Taller 3 (Series de Fourier)

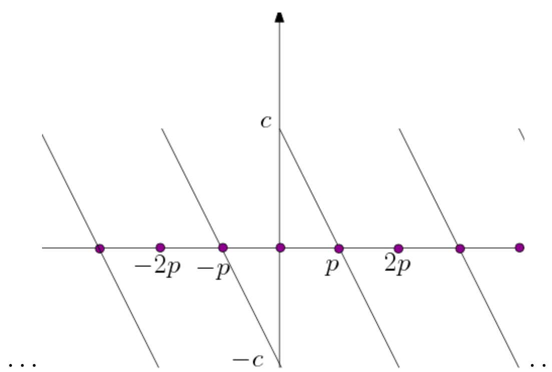
1) Encuentre fórmulas explícitas para las extensiones par e impar, al intervalo $[-L, L]$, de cada una de las siguientes funciones, y compute la correspondiente serie de Fourier. Utilice *Mathematica* para calcular las integrales que sean necesarias, y para graficar la correspondiente función, así como para graficar la suma de los primeros diez términos de la serie correspondiente.

a $f(x) = -x$, $0 \leq x \leq L$, $L = 1$

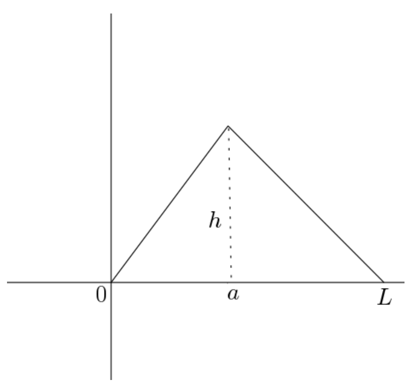
b $f(x) = \cos(2x)$, $0 \leq x \leq L$, $L = \pi$ (hay dos posibles extensiones impares)

c $f(x) = x^{1/2}$, $0 \leq x \leq L$, $L = 2$.

2) Encuentre la serie de Fourier de la función que se muestra a continuación:



3) Encuentre una serie de Fourier que solo involucre la función seno, y otra que solo involucre la función coseno, para expresar en serie de Fourier la función que se muestra a continuación:



4) Diga cual de las siguientes funciones es *suave a tramos* y grafíquela en *Mathematica*:

a La continuación periódica a todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \left|x^{1/3}\right|$, $-1 \le x \le 1$.

b La continuación periódica a todo $\mathbb{R}$ de $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -x, & -1 \le x \le 0 \end{cases}$,

c La continuación periódica a todo $\mathbb{R}$ de $f(x) = \begin{cases} \tan(1/x), & 0 < x \le 1 \\ -1, & -1 \le x \le 0 \end{cases}$

5)

a Compute el desarrollo en serie de Fourier de la extensión periódica de la función $f(x) = 2x$, $-1 \le x \le 1$ de dos formas diferentes: la primera, de manera directa, y la segunda derivando la serie que corresponde a la extensión periódica de $g(x) = x^2$, $-1 \le x \le 1$.

b Encuentre la derivada de la serie de Fourier de la función en el problema 2. ¿Converge esta serie?

6) ¿Cómo computaría un desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 2x + 1$, definida en el intervalo $2 \le x \le 3$?

Sugerencia: primero grafique su extensión periódica a $\mathbb{R}$, con período $p = 2$.

7)

a Vefique la *ortogonalidad* de las siguientes funciones (bajo el producto interno $f \cdot g = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx)$ $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

b Calcule la norma de cada función P_i $(|h(x)| = (h \cdot h)^{1/2} = \int\limits_{-1}^{1} h(x)^2 dx)$.