Teoría de Conjunto y Lógica Preposicional.

Lógica proposicional

La lógica proposicional o lógica de orden cero es un sistema formal cuyos elementos más simples representan proposiciones, y cuyas constantes lógicas, llamadas conectivas, representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad .

La lógica proposicional estudia las sentencias u oraciones del lenguaje corriente o formal, a las que se les puede asignar un valor de verdad, esto es verdadero (V) o falso (F). Observe las siguientes oraciones del lenguaje corriente:

a. El sol sale por el oriente.
b. Juan, ¿tienes el computador?
c. Rosa es la niña más linda de la clase.
d. El Nacional ganará el próximo domingo.
e. Antioquia es un departamento de Panamá.

Note que en estas frases u oraciones a todas no se les puede asignar un valor de verdad.

a. A la oración "El sol sale por el oriente", a la que se le asigna el valor de verdad "verdadero" (V).
b. En "Juan, ¿tienes el computador?", no le puede asignar un valor de verdad. En general, las oraciones interrogativas y a las exclamativas no se les puede asignar un valor de verdad.
c. A "Rosa es la niña más linda de la clase.", no se le puede asignar un valor de verdad. La belleza es subjetiva y todas las personas de la clase puede que no estén de acuerdo con esa afirmación.
d. Para la afirmación "El Nacional ganará el próximo domingo.", no se le puede asignar un valor de verdad. e. La oración "Antioquia es un Departamento de Panamá." es falsa, por lo tanto su valor de verdad es "falso" (F). La lógica proposicional estudia oraciones como la a. o la e. (anteriores) a las que sin ambigüedad se les puede asignar un valor de verdad. A tales oraciones se les llama proposiciones y se designan por letras minúsculas del alfabeto.

Ejemplos:

a: El sol sale por el oriente.
b: Antioquia no es un Departamento de Panamá. Son proposiciones

Ejercicio

Dadas las siguientes oraciones:
1. La semana tiene siete días.
2. Me voy de viaje.
3. Una hora tiene sesenta segundos.

Las proposiciones son

a. 1. y 3.

b. 1. y 2.

c. 2. y 3.

d. 1., 2. y 3.

Cálculo proposicional Al formar proposiciones compuestas a partir del usos de los conectores lógicos es necesario tener reglas para saber el valor de verdad de dichas proposiciones. Las siguientes reglas son las que permiten determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas. Si p y q son proposiciones, se tienen las siguientes tablas lógicas para los conectores lógicos.

La negación

Si la proposición p es verdadera (V) se tiene que ¬p es (F), se simboliza en la siguiente tabla.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla 2: Negación.

La conjunción

La conjunción relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles (F o V), por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3: Conjunción.

Note que la conjunción de dos proposiciones es verdadera cuando las dos son verdaderas.

La disyunción

La disyunción relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles (F o V), por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad.

Note que la disyunción de dos proposiciones es falsa cuando las dos son falsas, en los demás casos es verdadera

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

El condicional

El condicional relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles (F o V), por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad. En el condicional $p \rightarrow q$ a p se le llama en antecedente y a q el consecuente.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Note que en el condicional únicamente es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, en todos los demás casos es verdadero.

El sí y solo sí El sí y solo sí, relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles (FoV), por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad. El sí y solo sí, es verdadero cuando los dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 6: Sí y solo sí.

La disyunción excluyente

La conjunción relaciona dos proposiciones, cada una de ellas tiene dos valores de verdad posibles (FoV), por lo tanto, la tabla tiene 4 posibilidades de valores de verdad.

p	q	$p \nleftrightarrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 7: Disyunción excluyente.

Note que la disyunción excluyente (o bien . . . o bien) de dos proposiciones es verdadera cuando las dos proposiciones tienen valores de verdad contrarios.

Conjuntos

La teoría de conjuntos es la base de la matemática moderna. Las relaciones, teoremas, leyes o proposiciones se realizan sobre las características de los elementos de un conjunto o de varios conjuntos. Por ejemplo, la definición de función relaciona dos conjuntos, uno llamado dominio y el otro el rango de la función. Para definir las propiedades de los conjunto se requiere el estudio de la lógica de predicados en la que se utilizan los cuantificadores existencial ($\exists$) y universal ($\forall$)

Cuantificadores existencial y universal

En el lenguaje corriente se utilizan frases como “Existe un estudiante que perdió el curso de deportes” o “Todos los estudiantes ganaron el año”. Estos enunciados corresponden a la lógica de predicados y se caracterizan por hacer uso de los cuantificadores existencial y universal.

Estructura general de los enunciados de la lógica de predicados

En general, en los enunciados de la lógica de predicados, se tienen elementos que cumplen o no una propiedad determinada. En su simbolización, los individuos se denotan con letras minúsculas x, y, z, entre otras. Las propiedades con letras mayúsculas A, B, C,P, Q, entre otras.

Ejemplo:
El enunciado “Existe un estudiante que perdió el curso de deportes”, se puede simbolizar de la siguiente manera: 16 Universidad EAFIT Pedro Vicente Esteban Duarte Ex: x es un estudiante. Dx: x perdió el curso de deportes. Simbolización: $(\exists x)(Ex \rightarrow Dx)$
Ejemplo: El enunciado “Todos los estudiantes ganaron el año”, se puede simbolizar de la siguiente manera: Ey: y es un estudiante. Gy: y ganó el año. Simbolización: $(\forall y)(Ey \rightarrow Gy)$
Ejemplo: El enunciado “Todos los carros que utilizan combustibles fósiles contaminan”, se puede simbolizar de la siguiente manera: Cz: z es un carro. Fz: z utiliza combustibles fósiles. Kz: z contamina. Simbolización: $(\forall z)((Cz \wedge Fz) \rightarrow Kz)$

Negación de los cuantificadores existencial y universal

En el lenguaje corriente un predicado puede ser negado. Por ejemplo: “Todos los días hace calor” lo negamos diciendo “Existe un día en el que no hace calor”. Al simbolizar los dos expresiones se tiene:

Dx: x es un día

Cx: en x hace calor.

$(\forall x)(Dx \rightarrow Cx)$ y su negación $(\exists x)(Dx \wedge \neg Cx)$

La negación del cuantificador universal $(\forall x)(Px)$ es $\neg(\forall x)(Px)$ que lógicamente equivale a $(\exists x)(\neg Px)$. En palabras se expresa como: la negación de la universal afirmativa es la existencial negativa. La negación del cuantificador existencial $(\exists x)(Px)$ es $\neg(\exists x)(Px)$ que lógicamente equivale a $(\forall x)(\neg Px)$. En palabras se expresa como: la negación de la existencial afirmativa es la universal negativa.

Ejemplos:

1. Escriba de dos maneras equivalentes la negación de $(\forall x)(Px \vee Qx)$

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(Px \vee Qx) &\longleftrightarrow (\exists x)(\neg(Px \vee Qx)) \text{ Negación del universal} \\ &\longleftrightarrow (\exists x)(\neg Px \wedge \neg Qx) \text{ De Morgan} \end{aligned}$$

2. Escriba de dos maneras equivalentes la negación de $(\exists x)(Px \rightarrow Qx)$

$$\begin{aligned} \neg(\exists x)(Px \rightarrow Qx) &\longleftrightarrow (\forall x)(\neg(Px \rightarrow Qx)) \text{ Negación del existencial} \\ &\longleftrightarrow (\forall x)(\neg(\neg Px \vee Qx)) \text{ Implicación material} \\ &\longleftrightarrow (\forall x)(Px \wedge \neg Qx)) \text{ De Morgan y doble negación} \end{aligned}$$

Nota: de los ejemplos anteriores se puede deducir que no existe una sola manera de expresar un mismo predicado. Con los cuantificadores existencial y universal, siguen siendo válidas las leyes lógicas estudiadas anteriormente.

Definición de conjunto y operaciones entre conjuntos Un conjunto es una colección de elementos, que es considerada en sí misma como un objeto.
Los elementos pueden ser números, letras, animales, plantas, entre otros. Los elementos de un conjunto se representan con letras minúsculas del alfabeto (a, b, c,. . . , z) y los conjuntos con letras mayúsculas (A, B, C,. . . , Z).
Si x es un elemento y pertenece al conjunto A, simbólicamente se representa como x ∈ A y se lee “x pertenece a A”. El símbolo “∈” se lee como “pertenece”. Si el elemento x no pertenece al conjunto A se escribe x 6∈ A y se lee como “x no pertenece a A”. El símbolo “6∈” se lee “no pertenece”.

Representación de conjuntos Para representar un conjunto y sus elementos se tienen diferentes formas. Entre las más utilizadas, se encuentran:

Extensión: es cuando se nombran todos los elementos de un conjunto. Por ejemplo A = {a, e, i, o, u}, representa el conjunto de todas las vocales del alfabeto castellano. En este caso A es el nombre del conjunto y a, e, i, o, u son cada uno de sus elementos.

Comprensión: es cuando se da una fórmula verbal o matemática que determina cada uno de los elementos del conjunto. Por ejemplo: A = {x/x es una vocal del alfabeto castellano} El símbolo {x/Px} o {x : Px} se llama el discriminante y se utiliza para definir conjuntos por extensión.

Diagrama de Venn: en una figura cerrada se colocan al interior los elementos del conjunto y por fuera de ella el nombre.

Cardinalidad de un conjunto El cardinal de un conjunto se define como el número de elementos que tiene el conjunto. Si A es un conjunto, el cardinal de A se denota como #(A). Por ejemplo, si N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} el cardinal de N es #(N) = 10, que corresponde al número de elementos que contiene el conjunto N. El cardinal de un conjunto puede ser finito o infinito.

Es finito, cuando se le puede asignar un número natural finito, 5, 10, 1000, 10000000, entre otros. Es infinito, cuando no se le puede asignar un número natural finito.

Para representar por extensión un conjunto infinito, se acostumbra escribir los primeros elementos del conjunto y utilizar tres puntos (...), para representar que los elementos se podrían continuar escribiendo de esa forma.

Ejemplos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \}$ representa al conjunto de todos los números naturales.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2 -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \}$ representa al conjunto de todos los números enteros.

Cuando el conjunto tiene cardinalidad infinita y existe una fórmula para describirlo, se puede hacer por comprensión.

Ejemplos:

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$ representa al conjunto de todos los números racionales.

$\mathbb{Q}^* = \{x : x \text{ no se puede escribir como una fracción de números enteros}\}$ representa al conjunto de todos los números irracionales.

$P = \{p = 2n/n \in \mathbb{N}\}$ representa al conjunto de todos los números naturales pares.

$I = \{i = 2n + 1/n \in \mathbb{N}\}$ representa al conjunto de todos los números naturales impares.

Conjunto universal

Un conjunto universal o de referencia, se escoge de acuerdo al tipo de conjuntos que se estén trabajando.

Ejemplos:

En el Cálculo de variable real, el conjunto universal son los números reales R. Cuando se trabaja con diagramas de Venn, el conjunto universal o de referencia se suele representar con un recuadro y fuera de el se le escribe el nombre de ese conjunto, como se puede ver en la siguiente gráfica: Hay que tener en cuenta que el conjunto universal, o de referencia hay que tomarlo del contexto del que se estén tomando los conjuntos a analizar.

Conjunto vacío

El conjunto vacío es el conjunto al que no pertenece ningún elemento. Se denota por $\varnothing$ (conjunto vacío) o por { } (conjunto vacío), en algunos textos se encuentra la relación $\varnothing$ = { }.

$$\varnothing = \{x/x \neq x\} = \{\ \}$$

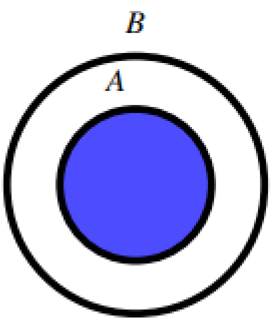
$$(\forall x)(x \in \varnothing \leftrightarrow x \neq x)$$

Relación de contención entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos la relación de contención de A en B se define como:

$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

En palabras se lee: A está incluido en B sí y solamente sí todos los elementos de A también son elementos de B. El símbolo "⊂" se lee como "contenido". En un diagrama de Venn se representa de la siguiente manera:

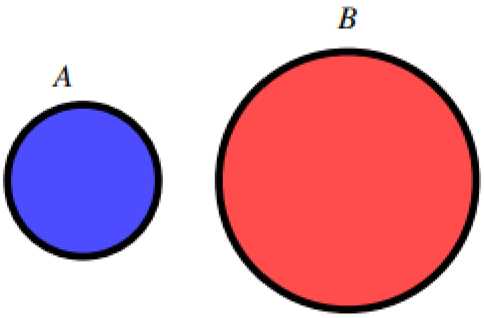


Si el conjunto A no está incluido en el conjunto B, se escribe:

$$A \not\subset B \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$

Que en palabras se puede leer como:

El conjunto A no está incluido en el B sí y solo sí existe x que esta en A y x no está en B. Gráficamente se puede representar como:



Propiedades de la inclusión entre conjuntos.
Si A, B, C son dos conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el conjunto vacío, se tiene:

a. $\varnothing \subset A$, el vacío está incluido en cualquier conjunto.

b. $A \subset U$, todo conjunto está incluido en el universal.

c. Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$, si dos conjuntos se contienen entre sí, los dos conjuntos son iguales.

d. $A \subset A$, cualquier conjunto está incluido en sí mismo.

e. $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \rightarrow (A \subset C)$, la inclusión es transitiva.

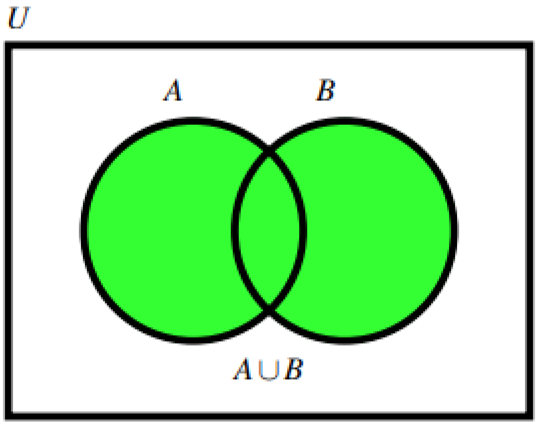
Ejemplo:
Determinar si el conjunto A = {1, 2, a, b, 3} está contenido en el conjunto B = {1, 2, c, b, 3, d,4}. Solución: Note que a $\in$ A, pero a $\notin$ B, por lo tanto A no está incluido en B. Se puede escribir como A $\not\subset$ B.

Unión entre conjuntos
Si A y B son dos conjuntos cualquiera, la unión entre ellos se define como:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

$$(\forall x)(x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

En palabras se puede expresar como: la unión entre el conjunto A y el B está formado por todos los elementos de A y todos los de B. Si los dos conjuntos tienen elementos en común, en la unión no se repiten. Gráficamente se representa como:



Propiedades de la unión entre conjuntos.

Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y ∅ el vacío, se tiene que:
a. $A \cup A = A$, la unión de un conjunto consigo mismo es el mismo conjunto.
b. $A \cup \varnothing = A$, al unir cualquier conjunto con el vacío se obtiene el mismo conjunto
c. $A \cup U = U$, al unirle al universal cualquier conjunto se obtiene el universal.
d. $A \cup B = B \cup A$, la unión entre conjuntos es conmutativa.
e. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, la unión entre conjuntos es asociativa.
f. $A \subset B \rightarrow A \cup B = B$. La unión de un conjunto B con un subconjunto suyo A lo deja inalterado.
g. $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$, tanto A como B están incluidos en A unión B.
h. $A \cap B = \varnothing$, si la intersección de dos conjuntos es el vacío, se dice que los dos conjuntos son disjuntos o disyuntos.

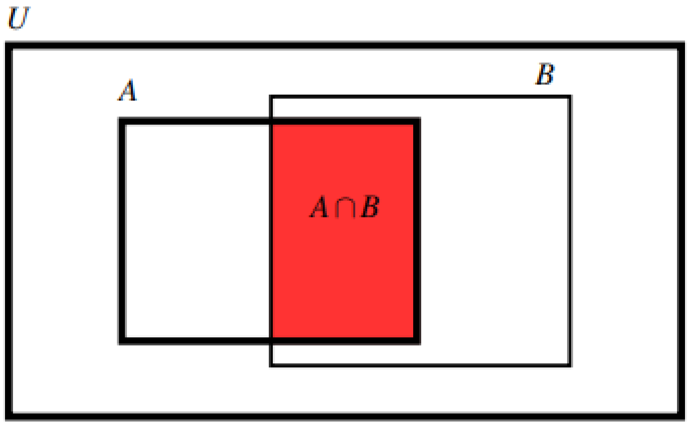
Intersección entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos cualquiera, la intersección entre ellos se define como:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

$$(\forall x)(x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$$

En palabras se puede expresar como: la intercesión entre el conjunto A y el B está formada por todos los elementos de A y todos los de B que son comunes a ambos conjuntos.
Gráficamente se representa como:



Propiedades de la intersección entre conjuntos.

Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el vacío, se tiene que:
a. $A \cap A = A$, la intercesión de un conjunto consigo mismo es el mismo conjunto.
b. $A \cap \varnothing = \varnothing$, al interceptar cualquier conjunto con el vacío se obtiene el vacío.
c. $A \cap U = A$, al interceptar al universal con cualquier conjunto se obtiene el conjunto.
d. $A \cap B = B \cap A$, la intersección entre conjuntos es conmutativa.
e. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, la intersección entre conjuntos es asociativa.
f. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, la intersección de A y B está incluido en A y está incluido en B.
g. $A \subset B \rightarrow (A \cup B) \subset A$, la intersección de un conjunto A con un conjunto B que lo contenga, deja a A inalterado.
h. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, la intersección de conjuntos distribuye con la unión de conjuntos.
i. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, la unión de conjuntos distribuye con la intersección de conjuntos.

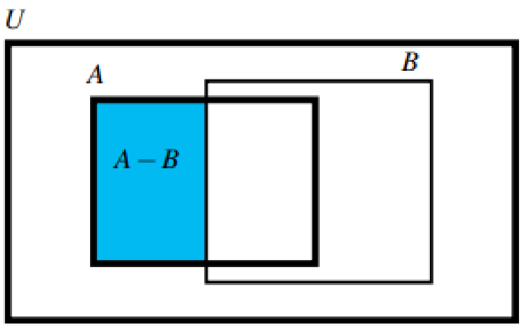
Diferencia entre conjuntos

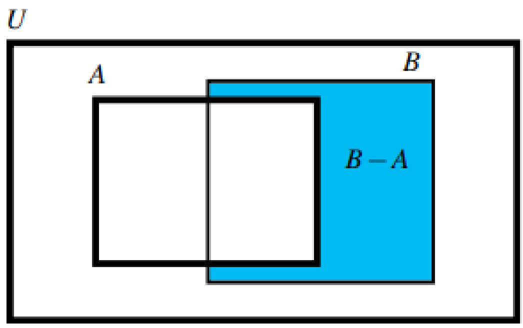
Si A y B son dos conjuntos cualquiera, la diferencia A−B se define como:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$(\forall x)(x \in (A - B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$$

En palabras se puede expresar como: la diferencia del conjunto A con el conjunto B está formada por todos los elementos de A que no están en el conjunto B. Gráficamente se representa como:





Nota: La diferencia entre conjuntos no es conmutativa, como se puede observar en las gráficas anteriores.

Propiedades de la diferencia entre conjuntos.
Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y ∅ el vacío, se tiene que:

a. A−A = ∅, la diferencia de un conjunto con el mismo es el vacío.
b. A−∅ = A, la diferencia entre un conjunto y el vacío es el conjunto.
c. ∅−A = ∅, la diferencia entre el vacío y un conjunto cualquiera en el vacío.
d. A−U = ∅, el conjunto A menos el conjunto universal es el vacío.
e. U −A = A ′ , el conjunto U menos A es igual al complemento de A.
f. A−B 6= B−A, la diferencia entre conjuntos no es conmutativa.
g. A−B = ∅ ↔ A ⊂ B, si la diferencia entre conjuntos es el vacío, entonces uno de ellos está incluido en el otro.
h. A−B = A ↔ A∩B = ∅.
i. A−B = A∩B ′ , la diferencia A−B es igual a A interceptado con el complemento de B

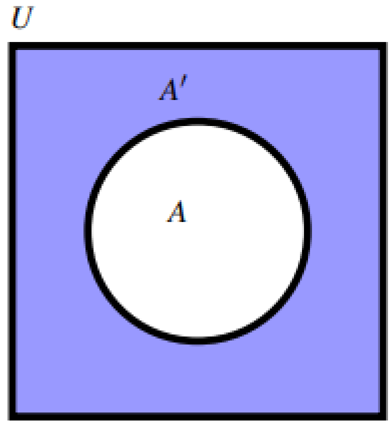
Complemento de un conjunto

Si A es un conjunto cualquiera, U es el conjunto universal y A ⊂ U, el complemento de A se define como:

$$A' = A^c = U - A = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$$

$$(\forall x)(x \in A' \leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A))$$

En palabras: el complemento del conjunto A son todos los elementos que no pertenecen a A. Gráficamente se representa como:



Propiedades del complemento de un conjunto. Si A es un conjunto cualquiera, U es el conjunto universal y ∅ el conjunto vacío, se tiene:

a. $A' \subset U$

b. $\varnothing' = U$

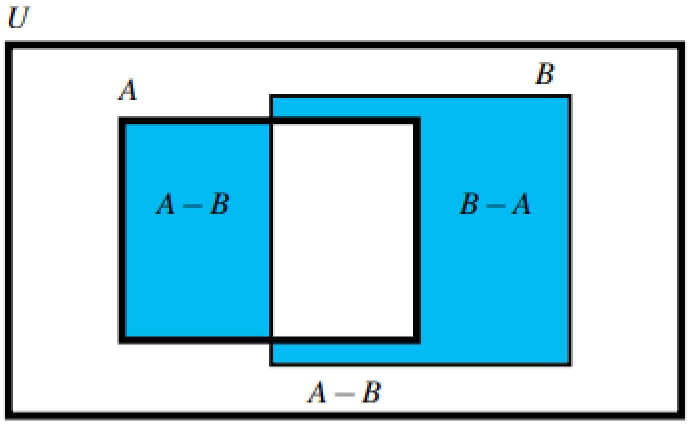
c. $U' = \varnothing$

Diferencia simétrica entre conjuntos La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B está dada por:

$$A \triangle B = \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

$$(\forall x)(x \in (A \triangle B) \leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A))$$

En palabras se puede expresar como: la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B está dada por los elementos que están en A−B o en B−A. Gráficamente se puede representar como se puede observar en la siguiente figura:



Propiedades de la diferencia simétrica entre conjuntos. Si A, B y C son conjuntos cualquiera, U es el conjunto universal y $\varnothing$ el vacío, se tiene que

a. $A \triangle A = \varnothing$, la diferencia simétrica de un conjunto con el mismo es el vacío.
b. $A \triangle \varnothing = A$, la diferencia simétrica entre un conjunto y el vacío es el conjunto.
c. $A \triangle U = A'$, el conjunto A diferencia simétrica con el conjunto universal es el complemento de A.
d. $U \triangle A = A'$, el conjunto U diferencia simétrica con A es igual al complemento de A.
e. $A \triangle B = B \triangle A$, la diferencia simétrica entre dos conjuntos es conmutativa.
f. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
g. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$
h. $A \subset B \rightarrow A \triangle B = B - A$
i. $A \triangle B = B \triangle A$, la diferencia simétrica es conmutativa.
j. $A \cap (B \triangle C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$, la intersección de conjuntos distribuye con la diferencia simétrica.

Conjunto potencia

Si A es un conjunto el conjunto potencia de A está formado por todos los subconjunto de A. El conjunto potencia de A se denota por P(A). Ejemplo:

El conjunto potencia de A = {1,2} está dado por el conjunto P(A) = {$\varnothing$, {1}, {2},{1, 2}} En general, al conjunto potencia de A pertenecen el conjunto $\varnothing$ y el mismo A. Note que los elementos de P(A) son conjuntos. El cardinal del conjunto potencia de A, P(A) está dado por 2n , en donde n es el cardinal del conjunto A.

Producto cartesiano entre conjuntos

Si A y B son dos conjuntos el producto cartesiano de A por B se define como:

$$A \times B = \{(x,y)/x \in A \wedge y \in B\}$$

$$(\forall x)(\forall y)((x,y) \in A \times B \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B)$$

El producto cartesiano de dos conjuntos se representa por todas las parejas ordenadas (x, y), en donde x pertenece al primer conjunto y y al segundo conjunto.
Ejemplo: Gráficamente se puede representar como: Si A = {1, 2, 3, 4} B = {a, b}, el producto cartesiano A×B se puede representar como gráficamente como:

b	$(1,b)$	$(2,b)$	$(3,b)$	$(4,b)$
a	$(1,a)$	$(2,a)$	$(3,a)$	$(4,a)$
$A \times B$	1	2	3	4

o por:

b	•	•	•	•
a	•	•	•	•
$A \times B$	1	2	3	4

y como conjunto por:

$$A \times B = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(1,b),(2,b),(3,b),(4,b)\}$$

Si (x, y) ∈ A×B se lee x está relacionado con y y se escribe xRy y se lee: x está relacionado con y, a R se le llama una relación y cualquier relación es un subconjunto del producto cartesiano. Propiedades del producto cartesiano. Si A, B son conjuntos y ∅ es el vacío, las siguientes son algunas de las propiedades del producto cartesiano:

a. A×∅ = ∅×A = ∅
b. A×B 6= B×A