Taller 4 Matemáticas Especiales

1) Los siguientes problemas se refieren a una barra cilíndrica con coeficiente de difusión térmica $\delta = 1$, longitud L, y temperatura inicial dada por $f(x)$. En cada caso resuelva de manera explícita la ecuación del calor para cada condición inicial dada.

i $u(0,t) = 100$, $u(1,t) = 0$, $f(x) = 30\sin(\pi x)$, $L = 1$ m.

ii $u(0,t) = 100$, $u(1,t) = 50$, $f(x) = \begin{cases} 33x, \ 0 < x \leq \pi/2 \\ 33(\pi - x), \ \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$, $L = \pi$ m.

iii $L = \pi$, $f(x) = 100$, $\partial u/\partial x(0,t) = \partial u/\partial x(\pi,t) = 0$

iv $L = \pi$, $f(x) = \begin{cases} 100x, \text{ si } 0 < x \leq \pi/2 \\ 100(\pi - x), \text{ si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$, $\partial u/\partial x(0,t) = \partial u/\partial x(\pi,t) = 0$

Soluciones

i

$$u(x,t) = 100(1-x) + 30e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) - \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)}{n}$$

ii

$$u(x,t) = 100 - \frac{50x}{\pi} + \frac{132}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)^2 t}\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

iii

$$u(x,t) = 100$$

iv

$$u(x,t) = 25\pi - \frac{200}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-4(2k+1)^2 t}\cos(2(2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

2) Grafique en *Mathematica* cada una de las soluciones anteriores, y muestre su evolución en forma animada.

3) Suponga que en una barra ciclíndrica de longitud $L = 1$ m y coeficiente de difusión térmica $\delta = 1$, el calor que fluye por sus extremos es proporcional a su temperatura, y que su distribución de tempertaura inicial está dada por $f(x)$.

i Muestre que este problema puede modelarse como

$$\begin{aligned} \partial u/\partial t &= \partial^2 u/\partial x^2 \\ \partial u/\partial x(0,t) &= -u(0,t), \partial u/\partial x(1,t) = -u(1,t) \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

ii Use separación de variables para hallar una primera solución en la forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ donde

$$\begin{aligned} G'(t) - kG(t) &= 0 \\ F''(x) - kF(x) &= 0, F'(0) = -F(0), F'(1) = -F(1). \end{aligned}$$

ii Muestre que $k = \mu^2$, con $\mu = 1$ o $k = -\mu^2$, con $\mu = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.

iii Muestre que cada caso anterior produce una solución $G_0(t) = e^t, F_0(x) = e^{-x}$, $G_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}, F_n(x) = n\pi\cos(n\pi x) - (n\pi x)$

iv Muestre que lsd funciones $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ son ortogonales bajo el producto $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$

v Muestre finalmente que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0 e^t e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi)^2 t} \left(n\pi\cos(n\pi x) - (n\pi x)\right), \\ c_0 &= \frac{2e^2}{2e^2 - 1}\int\limits_0^1 f(x)e^{-x}dx \\ c_n &= \frac{2}{1 + n^2\pi^2}\int\limits_0^1 f(x)\left(n\pi\cos(n\pi x) - (n\pi x)\right)dx \end{aligned}$$