazado*, concepto que definiremos con precisión más adelante. Dos observadores, posiblemente alejados miles de años luz, miden la polarización del correspondiente fotón que viaja en su dirección con respecto, digamos, al ángulo  $\theta = 0$  (el mismo ángulo para ambos observadores). He aquí lo sorprendente: si un observador mide la polarización de uno de los fotones (+1 o -1, en nuestra discusión anterior) sabrá entonces que la polarización del otro tendrá que ser la misma, como si la medición de uno de ellos hubiese alterado de forma instantánea a su compañero, distante miles de años luz, lo que contradice el sentido común. Para entender a fondo la discusión anterior debemos primero construir el correspondiente modelo matemático.

### 9.3.1. Sistemas de dos o más partículas

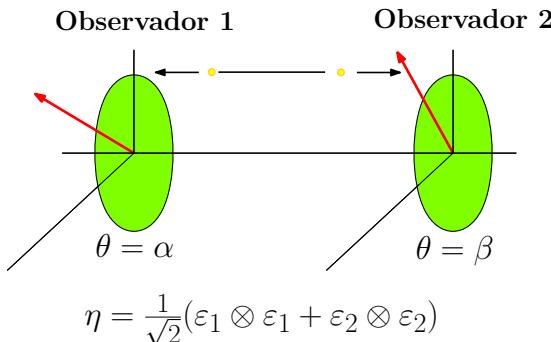
Matemáticamente, la polarización de dos fotones  $p_1$  y  $p_2$  no es simplemente el conjunto de sus polarizaciones  $\{v_1, v_2\}$ , sino que está representado por un vector de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . En la base estándar de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , dicho estado cuántico viene representado por un vector unitario

$$v = \alpha_{11}\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 + \alpha_{12}\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 + \alpha_{21}\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_1 + \alpha_{22}\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2,$$

donde  $\sum_{i,j=1,2} |\alpha_{ij}|^2 = 1$ . Por ejemplo, como se describe en [3], página 16, en cierto tipo de cascadas radiactivas se producen pares de fotones que se propagan en direcciones contrarias y, que por conservación de la paridad y el momento angular, quedan en un *estado entrelazado*

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2),$$

cuando se escogen coordenadas de manera adecuada.



Puede verse que no existen vectores  $v_1$  y  $v_2$  de  $\mathbb{C}^2$  que satisfagan  $v = v_1 \otimes v_2$ . De ahí que estados como este reciban el nombre de *entrelazados*.

Para el efecto de medir la polarización de cada fotón en ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  resulta conveniente expresar  $v$  en la siguiente base. De (9.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \cos(\alpha)e_1(\alpha) - \sin(\alpha)e_{-1}(\alpha), \\ \varepsilon_2 &= \sin(\alpha)e_1(\alpha) + \cos(\alpha)e_{-1}(\alpha). \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \cos(\beta)e_1(\beta) - \sin(\beta)e_{-1}(\beta), \\ \varepsilon_2 &= \sin(\beta)e_1(\beta) + \cos(\beta)e_{-1}(\beta).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\alpha)e_1(\alpha) - \sin(\alpha)e_{-1}(\alpha)] \otimes [\cos(\beta)e_1(\beta) - \sin(\beta)e_{-1}(\beta)] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sin(\alpha)e_1(\alpha) + \cos(\alpha)e_{-1}(\alpha)) \otimes (\sin(\beta)e_1(\beta) + \cos(\beta)e_{-1}(\beta))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha - \beta)e_1(\alpha) \otimes e_1(\beta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha - \beta)e_{-1}(\alpha) \otimes e_{-1}(\beta) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\alpha - \beta)e_1(\alpha) \otimes e_{-1}(\beta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\alpha - \beta)e_{-1}(\alpha) \otimes e_1(\beta),\end{aligned}\tag{9.2}$$

como se puede ver después de utilizar las identidades para el coseno y el seno de la suma de dos ángulos. Según la interpretación del formalismo cuántico, la medición simultánea de la polarización de  $p_1$  y  $p_2$  con dos polarizadores  $P_\alpha$  y  $P_\beta$  situados como en la figura 8 colapsaría el estado  $\eta$  en uno de los cuatro posibles estados  $e_i(\alpha) \otimes e_j(\beta)$ ,  $i, j = 1, -1$ , con probabilidades dadas por la norma al cuadrado del respectivo coeficiente. Así, por ejemplo, la probabilidad de obtener la medición  $e_1(\alpha) \otimes e_1(\beta)$  ( $p_1$  pasa por el polarizador  $P_\alpha$  y  $p_2$  pasa por  $P_\beta$ ) sería  $\frac{1}{2}\cos^2(\alpha - \beta)$ . Así mismo, la probabilidad de que  $p_1$  llegue al detector tras  $P_\alpha$  pero  $p_2$  no llegue al que está detrás de  $P_\beta$ , sería  $\frac{1}{2}\sin^2(\alpha - \beta)$ .

Si el formalismo es consistente no debería importar si la medición se hace de manera simultánea o si primero se realiza cualquiera de las mediciones  $P_\alpha$  o  $P_\beta$ . Así resulta ser. En efecto, si decidimos, por ejemplo, medir primero con  $P_\alpha$ , el estado  $\eta$  colapsará en uno de dos estados;

$$\eta_1 = \cos(\alpha - \beta)e_1(\alpha) \otimes e_1(\beta) + \sin(\alpha - \beta)e_1(\alpha) \otimes e_{-1}(\beta),\tag{9.3}$$

en caso de  $p_1$  atravesar el polarizador, o

$$\eta_2 = \cos(\alpha - \beta)e_{-1}(\alpha) \otimes e_{-1}(\beta) - \sin(\alpha - \beta)e_{-1}(\alpha) \otimes e_1(\beta),$$

en caso contrario. Cada evento tiene probabilidad  $\frac{1}{2}$ , pues  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_2$ . Si luego hacemos la medición en  $P_\beta$ , la probabilidad, por ejemplo, de obtener  $+1$  ( $p_2$  pasa el polarizador) será entonces  $\cos^2(\alpha - \beta)$ . La probabilidad conjunta de que  $p_1$  pase por  $P_\alpha$  y que luego  $p_2$  atraviese  $P_\beta$ , es entonces  $\frac{1}{2}\cos^2(\alpha - \beta)$ , como era de esperarse.

### 9.3.2. Desigualdad de Bell

La posibilidad de que el fenómeno de entrelazamiento pudiera deberse a *variables ocultas*, y que entonces el formalismo fuese incompleto, fue sugerida por algunos físicos, incluyendo a Einstein. De manera precisa, supongamos que el experimento anterior, descrito en la figura 8, pudiera explicarse de *manera local*. Esto es, supongamos que existieran dos funciones desconocidas  $A(\lambda, -)$  y  $B(\lambda, -)$  que solo toman



**John Stewart Bell** (28 de junio de 1928 - 1 de octubre de 1990) fue un físico norirlandés, y el creador del teorema de Bell, un teorema importante en la física cuántica sobre teorías variables ocultas.

valores  $\pm 1$ , y que cada fotón fuera de cierto tipo,  $p_\lambda$ , donde el parámetro  $\lambda \in [0, 2\pi]$  se distribuye de acuerdo con alguna función de probabilidad, quizás desconocida,  $\rho(\lambda)$ , con  $\rho(\lambda) \geq 0$  y  $\int_0^{2\pi} \rho(\lambda) d\lambda = 1$ . Así,  $A(\lambda, \alpha) = +1$ , si un fotón de tipo  $p_\lambda$  atraviesa el polarizador, y toma el valor  $-1$ , cuando no lo atraviesa. De manera análoga se interpreta el valor de  $B(\lambda, \beta) = \pm 1$ .

Notemos que la función  $\frac{1}{2}(A(\lambda, \alpha) + 1)$  toma valores 1 o 0, dependiendo de si  $p_1$  pasa o no el filtro  $P_\alpha$ . Así, por ejemplo, la probabilidad de que un fotón escogido al azar (de cualquier tipo  $p_\lambda$ ) registre +1 (atraviese  $P_\alpha$ ) vendría dada por  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(A(\lambda, \alpha) + 1)\rho(\lambda) d\lambda$ .

Notemos también que  $A(\lambda, \theta) = B(\lambda, \theta)$ , pues para toda pareja "entrelazada" de fotones, cuando se les mide su polarización en la misma dirección, *uno de ellos pasará su respectivo polarizador si y solo si el otro también lo hace*. Este hecho siempre se observa experimentalmente. El modelo cuántico también lo predice: si  $p_1$  atravesó  $P_\alpha$ , y por tanto la onda colapsó en

$$\eta_1 = \cos(\alpha - \beta)e_1(\alpha) \otimes e_1(\beta) + \sin(\alpha - \beta)e_1(\alpha) \otimes e_{-1}(\beta),$$

en el caso en el que  $\alpha = \beta = \theta$  se da que  $\sin(\alpha - \beta) = 0$  y  $\cos(\alpha - \beta) = 1$ . Luego  $\eta = e_1(\theta) \otimes e_1(\theta)$ , y en la segunda medición  $p_2$  estará obligado (probabilidad uno) a pasar su respectivo filtro. El razonamiento es similar cuando  $p_1$  no pasa su filtro, y la polarización del sistema colapsa en  $\eta_2$ .

La idea de Bell consistió en calcular el valor promedio de la *función de correlación*, definida como  $P(\alpha, \beta) = +1$ , si  $p_1$  y  $p_2$  pasan ambos sus respectivos filtros, o ambos no lo hacen. La función tomará el valor  $P(\alpha, \beta) = -1$  si uno de los fotones pasa su filtro mientras que el otro no lo hace. Notemos entonces que de existir variables ocultas, la función de correlación para un fotón de clase  $p_\lambda$  estaría dada por  $P(\alpha, \beta) = A(\lambda, \alpha)B(\lambda, \beta)$ . Al hacer un número muy grande experimentos con fotones distribuidos al azar según la distribución  $\lambda$ , el promedio observado deberá ser entonces:

$$P(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \rho(\lambda)A(\lambda, \alpha)B(\lambda, \beta)d\lambda.$$

La gran idea está en estimar la diferencia  $P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \gamma)$  para tres posibles direcciones  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \gamma) &= \int_0^{2\pi} \rho(\lambda)[A(\lambda, \alpha)B(\lambda, \beta) - A(\lambda, \alpha)B(\lambda, \gamma)]d\lambda \\ &= \int_0^{2\pi} \rho(\lambda)[A(\lambda, \alpha)A(\lambda, \beta) - A(\lambda, \alpha)A(\lambda, \gamma)]d\lambda \\ &= \int_0^{2\pi} \rho(\lambda)[A(\lambda, \alpha)A(\lambda, \beta) - A(\lambda, \alpha)A(\lambda, \gamma)A(\lambda, \beta)^2]d\lambda \quad (\text{pues } A(\lambda, \beta)^2 = 1) \\ &= \int_0^{2\pi} \rho(\lambda)A(\lambda, \alpha)A(\lambda, \beta)[1 - A(\lambda, \gamma)A(\lambda, \beta)]d\lambda. \end{aligned}$$

Pero,  $|A(\lambda, \alpha)A(\lambda, \beta)| \leq 1$ , y por tanto

$$\begin{aligned} |P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \gamma)| &= \left| \int_0^{2\pi} \rho(\lambda) A(\lambda, \alpha) A(\lambda, \beta) [1 - A(\lambda, \gamma) A(\lambda, \beta)] d\lambda \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} |\rho(\lambda)(1 - A(\lambda, \gamma) A(\lambda, \beta))| d\lambda \\ &\leq \int_0^{2\pi} \rho(\lambda) [1 + P(\beta, \gamma)] d\lambda \\ &\leq [1 + P(\beta, \gamma)] \int_0^{2\pi} \rho(\lambda) d\lambda \leq 1 + P(\beta, \gamma). \end{aligned}$$

En conclusión

$$|P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \gamma)| \leq 1 + P(\beta, \gamma).$$

De otro lado, en el modelo cuántico la función de correlación puede estimarse como sigue: si hacemos un número muy grande  $N$  de experimentos con dos filtros fijos  $P_\alpha$  y  $P_\beta$ , de (9.2) vemos que las probabilidades de obtener mediciones  $\{+1\}$  y  $\{+1\}$  o  $\{-1\}$  y  $\{-1\}$ , serían  $\frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta)$  en ambos casos. Luego la probabilidad de obtener una correlación (mediciones del mismo signo) sería  $\cos^2(\alpha - \beta)$ . De otro lado, y de manera similar, la probabilidad de obtener valores con signo contrario es igual a  $\sin^2(\alpha - \beta)$ . Al hacer un número muy grande,  $n$ , de experimentos, la diferencia  $P(\alpha, \beta) = \text{número total de correlaciones} - \text{número total de no correlaciones}$  sería igual entonces a  $n(\cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha - \beta))$ . En promedio se obtendría un valor igual a

$$\cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \cos 2(\alpha - \beta).$$

Luego,  $P(\alpha, \beta) = \cos 2(\alpha - \beta)$ , de acuerdo con la predicción del modelo cuántico.

Si tomamos  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi/8$ ,  $\gamma = \pi/8 + \pi/2$ , se obtendría:

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ P(\alpha, \gamma) &= \cos(\pi/4 + \pi) = -\sqrt{2}/2. \\ P(\beta, \gamma) &= \cos(\pi) = -1 \end{aligned}$$

lo cual claramente viola la desigualdad de Bell:

$$\sqrt{2} = \left| \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \right| \leq 1 + (-1).$$

Los experimentos de Alain Aspect [4] vindican el modelo cuántico, y por consiguiente descartan la posibilidad de que existan variables ocultas, en el sentido arriba discutido.

# APÉNDICE A

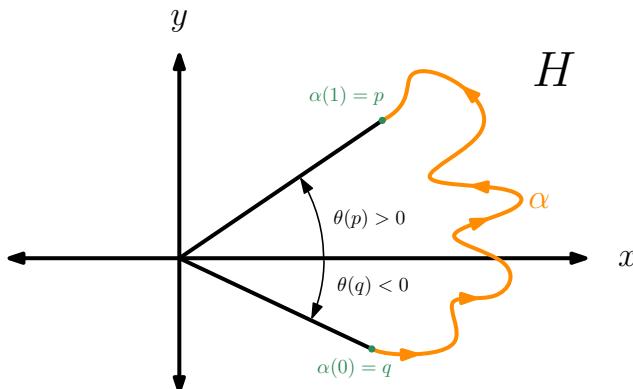
## Apéndice: demostración del T.F.A

### A.1. Número de giros de una curva

La demostración de Gauss del Teorema Fundamental del Álgebra involucra la noción de número de giros de una curva alrededor de un punto. Para simplificar la discusión supongamos que dicho punto es  $O$ , el origen de  $\mathbb{R}^2$ . Para cualquier punto  $p$  situado en el semiplano derecho

$$H = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},$$

la función  $\theta(p) = \arctan(y/x)$  (bien definida en  $H$ ) nos da el ángulo que subtende  $p$  con respecto al eje  $x$ , contado en dirección contraria al reloj (positiva).



Recordemos que la derivada de  $f(u) = \arctan(u)$  es  $u'/(1 + u^2)$ . Luego  $\partial\theta/\partial x = (-y)/(x^2 + y^2)$  y  $\partial\theta/\partial y = x/(x^2 + y^2)$ . De aquí que si  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  es cualquier curva que une dos puntos  $q$  y  $p$  de  $H$  ( $\alpha(0) = q$ ,  $\alpha(1) = p$ ) se sigue que la integral de línea

$$I(\alpha) = \int_{\alpha} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

a lo largo de  $\alpha$  se puede computar como

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{-y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} x'(t) + \frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} y'(t) \\ &= \int_0^1 \theta'(\alpha(t)) dt = \theta(\alpha(1)) - \theta(\alpha(0)) = \theta(p) - \theta(q). \end{aligned}$$

Esto nos dice que la integral de línea  $I$  proporciona una medida de la diferencia de ángulo entre dos puntos de  $H$ . Notemos que  $I$  está bien definida para cualquier curva que no pase por el origen de coordenadas. Sin embargo, para una curva que no esté contenida en  $H$ , la función  $\theta$  no estará definida, y el computo anterior no sería válido, no obstante, la integral tiene sentido. Por ejemplo, si  $c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  es el círculo unitario,  $0 \leq t \leq 1$ , la integral anterior produce

$$I(c) = \int_0^1 \frac{\sin^2(2\pi t)}{1} + \frac{\cos^2(2\pi t)}{1} dt = 2\pi.$$

De manera análoga, si  $\psi_n(t) = (\cos 2n\pi t, \sin 2n\pi t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  es la curva que rodea el origen  $n$  veces, vemos que  $I(\psi_n) = 2\pi n$ . De aquí resulta razonable dar la siguiente definición. Si el círculo unitario se recorre  $n$  veces en sentido negativo (sentido del reloj), digamos mediante la curva parametrizada como  $\phi_n(t) = (\cos 2n\pi(1-t), \sin 2n\pi(1-t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , se verifica fácilmente que el valor de  $I(\phi_n)$  será entonces  $-2\pi n$ .

**Definición A.1.1.** El *número de giros* de una curva  $\sigma$  que no pase por el origen ( $\sigma(t) \neq (0, 0)$ , para todo  $t$  en su dominio) se define como  $N(\sigma) = \frac{1}{2\pi} I(\sigma)$ .

Debemos demostrar que  $N(\sigma)$  es siempre un entero.

**Proposición A.1.2.** Sea  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ,  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  una curva cerrada ( $\sigma(0) = \sigma(1)$ ) y suave a tramos. Entonces  $\frac{1}{2\pi} I(\sigma)$  es un entero.

*Demostración.* Veamos  $\sigma$  como una curva en el plano complejo. Es decir, consideremos  $\sigma$  como la curva en  $\mathbb{C}$  dada por  $z(t) = x(t) + y(t)i$ . La integral compleja  $\omega(t) = \int_0^t \frac{z'(s)}{z(s)} ds$ , donde  $z'(s) = x'(s) + y'(s)i$ , se define de manera natural como:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \int_0^t \frac{z'(s)}{z(s)} ds = \int_0^t \frac{x'(s) + y'(s)i}{x(s) + y(s)i} ds = \int_0^t \frac{(x'(s) + y'(s)i)(x(s) - y(s)i)}{x^2(s) + y^2(s)} \\ &= \int_0^t \frac{x'(s)x(s) + y'(s)y(s)}{x^2(s) + y^2(s)} ds + i \int_0^t \frac{-x'(s)y(s) + x(s)y'(s)}{x^2(s) + y^2(s)}. \end{aligned}$$

Nos interesa determinar el valor de

$$\omega(1) = \int_0^1 \frac{x'(s)x(s) + y'(s)y(s)}{x^2(s) + y^2(s)} ds + iI(\sigma).$$

Sea  $g(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Es un ejercicio elemental ver que  $\partial g / \partial x = x / (x^2 + y^2)$  y que  $\partial g / \partial y = y / (x^2 + y^2)$ . De aquí que

$$\int_0^1 \frac{x'(s)x(s) + y'(s)y(s)}{x^2(s) + y^2(s)} ds = \int_0^1 g'(\sigma(s)) ds = g(\sigma(1)) - g(\sigma(0)) = 0,$$

pues  $\sigma(0) = \sigma(1)$ . De aquí que  $\omega(1) = iI(\sigma)$ .

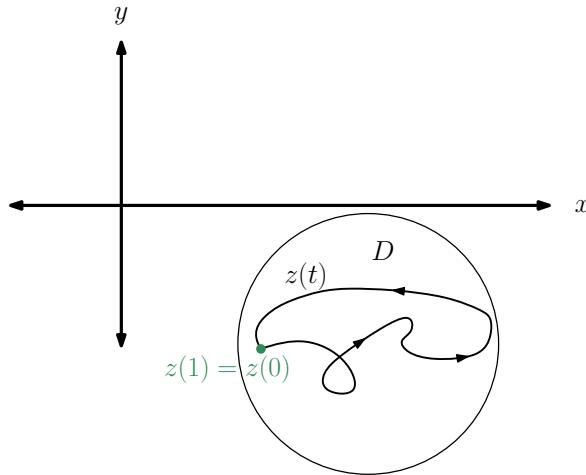
De otro lado, veamos que  $\frac{d}{dt}(e^{\omega(t)} / z(t)) = 0$  y por tanto que  $e^{\omega(t)} / z(t) = c_0$ , es una función constante. Computando la derivada con respecto a la variable  $t$  se obtiene

$$\frac{z(t)\omega'(t)e^{\omega(t)} - e^{\omega(t)}z'(t)}{z^2(t)} = \frac{z'(t)e^{\omega(t)} - e^{\omega(t)}z'(t)}{z^2(t)} = 0,$$

de donde se sigue la afirmación. Evaluando en  $t = 0$  se obtiene  $1 = e^{\omega(0)} = e^0 = c_0 z(0)$  y por tanto  $e^{\omega(t)} = z(t)/z(0)$ . De aquí que  $e^{\omega(1)} = z(1)/z(0) = 1$  y por tanto  $\omega(1) = 2\pi ni$ , para cierto entero  $n$ . Luego  $I(\sigma) = 2\pi n$ , de donde se sigue que  $\frac{1}{2\pi}I(\sigma) = n$ .  $\square$

**Ejercicio A.1.3.** Demuestre utilizando el hecho probado en la proposición anterior, esto es, que  $N(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{z'(s)}{z(s)} ds$ , para demostrar que si  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$  son representaciones complejas de dos curvas  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ , entonces  $N(z_1 z_2) = N(z_1) + N(z_2)$ .

**Ejercicio A.1.4.** Muestre que si  $z(t)$  es una curva enteramente contenida en un disco abierto  $D$  que no contiene el origen, entonces  $N(z) = 0$ .



**Ejercicio A.1.5.** No es difícil ver que  $N(\sigma)$  varía de manera continua con  $z(t)$ . De manera precisa, demuestre que si  $z_1, z_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  son curvas cerradas suaves que no pasan por el origen, entonces dado un  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|z_1(s) - z_2(s)| < \delta$  y  $|\dot{z}_1(s) - \dot{z}_2(s)| < \delta$ , para todo  $s \in [0, 1]$ , entonces

$$\left| \int_0^1 \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} ds - \int_0^1 \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} ds \right| < \varepsilon.$$

Sugerencia:

$$\left| \int_0^1 \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} ds - \int_0^1 \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} ds \right| = \left| \int_0^1 \left( \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} - \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} \right) ds \right| < \int_0^1 \left| \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} - \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} \right| ds.$$

De otro lado,

$$\left| \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} - \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} \right| = \left| \frac{z'_1(s)z_2(s) - z_1(s)z'_2(s)}{z_1(s)z_2(s)} \right| \leq \frac{|z'_1(s)z_2(s) - z_1(s)z'_2(s)|}{R^2},$$

donde  $R$  es el mínimo de las distancias de  $z_1$  y  $z_2$  al origen. Ahora, sumando y restando  $z'_1(s)z_1(t)$ , y usando la desigualdad triangular se obtiene:

$$|z'_1(s)z_2(s) - z_1(s)z'_2(s)| \leq |z'_1(s)| |z_2(s) - z_1(s)| + |z_1(s)| |z'_1(s) - z'_2(s)|.$$

Luego, si  $|z_1(s) - z_2(s)| < \gamma$  y  $|z'_1(s) - z'_2(s)| < \gamma$  para todo  $s \in [0, 1]$  se obtiene entonces que

$$\left| \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} - \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} \right| \leq \frac{2m\gamma}{R^2},$$

donde  $m = \max\{|z_1(t)|, |z'_1(s)| : s \in [0, 1]\}$ . Luego

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} ds - \int_0^1 \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} ds \right| &< \int_0^1 \left| \frac{z'_1(s)}{z_1(s)} - \frac{z'_2(s)}{z_2(s)} \right| ds \\ &< \frac{2m\gamma}{R^2}. \end{aligned}$$

Tomando  $\delta = R^2/2m$  se obtiene la conclusión buscada.

**Ejercicio A.1.6.** Sea  $z_r(s) = r \cos(2\pi s) + r \sin(2\pi s)i$ ,  $0 \leq s \leq 1$  el círculo unitario, visto como curva compleja. Sea  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  un polinomio con coeficientes complejos, de grado positivo. Muestre que si para cada  $r > 0$  definimos  $\sigma_r(s) = p(z_r(s))$ , y esta curva *no pasa por el origen*, entonces  $N(\sigma_r)$  permanece constante, y es igual a  $n$ , el grado de  $p(z)$ .

**Sugerencia:** utilice el ejercicio anterior para probar que  $N(\sigma_r)$  es constante.

De otro lado,  $p(z) = z^n h(z)$ , con  $h(z) = 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}$ . Sean  $\omega_1(s) = z_r(s)^n$  y  $\omega_2(s) = h(z_r(s))$ . Del ejercicio anterior se sigue que  $N(\omega_1 \omega_2) = N(\omega_1) + N(\omega_2)$ . Pero ya vimos que  $N(\omega_1) = n$ . Demuestre ahora que  $N(\omega_2) = 0$ , utilice el hecho siguiente: muestre que si  $M = \max\{|a_i : i = 0, \dots, n\}$ , entonces si  $r > 2nM$  se cumple que  $|h(z_r(s)) - 1| < 1/2$ :

$$|h(z_r(s)) - 1| = \left| \frac{a_{n-1}}{z_r(s)} + \dots + \frac{a_0}{z_r^n(s)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z_r(s)^{n-k}|} \leq \frac{nM}{2nM} = \frac{1}{2}.$$

De aquí que la curva  $h(z_r(s))$  esté contenida en el semiespacio  $H$  y por tanto  $I(\sigma) = 0$ . Esta última afirmación también se deduce, por supuesto, del ejercicio anterior.

**Teorema A.1.7** (Teorema Fundamental del Álgebra). *Sea  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  un polinomio con coeficientes complejos, de grado positivo. Entonces  $p(z)$  tiene al menos una raíz compleja.*

*Demostración.* Obviamente, basta demostrar el teorema para polinomios mónicos Supongamos por el absurdo que el teorema no es cierto. Entonces para cada  $r > 0$  la curva  $\sigma_r(s) = p(z_r(s))$  no pasa por el origen. Utilizando el ejercicio anterior concluimos que  $N(\sigma_r) = n$ , para todo  $r > 0$ . Pero para  $r$  suficientemente pequeño  $|\sigma_r(s) - a_0| < |a_0|/2$ , para todo  $0 \leq s \leq 1$ . Es decir, la curva está enteramente contenida en un disco que no contiene el origen. De aquí que  $N(\sigma_r(s)) = 0$ , por el ejercicio anterior, lo cual es absurdo.  $\square$



## APÉNDICE B

---

### Apéndice II: Campo eléctrico

---

#### B.1. Campos vectoriales, gradiente y divergencia

Antes de introducir el concepto físico de campo eléctrico, recordemos algunas nociones de cálculo vectorial. Denotaremos las coordenadas cartesianas estándar de un punto  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  por  $u(p) = (x_i(p))$ , por  $u(p) = (u_i)$  o escribiremos de manera explícita  $p = (x, y, z)$ , o  $p = (u_1, u_2, u_3)$ .

**Definición B.1.1.** 1. Una función de un abierto de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  se llama una función vectorial, o *campo vectorial*, que denotaremos por  $E = (f_1, f_2, f_3)$ .

2. La *divergencia* de  $E$  se define como la función escalar

$$\operatorname{div}(E) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \quad (\text{B.1})$$

3. El *laplaciano* de una función escalar  $\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se define como

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Se ve fácilmente que:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \Delta E. \quad (\text{B.2})$$

La teoría de campos es una construcción matemática creada para modelar las fuerzas que se observan en la naturaleza. Después de frotar esferas de ambar y barras de vidrio, y luego notar las fuerzas que se generaban, los griegos conjecturaron la existencia de lo que hoy llamamos partículas cargadas electricamente, las cuales dividieron en dos clases: *positivas* y *negativas*. Hoy sabemos que estas cargas corresponden a paquetes de protones (cargas positivas) o electrones (cargas negativas), y que la cantidad de carga correspondiente en cada caso viene en cantidades discretas  $q = ne$ , donde  $e$  es la cantidad de carga mínima, que corresponde a un protón, si la carga es positiva, respectivamente a un electrón, si es negativa.

Usaremos el sistema estándar S.I. de medidas, kg, m, s, N (kilogramo, metro, segundo, Newton =  $\text{kg} \times \text{m/s}^2$ ). En este sistema, la unidad de carga es el *Coulomb*, C, que puede definirse operacionalmente como sigue: dos partículas con carga igual a un Coulomb, situadas en el vacío, y a un metro de distancia, se repelen con una fuerza de  $K_e = 8,9874 \times 10^9$  N. (¡Un millón de toneladas de peso!). La carga elemental de un protón se ha estimado en  $e = 1,6021 \times 10^{-19}$  C. La carga del electrón sería entonces  $-e$ .



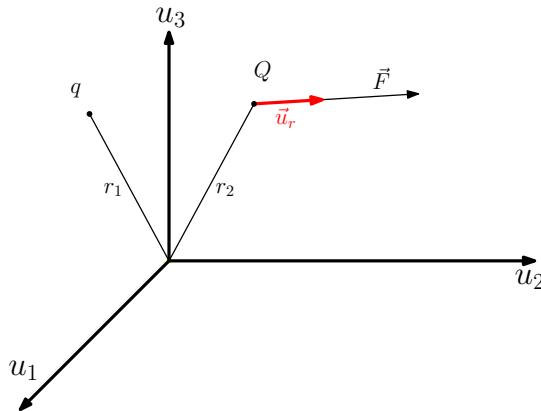
**Charles-Augustin de Coulomb** (14 June 1736 – 23 August 1806) was a French military engineer and physicist. He is best known for developing what is now known as Coulomb's law, the description of the electrostatic force of attraction and repulsion, but also did important work on friction. The SI unit of electric charge, the coulomb, was named in his honour in 1908.

## B.2. Ley de Coulomb

La atracción eléctrica está descrita por la llamada *Ley de Coulomb*, la cual establece lo siguiente: fijemos un sistema de coordenadas en una región  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Una carga  $q$  situada en  $r_1$  ejerce sobre otra carga  $Q$  situada en  $r_2$  una fuerza (en Newtons) en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u}_r = (r_2 - r_1)/|r_2 - r_1|$ , dada por:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{|r_2 - r_1|^2} \mathbf{u}_r, \quad (\text{Ley de Coulomb})$$

donde, por razones históricas, la constante  $K_e$  se escribe como  $1/4\pi\varepsilon_0$ , con  $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2$ , valor denominado *constante de permitividad eléctrica del vacío, o simplemente permitividad del vacío*.



Es importante observar que la ecuación Ley de Coulomb tiene en cuenta el signo de las cargas: si  $q$  o  $Q$  tienen signo diferente, entonces la fuerza  $F$  tendrá la dirección de  $-\mathbf{u}_r$  (será atractiva); y será repulsiva si ambas cargas tienen el mismo signo.

Un *campo eléctrico*  $E$  definido en una región  $U \subset \mathbb{R}^3$  se define como un campo vectorial en  $U$  con la siguiente propiedad: la fuerza que ejerce  $E$  sobre una partícula de carga  $q$  Coulombs situada en  $r = (r_i)$  viene dada por  $F = E(r, t_0)q$ . Las unidades de  $E$  serán entonces N/C, Newton/Coulomb.

### B.3. Campos eléctricos generados por cargas estáticas

introduzcamos primero el concepto de *densidad de carga*,

**Definición B.3.1.** La *densidad de carga*  $\rho(u, t)$  en una región cualquiera  $D \subset \mathbb{R}^3$  es una función escalar definida con la propiedad de que la cantidad total de carga contenida en  $D$  en el momento  $t$  vendría dada por  $C(t) = \int_D \rho(u, t) du$ . Claramente,  $\rho$  tiene unidades de  $\text{C/m}^3$ , Coulomb.metro cúbico.

Una distribución de cargas dada por una *función de densidad de carga*  $\rho(u, t)$  en una región  $U \subset \mathbb{R}^3$  determina en cada instante  $t$  un campo eléctrico  $E$  que puede determinarse a partir de la ley de Coulomb: para finitas cargas  $q_1, \dots, q_n$ , situadas en posiciones  $r_1, \dots, r_n$ , el campo en la posición  $r$  sería la fuerza total resultante que ejerce cada una de las partículas  $q_i$  sobre una partícula que se colocara en  $r$ , con carga unitaria un Coulomb. Esta fuerza estará dada por

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|r - r_i|^2} \mathbf{u}_i,$$

donde  $\mathbf{u}_i$  denota el vector unitario  $\mathbf{u}_i = (r - r_i)/|r - r_i|$ . Para una distribución de cargas dada en el instante  $t$  por la función  $\rho(u, t)$ , el campo eléctrico generado por estas cargas estaría dado entonces por

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_U \frac{\rho(u, t)(r - u)}{|r - u|^3} du.$$

Si  $r = (x_i)$ , vemos que:

$$E(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \left( \int_U \frac{\rho(u_1, u_2, u_3, t)(x_i - u_i)}{[(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + (x_3 - u_3)^2]^{3/2}} du_1 du_2 du_3 \right) e_i. \quad (\text{B.3})$$

Las siguientes imágenes ilustran la forma de algunos campos (líneas del campo) para distribuciones muy simples de cargas:

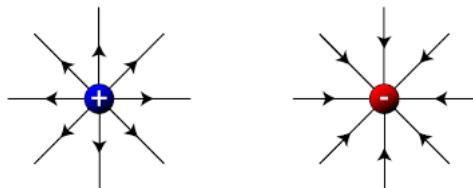


Figura B.1: Una partícula cargada

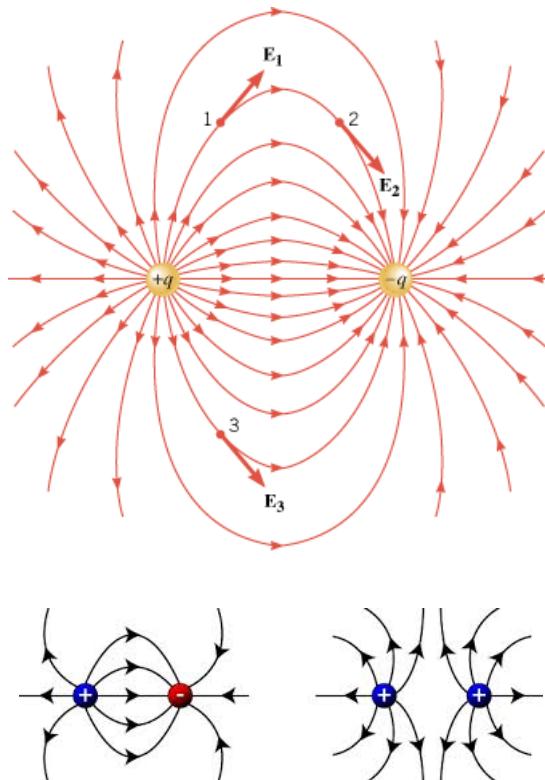


Figura B.2: Dos partículas cargadas

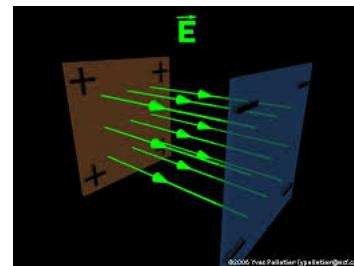
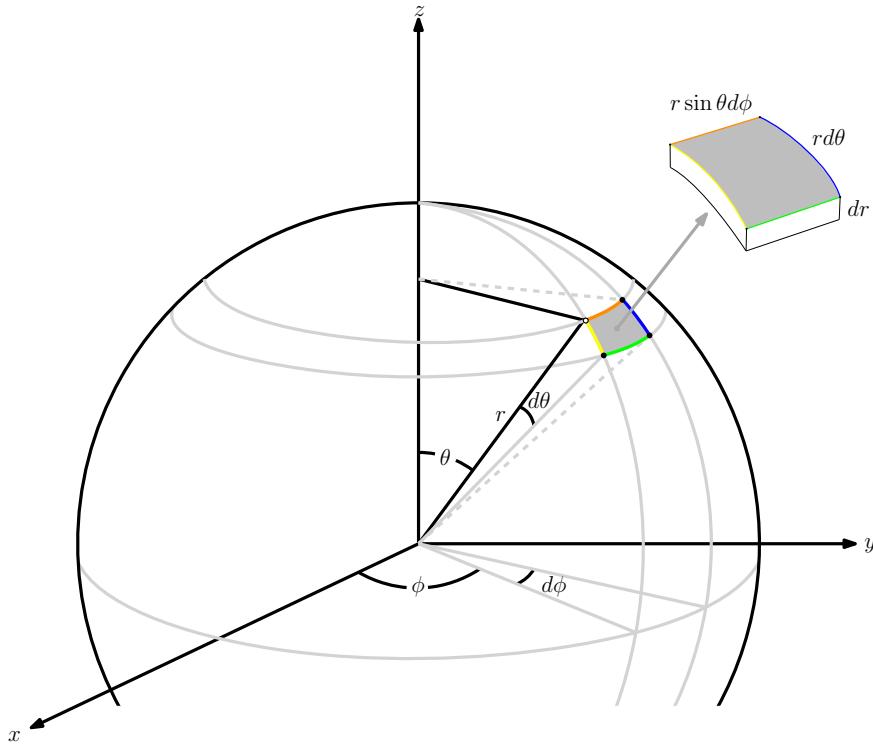


Figura B.3: Dos placas con carga uniforme

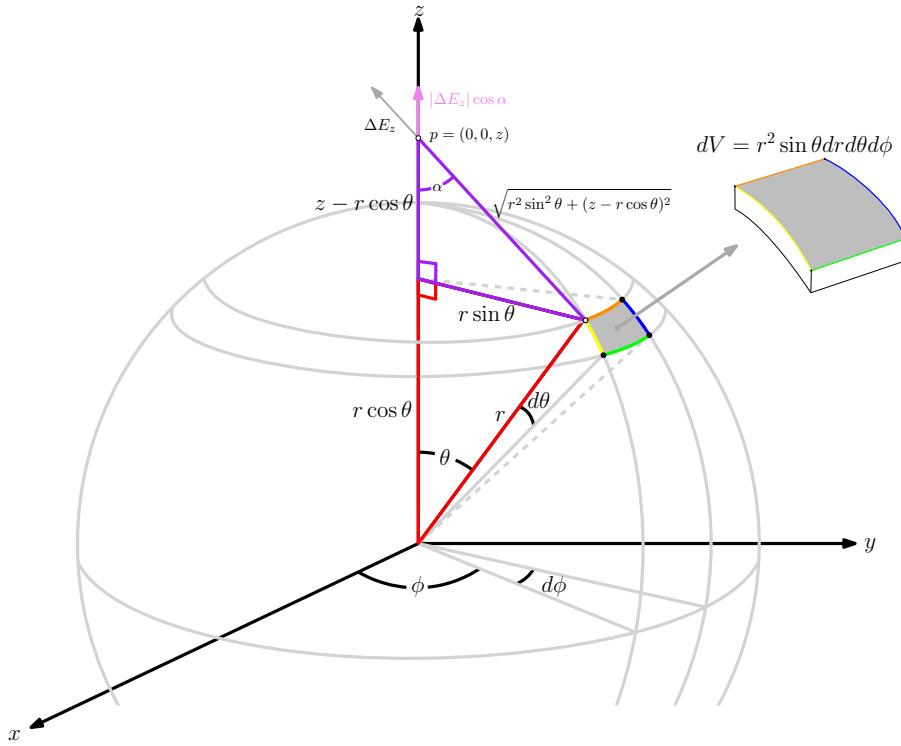
**Ejemplo B.3.2.** Sea  $B$  una bola centrada en el origen, de radio  $R$  y con una distribución de carga constante  $\rho = 3Q/4\pi R^3$  (la carga total es precisamente  $Q$ ). Si pensamos  $B$  embebida de forma concéntrica en una esfera más grande  $S$ , de radio  $z > R$ , entonces, de la simetría del problema se sigue que las componentes tangenciales y normales del campo eléctrico generado por  $B$  deberán ser constantes. Así que la

componente tangencial es cero en todo punto, pues al ser constante, si no fuese cero en algun punto, así mismo lo sería en todos y habría un campo vectorial no nulo y continuo sobre  $S$ , lo cual es una contradicción. Luego en cada  $p \in S$  el campo tendrá la dirección  $\mathbf{n}(p)$  del vector normal unitario a  $S$  en  $p$ .



Para determinar su magnitud, fijemos el punto  $p = (0, 0, z)$  y calculemos  $|\Delta E_z| = |\Delta E(0, 0, z)|$ , el aporte de cada pequeño elemento de carga. La región con coordenadas esféricas entre  $r$  y  $r + \phi \Delta r$ ,  $\theta$  y  $\theta + \Delta\theta$ ,  $\phi$  y  $\phi + \Delta\phi$  aporta  $|\Delta E_z| \cos \alpha$  (ver figura). Teniendo en cuenta que el diferencial de volumen viene dado por  $\Delta \text{Vol} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ , este aporte será igual a:

$$\begin{aligned} |\Delta E_z| \cos \alpha &= \frac{|\Delta E_z| (z - r \cos \theta)}{[r^2 \sin^2 \theta + (z - r \cos \theta)^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z - r \cos \theta) r^2 \sin \theta}{[r^2 \sin^2 \theta + (z - r \cos \theta)^2]^{3/2}} dr d\theta d\phi \end{aligned}$$



Así que la magnitud de  $E_z$  será

$$\begin{aligned} |E_z| &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(z - r \cos \theta)r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{[r^2 \sin^2 \theta + (z - r \cos \theta)^2]^{3/2}} d\theta dr d\phi \\ &= \frac{2\pi 3Q/4\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(z - r \cos \theta)r^2 \sin \theta}{[r^2 \sin^2 \theta + (z - r \cos \theta)^2]^{3/2}} d\theta dr. \end{aligned}$$

En Maple (o mediante el cambio de variable, haciendo  $u = \cos \theta$ ) puede verse que

$$\int \frac{(z - r \cos \theta)r^2 \sin \theta}{(r^2 \sin^2 \theta + (z - r \cos \theta)^2)^{3/2}} d\theta = \frac{r^2(r - z \cos \theta)}{z^2 \sqrt{r^2 - 2rz \cos \theta + z^2}}$$

Evaluando entre 0 y  $\pi$  se obtiene un valor igual a  $2r^2/z^2$ , si  $z > R$ . Luego

$$E(0,0,z) = \frac{Q}{8\pi R^3 \varepsilon_0} \frac{2R^3}{z^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{z^2} e_3.$$

De aquí deducimos que *el campo eléctrico generado por la bola B es igual al de una masa puntual situada en el origen, y de carga Q. Así que el flujo total a través de S sería:*

$$\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{z^2} \times 4\pi z^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Claramente, la simetría del problema permite deducir que para cualquier punto  $p$  con coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  el campo eléctrico deberá ser  $E(p) = (Q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\mathbf{u}_r$ , donde  $\mathbf{u}_r$  denota el vector unitario en la dirección  $p = (0, 0, z)$ .

## B.4. Potencial eléctrico

En general, la fórmula B.3 es difícil de aplicar. Afortunadamente, si la distribución de cargas es estática,  $\rho(u, t) = \rho(u)$  (no depende del tiempo), entonces el campo eléctrico generado por una distribución  $\rho(u)$  de cargas siempre admite una *función potencial*. Es decir, para una distribución estática de cargas, o en general, para un campo eleléctrico  $E(u)$  *estático* (que no dependa del tiempo), existe una función escalar  $\phi(u)$  con la propiedad de que  $E(u) = -\text{grad}(\phi)(u)$ .

En el caso más simple de una carga  $q$ , digamos situada en el origen, la función definida como

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}$$

es una función potencial: en efecto,

$$\begin{aligned} -\text{grad}(\phi)(x_1, x_2, x_3) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|r|^2}u_r = E(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

donde  $r = (x_1, x_2, x_3)$  y  $u_r = r/|r|$ .

Desde el punto de vista físico, si  $\alpha : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^3$  es una trayectoria  $L$  en  $U$ , el trabajo que realiza el campo  $E$  para llevar una partícula de carga  $q$  desde  $\alpha(a) = p_1$  hasta  $\alpha(b) = p_2$  está dado por

$$\begin{aligned} \int_L qE \cdot d\alpha &= q \int_a^b E(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= -q \int_a^b \text{grad}(\phi)(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= -q \int_a^b \phi'(\alpha(t)) dt = (-q)(\phi(b) - \phi(a)). \end{aligned} \tag{B.4}$$

En el caso general de una distribución cualquiera de cargas, la función potencial está dada por

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 U} \int \frac{\rho(u)}{|r-u|} du. \tag{B.5}$$

Es un ejercicio elemental verificar que

$$\text{grad}(\phi)(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 U} \int \frac{\rho(u)(r-u)}{|r-u|^3} du.$$

En el caso de una partícula de carga  $q$  centrada en el origen vemos que  $\phi(\infty) = 0$ . Luego el *potencial en  $p$* ,  $\phi(p)$ , *puede interpretarse como el trabajo necesario para llevar*

una partícula de carga 1 Coulomb, desde el punto  $p_1$  hasta infinito  $p_2 = \infty$ . La función  $\phi$  tendrá entonces unidades de trabajo por unidad de carga, que en el sistema SI serán joules/C, unidad llamada *voltio*.

## B.5. Teorema de Gauss

Supongamos ahora una distribución de cargas en una región  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  dada por una cierta función  $\rho(u, t)$ . Sea  $E(u, t)$  el campo eléctrico determinado por  $\rho$  (ecuación B.3). Nuestro propósito es mostrar que si  $D$  es un dominio con frontera suave, entonces el flujo de  $E$  a través de  $\partial D$  en el instante  $t$  es igual a  $\varepsilon_0$ , la permitividad del vacío, por la carga total contenida en  $D$ . De manera precisa:

**Teorema B.5.1** (Gauss). *Supongamos una distribución de carga dada por una función  $\rho(u, t)$ , y sea  $D$  un dominio con frontera suave. Sea  $E(r, t)$  el campo eléctrico asociado a  $\rho$ , como en la ecuación B.3. Entonces*

1. *El flujo de  $E$  a través de  $\partial D$  en el instante  $t$  es igual a la carga total contenida en  $D$*

$$\int_{\partial D} E(r, t) \cdot \mathbf{n} \, dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \text{ con } Q = \int_D \rho(u, t) du.$$

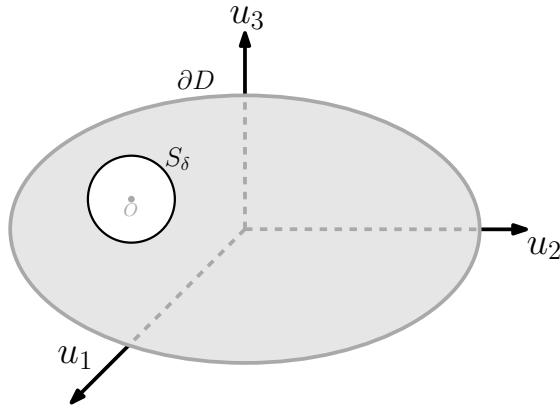
*De aquí se sigue que en cada instante  $t$  se satisface la ecuación:*

- 2.

$$\operatorname{div} E(u, t) = \frac{\rho(u, t)}{\varepsilon_0}. \quad (\text{Maxwell (1)})$$

*Demostración.* En el Ejemplo B.3.2, vimos que el flujo a través de una esfera de radio  $\delta$ ,  $B_\delta \subset D$ , sería  $Q/\varepsilon_0$ . Además computamos de manera explícita el campo eléctrico en cualquier punto  $p = (r, \theta, \phi)$ , con  $r > \delta$ , como  $E(p) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$ . En este caso, un cálculo directo demuestra que  $\operatorname{div}(E) = 0$ , para todos los puntos por fuera de  $B_\delta$ .

Ahora, si  $B_\delta \subset D$  es una bola de radio  $\delta$ , centro arbitrario  $o$ , y carga total  $\rho(o, t)\Delta V_\delta$ ,  $V_\delta$  = volumen( $B_\delta$ ), por el teorema de la divergencia, el flujo total del campo eléctrico a través del sólido cuyas fronteras son  $S_\delta$ , la frontera de  $B_\delta$ , y  $\partial D$  sería cero.



De aquí que

$$\int_{\partial D} E(r, t) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{S_\delta} E(r, t) \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Por tanto  $\int_{\partial D} E(r, t) \cdot \mathbf{n} \, dA = \rho(0, t) \Delta V_\delta / \varepsilon_0$ . Entonces, si la carga total dentro de  $D$  se divide en pequeñas esferitas de radio  $\delta$ , la contribución total de toda la caga será  $1/\varepsilon_0 \int \rho(u, t) du / \varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0$ .

Para demostrar la segunda afirmación, podemos razonar de la siguiente manera: el flujo total del campo eléctrico,  $\int_{\partial D} E(r, t) \cdot \mathbf{n} \, dA$ , es igual a  $\int_D \operatorname{div} E(u, t) du$  (teorema de la divergencia). Por lo demostrado antes, también es igual a  $\frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(u, t) du$ . Luego

$$\int_D \operatorname{div} E(u, t) du = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_D \rho(u, t) du,$$

para cualquier región con frontera suave  $D$ . Esto implica entonces que  $\operatorname{div} E(u, t) = \rho(u, t) / \varepsilon_0$ .  $\square$

**Corollary B.5.2** (Poisson). 1. Para un campo estático  $E$  en una región  $D$  con función de potencial  $\phi$  se tiene que

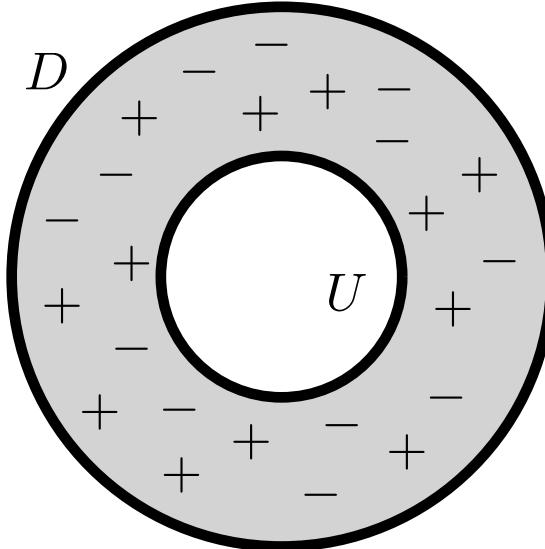
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho(u)}{\varepsilon_0}.$$

2. Si en una subregión con frontera suave  $U \subset D$  no hay cargas eléctricas ( $\rho(u) = 0$ , para todo  $u \in U$ , y por tanto el campo  $E$  está generado por cargas exteriores, fuera de  $U$ ) entonces el campo eléctrico satisface la denominada ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en } U.$$



El barón Siméon Denis Poisson FRS FRSE (21 de junio de 1781 - 25 de abril de 1840) fue un matemático, ingeniero y físico francés, que hizo varios avances científicos. Dentro de la élite de la Academia de Ciencias fue uno de los principales opositores de la teoría ondulatoria de la luz, que finalmente fue probada erróneamente por Augustin-Jean Fresnel.



*Demostración.* Como  $E(u) = -\operatorname{grad} \phi(u)$ , el teorema anterior junto con la ecuación (B.2) nos dicen que:

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi(u)) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\rho(u)}{\varepsilon_0}.$$

El numeral 2 se sigue inmediatamente de 1, pues  $\rho(u) = 0$  en  $U$ .  $\square$



**Pierre-Simon, marqués de Laplace**  
 (23 de marzo de 1749 - 5 de marzo de 1827) era un erudito francés cuyo trabajo era importante para el desarrollo de las matemáticas, la estadística, la física y la astronomía. Laplace formuló la ecuación de Laplace, y fue pionero en la transformada de Laplace que aparece en muchas ramas de la física matemática, un campo en el que tomó un papel principal en la formación. El operador diferencial laplaciano, ampliamente utilizado en matemáticas, también lleva su nombre.

---

## Bibliografía

---

- [1] W.W Adams and P. Loustaunau. *An Introduction to Grobner Bases*. American Mathematical Soc., 1994.
- [2] N. H. Asmar. *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems* /. Pearson Prentice Hall,, Upper Saddle River, N. j. :, 2nd ed. edition, c2005. Rev. ed of: Partial differential equations and boundary value problems. 1st ed. Upper Saddle River, NJ : Pearson Prentice Hall, c2000.
- [3] A. Aspect. *Bell's Theorem: The Naive View of an Experimentalist*, pages 119–153. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [4] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49:1804–1829, 1982.
- [5] D. Benson. *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2007.
- [6] D.A. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 3/e (*Undergraduate Texts in Mathematics*). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [7] W. Decker, G-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2015.
- [8] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [9] M. Gardner. *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*. Alianza Editorial, 1997.
- [10] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)*. Pearson Prentice Hall, 2nd edition, April 2004.
- [11] E. Kreyszig. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Number v. 1 in Matemáticas Aplicadas. Limusa Wiley, 2000.
- [12] S. Lang. *Complex Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

- [13] D. L. Powers. *Boundary Value Problems: And Partial Differential Equations*. Elsevier Academic Press, 2006.
- [14] J.W.S.B. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Number v. 1 in The Theory of Sound. Macmillan, 1877.
- [15] P. Richard. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1st edition, 1982.