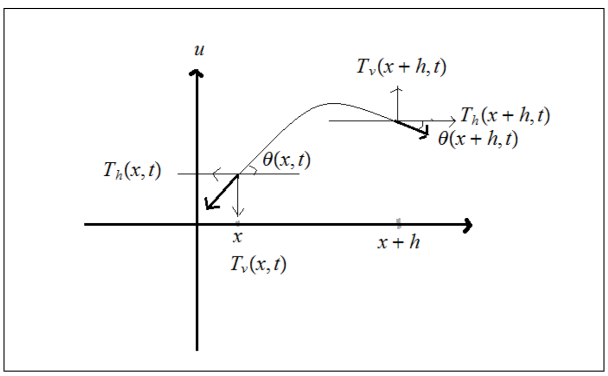
Preguntas de repaso para el primer parcial de Matemáticas Especiales

Segundo semestre de 2018

Tiempo Total = 1 hora
Número de preguntas 14
Todas las preguntas tienen el mismo valor
En cada pregunta escoja *solo una opción* entre cuatro

Las siguientes preguntas hacen referencia a una cuerda de longitud L y densidad lineal ρ, la cual se encuentra atada en sus extremos, y sujeta a una tensión fija T. En el instante $t = 0$, la cuerda se encuentra en reposo y toma la forma de la función $f(x)$. Denotemos por $u(x,t)$ la función que representa la forma que asume la cuerda en el instante t. Una porción de cuerda, entre x y $x+h$, se muestra a continuación, donde $T_h(x,t)$ y $T_v(x,t)$ denotan las tensiones horizontales y verticales en el punto x, y en el instante t.



1. Si cada punto de la cuerda solo se mueve verticalmente, entonces es cierto que:

a. En algún instante $t > 0$ la cuerda deberá retornar a la posición $f(x) = 0$.
b. La velocidad en dirección vertical de cada pequeña porción de cuerda permanece constante.
c. $T_h(x,t)\cos\theta(x,t) - T_h(x+h,t)\cos\theta(x+h,t) = 0$.
d. Ninguna de las anteriores.
Respuesta: (c)

2. Bajo las hipótesis enunciadas en el problema anterior es cierto que:

a. La función $u(x,t)$ es una suma finita de funciones $u_n(x,t) = b_n \sin(n\pi x/L)\cos(\lambda_n t)$, con $\lambda_n = cn\pi/L$, $b_n =$ constante, $n \geq 1$.
b. $u(x,t) = f(x)G(t)$, donde $f(x)$ representa la forma inicial de la cuerda y $G(t)$ es una cierta función, con $G(0) = 1$.
c. $T_h(x+h,t) - T_h(x,t) \simeq (\rho h)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, para todo x,t.
d. $T_v(x+h,t) - T_v(x,t) \simeq (\rho h)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$.
Respuesta: (d)

3. Una cuerda de longitud π, tensión T y densidad ρ se pone a vibrar, partiendo del reposo. Sea $c = \sqrt{T/\rho}$. Suponga que su forma inicial está dada por la función $f(x) = \sin(x)$.

a. La función $u(x,t) = \sin(x)\cos(ct)$ representa la vibración de la cuerda.

b. La función $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx)\cos(nct)$ repesenta la vibración de la cuerda.

c. $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(n\pi x)\cos(n\pi ct)$ repesenta la vibración de la cuerda.

d. $u(x,t) = 4\pi^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin(nx)\cos(nct)$ repesenta la vibración de la cuerda.

Respuesta: (a)

4. Sea $f(x) = x$, definida para $-L < x < L$ como $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 < x < L \\ -1, \text{ si } -L < x < 0 \end{cases}$. Si la función se extiende de manera periódica a toda la recta real, su serie de Fourier está dada por:

a. $\frac{16}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k}\sin(\frac{(2k+1)\pi x}{L})$.

b. $\frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\sin(\frac{(2k+1)\pi x}{L})$.

c. $\frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\sin(\frac{(2k+1)\pi x}{L})$.

d. $\frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)}\cos(\frac{(2k+1)\pi x}{L})$.

Respuesta: (c)

5. Una cuerda de densidad $\rho = 0.5 \times 10^{-3}$ kg/m y longitud un metro se ata a un pared, en uno de sus extremo. ¿Cuánto debe pesar un objeto que atado al extremo opuesto logre la tensión apropiada para que la cuerda al vibrar produzca una frecuencia de 440 Hertzs? Nota: aquí la frecuencia se refiere a la frecuencia de su modo fundamental. Tome $g = 9.8$ m/s^2 como la aceleración de la gravedad.

a. 12.5 kg
b. 387.2 kg
c. 39.51 kg
d. Ninguna de las anteriores

Solución (c): la frecuencia del modo fundamental está dada por $f = c/2L$. Luego $c = 2Lf = \sqrt{T/\rho}$. Elevando al cuadrado se obtiene $c^2 = T/\rho = 4L^2f^2$, y por tanto $T = 4L^2f^2\rho = 387.2$ N $= m \times 9.8$. De aquí que $m = 387.2/9.8 = 39.5$ Kg.

6. Sea $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{L}x + 2, \text{ si } 0 < x < L \\ -\frac{2}{L}x - 2, \text{ si } -L < x < 0 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$, la cual se extiende de manera periódica a todo $\mathbb{R}$. Sea $S(x)$ la función determinada por la serie de Fourier de la función $f(x)$: El valor de $S(x)$ en $x = 0$ es igual a:

a. No se puede determinar porque $f(x)$ no es continua en ese punto.
b. -2.
c. 0.
d. 1.
Solución (c)

7. Sea $f(x) = \sin(x)$, $0 \le x \le \pi$. Si f se extiende de manera **par** al intervalo $[-\pi, \pi]$, y luego de manera periódica a toda la recta real, su desarrollo en serie de Fourier sería: (utilice el hecho de que $\int\limits_0^\pi \sin(x)\sin(mx)dx = \frac{-\sin(m\pi)}{m^2-1}$, $\int\limits_0^\pi \sin(x)\cos(mx)dx = \frac{\cos(m\pi)+1}{1-m^2}$)

a. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2-1}\cos(2kx)$.
b. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2-1}\sin(2kx)$.
c. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)}\cos(2kx)$.
d. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2kx)$.
Solución (a)

8. Sean $P_1 = x$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ definidas en $[-1, 1]$. Bajo el producto interno $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$)

a. P_1 es ortogonal a P_2.
b. La norma de P_2 es igual a 2/5.
c. Como f y g no son vectores su producto interno no se puede calcular.
d. $\langle P_1, P_2\rangle = \frac{1}{2}x(3x^2-1)$.
Solución (a)

9. De la función $f(x) = \cos(\frac{2}{3}x + 1)$ podemos afirmar que:

a. Su período es 2π
b. Su período es π
c. f no es periódica
d. Su período es 3π
Solución (d)

10 Sea $s(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(n\pi x)$, la serie que representa la función que es la extensión periódica a todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$

a. La derivada de $f(x)$, (la cual existe en todos aquellos puntos x que no sean números enteros) tiene un desarrollo en serie de Fourier dado por $s'(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sin(\frac{n\pi x}{L})$

b. Como f no es derivable en todos sus puntos su derivada no posee un desarrollo en serie de Fourier

c. Como f no es continua en todos los puntos su derivada no posee un desarrollo en serie de Fourier

d. $s'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sin(\frac{n\pi x}{L})$ no se satisface, pues la serie $\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sin(\frac{n\pi x}{L})$ no converge.

Solución (d)

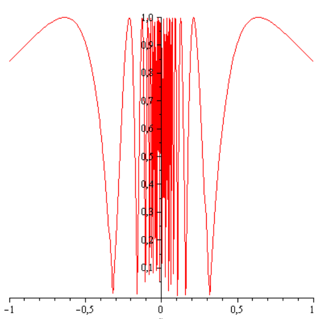
11. La serie $s(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x)$ del problema anterior puede utilizarse para computar el número π como la suma infinita:

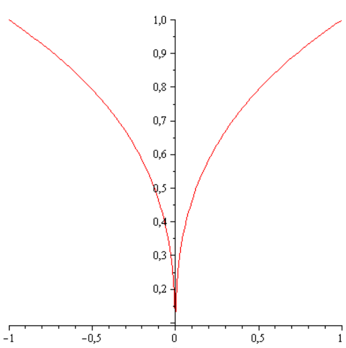
a. $\pi = \frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$
b. $\pi = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$
c. $\pi = 4(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots)$
d. $\pi = 4(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots)$

Solución (c):

12. ¿Cuál de las siguientes funciones, definidas inicialmente en $[-1, 1]$, y las cuales se extienden de manera periódica a toda la recta real, sabemos con seguridad admite una serie de Fourier convergente en cada punto de la recta real?

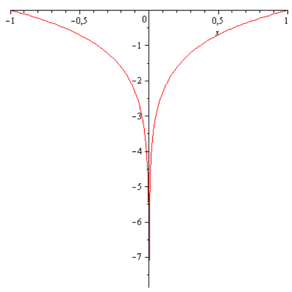
a. $f(x) = |\sin(1/x)|$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.





b. $f(x) = |x|^{1/3}$.

c. $f(x) = \log|x|$, si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.



d. Ninguna de las anteriores.

Solución: (d)

13. Los modos fundamentales $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, 3\ldots$ de una cuerda C al vibrar tienen la propiedad siguiente:

a. Sus frecuencias son todas iguales, e iguales a la frecuencia de vibración de C

b. La frecuencia de $u_{n+1}(x,t)$ es igual al doble de la frecuencia de $u_n(x,t)$.

c. La frecuencia de $u_n(x,t)$, $n > 1$, es igual al doble de la frecuencia de $u_1(x,t)$.

d. Lo que se denomina *frecuencia de C* corresponde a la frecuencia de $u_1(x,t)$

Solución (d)

14. Con respecto a las funciones del conjunto $B = \{\phi_n(x) = \cos(n\pi x/3)$, $\psi_n(x) = \sin(n\pi x/3)$, $n = 1, 2, 3\}$ podemos afirmar que:

a. $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son (l.d)

b. Los elementos de B son linealmente independientes (l.i)

c. $\phi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son (l.d)

d. $\phi_3(x)$ y $\psi_3(x)$ son (l.d)

Solución (b): Son (l.i), pues forman un conjunto ortogonal.